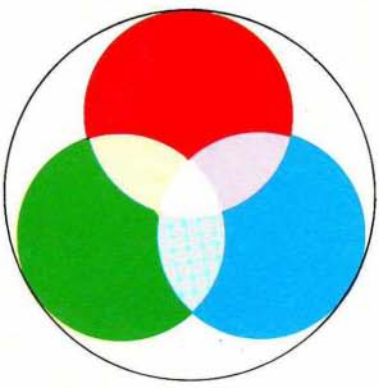
presek

1

IX
1981–82

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME



IZDAJA DMFA SRS

UVODNIK

S to številko pričenjamo izdajati že deveti letnik Preseka. V lanskem letu smo pričakovali upadanje števila naročnikov, kar pa se na naše veliko veselje ni zgodilo. Skoraj 20.000 naročnikov vstraja in upamo, da bo tako tudi ostalo. Ob začetku novega šolskega leta ponovno prosimo učitelje matematika in fizike na srednjih in osnovnih šolah, da to številko Preseka, katero smo poslali na vsako vsako šolo vsaj v tolikem številu, kot zadnjo v lanskem letu, posredujejo vsem učencem, jo ponovno predstavijo in priporočijo. Prav tako jih lepo prosimo, da zbrana naročila pošljejo na naš naslov čimprej, a najkasneje do 19. septembra 1981. V tem času oddajamo v tiskarno rokopis že za drugo številko Preseka in moramo vedeti, kakšno naklado lahko naročimo. Prosili pa vas bomo tudi, da nam ob koncu koledarskega leta nakažete tudi ustrezno naročnino (za skupinska naročila je 70.- din, za posameznike pa 87,50 din).

V lanskem koledarskem letu smo zaradi primerne subvencije in dobrega gospodarjenja uspeli izdati šest številk. Zadnji dve vsebujeta enoten tekst, delo enega samega avtorja. Kako ste sprejeli to novost? V letošnjem letu pa vam ne moremo obljubiti enake bere. Velik porast cen in ekonomske težave ter, kar nas je še najbolj prizadelo, zmanjšanje subvencije na polovico lanskoletne vsote, nam ne dopuščajo optimizma. Kljub temu bomo skušali tudi v prihodnjem šolskem letu izdati vsaj štiri številke z normalnim obsegom.

Andrej Likar, Ciril Velkovrh

ČLANI AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV

šola ....

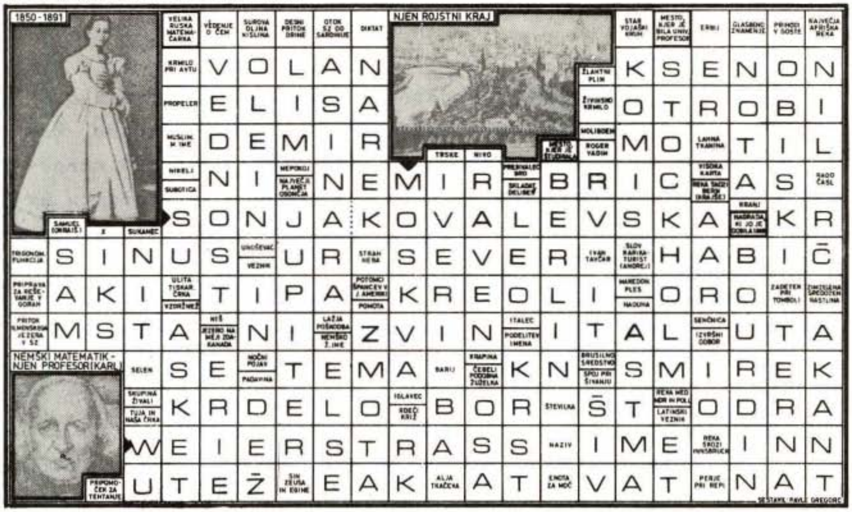
točen naslov ....

NAROČAMO:

.... izvodov lista za mlade matematike, fizike in astronome PRESEK - IX letnik, za šolsko leto 1981/82 po ceni 70.- din (posamezna naročnina 87,50 din). Naročnino bomo nakazali skupaj ali v .... obrokih najkasneje do .... 198..

Podpis: ....

SLIKOVNA KRIŽANKA



PRESEK - List za mlade matematike, fizike in astronome.
9. letnik, šolsko leto 1981/82, 1. številka, str. 1-64.

Rokopis je natipkala Dragica Sokač, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike sta narisala Slavko Lesnjak in Rafko Šauli.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 277 tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 87,50 din, za skupinska pa 70.- din; za inozemstvo 7 $, 5600 Lit, 100.-Asch. Posamezna številka stane 21.- din.

List sofinancirata ISS in RSS.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

List izhaja štirikrat letno. Naklada 23.000 izvodov.

MATEMATIKA

TEORIJA GRAFOV IN KEMIJA

1. del: Grafi

Kemiki navadno niso ljubitelji matematike, pa tudi matematiki se ne zanimajo posebno za kemijo. Kljub temu pa se matematika precej uporablja v kemiji. Eno od področij, ki imajo poseben pomen v kemiji, je del matematike, ki se imenuje teorija grafov. V tem članku si bomo najprej ogledali osnovne pojme teorije grafov, šele potem bomo spregovorili o njeni povezavi s kemijo.

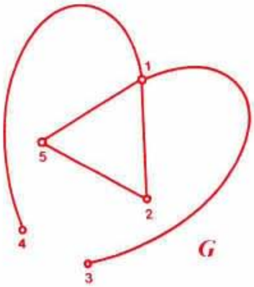
Teorija grafov proučuje objekte, ki se imenujejo grafi. Nikar se jih ne ustrašite! Grafi so eni od najbolj enostavno predstavljivih objektov, ki jih preučuje moderna matematika. Razumeti moramo le dva pojma: *točka* in *povezava*. Grafi so namreč sestavljeni iz točk in povezav. Točke grafa si predočimo s krožci ali večjimi pikami. Nekatere točke so povezane s črto, ki ji pravimo povezava. Nekatere točke pa med seboj niso povezane. In to je vse! Pa si narišimo graf: (slika 1)

Narisani graf označimo z G. Vidimo, da ima pet točk (ki smo jih oštevilčili z 1, 2, 3, 4 in 5) in šest povezav.

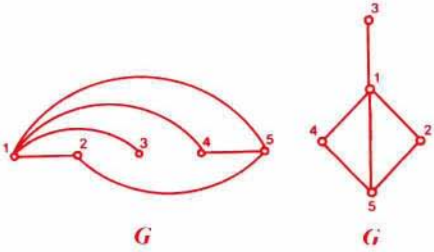
Dve točki v grafu sta *sosedni*, če sta povezani s povezavo. V grafu G so sosedne npr. naslednje točke: 1 in 2, 4 in 5 itd. Če pa dve točki nista povezani z nobeno povezavo, pravimo, da nista sosedni. Tako v grafu G npr. točki 2 in 4 nista sosedni.

Graf je natanko določen, če vemo, koliko točk ima in katere točke so sosedne ter katere niso sosedne.

Oglejmo si sedaj naslednja dva grafa, G' in G''. (Slika 2)



Slika 1



Slika 2

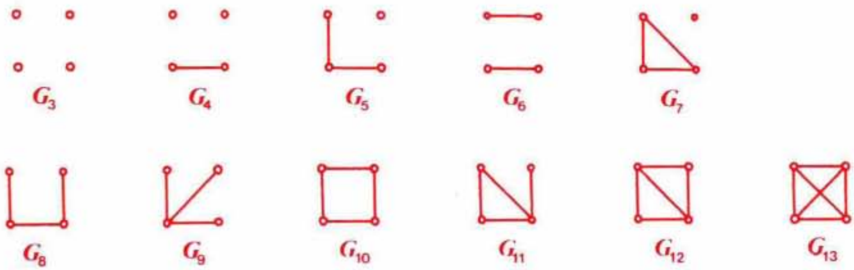
Z malo dela lahko hitro preverimo, da so v grafih G' in G'' sosedne ravno tiste točke, ki so sosedne v grafu G s prve slike. Isto velja tudi za nesosedne točke. Zato pravzaprav vse tri risbe G, G' in G'' predstavljajo isti graf. Iz primera lahko torej povzamemo nasledjje: prav nič ni pomembno, kako graf narišemo, ampak je važno le to, katere njegove točke spojimo s povezavami. Ravno tako ni pomembno, kako oštevilčimo točke grafa.

Število povezav, ki se stikajo v neki točki grafa, imenujemo *stopnja* te točke. Na primer, točka 1 v grafu G ima stopnjo štiri, točke 2, 3, 4 in 5 pa imajo stopnje 2, 1, 2 in 3. Kemiki stopnji točke včasih pravijo tudi *valenca* točke - kasneje bomo videli zakaj.

Oglejmo si še nekaj preprostih primerov grafov. Če ima graf le dve točki, imamo dve možnosti: točki sta povezani ali pa ne. Zato obstajata natanko dva grafa z dvema točkama, G_1 in G_2. (Slika 3)

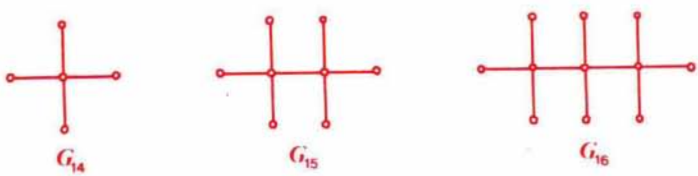
Slika 3

Obe točki v grafu G_1 imata stopnjo ena, točki v G_2 pa sta stopnje nič. Grafov na štirih točkah je enajst; to so G_3 - G_{13}.



Slika 4

Skušajte poiskati vse grafe, ki imajo tri točke (natanko štirje so). Grafov s pet in več točkami je precej več. Preveč, da bi jih vse narisali. Zato bomo navedli le po en primer grafa na 5, 8 in 11 točkah. (Slika 5)



Slika 5

Skupna lastnost grafov G_{14}, G_{15} in G_{16} je, da imajo njihove točke stopnjo ena ali štiri.

Doslej nismo pojma grafa niti poskušali definirati tako precizno in strogo, kot je v matematiki nujno. Vendar pa za začetnike to sploh ni pomembno. Tisti, ki želijo spoznati teorijo grafov pobliže in podrobneje, bodo našli vse potrebno v obstoječih učbenikih*.

Sedaj pa dokažimo lastnost, ki je skupna vsem grafom. Naj ima graf G p točk in q povezav ter naj imajo točke stopnje d_1, d_2, $\ldots$, d_p.

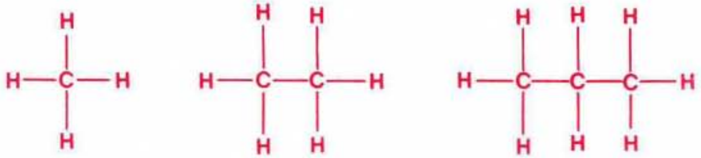
Izrek. Vsota stopenj vseh točk grafa G je enaka dvakratnemu številu povezav tega grafa,

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_p = 2q \tag{1}$$

Dokaz. Po definiciji je d_i število povezav, ki izhajajo iz i-te točke grafa. Ko napravimo vsoto stopenj vseh točk, štejemo vsako povezavo dvakrat, saj vsaka povezava povezuje dve točki. Od tu sledi enačba (1).

Gornji izrek je znan kot prvi izrek v zgodovini teorije grafov. Dokazal ga je veliki švicarski matematik *Leonhard Euler* (1707-1783).

Kakšno zvezo pa imajo grafi s kemijo? Predno odgovorimo na to vprašanje, se spomnimo na pomembno družino zasičenih ogljikovodikov, t. im. alkane. Sem spadajo npr. metan (CH_4), etan (C_2H_6), propan (C_3H_8), butan (C_4H_{10}), pentan (C_5H_{12}) itd. Strukturne formule prvih treh členov v tem zaporedju so takšne:



Slika 6

Če te formule primerjamo z grafi G_{14}, G_{15} in G_{16}, takoj opazimo veliko podobnost. Analogija med strukturnimi formulami kemijskih molekul in določenimi grafi ni slučaj, ampak nam kaže na povezavo med kemijo in teorijo grafov. V drugem delu tega članka bomo spoznali, da so strukturne formule pravzaprav grafi, in da je takšno gledanje nanje lahko zeko koristno.

*npr.: D. Cvetković, M. Milić, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

Op.: tudi v slovenščini se pripravlja učbenik iz osnov teorije grafov in bo izšel verjetno v Presekovi knjižici.

2. del: M o l e k u l a r n i   g r a f i

V prvem delu smo se seznanili z osnovnimi pojmi teorije grafov, kot npr. graf, točka, povezava, stopnja točke (valenca). Videli smo, da sta dve točki povezani, če med njima obstaja povezava, sicer pa nista povezani. Na koncu smo omenili podobnost med grafi in kemijskimi formulami.

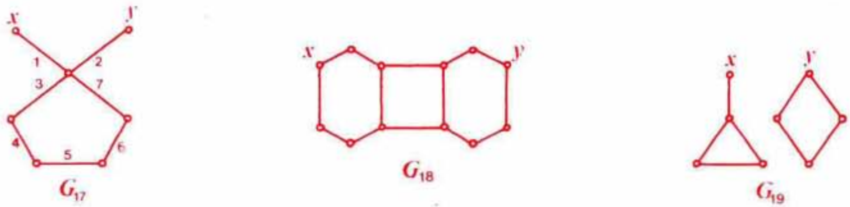
Sedaj si bomo ogledali še nekaj pojmov, ki so povezani z grafi, zatem pa bomo končno prešli na področje kemije. Najprej se bomo naučili, kako potujemo po grafu. Mislimo si, da točke grafa predstavljajo mesta, povezave pa ceste med njimi. Iz nekega mesta (točke) lahko potujemo v drugo mesto, če med njima obstaja pot, tj. zaporedje cest, ki ju povezuje. Ravno tako definiramo tudi pot v poljubnem grafu:

Definicije. *Pot* med točkama x in y iz grafa G je zaporedje medsebojno različnih povezav, za katere velja naslednje:
- prva povezava iz zaporedja se začne v točki x
- vsaka naslednja povezava se začne v tisti točki, kjer se je nehala predhodna in
- zadnja povezava nas pripelje v točko y.

Če se pot začne in konča v isti oočki, potem pravimo, da je to sklenjena pot.
Številu povezav, ki sestavljajo pot, pa pravimo *dolžina poti*.

Pomembno je, da si zapomnimo, da morajo biti vse povezave na poti v grafu medsebojno različne.

