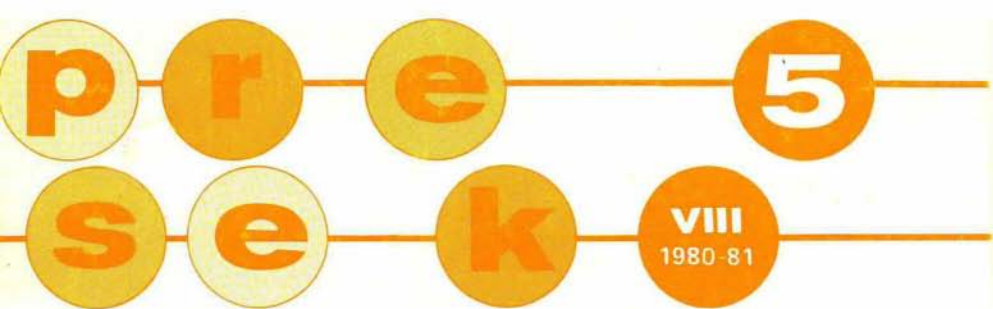




France Križanič

UKROČENA MATEMATIKA

*Zapoznalo opozorilo na računske
zakone ali fizič namesto množic*

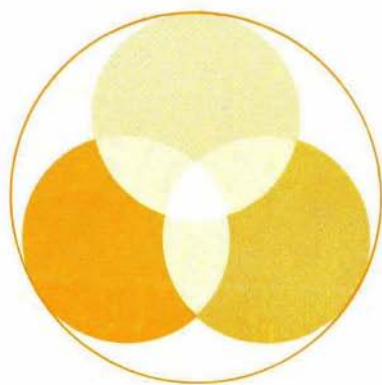
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS



France Križanič

UKROČENA MATEMATIKA

Zapoznelo opozorilo na računske zakone
ali
fižol namesto množic

Ilustriral Miloš Požar

Druga, popravljena izdaja.
Prva, z naslovom Kratkočasna matematika,
je izšla leta 1951 pri MK

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS
Ljubljana 1981

BESEDA UREDNIKA

*Knjiga **Ukročena matematika** je namenjena prav vsem. Prvošolčki jo bodo prebrali kot strip posebne vrste. Zabavala jih bo, hkrati pa jim bo pomagala stopiti na prvo stopnico v svet matematike. Starejši, ki so se že pred leti vsega tega učili in hodijo zdaj v matematiki po višjih nadstropjih, bodo veseli iskrivih domislic. Marsikdo, ki meni, da že obvlada osnove matematike, bo ob njej morda spoznal, da si o marsičem, česar se je že (na)učil, še ni čisto na jasnem. Poznati števila, vedeti kako računati z njimi in kako reševati enačbe, so "čevlji", brez katerih se v višja nadstropja matematike ne da vzpenjati. Ti čevlji pa morajo biti prožni in zanesljivi, da nam ne bi kje spodrsnilo.*

***Ukročeno matematiko** bo rad prebral tudi tisti, ki je že prehodil svojo matematično pot. Pomagala mu bo, da bo znal neuki mladeži razložiti osnove matematike.*

*Zanimivo je, da je bila **Ukročena matematika** rojena že pred "davnimi leti". Njena letnica rojstva je 1951 in "dekliški priimek" **Kratkočasna matematika**. Zdaj prihaja v novi obleki in malo ozaljšana, njeno bistvo pa je ostalo nespremenjeno.*

*Če se kdo vpraša, zakaj naj bi bral "staro matematiko", ko imamo vendar "novo matematiko", mu moramo povedati, da je matematika matematika. Stara in nova se ločita le v tem, kako in kaj o matematiki povesta. Nova matematika na primer poskrbi, da zvemo najprej vse o raztegih na številski premici. S tem lahko razloži pojem ulomka in obenem dobi še vsa pravila za računanje z njimi. V **Ukročeni matematiki** je ta pot drugačna. Vsakdo si prav dobro predstavlja, kako razrežemo hlebec kruha na tri enake dele. Če vsa-*

kemu delu hlebca rečemo potem tretjina, smo že pri ulomkih. Z nekaj premišljevanja razumemo, koliko je ena tretjina (hlebca) in še ena četrtna (hlebca). Tako se naučimo računati z ulomki.

Zakaj pa krotimo matematiko in kako jo ukrotimo?

Vse zgodbe v **Ukročeni matematiki** se na začetku obnašajo prav lahko-miselno. Če profesor Križanič ne bi pazil nanje, bi zašla prenekatera med pravljice, povesti ali med pustolovske zgodbe. Profesor pa jih preudarno vpreže v matematični voz. Zresnijo se, mi pa jim moramo pazljivo slediti. Čisto krotke obnovijo na koncu svojo pripoved s kratkimi jedrnatimi stavki. Ti debelo tiskani stavki povedo, kar moramo o matematiki vedeti. Marsikdo si bo rekel: Torej je dovolj, če si zapomnim le te stavke, pa bom matematiki kos. V resnici žal to ne drži, ker včasih ni lahko razumeti trditve, ki je v stavku.

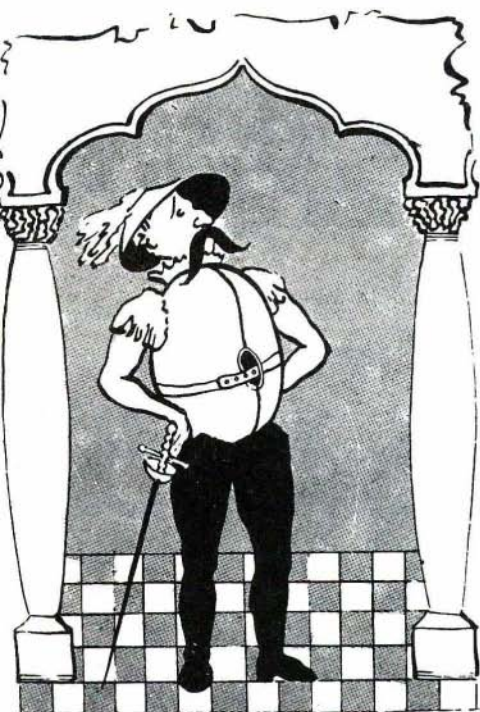
Na primer: stavek "Vzpon na Triglav je po Tominškovi poti lahak, prek severne stene pa težak" se zdi razumljiv in vsakdo si ga zlahka zapomni. Kaj pa se skriva za njim, postane bolj jasno, ko preberemo nekaj potopisov. Še najbolj pa ga bomo razumeli, ko sami preizkusimo vse poti na Triglav.

Za debelo tiskane stavke v **Ukročeni matematiki** velja isto. Razumljivi nam postanejo, ko temeljito preberemo duhovit "potopis" **Ukročena matematika**. Ko pa jo bomo sami ubrali po matematiki, bomo začeli ceniti matematične stavke, ki jedrnato in nedvoumno povedo, kako nadaljevati pot, ko pridemo do razpotja.

Želim vam prijetno in resno branje.

Andrej Kmet

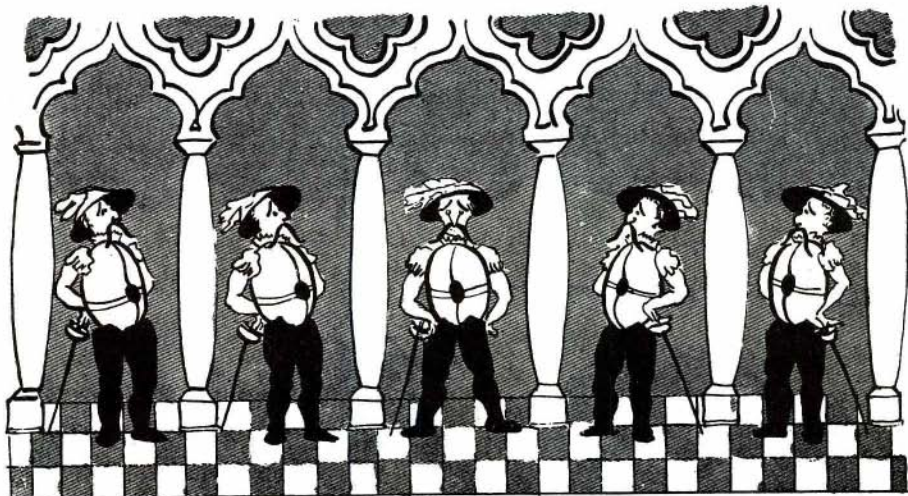
PRVO POGlavJE
V KATEREM SE BRALEC NAUČI NEKAJ
IGER S FIŽOLOM IN SE TAKO SEZNA-
NI Z NARAVNIMI ŠTEVILI