Zelo pomembna lastnost grafa je povezanost. Pravimo, da je graf *G povezan*, če med poljubnima dvema njegovima točkama obstaja neka pot. Če pa obstajata dve točki, ki nista povezani z nobeno potjo, pravimo, da je graf nepovezan. Ko graf narišemo, kaj hitro vidimo, ali je povezan. Če je slika sestavljena iz enega kosa, je povezan, če pa imamo dva ali več ločenih kosov, je nepovezan. Zato sta grafa G_{17} in G_{18} povezana, graf G_{19} pa je nepovezan. (Slika 7)



Slika 7

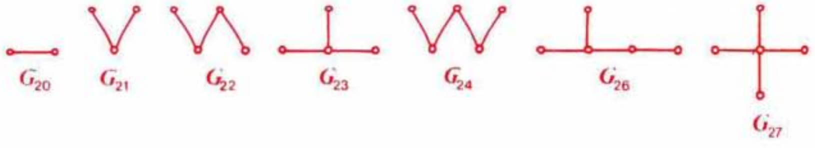
Kot primer si oglejmo graf G_{17}, katerega povezave smo oštevilčili z 1, 2,..., 7. Med točkama x in y so naslednje tri poti: (1,2), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2) in (1, 7, 6, 5, 4, 3, 2); njihove dolžine so zapovrstjo 2, 7 in 7. Skušajte poiskati vse poti med točkama x in y v grafu G_{18} (osem poti je). V grafu G_{18} so točno tri sklenjene poti, ki se začnejo in končajo v točki x. Isto velja tudi za točko y.

Vsi trije grafi G_{17}, G_{18} in G_{19} vsebujejo sklenjene poti. Posebno preprosti a zelo pomembni pa so grafi, ki ne vsebujejo nobene sklenjene poti. Če so ti grafi hkrati še povezani, jih imenujemo *drevesa*.

Definicija. Drevo je povezan graf, ki ne vsebuje sklenjenih poti.

Drevesa igrajo pomembno vlogo v teoriji grafov. Odkril (beri: prvi uporabljal) jih je angleški matematik *Arthur Cayley* (1821-1895).

Na naslednji sliki so narisana vsa drevesa z 2, 3, 4 in 5 točkami.



Če ta drevesa pazljivo pogledamo, opazimo, da vsako vsebuje točko stopnje ena, in da je število točk vedno za ena večje od števila povezav. Ali imajo ti dve lastnosti vsa drevesa? Odgovor je pritrdilen.

Izrek 1. Drevo z vsaj dvema točkama vsebuje točko stopnje ena.

Izrek 2. Drevo na p točkah ima natanko p-1 povezav.

Dokaz izreka 1. Vzemimo poljubno drevo, ki ima vsaj dve točki (drevo z eno samo točko je izjema), in si izberimo poljubno točko v tem drevesu. Sedaj pa pojdimo na pot iz izbrane točee. Vse točke, do katerih prispemo na naši poti, so medsebojno različne, saj bi v nasprotnem primeru obstajala sklenjena pot v drevesu. Pot se mora nekje končati, in sicer ravno takrat, ko pridemo do neke točke stopnje ena. Torej točka stopnje ena gotovo obstaja.

Dokaz izreka 2. Dokaz bo potekal z uporabo matematične indukcije. Ker smo videli, da izrek velja za vsa drevesa na dveh, 3, 4 in 5 točkah, moramo pokazati le še naslednji indukcijski korak:

"Če imajo vsa drevesa s p točkami natanko p-1 povezavo, potem imajo drevesa s p+1 točkami p povezav."

Predpostavimo, da za nek p velja, da imajo vsa drevesa s p točkami p-1 povezav. Vzemimo sedaj poljubno drevo na p+1 točkah in dokažimo, da ima p povezav. Na podlagi izreka 1 ima izbrano drevo T_{p+1} vsaj eno točko stopnje ena. Če to točko odstranimo iz drevesa T_{p+1}, nam preostane drevo T_p na p točkah. Velja tudi obratno: poljubno drevo T_{p+1} s p+1 točkami lahko skonstruiramo tako, da na neko drevo T_p s p točkami obesimo (s pomočjo ene nove povezave!) novo točko stopnje ena. Če ima T_p p-1 povezavo, ima potem T_{p+1} p povezav. To pa je ravno to, kar smo želeli dokazati.

Način dokazovanja z matematično indukcijo se zelo pogosto uporablja v teoriji grafov.

Strukturne formule se uporabljajo v organski kemiji že od sredine prejšnjega stoletja. Prvi so jih uporabili kemiki *August*

Kekulé (1829-1896, Nemčija), *Archibald Scott Couper* (1828-1892), Škotska) in *Aleksandar Mihajlovič Butlerov* (1828-1886, Rusija). Strukturne formule se določajo na podlagi kemijskih reakcij, v katerih sodeluje opazovana spojina, in s pomočjo raznih fizikalno kemijskih metod. Vendar pa morajo strukturne formule ustrezati še naslednjim formalnim pravilom.

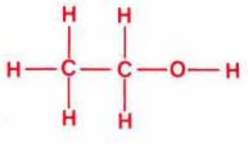
1. Atome predstavimo z ustreznimi kemijskimi simboli (H za vodik, O za kisik, C za ogljik, Fe za železo itd.).

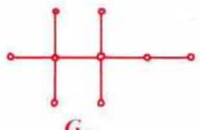
2. Dva atoma v molekuli sta kemijsko povezana ali pa ne. Če obstaja kemijska vez med njima, njune simbole spojimo s črtico. Če med atomoma ni kemijske vezi, ju ne povežemo. Možne so tudi dvojne in trojne kemijske vezi, vendar o njih na tem mestu ne bomo govorili.

3. Atom A je povezan z atomom B na isti način kot atom B z atomom A.

4. Število črtic, ki izhajajo iz nekega atoma, je valenca tega atoma. Običajno (a ne vedno) je valenca ista za vse atome enega kemijskega elementa (1 za vodik, 2 za kisik, 4 za ogljik itd.).

Oglejmo si sedaj dobro znani primer - etilni alkohol, ki ima strukturno formulo I. (Slika)





G_{27}

Kaj vse lahko razberemo iz te formule? Dva atoma ogljika sta povezana drug z drugim, atom kisika je povezan le z enim od obeh ogljikovih atomov, od šestih atomov vodika se jih pet veže z ogljikom, šesti pa s kisikom itd. Za kemika so to zelo pomembni podatki.

Strukturna formula simbolično prikazuje medsebojno povezanost atomov v molekuli. Ker že vemo, kaj so to grafi, nam ne bo težko ugotoviti, da kemijske strukturne formule dejansko predstavljajo grafe. Komur kemija ni delala težav, ne bo težko ugotoviti, da obstaja naslednja povezava med jezikom kemije in jezikom teorije grafov:

strukturna formula	graf
atom	točka
kemijska vez	povezava
valenca atoma	stopnja točke
povezana atoma	sosednji točki
alkan	drevo

Graf, ki ustreza etilnemu alkoholu, je G_{27}. Od formule I se razlikuje le po tem, da njegove točke niso označene s H, C in O. Grafi, ki na ta način prikazujejo kemijsko strukturo, se imenujejo *molekularni grafi*.

Že v prvem delu članka smo omenili nasičene ogljikovodike - alkane: *metan* (CH_4), *etan* (C_2H_6), *propan* (C_3H_8), *butan* (C_4H_{10}), *pentan* (C_5H_{12}) itd. Zdaj vemo, da so bili grafi G_{14}, G_{15} in G_{16} pravzaprav molekularni grafi metana, etana in propana. Molekularni grafi alkanov so drevesa in sicer takšna drevesa, ki imajo le točke stopenj ena (ki ustrezajo atomom vodika) in točke stopnje štiri (atomi ogljika, ki je štirivalenten).

Ena od prvih stvari, ki se jih naučimo pri organski kemiji, je ta, da je splošna formula za alkane C_nH_{2n+2}. Ali ste že kdaj skušali *dokazati*, da ta formula velja res za *vse* alkane? Verjetno niste, a tudi če bi, bi vam to težko uspelo brez poznavanja teorije grafov. To napako bomo sedaj popravili in bomo dokazali (tako kot se dokažejo matematične trditve), da imajo vsi alkani formulo oblike C_nH_{2n+2}.

Oglejmo si poljubno drevo, ki ima le točke stopnje ena in točke stopnje štiri. Tak graf ustreza molekularnemu grafu alkana. Recimo, da ima izbrano drevo n točk stopnje štiri in m točk stopnje ena. Dokažimo, da mora biti v tem primeru $m = 2n + 2$.

Drevo ima $m + n$ točk in ima zato po izreku $2\ n+m-1$ povezav. V prvem delu članka smo pokazali, da je vsota valenc vseh točk v grafu enaka dvojnemu številu povezav. To pomeni, da je

$$4n + m = 2\ (n + m - 1)$$

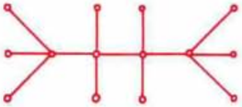
od koder z enostavnim računanjem dobimo, da je

$$m = 2n + 2$$

kar smo tudi morali dokazati.

To je bila enostavna, a ne čisto trivialna uporaba teorije grafov v kemiji. Zdaj pa bomo opisali še mnogo težji problem.

Obstaja le en metan, etan in en propan, tj. molekule s formulo CH_4, C_2H_6 in C_3H_8 lahko narišemo na en sam način. Vendar pa obstajata *dva* butana, tj. dva različna ogljikovodika formule C_4H_{10}. Imata različne strukturne formule in zato tudi različna molekularna grafa. Za take spojine pravimo, da so *izomere*. Molekularna grafa izomer butana sta G_{28} in G_{29}. (Slika)



G_{28}

G_{29}

Ravno tako obstajajo tri različne izomere pentana. Poskusite jih narisati!

Kemike je zelo dolgo mučilo vprašanje, koliko različnih alkanov s formulo C_nH_{2n+2} obstaja. Za n=6 in n=7 so to število znali določiti, tako da so narisali vse mogoče primere. Vendar pa z rastočim številom n število izomer tako hitro narašča (glej dalje), da takšno naivno preštevanje ne pride več v poštev.

Dolg je spisek kemikov in matematikov, ki so skoraj sto let oblegali problem števila izomer alkanov. Izkazalo se je, da je to res trd oreh. Največ je na tem področju prispeval sodobni ameriški matematik madžarskega porekla *György Pólya* (1887-). Pólya je leta 1937 našel splošen postopek za določanje števila grafov z danimi lastnostmi (v našem primeru so to drevesa, katerih točke imajo le stopnje ena ali štiri). Pólyajeva teorija je preširoka in pretežka, da bi jo tu opisovali. Namesto tega bomo navedli le rezultate, do katerih lahko pridemo s pomočjo te teorije.

n	število izomer C_nH_{2n+2}
6	5
7	9
8	18
9	35
10	75
12	355
15	4347
20	366319
30	4111846763
40	62491178805831

Teorija grafov se v kemiji uporablja tudi na mnogih drugih področjih. Še posebej se je njen pomen v kemiji povečal v zadnjih desetih letih. Z gotovostjo pa lahko trdimo naslednje: ena od značilnosti sodobne kemije je v tem, da vanjo z vsakim dnem bolj prodirajo matematične metode in matematični način mišljenja.

Ivan Gutman, Kragujevac
prevedel: *Bojan Mohar*

KRITERIJ DELJIVOSTI S 7 IN 13

Če hočemo ugotoviti, ali je neko celo število m deljivo s 7 ali 13, neposredno delimo število m s številom 7 ali 13. Na primer, če je $m = 84$, imamo $84 : 7 = 12$ ali $84 = 7.12$; če pa je $m = 7458$, imamo $7458 : 7 = 1065$ in 3 ostane ali $7458 = 7.1065 + 3$. V prvem primeru pravimo, da je število m deljivo s številom 7 in zapišemo

$7 | 84$

v drugem pa število m ni deljivo s 7, kar zapišemo

$7 \nmid 7458$

Vendar zahteva preverjanje deljivosti s številom 7 ali 13 znatno več čas in truda, če je število m večštevilčno. Kriterij deljivosti z neposrednim preverjanjem je resda vedno uporaben, ni pa dovolj praktičen. Zato bomo našli ugodnejšega. Vsako celo število m lahko enolično predstavimo v obliki

$m = 10a + b$

kjer sta a in b celi števili. Število b pomeni enice, število a pa dobimo, če od m enice odrežemo. Nadalje je

$m = 3(a - 9b) + 7(a + 4b)$

Ker je $7(a + 4b)$ deljivo s 7, je za to, da bi bilo deljivo s 7 tudi število m, potrebno in zadostno, da je deljivo s 7 število $a - 9b$.

Na podoben način obdelamo deljivost s 13. Zato zapišemo število m v takile obliki

$m = 13(a - 2b) - 3(a - 9b)$

in spet sklepamo, da je število m deljivo s 13 če in samo če je deljivo s 13 število $3(a - 9b)$, to se pravi tudi število $a - 9b$. Tako smo pokazali izrek:

Število m je deljivo s 7 ali 13 natanko takrat, ko je deljivo s 7 ali 13 število, ki ga dobimo, če številu m odrežemo enice in od dobljenega števila odštejemo devetkratno število enic.

Preizkusimo zdaj, ali je število 64 585 deljivo s 7 ali 13. Po zgornjem kriteriju moramo torej preizkusiti ali je deljivo s 7 ali 13 število 6458 - 9.5 = 6413. Še vedno je to število preveliko za neposreden preizkus, zato še enkrat uporabimo izrek in dobimo število 641 - 9.3 = 614. Pa še enkrat, da dobimo 61 - 9.4 = 25. Zdaj pa že vidimo, da 25 ni deljivo niti s 7 niti s 13 in zato tudi število 64 585 ni deljivo niti s 7 niti s 13. Shematično bi račun zapisali takole

$$
\begin{array}{rl}
6\,4\,5\,8\,5 & \\
-\;4\,5 & \quad 9.5 \\
\hline
6\,4\,1\,3 & \\
-\;2\,7 & \quad 9.3 \\
\hline
6\,1\,4 & \\
-\;3\,6 & \quad 9.4 \\
\hline
2\,5 &
\end{array}
$$

Naloge.

1. Preveri, kako je z deljivostjo s 7 in 13 za število 47 543!
2. Dokaži, da iz 7 $(a + 5b)$ sledi $7|(10a + b)$! Ali velja tudi obratno?
3. Rezultat prejšnje naloge oblikuj v kriterij za deljivost celih števil s 7 in tako preizkusi deljivost števila 32 578 s številom 7.
4. Sestavi podobna pravila za deljivost s števili 11, 17, 19 in 23.
5. Številu $7A$ 546 izberi število A tako, da bo deljivo z 19!