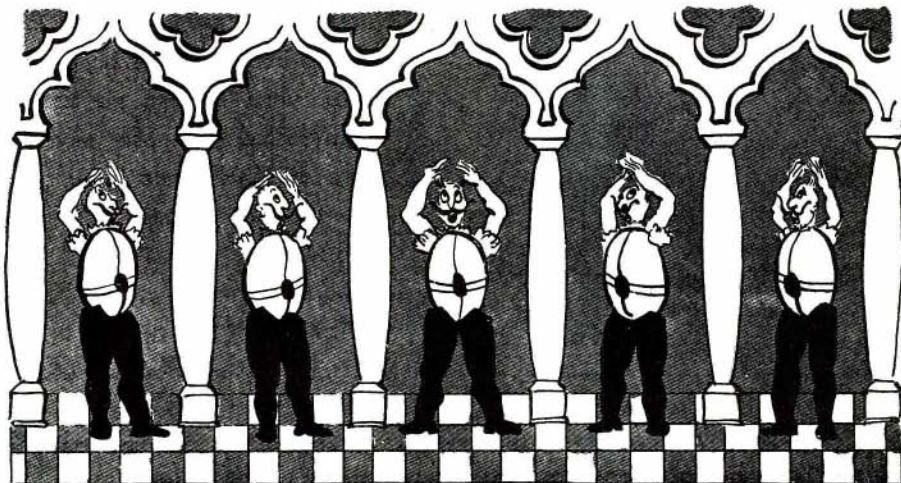
ebastjan Fižolček, vi-
tez iz stroka, krotilec
matematike. — Tako
se nam predstavi naš novi
prijateljček. Vsi smo ga ve-
seli, saj je matematika — ta
naš strah — res vredna, da
jo kdo ukroti. Pa ne bo prav
tako, vitez Boštjan ne kroti
matematike, le naše sovra-
štvo do matematike bo ukro-
til, da bo moralo tiho in
skrušeno v kot. Prosim, le
oglejte si ga! Ni zlomek, da
ne bi zmogli taki grozeči brki
in tak strašen meč še tako
silnega nasprotnika.

V slogi je moč. Kjer ne bo zmogel vitez Fižolček sam, mu bodo
priskočili na pomoč njegovi bratci: vsi junaki od pet do glave. —

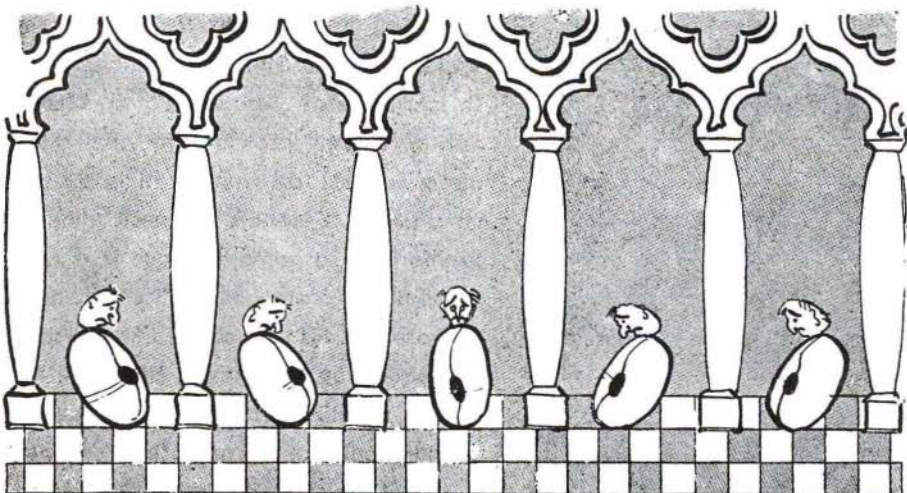
Tu so:



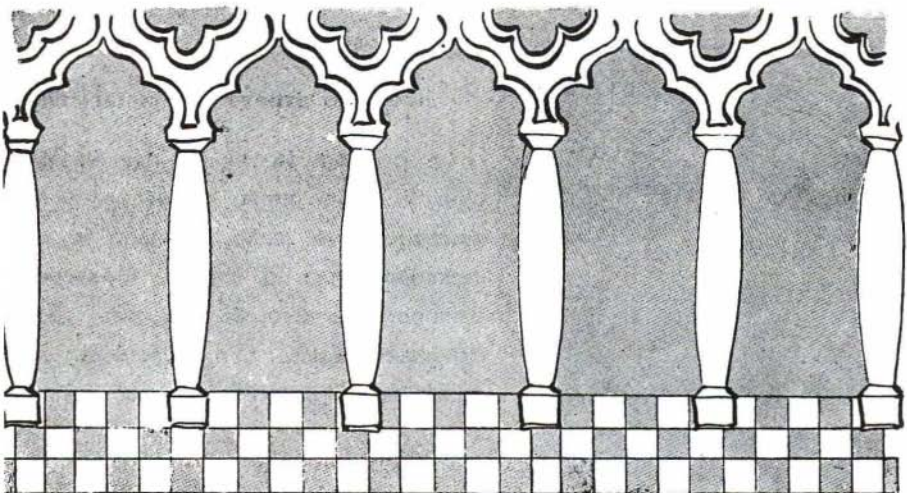
Pazite! Pozabite na njihove perjanice in meče,