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*

REBUS - rešitev iz P/8-4

Na mornariških zastavah, ki jih dviguje fižolček iz "Ukročene matematike" piše:
"KRIŽANIČ" (avtor) in "POŽAR" (ilustrator omenjene brošure).

Ciril Velkovrh

ARITMETIČNA IN GEOMETRIJSKA SREDINA DVEH POZITIVNIH ŠTEVIL

V članku bomo na tri načine dokazali, da je aritmetična sredina dveh pozitivnih števil vedno večja ali vsaj enaka geometrijski sredini.

Po definiciji je

aritmerična sredina A dveh števil a in b enaka $A = \frac{a+b}{2}$

geometrijsk sredina G dveh števil a in b enaka $G = \sqrt{ab}$

Trdimo, da je vselej $A \geq G$.

Dokaz 1. Po zgornjih definicijah imamo

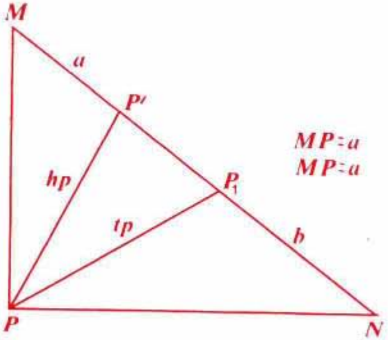
$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$$

Torej je res $A \geq G$.

Dokaz 2. Na sliki 1 imamo pravokotni trikotnik MNP z vrisanima višino in težiščnico na hipotenuzo. Trikotnika MPP' in PNP' sta podobna, ker se ujemata v ustreznih kotih. (Zakaj?)

Na sliki smo označili z a odsek hipotenuze MP' in z b drugi odsek NP'. Iz podobnosti trikotnikov $MP'P$ in $PP'N$ sledi

$$a : h_p = h_p : b$$
$$h^2_p = ab$$
$$h_p = \sqrt{ab}$$



Slika 1

Točka P_1 je središče trikotniku očrtane krožnice in je zato težiščnica enaka

$$t_p = MP_1 = NP_1 \qquad t_p = (a+b)/2$$

V pravokotnem trikotniku PP_1P' je t_p hipotenuza in h_p kateta, zato velja $t_p > h_p$. Enakost nastopi le, če se težiščnica in višina ujemata, kar se zgodi v enakokrakem pravokotnem trikotniku, torej tedaj, ko je $a = b$. Zaključimo

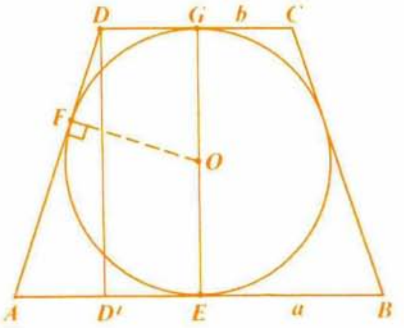
$$t_p \geq h_p$$

oziroma

$$(a + b)/2 \geq ab$$

Dokaz 3. Na sliki 2 imamo enakokraki trapez, ki mu je mogoče včrtati krožnico. Osnovnici trapeza ata a in b. Ker sta odseka tangent iz iste točke na krog enaka, dobimo $AF = AE = a/2$ in $FD = DG = b/2$ in odtod

$$AD = AF + FD = AE + DG = (a + b)/2$$



Slika 2

Oglejmo si pravokotni trikotnik ADD'! Stranico AD smo ravnokar spoznali: $AD = (a + b)/2$. Stranica AD' pa je v enakokrakem trapezu enaka $(a - b)/2$. Po Pitagorovem izreku imamo

$$DD'^2 = ((a + b)/2)^2 - ((a - b)/2)^2 = ab$$

$$DD' = \sqrt{ab}$$

Spet je hipotenuza AD aritmetična sredina in kateta DD' geometrična sredina. Hipotenuza je večja od katete le v primeru, ko je $a = b$ - trapez se spremeni v kvadrat - se obe daljici pokrivata. Vedno pa velja $AD \geq DD'$ oziroma

$$(a + b)/2 \geq ab$$

Naloge

1. Če je $x > 0$, velja $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$. Dokaži! Kdaj velja enakost?
2. Dokaži, da za pozitivni števili x in y veljata neenakosti
   (i) $x/y + y/x \geq 2$ (ii) $xy \leq \sqrt{(x^4 + y^4)/2}$

Kdaj veljata enakosti?

3. Poišči največjo vrednost izraza $x/(mx^2 + n)$, če sta m in n pozitivni števili.
4. Stranici a in b sta kateti, c je hipotenuza pravokotnega trikotnika. Dokaži, da velja
   $a + b \leq c\sqrt{2}$
5. Števila m, n, p, q so pozitivna. Dokaži:
   $(m + n + p + q)^2 \leq 256mnpq$

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*

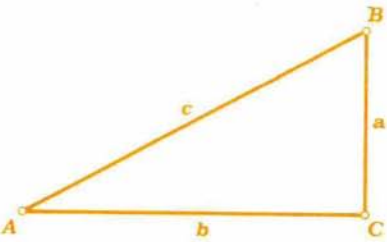
NEKATERE NEENAKOSTI V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

Dobro vemo, da za vsak trikotnik velja trikotniška neenakost: stranica trikotnika je večja od razlike in manjša od vsote ostalih dveh stranic trikotnika. Oglejmo si nekatere neenakosti, ki veljajo za pravokotni trikotnik!

1. Če je P ploščina in c hipotenuza pravokotnega trikotnika, velja neenakost

$$P \leq 0{,}25c^2$$

Dokaz. Ker je kvadrat vsakega realnega števila pozitiven ali nič, velja za kateti pravokotnega trikotnika a in b (slika 1) neenakost $(a - b)^2 \geq 0$, t.j. $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Pitagorov izrek nam pove, da je $a^2 + b^2 = c^2$, ploščino pravokotnega trikotnika izračunamo po formuli $P = ab/2$, iz zgornje neenakosti dobimo $P \leq c^2/4$, kar smo morali dokazati.



Slika 1

2. Za kateti a in b pravokotnega trikotnika in njuni težiščnici t_a in t_b velja neenakost

$$t_a^2 + t_b^2 \geq \frac{5}{8}(a + b)^2$$

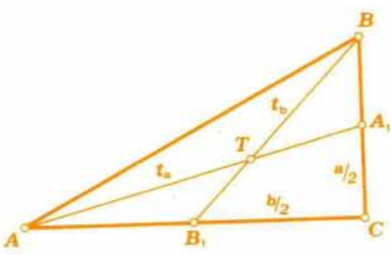
Dokaz. Poglejmo na sliko 2. Trikotnika ACA_1 in BCB_1 sta pravokotna, zato velja

$$t_a^2 = b^2 + (a/2)^2$$
$$t_b^2 = a^2 + (b/2)^2$$

Enakosti seštejemo in dobimo

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$$

Ker pa smo v dokazu neeankosti 1 videli, da velja $a^2 + b^2 \geq$ $\geq (a + b)^2/2$, iz zgornje seštete enakosti že sledi trditev izreka.



Slika 2

3. V pravokotnem trikotniku velja: $a + b \geq 2\sqrt{2P}$

Dokaz. Neenakosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$ prištejemo na obeh straneh po $2ab$, da dobimo $(a + b)^2 \geq 4ab$, t.j. $a + b > 2\sqrt{ab}$, od koder pa spet zaradi $P = ab/2$ sledi neenakost, ki jo želimo dokazati.

4. V pravokotnem trikotniku velja dvojna neenakost

$$1 < \frac{t_a + t_b}{a + b} < \frac{3}{2}$$

Dokaz. Iz slike 2 preberemo dve trikotniški neenakosti, za trikotnika ACA_1 in BCB_1:

$$t_a < b + a/2$$
$$t_b < a + b/2$$

Ko ju seštejemo, dobimo desni del zahtevane neeankosti:

$$t_a + t_b < \frac{3}{2}(a + b)$$

Ker sta t_a in t_b hipotenuzi omenjenih trikotnikov, sta večji od katet a in b : $t_a > b$ in $t_b > a$. Spet seštejemo $t_a + t_b > a + b$, kar prinese še levi del dvojne neenakosti.

NALOGE

1. Dokaži, da za polmer R očrtanega in r včrtanega kroga pravokotnega trikotnika velja $R > r(1 + \sqrt{2})$!

2. Za kateti a, b in višino h pravokotnega trikotnika veljata neenakosti

(I) $a + b \geq 2h\sqrt{2}$

(II) $1/a + 1/b \leq \sqrt{2}/h$

3. Težiščnice t_a, t_b, t_c in ploščina P pravokotnega trikotnika so v odnosu:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq 6P$$

Dragoljub M. Milošević
prevedel *Peter Petek*

PLOŠČINA PRAVILNEGA DVANAJSTKOTNIKA

Pokazali bomo kako lahko izračunamo ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznamo

A) stranico a pravilnega dvanajstkotnika

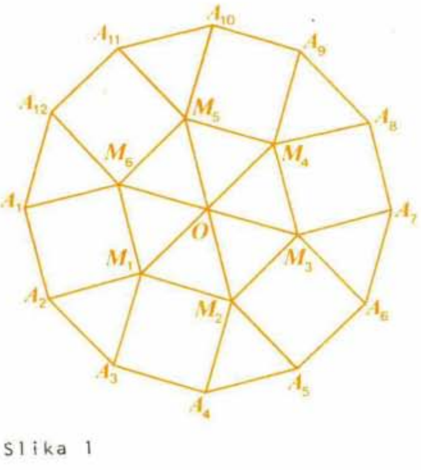
B) polmer r dvanajstkotniku opisanega kroga

A) *1. način*

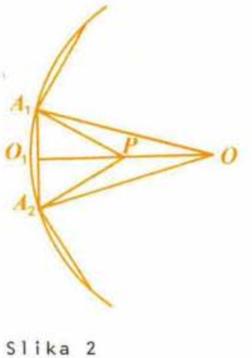
Nad vsako drugo stranico pravilnega dvanajstkotnika A_1A_2 ... A_{12} (slika 1) konstruiramo na notranji strani po en enakostraničen trikotnik. Lahko je pokazati, da njihovi vrhovi

M_1, M_2, ... M_6 predstavljajo oglišča pravilnega šestkotnika s stranico a. Tako smo dvanajstkotnik razstavili na 6 skladnih kvadratov in 12 skladnih enakostraničnih trikotnikov. Zato je ploščina enaka

$$P = 6 \cdot a^2 + 12 \cdot a^2 \sqrt{3}/4 = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$$



Slika 1



Slika 2

2. način

Izberemo enega od 12 skladnih enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču dvanajstkotnika in stranico a kot osnovnico (slika 2). Konstruiramo višino na osnovnico OO_1. Potem izberemo na daljici OO_1 točko P tako, da je trikotnik A_1A_2P enakostraničen, torej $\sphericalangle A_1PA_2 = \sphericalangle A_2PA_1 = 60°$. Kot ob vrhu O je enak $360° : 12 = 30°$, kot OA_1A_2 ima $75°$, $\sphericalangle OA_1P = \sphericalangle OA_2P = 15°$. Trikotnik A_1A_2P je enakostraničen, trikotnik A_1PO pa ima dva kot enaka $15°$, zato je enakokrak in zato $OP = A_1P = a$. Višina OO_1 je torej sestavljena iz višine enakostraničnega trikotnika $O_1P = a\sqrt{3}/2$ in daljice $OP = a$. Tako je ploščina trikotnika A_1A_2O enaka

$$p(\Delta A_1A_2O) = a(a + a\sqrt{3}/2)/2 = a^2 (2 + \sqrt{3})/4$$

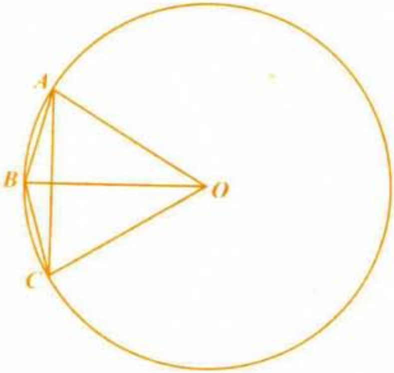
Ploščina dvanajstkotnika je dvanajstkrat večja

$$p = 3a^2(2 + \sqrt{3})$$

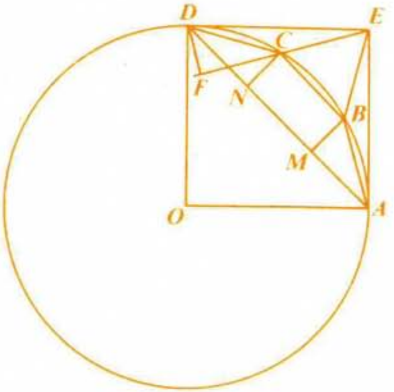
B) *1. način*

Pravilni dvanajstkotnik je sestavljen iz šestih skladnih deltoidov. Eden od njih je $ABCO$ na sliki 3. Diagonali deltoida sta obe enaki polmeru r očrtanega kroga. Diagonala BO se kar ujema s polmerom, diagonala AC pa je stranica pravilnega šestkotnika in zato spet enaka polmeru r. Tako imamo

$$P = 6 \cdot r \cdot r/2 = 3r^2$$



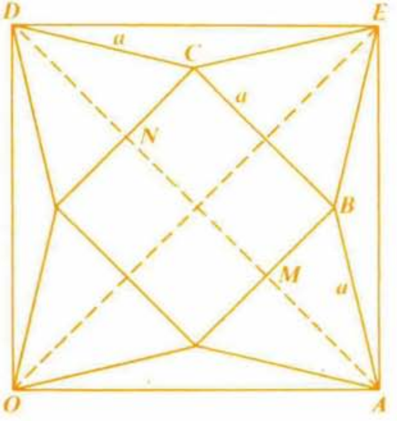
Slika 3



Slika 4

2. način

Na sliki 4 vidimo tri stranice pravilnega dvanajstkotnika in kvadrat, ki smo ga konstruirali nad polmerom r. Najprej bomo pokazali, da imata enakokraki trapez $ABCD$ in petkotnik $ABCDE$ enaki ploščini.