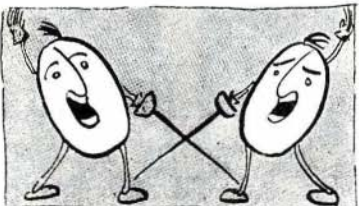
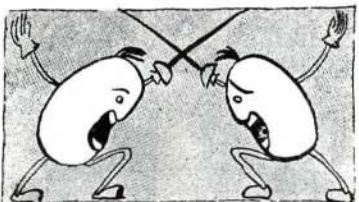
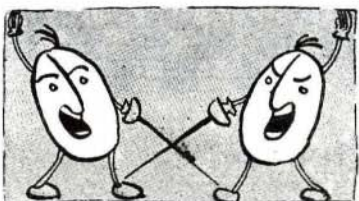
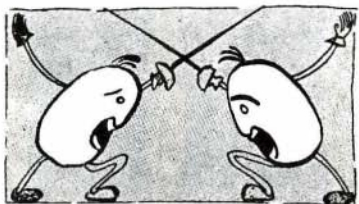
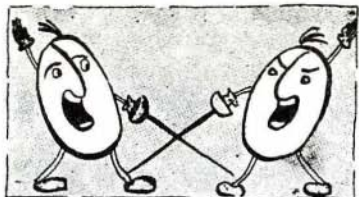


pozabite na njihove brke in škornje,



nazadnje pozabite še, da so pred vami Fižolčki.





Tako! Ste končali? Zdaj pa vprašanje: Česa na sliki se po vsem tem še spominjate? Ne veste? Premislite dobro! I, **pet** Fižolčkov je bilo, **pet**! Upam seveda, da znate šteti in da ste jih prešteli. S štetjem ste našli njihovo število in to je edino, kar vam je ostalo v spominu, ko ste odstranili s slike vse podrobnosti. Fižolčki so pri tem povsem nedolžni, prav isto število bi dobili, če bi bilo na sliki pet dežnikov, pet pip, pet steklenic, pet profesorjev, pet parov sabljačev ali česarkoli. S štetjem določimo le, koliko posameznikov je v skupini; kaj in kakšen je posameznik, nam je pri tem kaj malo mar.

Tako, sedaj smo tam.

Število je osnova vse matematike.

S pojmom števila so nas Fižolčki ujeli v svoje mreže. Dokler nam ne nastavijo nove zanke, povejmo še, da imenujemo vsa ta števila, s katerimi štejemo ena, dve, tri, štiri, pet ..., tri-sto sedemnajst ..., dve milijardi sto sedemnajst milijonov devet tisoč sedem-

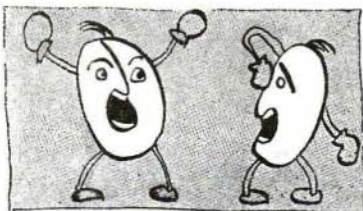
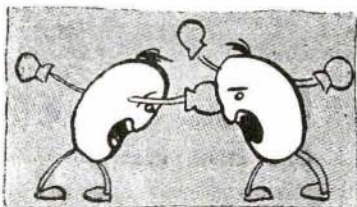
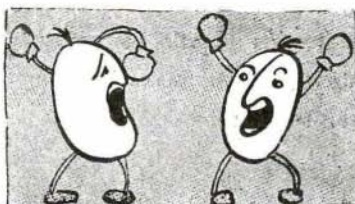
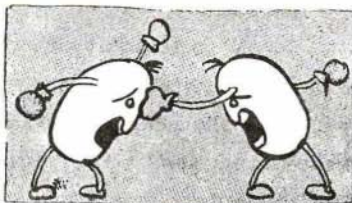
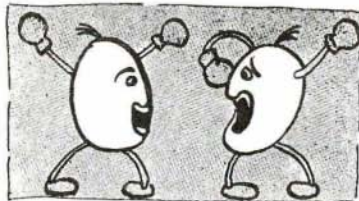
sto tri ... — **naravna števila**. Naravnim številom ni ne konca ne kraja. Štejte in štejte, pa čeprav vse svoje življenje, štetja ne boste končali. Kako pa štejemo? Najprej je pred nami **en** sam Fižolček, ko pristopi še eden, sta dva, če dodamo še enega, so trije ... Naj bo Fižolčkov še toliko, vedno jim moremo v mislih dodati **še enega**. Vedno lahko povečamo njihovo število za enoto. Vsako naravno število, bodi še tako veliko, ima naslednika, ki je za enoto večji.