Slika 5

Točki M in N sta nožišči normal, ki ju spustimo iz točk B in C na diagonalo AD kvadrata. Kot ABC je kot pravilneg dvanajstkotnika in zato enak $150°$, kot ABM je tako $150° - 90° = 60°$ in je trikotnik ABM polovica enakostraničnega. Ker je $\sphericalangle DAE = 45°$ in $\sphericalangle BAM = 30°$, velja $\sphericalangle BAE = 15°$. Pravokotnik $MBCN$ je polovica kvadrata ($MB = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$) in ima ploščino $a^2/2$. Poglejmo sliko 5! Po simetriji sklepamo, da je trikotnik BCE enakostraničen in zato po ploščini enak vsoti ploščin trikotnikov ABM in DCN. Koti BAE, BEA, CED in CDE so vsi enaki $15°$, zato je $\sphericalangle DCE = 150°$. Iz točke D potegnemo normalo na podaljšek stranice EC in dobimo nožišče F. Ker je $\sphericalangle DCF = 180° - 150° = 30°$, je tudi trikotnik CDF polovica enakostraničnega in $DF = a/2$. To pa je ravno višina trikotnika CDE na stranico CE, ki je enaka a. Ploščina trikotnika CDE je torej $a^2/4$. Isto velja za trikotnik ABE. Vsota njunih ploščin je zato $a^2/2$, kar je ravna ploščina pravokotnika $BMNC$. Upoštevaje vse ploščinske enakosti vidimo, da ima trapez $ABCD$ enako ploščino kot petkotnik $ABCDE$. Ker dasta skupaj pol kvadrata, je ploščina petkotnika $OABCD$ enaka trem četrtinam ploščine kvadrata $OAED$, to je $\frac{3}{4}r^2$. Dvanajstkotnik sestavljajo štirje enaki petkotniki s ploščinami $\frac{3}{4}r^2$. Tako dobimo končno

$$P = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot p(OAED) = 3r^2$$

Nalogi:

1. Uporabi trapez $ABCD$ na sliki 4 in z njegovo pomočjo še enkrat izračunaj ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznaš njegovo stranico a!

2. Izrazi ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznaš polmer ρ včrtanega kroga.

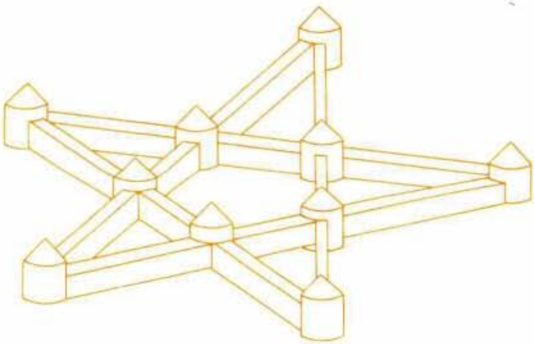
Dragoljub M. Milošević

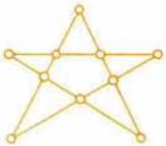
prev. *Peter Petek*

BISTROVIDEC

Veliki vojskovodja je naročil svojemu arhitektu, naj mu sezida grad. Sezidan naj bo iz petih zidov (ki se lahko križajo), v vsakem zidu pa naj bodo štirje opazovalni stolpi. Stolpov naj bo deset. Arhitekt mu je kmalu prinesel načrt, ki ga vidite na sliki. Toda vladar ni bil zadovoljen. Najsi bom v kateremkoli stolpu, vedno sem izpostavljen direktnim napadom od zunaj, je rekel. K prejšnjim zahtevam je dodal še eno, vsaj en stolp naj bo v notranjosti obzidja. Seveda pa so lahko zidovi različno dolgi. Morajo pa biti ravni.

Kako je arhitekt rešil zahtevno nalogo?





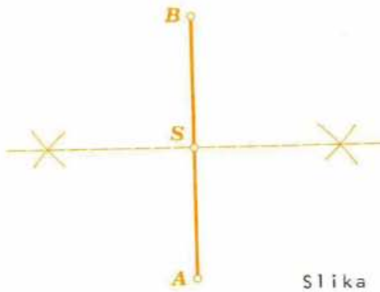
Ljubomir Kostrevc

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

KAKO RAZPOLOVIMO DALJICO SAMO S ŠESTILOM

Nalogo, poiskati razpolovišče dane daljice z uporabo šestila in ravnila, zna rešiti vsak. V šestilo vzamemo poljuben dovolj velik polmer in okrog krajišč daljice kot središč narišemo dva velika kroga. Nato z ravnilom narišemo premico skozi njuni presečišči. Točka v kateri ta premica seka dano daljico, je razpolovišče daljice. Pri konstrukciji moramo paziti le na to, da šestilo dovolj razpremo, da se kroga res tudi sekata. Navada je še, da oba kroga rišemo le delno v bližini njunih presečišč (slika 1).

Vendar moremo rešiti nalogo tudi v primeru, če imamo samo šestilo. Ta trditev je samo drobec naslednje veliko splošnejše resnice: *Vsako konstrukcijo, ki jo lahko izvedemo s šestilom in ravnilom, je moč izpeljati že samo s šestilom.*



Slika 1

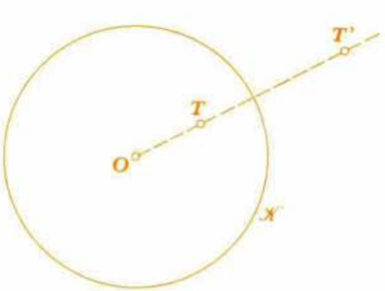
S splošno trditvijo se to pot ne bomo ukvarjali - morda kdaj drugič. Povrnimo se k zastavljeni nalogi v naslovu. Ker konstrukcije ne bomo samo navedli, ampak tudi utemeljili, potrebujemo nekaj priprave.

Zrcaljenje na krog. Naj bo v ravnini dan krog K s središčem O in polmerom r. Nadalje naj bo T poljubna točka te ravnine. Točki O in T določata poltrak, ki ima izhodišče v O in gre skozi

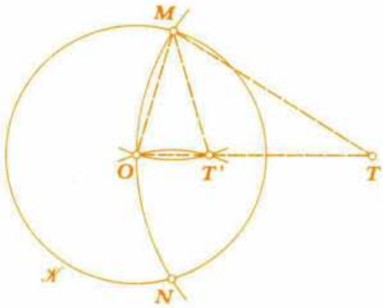
T. Na tem poltraku izberimo točko T' tako, da bo za oddaljenosti točk T in T' od središča kroga veljala zveza

(1) $\quad OT.OT' = r^2$

Tako izbrano točko T' imenujemo zrcalna slika točke T glede na krog K. Takoj vidimo, da je tudi obratno točka T zrcalna slika točke T' glede na K. Zrcalnost je torej vzajemna relacija (slika 2).



Slika 2



Slika 3

Če leži točka T zunaj kroga K, je $OT > r$ in iz $OT.OT' = r^2$ sledi $OT' < r$, torej leži T' znotraj kroga K. To pomeni, da preslika zrcaljenje točke zunaj kroga K v notranje točke in obratno, notranje v zunanje. Takoj se tudi vidi, da je $T = T'$, če T izberemo na krožnici.

Središče O kroga K je edina točka, katere zrcalna slika ni določena. Tedaj namreč O in T sovpadata in ta edina točka ni dovolj za določitev poltraka, na katerem naj bi ležala zrcalna slika. Očitno pa je, da se zrcalna slika T' točke T tem bolj oddaljuje od O, čim bolj se T središču O približuje. Zato včasih pravimo, da se središče kroga, na katerega zrcalimo, preslika v neskončnost.

Geometrijska konstrukcija zrcalne točke. Dani točki T lahko konstruiramo zrcalno točko T' glede na krog K samo s šestilom, brez uporabe ravnila. Trditev velja povsem splošno, če le T ni središče kroga K. Vendar bomo tu pokazali konstrukcijo le za primer, če leži točka T zunaj kroga K, ker bo to zadoščalo za naše nadaljnje potrebe.

Naj bo dan krog K s središčem O in polmerom r in točka T zunaj kroga (slika 3).

S šestilom narišimo krog s središčem v točki T in s polmerom OT. Ta krog poteka skozi središče O kroga K in očitno seka krog v dveh točkah, ki ju označimo recimo z M in N. Narišimo nato še dva kroga, enega s središčem v M, drugega s središčem v N, in oba s polmerom r, torej oba skozi točko O. Razen v točki O, se ta dva kroga sekata še v eni točki, za katero bomo videli, da je ravno zrcalna slika točke T glede na krog K, zato to presečišče že vnaprej označimo s T'.

Konstrukcijo smo res izvedli samo s šestilom. Dokazati moramo le še trditev, da sta T in T' zrcalni točki. Pa poglejmo!

Če še enkrat sledimo konstrukciji, hitro ugotovimo, da imajo točke O, T in T' neko skupno lastnost. Za vsako izmed njih namreč velja, da sta njeni razdalji od točk M in N med seboj enaki. Vemo, da je geometrijsko mesto točk, ki so enako oddaljene od dveh fiksnih točk, premica (natančneje simetrala daljice, ki ima ti točki za krajišči). To pa ne pomeni nič drugega kot to, da leže točke O, T, T' na isti premici. Iz konstrukcije je tudi jasno, da ležita T in T' na tej premici na isti strani točke O, torej na istem poltraku z izhodiščem O.

Dokazati moramo še veljavnost zveze (1). Trikotnika OMT in OMT' sta oba enakokraka in imata skupen kot z vrhom v O. Ker je ta kot v obeh trikotnikih kot od osnovnici, sta trikotnika podobna. Potem velja za razmerji njunih krakov in osnovnic sorazmerje

$$\frac{OT}{OM} = \frac{OM}{OT'}$$

in zaradi $OM = r$ dobimo $OT.OT' = r^2$. S tem je pravilnost konstrukcije potrjena.

Razpolovimo daljico samo s šestilom. Naj bo dana daljica s krajiščema A in B (slika 4). Narišimo krog s središčem v B in s polmerom AB. Po krožnici nato trikrat zapored nanesimo polmer AB začenši v točki A. Končna točka C, ki jo dobimo pri nanašanju, leži na premici skozi točki A in B in zanjo velja $AB = BC$ oziroma $AC = 2AB$.

Narišimo še en krog - to pot s središčem v A in spet s polmerom AB - ter prezrcalimo točko C glede na ta krog. Za zarcalno sliko C' velja

$$AC \,.\, AC = AB^2$$

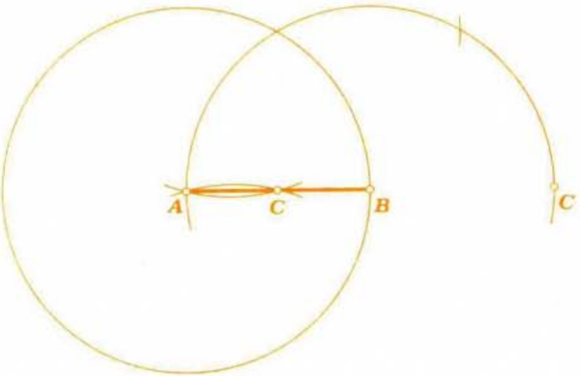
kar da

$$AC' . 2AB = AB^2$$

in

$$2AC' = AB$$

Torej je C' točka, ki razpolavlja daljico AB.



Slika 4

Vse smo res opravili brez uporabe ravnila. Opozorim naj še, da na sliki 4 zaradi preglednosti nismo narisali vsega postopka zrcaljenja točke C, ampak samo C', kot njegov rezultat. S pomočjo slike 3 lahko dopolni risbo bralec sam.

Marija Vencelj

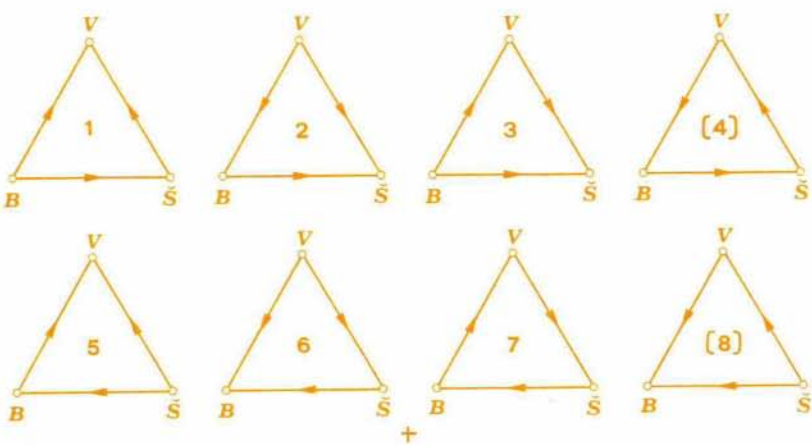
REFERENDUM

Naša občina potrebuje novo bolnišnico, šolo in vrtec; denarja pa ima le za dva objekta. Da bi bilo z izbranima objektoma čim več ljudi zadovoljnih, je bil razpisan referendum. Na njem je moral vsak občan odgovoriti na naslednja tri vprašanja:

1) Naj zgradimo raje bolnišnico ali šolo?
2) Naj zgradimo raje šolo ali vrtec?
3) Naj zgradimo raje vrtec ali bolnišnico?

Možne odgovore (8 jih je) najpregledneje ponazorimo z "usmerjenimi grafi". Vsak tak graf sestoji iz treh točk, ki ponazarjajo bolnišnico, šolo in vrtec. Te tri točke so povezane med seboj z usmerjenimi daljicami. Na primer, če ima neki občan raje bolnišnico kot šolo, bo na njegovem grafu potekala puščica od bolnišnice proti šoli.

Možne odgovore ponazarjajo grafi na sliki 1.



Grafa št. 4 in št. 8 na sliki sem dal v oklepaj. To pa zato, ker občane cenim kot pametne in dosledne ljudi. In težko bi bilo označiti za pametnega in doslednega nekoga, ki ima raje bolnišnico kot šolo, raje šolo kot vrtec in raje vrtec kot bolnišnico!

Res je 2100 občanov "pametno in dosledno" odgovorilo na zastavljena vprašanja. Niti eden ni odgovoril z grafom št. 4 niti z grafom št. 8. Koliko glasov so posamezni grafi dobili, kaže razpredelnica:

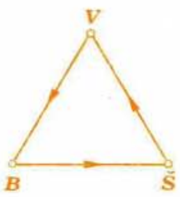
graf št.	prejeti glasov
1	600
2	200
3	300
4	0
5	100
6	500
7	400
8	0

Da bi upoštevali ljudsko voljo in po njej ukrepali, so si ti naši občinski možje zastavili tri vprašanja:

1) Koliko občanov ima raje bolnišnico kot šolo? Odgovor je bil: 600 + 200 + 300 = 1100 (glej grafe 1,2,3). Odveč je pripomniti, da jih je ostalih 1000 imelo raje šolo kot bolnišnico (grafi 5,6,7).
2) Koliko občanov ima raje šolo kot vrtec? Odgovor se je glasil: 600 + 100 + 400 = 1100 (grafi 1,5,7).
3) Koliko občanov ima raje vrtec kot bolnišnico? Odgovor: 200 + 5== + 400 = 1100 (grafi 2,6,7).

Ponazorimo z grafom, kaj ljudje želijo, so dejali mestni očetje. Vse bi bilo v redu, če bi kot končni graf dobili graf 1 (tedaj bi zgradili bolnišnico in šolo ter se odrekli vrtcu) ali graf 2 (tedaj bi zgradili bolnišnico in vrtec, šola pa bi počakala) ali...

Toda zmagal je ravno "nespametni in nedosledni" graf na sliki 2:



GRAF ZADREGE

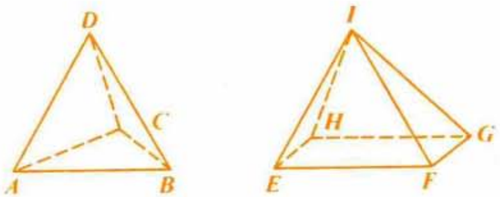
Kljub temu, da je vsak volilec glasoval "dosledno", pa končni graf, ki naj bi izražal željo večine, ni bil "dosleden", saj želje večine iz njega niso mogli dobiti.

Karel Bajc

PIRAMIDI

Prijatelj Marko Kranjc, ki študira v ZDA, mi je zadnjič pisal o problemu, ki je nastal pri ocenjevanju sprejemnega izpita na nekem collegeu. (Ameriški college nekako odgovarja naši višji šoli.) Šlo je za naslednjo nalogo.

Imamo dve piramidi: *ABCD* in *EFGHI*, katerih trikotne stranice so skladni enakostranični trikotniki. Zlepimo trikotnika *BCD* in *EIH*. Koliko stranskih ploskev ima telo, ki ga tako dobimo?



Ameriški sprejemni izpiti so običajno zelo podobni inteligenčnim testom. Sestavljeni so iz mnogo enostavnih vprašanj, ki zahtevajo le kratek razmislek. Na videz je taka tudi naša naloga. Po tem izpitu pa se je eden od študentov pritožil, češ da so mu po krivici šteli rešitev za napačno. Ko so ugotovili, da je pritožba upravičena, so morali razveljaviti rezultate nekaj tisoč drugim študentom.

Vprašanje, koliko stranskih ploskev ima dobljeno telo, zastavljamo zdaj bralcem Preseka. Poskusite iz papirja narediti model tega telesa (seveda kar brez obeh zlepljenih trikotnikov)!

Peter Legiša

SLIKOVNA KRIŽANKA "ZNAMENITI SLOVENEC"

PRITR-DILNICA

DOMAČE Ž. IME

SKLADAT. SAVIN

IVAN TAVČAR

JANEZ MENART

ŽILA DO-VODNICA

LETNI POSEK GOZDA

PR JA JAK

IZVE-DENEC ZA ARIT-METIKO

SOSEDNJI ČRKI

VRSTA OPICE

HLAPLJIVA TEKOČINA, NARKOTIK

PERJE PRI REPI

ENOČLENIK

BESEDA BREZ PO-UDARKA

SANITETNI MATERIAL

POPEVKAR PESTNER

IVAN ČARGO

LUKA V IZRAELU

KALCIJ

OSNOVNA FIZIK. KOLIČINA

KOPNO SREDI VODE (MNOŽ.)

=

VRHNJE OBLAČILO

OKONČINA

D NA

O S

ANGL. Ž. IME

MAZILO

OTOK V ARAFURSK. MORJU

NIZEK ŽENSKI P. GLAS

ENOTA ZA KOLIČINO SNOVI

ARABSKI KNEZ

TURŠKI VELIKAŠ

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

DRAGO TRŠAR

4. ČRKA ABECEDE

VASJA OCVIRK

NEPRO-FESIO-NALEC

2

TRENJE

POD

EVA- LKA OPIN | ANTON KUHELJ

STROJNI ELEMENT ZA ZVEZO | GRŠKA ČRKA | GALEJA | RUSKO M. IME | ALKOHOL. PIJAČA

ITALCI | SL. PISEC ("BOBRI")

ABELOV BRAT | TELOVAD. PRVINA | TORINO

PRITOK ILMENSKE- GA JEZERA V SZ | JAZ (LATIN.) | AMERICIJ

IME VEČ ČEŠKIH VLADARJEV | LADJA ZA PREVOZ VOZIL | VEZNIK

25. IN 18. ČRKA- | EGIPČ. BOG PLODNOSTI | JOŽE (LJUBK.) | NAJOŽJA SORODNICA

ELITEV . MERILU | ČETOVA ,ESTRA | RIJEKA | RUSKO Ž. IME | RADON | NEVOJAK

ROJSTNI KRAJ PRI MORAVČAH | ENOTA ZA MERJENJE | ARIJA (ORIG.)

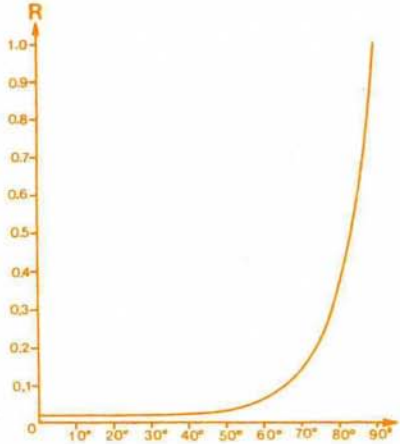
RAZ- SODIŠČE | Ž. IME

ETBIN KRISTAN | TONE TOMŠIČ | TRSKA | VASILIJ MIRK

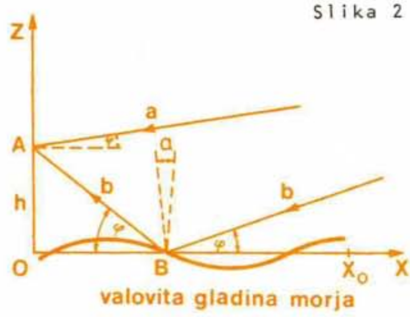
TUJE Ž. IME | OTOK V SREDO- ZEMLJU

ODBOJ SVETLOBE NA VODNI GLADINI

Vodna gladina deluje kot zrcalo. V stoječi vodi se lahko prav dobro vidimo. Za to je potrebno le, da smo dovolj osvetljeni, voda sama pa mora biti v senci. To nam najbolje dokaže pogled v globok vodnjak. Razmerje med svetlobnim tokom odbite in vpadle svetlobe na vodno površino, ki mu pravimo tudi odbojnost, je v splošnem majhno, pri navpičnem vpadu žarkov le okoli 0.02. Zato zaznamo odbito svetlobo le, če je malo stranske svetlobe, ki izvira od osvetljenih predmetov, v okolici ali v vodi sami. Odbojnost R narašča s kotom ϑ med smerjo žarka in normalno na gladino. Glej sl. 1! Znaten odboj dobimo le pri zelo velikih kotih, $\vartheta > 70°$. Dosti sončne svetlobe se na primer odbije na morski gladini ob sončnem vzhodu ali zahodu.



Slika 1



Slika 2

Tedaj vpadajo sončni žarki na morsko gladino zelo poševno in je zato odboj svetlobe močan. Sončni zahod na morju predstavlja izredno lep in slikovit svetlobni pojav. To, kar pri tem vidimo, pa ne spominja dosti na zrcalno sliko sonca v zrcalu, ki naj bi ga predstavljala morska gladina. Namesto zrcalne slike vidimo na morju svetlikajočo se svetlobno progo v smeri zahajajočega sonca. Nekaj podobnega opazujemo na morju in jezerih tudi ponoči ob gledanju odseva oddaljenih svetil. Morska površina ni nikoli gladka kot zrcalo. Njena valovitost vpliva na to, kako se na njej svetloba odbija. Pri vodnjaku se najlaže prepričamo, da valovanje na vodi, ki ga povzročimo s spustom kamenčka, zaniha in popači zrcalno sliko. V tem zapisu bomo poskušali natančneje povedati, kako se svetlobni žarki odbijajo na valoviti gladini vode.

Opazovalec na morski obali gleda zelo oddaljeno svetilo, ki je le malo nad obzorjem. Njegovo oko zazna direktne in na morski gladini odbite žarke. To je ponazorjeno na sl. 2, kjer je tudi predstavljen koordinatni sistem, s pomočjo katerega bomo naredili nekaj preprostih računov. Opazovalčevo oko je na mestu A v višini h nad morjem. Direktni žarek je označen s črko a, žarek, ki se odbije na morski gladini na mestu B, pa s črko b. Izhodišče koordinatnega sistema O predstavlja podnožje opazovalca na nivoju morja. Koordinatna os OX leži na gladini v smeri proti svetilu. Os OZ je navpična. Os OY, ki ni narisana na sl. 2, je pravokotna na ostali dve osi. Koordinate točk na morski gladini so torej (x, y, 0). Kotna višina svetila, ki ga bomo obravnavali kot neskončno oddaljeno, je označena s črko φ.

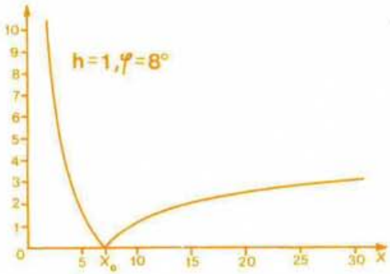
Poglejmo najprej, kdaj se lahko žarek b odbije v točki B s koordinatami (x, 0, 0) tako, da odbiti žarek pride v opazovalčevo oko pri A. Pogoj za to je primeren nagib α vodne gladine v tej točki glede na vodoravno lego. Ker sta pri zrcalnem odboju vpadni in odbojni kot enaka, sledi iz slike zahteva

$$\varphi' - \alpha = \varphi + \alpha$$

ali

$$\alpha = \frac{1}{2} \left|\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{x}\right) - \varphi\right]\right|$$

Odvisnost absolutne vrednosti kota α je pokazana na sl. 3 za $h = 1$ in $\varphi = 8^{\circ}$. Posebnost predstavlja točka $x_0 = h\mathrm{tg}^{-1}\varphi$, kjer je $\alpha = 0$ in ki ustreza mestu zrcalnega odboja pri popolnoma vodoravni vodni gladini. V področju $x < x_0$ kot $|\alpha|$ hitro raste z zmanjševanjem oddaljenosti x. Nasprotno pa naraščanje $|\alpha|$ z rastočim x pri $x > x_0$ ni tako hitro in v limiti $x \to \infty$ kot $|\alpha|$ doseže razmeroma majhno vrednost $\varphi/2$. Različno obnasenje $|\alpha|$ pri $x < x_0$ in $x > x_0$ je zelo pomembno za razumevanje svetlobne proge na morju ob sončnem zahodu. Svetlobna proga nikoli ne sega do obale oziroma opazovalca. Začne se šele v neki razdalji. Pogled na sl. 3 nam takoj pove zakaj. Nagib, ki ga ima lahko del vodne gladine na vodoravno ravnino, je odvisen od valovitosti ali razburkanosti morja. Pri dokaj mirnem morju, le tedaj je sončni zahod zares lep, so veliki nagibi malo verjetni. Zato ne pride do odboja pri majhnih razdaljah. Slika nam tudi pove, da pri velikih x te omejitve pri zahajajočem soncu ne bo, ker je največji potreben nagib le $\varphi/2$.



Slika 3

Čim bliže horizontu je svetilo, tem večja je razdalja x_0. Pri $h = 2\mathrm{m}$ in $\varphi = 8^{\circ}$ je x_0 približno 14m.

Do tu smo se zanimali le za odboj svetlobe na morski gladini vzdolž črte 0X. Žarki svetila pa se lahko odbijejo tudi na delih morske gladine levo in desno od te črte tako, da pride odbita svetloba v opazovalčevo oko. Le nagib ustreznega dela morske površine mora biti ravno pravilen. Iz študija pogojev, ki morajo biti izpolnjeni pri takem odboju, bomo razumeli, kaj določa širino svetle proge na morju. Zanima nas predvsem nagib

α, ki ga mora imeti normala na vodno površino na mestu $(x, y, 0)$ glede na navpičnico. Kako izračunamo α bomo le nakazali.
Z nekaj spretnosti in znanja trigonometrije ali vektorskega računa bo bralec sam izpeljal odvisnost kota α od koordinat x in y. Najprej si izberemo dva enotina vektorja e_s in e_0. Prvi kaže iz točke $(x, y, 0)$ proti svetilu, drugi pa proti opazovalcu. V komponentni obliki se vektorja e_s in e_0 zapišeta

$$e_s = (\cos\varphi, \ 0, \ \sin\varphi)$$

$$e_0 = (h^2 + x^2 + y^2)^{-1/2}(-x, \ -y, \ h)$$

Pri odboju na zrcalu ležita vpadni in odbiti žarek v ravnini, ki gre skozi normalno n na zrcalo in z njo tudi oklepata enak kot. Glej sl. 4! Sklepamo, da vektor $e_s + e_0$ kaže v smeri normale n na vodno gladino v točki $(x, y, 0)$. Komponente vektorja $e_s + e_0$ so

$$e_s + e_0 = \left[\cos\varphi - \frac{x}{(h^2 + x^2 + y^2)^{1/2}}, \ \frac{y}{(h^2 + x^2 + y^2)^{1/2}}, \ \sin\varphi + \frac{h}{(h^2 + x^2 + y^2)^{1/2}},\right]$$

Njegova dolžina pa je po Pitagorovem izreku

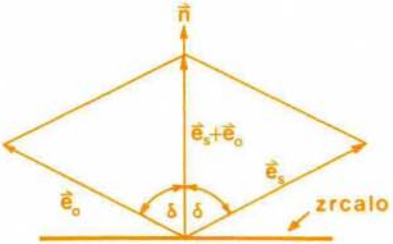
$$\left|e_s + e_0\right| = 2^{1/2} \left[1 + (h \sin\phi - x\cos\phi)(h^2 + x^2 + y^2)^{-1/2} \ {}^{1/2}\right]$$

Sedaj z lahkoto izračunamo potreben nagib normale na vodno gladino na mestu $(x, y, 0)$. Kosinus nagiba α je podan z razmerjem komponente z vektorja $e_s + e_0$ in njegove dolžine. Torej

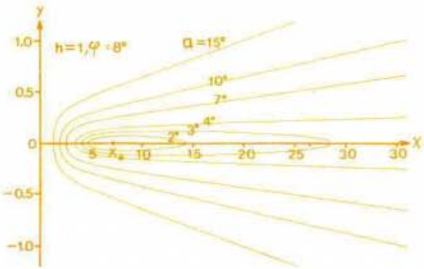
$$\cos \ = 2^{-1/2} \frac{\sin\varphi + h \ (h^2 + x^2 + y^2)^{-1/2}}{[1 + (h \sin\varphi - x \cos\varphi)(h^2 + x^2 + y^2)^{-1/2}]^{1/2}}$$

Ta izraz nam omogoča izračunati α za poljubno mesto na gladini. Na sl. 5 so narisane črte, ki povezujejo na vodni gladini točke z enakim nagibom α za primer $h = 1$ in $\varphi = 8°$.

Ne prezri, da je merilo v smeri y drugačno kot v smeri x! Pri kotih $\alpha < \varphi/2$ so črte enakega nagiba zaključene krivulje, pri $\alpha > \varphi/2$ pa ne. Težišče ploskve, ki jo omejuje zaključena krivulja, se z rastočim α odmika od točke $x = x_o$, ki ustreza odboju na vodoravni gladini, vedno bolj proti velikim x. Sl. 5 spominja na glavo kometa z jedrom in repom. Zanimivo je, da kot α zelo hitro narašča z $|y|$, če držimo x konstanten. Zato so majhni nagibi možni le v neposredni bližini osi OX. Ob mirnem morju prevladujejo le majhni α. Sedaj je razumljivo, zakaj je svetlobna proga, ki jo vidimo na morju ob sončnem zahodu, razmeroma ozka. Pri zelo velikih razdaljah $x \gg x_0$ se krivulje enakega nagiba, če je $\alpha > \varphi/2$, močno razširijo. Vendar pri tem y ne raste hitreje kot x.



Slika 4



Slika 5

Migotanja odbite svetlobe ni treba posebej razlagati. Morje valovi in nagib α na izbranem mestu gladine se stalno spreminja. Odbita svetloba pride v oči opazovalca le v trenutkih, ko je izpolnjen pogoj, ki smo ga izpeljali za kot α.

Zanimivo bi bilo videti, kakšna je pogostost različnih nagibov. Dati kolikor toliko zanesljiv odgovor na to vprašanje ni lahko. Očitno je le, da so majhni nagibi bolj verjetni kot veliki. Pri čistem sinusnem valovanju je največji možen nagib $\alpha = \mathrm{arctg}\,(2\pi H/\lambda)$, kjer je H amplituda valovanja in λ valovna dolžina. Velike nagibe dobimo torej le pri velikih amplitudah ali majhnih valovanih dolžinah valovanj.

Tu smo govorili le o velikosti nagiba vodne gladine. Za smer, v katero so površina vode nagne, se pa nismo zanimali. V resnici je velikost nagiba pogosto močno odvisna od smeri. Ob obalah stoječih voda navadno prevladujejo valovanja, ki so usmerjena proti kopnemu. Zato so nagibi površine v smeri proti obali ali proč od obale večji kot v smeri vzdolž obale. To so pa že podrobnosti, ki bi jih morali upoštevati ob natančnejšemu študiju odboja svetlobe na valoviti gladini vode.

P. Gosar

PRESEKOV ŠKRAT

POPRAVEK

Presekov škrat je v 4. nalogi za II. razred z XXI. zveznega tekmovanja srednješolcev v matematiki (Presek *8* (1980-81) 3, str. 170) postrožil dva neenačaja in s tem napravil nalogo manj zanimivo. Pravilno mora biti $a_{19} \leq 200$ in $b_{21} \leq 200$. Prav tako je škrat šaril po nalogah za IV. razred, kjer mora biti v 2 nalogi $n \geq k$, v 3. nalogi pa je

$$a_{n+1} = 2c_o + c_1 + 10c_2 + \ldots + 10^{k-1}c_k$$

Marko Petkovšek

Uredništvo Preseka

Teroristična dejavnost Presekovega škrata je imela tudi v tretji številki Preseka (8, 80/81) hude posledice. Škrat je v članek o namizni avtomobilski dirki podtaknil kar tri mine. Najprej je prisilil risarjevo roko, da je narobe narisal sliko 2, nato je obe sliki zamenjal, nazadnje pa še popačil avtorjev priimek. Slednje se pogosto dogaja tudi bolj izkušenim uradnim organom, kar je za škrata najbrž olajševalna okoliščina. Za napako na sliki 2 pa predlagam, da jo bralci sami poiščejo.

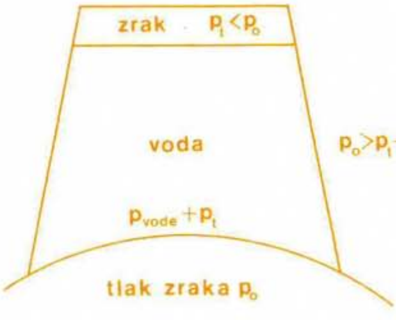
Ljubljana, 13. 2. 81

Roman Rojko

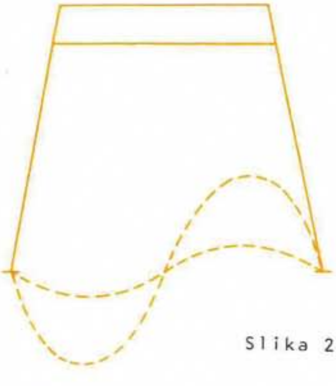
POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

V tretji številki lanskega Preseka smo vam zadali nalogo o jogurtovem lončku. Dobili smo precej odgovorov, vsi so pravilno opisali izid poskusa, pri razlagi pa se je marsikomu zataknilo. Žal je urednica te rubrike zbolela in vam ne morem povedati, kdo vse je poslal odgovor in kdo je dobil nagrado. To boste zvedeli v drugi številki letošnjega Preseka. Sedaj pa opišemo in razložimo nalogo.

Če lonček poln vode prekrijemo s papirjem in obrnemo, voda ne odteče. Zunanji zračni tlak na papir je malo večji od tlaka vode nanj. Majhna tlačna razlika premaga težo papirja in ga še rahlo upogne navzgor. Tako se papir lepo prileže na rob kozarca (glej sliko 1). Kako pride do tega? Tlak zraka na vrhu kozarca je namreč enak zračnemu tlaku, ko je kozarec v pokončni legi.



Slika 1

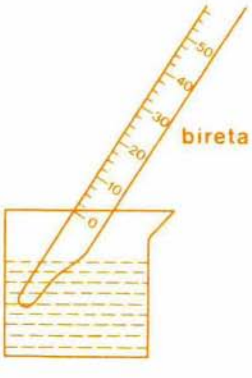


Slika 2

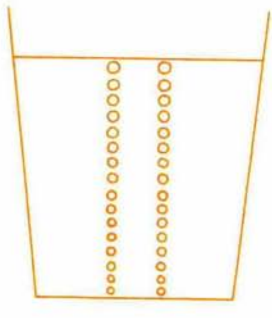
Če kozarec poveznemo, se zrak dvigne na kozarčevo dno, njegov tlak je še vedno enak zračnemu. Če papir spustimo, se vodna gladina neopazno zniža. Zrak se razpne, zato se tlak zmanjša.

Gladina se zniža toliko, da zunanji zračni tlak premaga vsoto tlaka zraka v kozarcu in hidrostatičnega tlaka vode. Gladina se znižuje zaradi odtekanja vode iz kozarca, če ni bil papir že pri obračanju kozarca upognjen. Poskus se lepo posreči s tršo a upogljivo ravno plastično folijo.
Vse utemeljitve, ki smo jih navedli, bi držale tudi, če ne bi imeli papirja. Zakaj ga potem sploh rabimo? Vodna gladina je "premehka" in bi majhna motnja povzročila hudo deformacijo površine (glej sliko 2). Voda bi prav hitro iztekla. Če imamo dovolj ozko cev pa gre tudi brez papirja. Površina se tu ne deformira. Ponekod še danes uporabljajo posebno buče za prenašanje vina iz soda v kozarce (slika 3). Odprtino zgoraj zamašijo s prstom in narahlo odprejo, ko hočejo vino natočiti. Na podoben način potekajo tekočine kemiki z ročnimi biretami (slika 4).

Slika 3



Slika 4



Slika 5

Ko plastelin odstranimo, voda hipoma izteče. Tlak na vrhu kozarca se v trenutku izenači z zračnim, papir teže vode ne zdrži.
Zdaj pa k novi nalogi!

Nalijte v kozarec kislo vodo in opazujte mehurčke, ki se dvigajo na površino (slika 5)! Kateri so hitrejši, večji ali manjši?

Kozarec naglo dvignite! Ali se hitrost mehurčkov glede na kozarec poveča ali zmanjša? Kozarec hitro spustite! Kako je zdaj s hitrostjo mehurčkov glede na kozarec? Ker morate opazovati hitrost mehurčkov *glede na kozarec*, je najbolje, da ga držite trdno pred očmi in se dvigate ter spuščate sami. Poskusite svoja opažanja tudi razložiti! Naj vam pomagajo še starši ali učitelji! Najboljše odgovore bomo nagradili. Nanje čakamo do 30. septembra 1981.

Andrej Likar

UGANKA O LOVCU

Nekateri morda še ne poznate uganke o lovcu, ki je hodil en kilometer proti jugu, en kilometer proti vzhodu, nato pa še en kilometer proti severu in je prišel na isto mesto, kjer je svojo pot začel. Nato je ubil medveda, uganiti pa je treba, kakšne barve je ta medved.

Najprej nas seveda zanima, kje se nahaja tisto mesto, kamor se je lovec po svoji poti v treh različnih smereh vrnil. Po krajšem premisleku pridemo do sklepa, da se ta lovska zgodba dogaja na severnem tečaju, naš lovec (najbrž je Eskim) pa je prehodil pot, ki ji učeno rečemo tudi sferični trikotnik.

To pa pomeni, da je medved bele barve.

Sedaj pa si oglejmo še malo manj znano nadaljevanje te uganke: Ali je severni tečaj edina točka na Zemlji, ki ima opisano lastnost?

Roman Rojko

TEKMOVANJA - NALOGE

REPUBLIŠKO PREDTEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV - SREDNJEŠOLCEV

Čeprav je bil 7. marec eden prvih lepih pomladnih dni v letošnjem letu, se je šolskih predtekmovanj iz matematike udeležilo kar 1073 dijakov in dijakinj (377 v 1., 298 v 2., 230 v 3. in 168 v 4. razredu) s 33 srednjih šol iz vse Slovenije. Kljub temu, da naloge niso bile prelahke, je bil uspeh v prvih treh letnikih izredno dober: šolske tekmovalne komisije oz. aktivi profesorjev matematike in fizike, ki so predtekmovanje izvedli, so za republiško tekmovanje predlagali v 1. r. 103, v 2. r. 82 in v 3. r. 79 kandidatov. Poprečno število točk predlaganih tekmovalcev je bilo v 1. r. 13,33, v 2. r. 13,83 in v 3. r. 13,48. V 4. razredu pa je bil uspeh slab, saj je bilo predlaganih le 29 dijakov s poprečno 10,91 točkami. Dosegljivih točk je bilo 20.

Naloge s predtekmovanja:

1. razred

1. Za katere p so števila p, $p + 10$, $p + 20$ praštevila?
2. Z elementi množice ostankov pri deljenju z a, ki jo označimo z $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}a$, računamo takole: vsoto dveh elementov dobimo tako, da ju seštejemo na običajen način in dobljenemu številu poiščemo ostanek pri deljenju z a; produkt dveh elementov dobimo tako, da ju zmnožimo na običajen način in dobljenemu številu poiščemo ostanek pri deljenju z a. Tako napravimo iz $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}a$ kolobar. Sestavi seštevanko in poštevanko za kolobar $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ in reši v njem enačbo

$$3x + 2 = 1$$

3. Števili x^7 in x^{12} sta racionalni. Dokaži, da je x racionalno število!
4. Iz zvezka iztrgamo najprej vsak sedmi list, izmed preostalih listov vsak peti list in končno izmed preostalih listov še vsak tretji list. Ostane 25 listov.
   Koliko listov je imel zvezek na začetku?

2. razred

1. Naj bo $a>0$. Poišči vse rešitve enačbe

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$$

2. Naj bo $a>1$, $b>1$. Poišči vse rešitve sistema dveh enačb z dvema neznankama

$$\log_a x + \log_a y = 2$$
$$\log_b x - \log_b y = 4$$

3. Krogu je očrtan enakokrak trapez, ki ima kot ob osnovnici $30°$ in znano ploščino p. Kolik je krak?
4. V kvadratu $ABCD$ s stranico a označimo razpolovišče stranice CD s P in razpolovišče stranice AD s Q. Daljici BP in CQ se sekata v točki T. Izračunaj dolžino daljice AT!

3. razred

1. Ničle polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ so tri zaporedna cela števila. Izračunaj a in b!
2. Poišči vse rešitve enačbe

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

3. Izračunaj vsoto

$$S = \sin^2 x + \sin^2(x+1°) + \sin^2(x+2°) \ \dots\ + \sin^2(x+179°)$$

4. Trije hokejski klubi, A, B in C, so priredili turnir, na katerem je igral vsak klub z vsakim. Kot običajno je dobil klub za zmago 2 točki, za neodločen izid 1 točko in za poraz 0 točk. Po turnirju je bila v časopisu objavljena naslednja razpredelnica:

				število			
klub	odigr. tekem	zmag	porazov	neodl. tekem	danih golov	doblj. golov	točk
A	2	2	0	1	0	2	3
B	2	1	1	0	3	6	2
C	1	0	1	2	0	1	1

Drugi dan je časopis objavil popravek, da so bila v razpredelnici natanko 4 števila napačna. Zapiši pravilno razpredelnico!

4. razred

1. Poišči vse polinome $p(x)$ z lastnostjo

$$p(2x) = p'(x) \cdot (p'(x))'$$

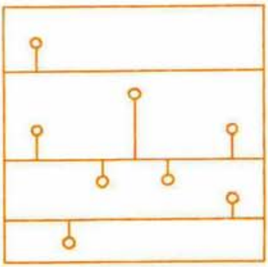
2. Naj bo $0<x<\Pi$. Izračunaj

$$\lim_{n \to \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \quad \cos \frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos(x/2^n)$$

3. Naj bodo a, b in c od nič različna realna števila. Poišči vse realne trojice (x, y, z), za katere je

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = 0$$

4. Ozemlje neke države ima obliko kvadrata s stranico 1000km. Državne meje potekajo v smereh sever - jug in vzhod - zahod. V državi je 288 mest. Njeni prebivalci nameravajo zgraditi novo cestno omrežje, ki bo sestavljeno iz nekaj glavnih cest, potekajočih čez celo državo v smeri vzhod - zahod, in iz stranskih cest v smeri sever - jug, s katerimi todo vsako mesto povezali z najbližjo glavno cesto. (Glej sliko!) Koliko glavnih cest in v kakšnih razdaljah od južne države meja naj zgrade, da celotno omrežje ne bo daljše od 24000 km?



Morda je zanimiv podatek tudi poprečno število točk, ki so jih predlagani tekmovalci dosegli pri posameznih nalogah (od 5 možnih):
3/4 - 4.85, 1/2 - 4,73, 3/1 - 4,70, 1/4 - 3,88, 2/2 - 3,72, 2/1 - 3,68, 2/3 - 3,57, 4/4 - 3,43, 1/1 - 3,31, 4/3 - 3,28, 2/4 - 2,86, 4/1 - 2,79, 3/2 - 2,33, 3/3 - 1,60, 4/2 - 1,41, 1/3 - 1,41. Prva številka pomeni razred, druga nalogo, tretja poprečje točk.
Izmed predlaganih kandidatov je tekmovalna komisija pod vodstvom dr. Egona Zakrajška izbrala 140 tekmovalcev za jubilejno 25. republiško tekmovanje, ki je bilo 4. IV. 1981 v Ljubljani.

Marko Petkovšek

DVA DECI

V kozarcu *A* je deci vina, v kozarcu *B* deci vode. Iz kozarca *A* vzamemo žličko vina in to vino prelijemo v kozarec *B*. Dobro premešamo. Nato iz kozarca *B* odlijemo kozarcu *A* žličko mešanice.

Vprašanje: Ali je odstopil več vina kozarec *A* kozarcu *B* ali več vode kozarec *B* kozarcu *A*?

Karel Bajc

LETALSKA NALOGA

Na majhnem otoku je letališče. Na njem so enaka letala, ki lahko nosijo toliko goriva, kolikor ga je potrebno za polovico poti okoli Zemlje. Letala lahko med poletom pretakajo gorivo iz enega letala v drugo. Edini vir goriva je na letališču.

Koliko letal je najmanj potrebno, da bo eno od njih preletelo pot okoli Zemlje brez pristanka in se bodo vsa letala varno vrnila na letališče? Zaradi lažjega razmišljanja vzemimo, da ne vzame pretakanje goriva nič časa.

Roman Rojko

Naloga s kroglicami

Na mizi imamo tri posode. V prvi sta dve beli kroglici, v drugi sta dve črni kroglici, v tretji pa je ena bela in ena črna kroglica. Na vsaki posodi je pritrjen napis, na katerem preberemo, kaj se v posodi nahaja. Nek šaljivec je pomešal posode in napise na njih, tako da sedaj noben napis ne izdaja prave vsebine posode. Koliko kroglic moraš najmanj pogledati, da lahko zanesljivo poveš, kaj se v kateri posodi nahaja?

Koledarska naloga

Predstavljajmo si koledar, ki ima za prikaz dneva dve kocki s številkami. Ko želimo spremeniti datum, obrnemo kocki tako, da kažeta ustrezni številki. Zanima nas, katere številke so napisane na kockah, da lahko z njimi prikažemo vse datume od 01 do 31.

Roman Rojko

PRVA ŠTEVILKA NA ZADNJE MESTO

Poišči najmanjše naravno število N z naslednjo lastnostjo: če številu N skrajno levo številko prenesemo na skrajno desno, je tako dobljeno število N' enako poldrugemu številu N ($N' = 3/2\ N$)!

Karel Bajc

PISMA BRALCEV

Barbara Motnikar iz Kamnika nam je poslala, po žigu sodeč pravočasno, spominčico za število π. Kdo ve zakaj pa je pismo nekoliko dalj časa romalo do nas. Ker je njen prispevek duhovit, ga z zamudo objavljamo na tem mestu:

KAJ Z RIMO O KROGU OPISOVALI BI ŠTEVIL OBILO,
SAJ SKLOP ZAPLETEN RAZREŠUJE ŠESTILO

Lilijana Mihelič nam je ob spominčici pisala še tole:
Presek mi je všeč in ga vedno preberem. Tudi drugače se veliko ukvarjam z računanjem in matematiko. Ob računanju raznih nalog sem ugotovila pravili

1. $a^2 - b^2 = a + b \Longrightarrow a - 1 = b$
2. $a^2 - b^2 = 4b + 4 \Longrightarrow a - 2 = b$

Seveda si ugotovila, ko je pa (skoraj) res! Prvo pravilo najdeš, če enakost deliš z $(a + b)$. Drugo pravilo pa se izlušči, če na obeh straneh prišteješ b^2 in opaziš, da je $b^2 + 4b + 4$ kvadrat dvočlenika. Kdaj pa ti pravili vendarle ne veljata?

Iz vojske nam je pisal *Rudolf Bregar:*
Presek mi je zelo všeč in tu v vojski preberem vsega od prve do zadnje strani. Pošiljam vam nekaj nalog iz fizike in matematike. Moram pa reči, da si jih nisem sam izmislil in da sem jih dobil v ruski reviji Kvant. Samo posplošil sem jih in jim spremenil besedilo, drugače pa je osnova ista. Mislim, da bi bilo dobro, če bi to revijo predstavili v Preseku. Revija Kvant ima zelo veliko takih nalog.
Vsem članom uredništva želim še veliko delovnih uspehov pri sestavljanju in urejanju Preseka.

Najprej hvala za dobre želje, za naloge in za predlog. Kot vidiš, smo ga sprejeli in med novimi knjigami predstavljamo Kvant. Naloge bomo prej ali slej uporabili v Preseku. Z matematičnimi in fizikalnimi nalogami je približno tako kot s šalami. Največkrat sploh ni jasno, kdo je avtor, gredo od ust do ust, vsakdo nekaj svojega doda ali kaj spremeni. Pozdravljen, pa piši nam še kaj.

Lep pozdrav. Še naprej imejte take ali še večje uspehe pri urejanju Preseka. Mogoče še majhna prošnja. Objavljate čudovite matematične naloge, toda veliko zanimivosti zgubijo, če so zadaj rešitve. Roka te kar srbi, da bi poškilil v rešitve. Torej predlagam, da bi rešitve nalog raje objavljali v naslednji številki. Lep pozdrav

Magda Čevdek, Nova Gorica

Podobno kot ti smo razmišljali že tudi v uredniškem odboru. Po drugi strani pa nas skrbi, da mine preveč časa od ene do druge številke Preseka in bralci že pozabijo, kakšna je bila naloga ali pa jih ne zanima več. Seveda je tvoj predlog zanimiv, kot vsi predlogi bralcev; o objavljanju nalog in rešitev bomo morali še razpravljati. Veseli bomo vseh mnenj in predlogov!

Peter Petek

Iz *Kostanjevice na Krki* smo prejeli naslednje pismo:
Tovariš Presek! Pošiljamo ti lepe pozdrave in ti želimo v novem desetletju še mnogo uspehov. Člani matematičnega krožka 7. razreda smo sklenili, da ti pošljemo skromni prispevek, nalogo, ki naj bi ne bila pretežka za osnovnošolce, za katere objavljate bolj malo nalog. Poleg te naloge vam pošiljamo tudi spominčici za število π, ki smo se jih sami že naučili. Čeprav smo pozni, upamo, da jih boste vsaj prebrali.

Pismo, ki so nam ga poslali člani matematičnega krožka 7. razreda osnovne šole Kostanjevica na Krki, nas je razveselilo posebno za to, ker smo začutili učinek Preseka, da vas je združil v aktivno skupino. Hvala za prispevek in s tem za pomoč pri prizadevanju, da bi Presek približali osnovnošolcem. Želimo vam obilo uspeha in rasti na področju matematike.

Andreja Erdlen iz Poljčan piše:
Spoštovani! Obiskujem tretji letnik ekonomske srednje šole - turistična smer v Celju. Presek sem naročala že v osemletki, zdaj pa mi ga naroča prijateljica, ki hodi na pedagoško gimnazijo. Zelo mi je všeč, čeprav nalog ne rešujem sproti - tokrat pač, ko imam čas. No, čeprav je danes zadnji dan počitnic, sem si vzela čas za "trenutke matematike". Rešila sem nekaj nalog iz starih Presekov, pa tudi sama sem sestavila eno, ki vam jo danes pošiljam.

Draga Andreja, tvojo nalogo smo z veseljem sprejeli za objavo, tebe pa za sodelavko, če se tudi ti s tem strinjaš. Kadar boš spet utegnila, nam le piši. Lep pozdrav tebi in tvoji prijateljici.

Zoranu Gromu iz Vrhnike se zahvaljujemo za pismo in pesmico z obširnim komentarjem. Upamo, da si prebral obdelano spominčico v rubriki Premisli in reši. Oglasi se še kdaj. Srečno!

Marina Šimec iz Črnomlja nam je napisala takole:
Spoštovani! Prejmite lepe pozdrave od prvošolke črnomeljske gimnazije. Zdi se mi da so članki Preseka na primerni višini. Najbolj me zanima astronomija, tudi o tem je zelo veliko napisanega. V 2. številki letošnjega Preseka sem zasledila na zadnji strani članek Zapomnite si število π. *Pošiljam vam pesmico, čeprav sama priznam, da je slaba. Naj bo kot dokaz, da rada rešujem vaše uganke, čeprav se največkrat bojim poslati rešitev.*

Marina, tvoje zvesto spremljanje Preseka ima veliko vrednost. Pogumno nam pošiljaj svoje rešitve. Tako si boš pridobila sposobnosti za sestavljanje nalog, ki bodo lahko obogatile Presek. Pozdravljena!

Matejka Kropec je poslala pismo v katerem pravi:

Spoštovani prijatelji! Da, kar prijatelji vas imenujem, čeprav se ne poznamo osebno, toda vaš Presek se mi je tako priljubil, da ga berem od začetka do konca, celo po večkrat. Naloge rešujem bolj za zabavo, a vseeno so mi večkrat pomagale pri kontrolkah. Všeč so mi naloge iz fizike in iz matematike. Tudi za astronomijo se zanimam. Večkrat rešujem naloge za srednje šole, čeprav sem šele učenka 7. razreda osnovne šole.

Matejka, hvala za prijateljsko pismo in za spominčico. Tudi v bodoče nam pošiljaj svoje rešitve. Lepo te pozdravljamo.

Matilda Lenarčič

NALOGE

MIMOBEŽNICI

Dani sta mimobežnici p in q. Na premici p izberemo različni točki A in B, na premici q pa različni točki C in D. Skozi točki A in C potegnemo premico a, skozi B in D premico b. Ali se premici a in b lahko sekata? Odgovor utemelji!

Janez Rakovec

1. Če v enakostraničnem trikotniku zvežemo središča stranic, dobimo štiri skladne trikotnike. Če izločimo en trikotnik, nam ostane trapez.
   Ali lahko ta trapez razdeliš na štiri skladne trapeze?
2. Iz štirih enakih paličic in paličic, ki so dvakrat daljše, sestavi tri skladne kvadrate!
3. Nariši samo s šestilom pet točk, ki ležijo na isti premici - kolinearne točke!

Pavle Zajc

NOVE KNJIGE

O Kvantu

Že nekaj let sem naročnik ruske revije Kvant. Izhaja enkrat mesečno. Kvant je namenjen popularizaciji fizike in matematike. Vsaka številka obsega okrog šestdeset strani bogato ilustriranega teksta, ki je razdeljen na več ali manj stalne rubrike, kot so: Delavnica Kvanta, Matematični krožek, Naloge, Po straneh učbenikov, Kvant za mlajše šolarje, Praktikum maturantov, Recenzija in bibliografija, Vesti, Rešitve in odgovori in Šahovska stran. Na začetku vsake številke je več krajših preglednih člankov iz matematike, fizike in astronomije. V rubriki Delavnica Kvanta je opisan določen fizikalni pojav in kako ga izmerimo. Ti poskusi so ponavadi dokaj preprosti, kljub temu pa zahtevajo precej fizikalnega znanja in iznajdljivosti. V Matematičnem krožku je dobro obdelana določena matematična tema (običajno iz geometrije ali iz analize funkcij). V razdelku za vaje so dane štiri matematične in štiri fizikalne naloge, zraven pa še rešitve nalog iz starejših številk. V rubriki Po straneh učbenikov so natančno obdelana določena matematična poglavja, ilustrirana z nalogami. Kvant za mlajše šolarje postavlja štiri lažje naloge iz geometrije in aritmetike in krajši članek posvečen matematični ali fizikalni temi, toda ta rubrika običajno ne presega štirih strani. V Praktikumu maturantov so ponavadi predstavljeni postopki za reševanje določenega tipa matematičnih ali fizikalnih nalog. Ta rubrika naj bi bila predvsem trening za sprejemne izpite na fakultetah. Velikokrat ji sledi še cel spisek nalog s sprejemnih izpitov ali pa včasih naloge z matematičnih in fizikalnih olimpiad.

Recenzija in bibliografija nam predstavi in kritično oceni nove knjige, v glavnem preprosto in jasno pisane za širok krog bralcev. Na zadnjih straneh je informacija o organizaciji raznih fizikalnih in matematičnih šol. Šahovska stran pa ponuja razne šahovske probleme in rešitve problemov iz starejših številk.

Revija Kvant je primerna predvsem za srednješolce, za osnovno šolo pa je v glavnem pretežka, saj so osnovnošolcem namenjene le štiri strani. Posebna ovira pri branju je ruski jezik in pisava - cirilica. Komur ruščina ni ovira, lahko naroči revijo Kvant oktobra v trgovini DZS, Titova 25.

F. Sever

PROSEN MARIJAN - UTRINKI IZ ASTRONOMIJE, Mladinska knjiga, 1980. Cena 340.-

Knjiga zapolnjuje vrzel v tovrstni mladinski literaturi pri nas. Vsebina je razdeljena na tri dele. V prvem so obdelani astronomski pojmi, v drugem se srečamo z zanimivo predstavitvijo astronomije skozi zgodovino, v tretjem delu pa avtor bralca seznani z nekaj primeri astronomske prakse, od katerih je posebej privlačno predstavljenih pet poskusov za domačo rabo. Priložen je tudi seznam domačih in prevedenih del iz astronomije, ki jih avtor priporoča v branje. Knjiga je opremljena z odličnimi ilustracijami Matjaža Schmidta.

Bojan Dintinjana

ČLANOM AKTIVA MATEMATIKOV NA SREDNJIH ŠOLAH

V Zbirki izbranih poglavij iz matematike, ki jo izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije v imenu VTO Matematika in mehanika pri Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, je do lani izšlo že 16 učbenikov. Ker je med njimi več takih knjig, ki so zanimive za učitelje matematike, bomo poslali na ogled na vsako srednjo šolo v Sloveniji izbor knjig iz te zbirke. Predlagamo, da si knjige ogledate najprej učitelji, pokažete jih tudi drugim kolegom na šoli ter nam sporočite, katere knjige boste naročili. Če bo za člane kolektiva zanimivih več knjig istega naslova, vam jih bomo poslali naknadno. Knjige, ki vas ne bodo zanimale, nam vrnite. V zavitku vam bomo poslali naslednje knjige:

		Cena v din
4.	Zakrajšek E., Programski jezik pascal	70.- (56.-)
11.	Suhadolc A., Linearni topološki prostori	150.-(120.-)
12.	Wirth N., Računalniško programiranje	250.-(200.-)
13.	Petek P., Vaje iz diferencialnih enačb	225.-(180.-)
14.	Nadrah N., Cobol	250.-(200.-)
15.	Kramar E., Zbirka vaj iz verjetnostnega računa	60.- (48.-)
16.	Hladnik M., Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere	125.-(100.-)
	Muršič M., Osnove tehniške mehanike, 1. del., Statika	250.-(200.-)
	Skupna vrednost poslanih knjig	1380.-(1104.-)

Na zalogi pa imamo še nekatere druge knjige iz te zbirke:

	Cena v din
3. Zakrajšek E., Fortram	250.-(200.-)
5. Jamnik R., Uvod v matematično statistiko	70.- (56.-)
6. Dobovišek M., Rešene naloge iz analize I., 1. del	80.- (64.-)
7. Kričanič F., Linearna algebra	100.- (80.-)
8. Zakrajšek E. Update	40.- (32.-)
10. Suhodolc A., Sebi adjungirani operatorji	12,50(10.-)

Še posebej pa priporočamo boljšim dijakom, ki se zanimajo za matematiko in računalništvo, oz. tistim, ki obiskujejo matematično oz. računalniško usmeritev, da si ogledajo učbenike programskih jezikov: Fortran, Pascal, Cobol, ter učbenik Računalniško programiranje, ki jih bodo lahko s pridom uporabljali pri pouku.

V oklepaju so navedene cene, ki veljajo za člane društva in naročnike Preseka, v tej akciji pa tudi za ustanove. Zato vam priporočamo, da ob tej priliki oskrbite tudi šolske knjižnice z našimi izdajami.

Knjige vam bomo poslali zadnje dni septembra. Če jih ne želite prejeti, vas prosimo, da nam to sporočite na naš naslov, oz. na tel. številko (061) 265-061/53 do 15. 9. 1981. Odločitev, koliko knjig boste naročili pa nam pošljite vsaj do 31. 10. 1981.

Ciril Velkovrh

PREMISLI IN REŠI

Na koliko različnih načinov lahko plačaš 1 dinar? Uporabi seveda kovance za 0,05, 0,10, 0,20, 0,50 in 1 din.

Rok Sosič
Kranj

NALOGE BRALCEV

1. Alenka je trikrat mlajša od mame in petkrat mlajša od stare mame. Branko je za tretjino starejši od Alenke in trikrat mlajši od očeta. Stari oče bo čez devet let štirikrat starejši od Alenke. Koliko so stari posamezni člani družine, če je njihova skupna starost danes 247 let?

Andreja Erdlen

2. Produkt drugega in dvanajstega člena aritmetičnega zaporedja je enak 1, produkt četrtega in desetega pa je enak b. Poišči sedmi člen zaporedja!

3. Reši enačbo $x^2 - [x] = 2$, kjer je $[x]$ celi del števila x.

Rudolf Bregar

1,6		
		1,3
$2\frac{41}{64}$		

4. Dopolni prazna polja v kvadratu, da bo produkt v vseh vodoravnih in navpičnih vrstah enak 13.

Sonja Dolžan

5. V neki vasi je komaj dvanajst hiš, vendar kar pecej prebivalcev. Hišne številke so od 1 do 12.

V hišah s številkama 3 in 12 je po 5 članov. V hišah št. 2, št. 8 in št. 9 sta po dva člana. V hiši št. 4 je dvakrat toliko oseb, kot jih je v hiši št. 3. Če seštejeŠ število ljudi v hišah št. 9 in št. 4 in deliš z dva, dobiš število oseb v hišah št. 10 in št. 11. Vedi pa, da ima hiša št. 10 manj članov kot hiša št. 11. V novo hišo št. 5 sta se vselila dva mladoporočenca. V hiši št. 6 je štiričlanska družina, v hiši št. 7 pa dvakrat večja. V hiši št. 1 so včeraj dobili prvega otroka.

Koliko ljudi stanuje v vasi?

Matematični krožek 7. razreda
OŠ Kostanjevica na Krki

Naloge zbral in uredil *Peter Petek*

PRESEKOV ŠKRAT

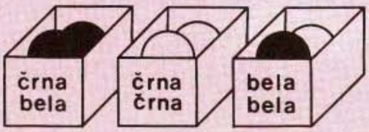
Naročnike Preseka, ki imajo kak izvod 3. oz. 4. številke lanskega Preseka odveč, vljudno prosimo, da nam ga odstopijo ter pošljejo na naš naslov. To velja predvsem za skupinske naročnike: srednje in osnovne šole. Tiskarski stroj se je pri tiskanju teh dveh številk ustavil "tri sekunde prekmalu", zato nam je zmanjkalo nekaj številk za dolžnostne izvode. Za razumevanje in usluge se vam priporočamo.

Ciril Velkovrh

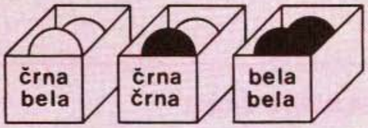
REŠITVE NALOG

Rešitev naloge s strani 47

Zadošča, če vzamemo eno samo kroglico, vzeti pa jo moramo iz posode z napisom ČRNA-BELA. Upoštevati moramo podatek, da je vsak napis na posodah napačen. Če smo vzeli črno kroglico, imamo takole stanje:



Če pa je bila ta kroglica bela imamo:



Rešitev naloge s strani 47

Med datumi sta tudi 11 in 22, zato morata številki 1 in 2 nastopati na obeh kockah. Tudi 0 mora biti na obeh kockah, saj bi sicer ne mogli prikazati vseh datumov od 01 do 09 (kocka ima samo 6 ploskev). Ostalo je še 6 prostih ploskev na obeh kockah. Te v poljubnem vrstnem redu zasedejo številke 3, 4, 5, 6, 7, 8, številka 9 pa je na glavo postavljena številka 6. Tako imamo na primer na eni kocki številke 0 1 2 3 4 5, na drugi pa 0 1 2 6 7 8.

Roman Rojko

STVARNO KAZALO

PRESEK - list za mlade matematike, fizike in astronome
8 (1980/81) št. 1-6, 256 + 64 + 32 str. + pril.

Novim naročnikom Preseka priporočamo, da naročijo tudi starejše številke lista. V kazalu ste spoznali, da je tudi v prejšnjih letih bilo objavljeno marsikaj, kar vas bo prav gotovo zanimalo. Na tretji strani ovitka si lahko ogledate naslove strani vseh šestih številk, kolikor jih je izšlo v lanskem šolskem letu. Naslovne strani so opremljene z lepimi barvnimi fotografijami, ki so povezane z vsebino člankov.

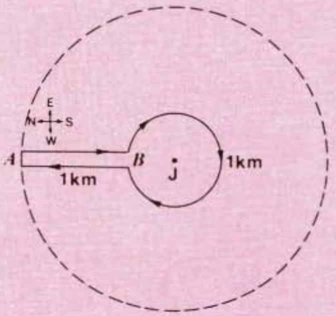
Ciril Velkovrh

REŠITVE NALOG

Rešitev uganke o lovcu s strani 42

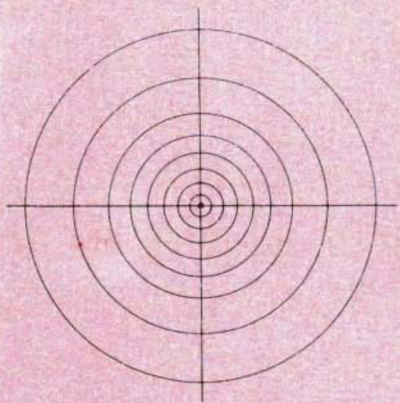
Že po tem kako je vprašanje zastavljeno, lahko slutimo, da severni tečaj ni edina taka točka. Poglejmo, kje so še druge.

Vzemimo okoli južnega tečaja vzporednik (krožnico) z obsegom enega kilometra. Če začnemo hoditi po njem iz katerekoli točke, pridemo po *1 km* na isto točko nazaj in pri tem prehodimo ves vzporednik. Premaknimo se sedaj za 1*km* proti severu. Prišli smo do ene od točk, ki jih zahteva naloga. Poglejmo na sliko in se prepričajmo:



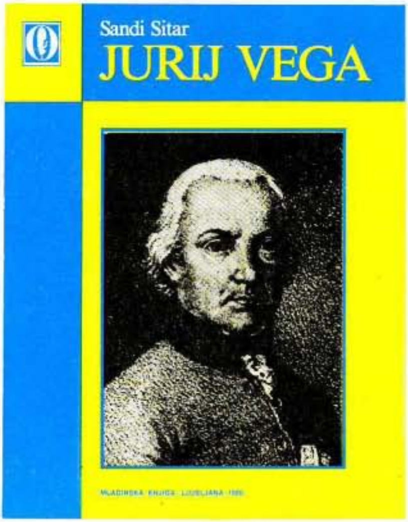
Najprej gremo *1km* proti jugu (iz *A* v *B*), nato *1km* proti vzhodu (iz *B* v *B*) in še *1km* proti severu (iz *B* v *A*). Točka A je torej prava, prave pa so tudi vse druge točke na vzporedniku (na sliki je črtkan), ki se nahaja *1km* severneje od tistega z obsegom *1km*.

Odgovor na našo uganko ima torej že za cel vzporednik točk (neskončno jih je), to pa še niso vse. Vzemimo okoli južnega tečaja vzporednike z obsegi *1/2km*, *1/3km*, *1/4 km* in tako naprej. Če začnemo po njih hoditi iz katerekoli točke, pridemo po *1km* hoje spet na isto mesto, pri tem pa smo vzporednike prehodili *2 krat*, *3 krat*, *4 krat* in tako naprej. Sedaj pa moramo stopiti še do vzporednikov, ki so *1km* severneje od prvotnih, pa smo našli točke, po katerih naloga sprašuje. Sami se prepričajte, da so te točke res prave.



Kakšen je torej končni odgovor na nalogo? Na Zemlji je neskončno točk s predpisano lastnostjo. Ena je severni tečaj, druge pa so na vzporednikih, ki se nahajajo *1km* severneje od tistih z obsegi *1km*, *1/2km*, *1/3km*, *1/4km* itd. Na vsakem vzporedniku je neskončno teh točk, vzporednikov samih pa je ravno tako neskončno. Najbrž pa ne daje hoja proti vzhodu po krožnici z obsegom *1/2 metra* nobenega pravega veselja.

Roman Rojko

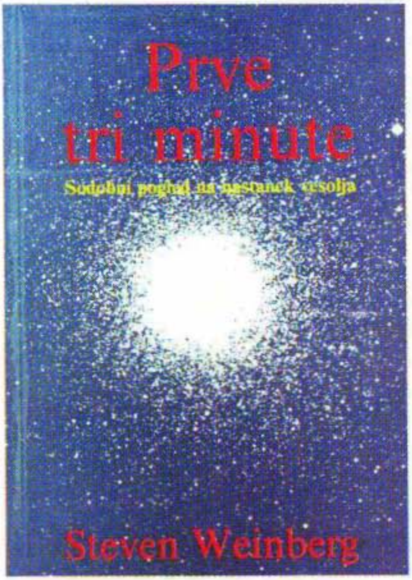


Ste že slišali za Jurija Vego? Gotovo ste ob tem vprašanju pomislili na Logaritemske tablice, ali na Vegova priznanja, za katera se potegujejo najboljši osnovnošolski matematiki na raznih tekmovanjih. Torej že veste, da je bil matematik in sicer eden največjih slovenskih matematikov, katerega najpomembnejše delo so Logaritemske tabele. Želite izvedeti kaj več o njem? Ponudila se vam je priložnost, da svojo željo uresničite. Pri Mladinski knjigi je v zbirki Obrazi izšla drobna knjižica, v kateri avtor Sandi Sitar slikovito prikaže njegovo življenje in delo. Vega se je še v mladosti izkazal za odličnega matematika. Po končanem šolanju je stopil v vojaške vrste, kjer je ostal do svoje tragične smrti. Odlikoval se je pri streljanju z možnarji in topovi, za zasluge v bitkah mu je bil dodeljen celo naslov barona. V mirnem času se je poleg matematike ukvarjal še z astronomijo in fiziko. Za matetematike je to gotovo zanimivo branje, toda tudi vsi, ki jih zanima zgodovina, se lahko veliko naučijo. Avtor tako zanimivo in temeljito osvetli zgodovinsko ozadje dogajanj na prehodu iz 18. v 19. stoletje, da je to zanje prava poslastica. Pi tem se ne omeji samo na dogodke na Balkanu, temveč poseže po vsej Evropi.

No, vsega vam pa res ne smem povedati! Pa prijetno branje!

Naročniki Preseka lahko dobijo brošuro s 20% popustom pri Komisiji za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19

Darja Žužek



Weinberg Steven, PRVE TRI MINUTE: sodobni pogled na nastanek vesolje. - Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1981. - Cena 250.- (200.- din).

Knjiga je izšla kot dvaintrideseta knjiga v knjižnici SIGMA, ki je naročnikom PRESEKA dobro znana. Izdalo jo je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije brez pomoči kake druge slovenske založbe, zato je tudi njena naklada le 500 izvodov. Knjiga je zelo popularna v svetu. Prevedena je že v več jezikov. Avtor je dobil vrsto priznanj za poljudnoznanstveno pisanje. Leta 1979 pa si je delil tudi Nobelovo nagrado za fiziko. Nastanek vesolja je opisan razumljivo širokemu krogu bralcev, a hkrati vznemirljivo in poučno tudi za strokovnjake. Avtor opisuje standardni model za razvoj vesolja, po katerem je bilo na začetku vesolje zelo majhno, zelo vroče, zelo gosto in se je zelo hitro širilo. Ta čas je bil v primerjavi z nadaljnjim obdobjem zelo kratek. Označujemo ga kot "veliki pok" ali eksplozijo. Ob širjenju vesolja sta se temperatura in gostota sprva hitro, nato pa čedalje počasneje manjšali do današnje stopnje. Omenjeno knjigo lahko kupijo naročkiki Preseka v pisarni Komisije za tiska DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, z 20% popustom. Naročnikom v skupni in članom društva pa pošljemo knjige tudi po pošti.

Ciril Velkovrh