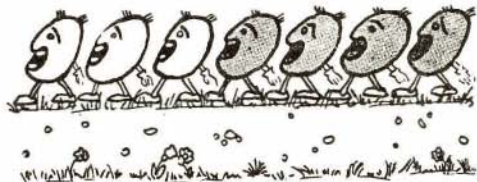
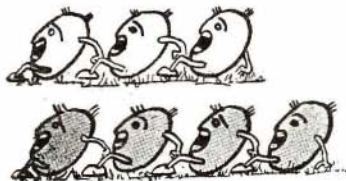
Števila moramo mnogokrat zapisati. Skoraj vsak poklic jih vsak dan uporablja. Zelo nerodno pa bi bilo pisati števila vedno z besedami. Zato imamo za števila posebne znake.

Znak za število je **številk**.

Števila, ki smo jih pravkar omenili, označimo s števkami: 1, 2, 3, 4, 5 ..., 317 ..., 2 117 009 703.

Pa ne zaklepetajmo se preveč. Vojška Fižolčkov se že zbira, poglejmo, kaj imajo spet za bregom.





Junaki so se postavili v dve vrsti: v prvi so trije, v drugi štirje Fižolčki. Vrsti predstavljata dvojce števil: prvo je tri, drugo štiri. Pazite, Fižolčki stopajo v eno samo vrsto. Sedem Fižolčkov, sedem junakov, sedem korenjakov v eni sami vrsti! Ne ustavljajmo se pri njih, pozabimo nanje. Pred nami je le še njihovo število: sedem. To število smo v mislih sestavili iz prejšnjih dveh števil, ko sta se obe vrsti Fižolčkov strnili v eno samo. Tri in štiri je sedem. Novo število imenujemo **vsoto** prvih dveh števil, števili, ki smo ju sešteli, pa njena **člena**. S številkami zapišemo to:

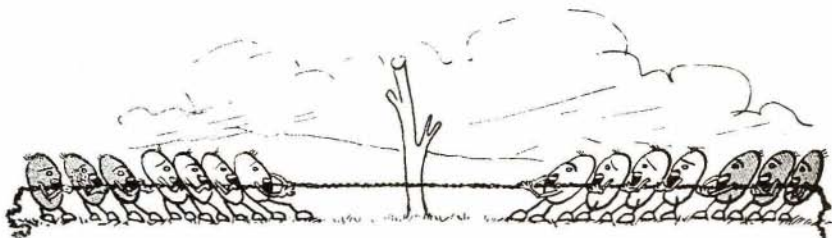
$$3 + 4 = 7$$

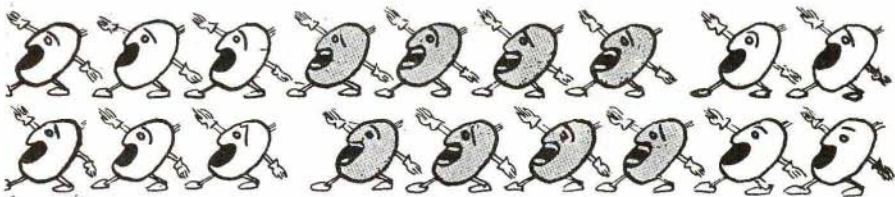
Vsoto so Fižolčki predstavili tako, da je spodnja vrsta stopila za zgornjo. Prav isto pa dobimo, če stopi zgornja vrsta za spodnjo:

$$3 + 4 = 4 + 3$$

To je zakon o zameni členov:

Oba člena vsote smemo zamenjati.





Ne, teh Fižolčkov pa res ni nikdar dovolj. Pravkar koraka nova vrsta. Dva nova prenapeteža se postavita ob bok svojim prijateljem, da povečata vsoto še za en člen. Sedem in dve je devet.

Kaj pa, če bi novinca prišla, preden sta se obe prvotni vrsti združili v eno samo? Stopila bi na primer k spodnji vrsti in z njo združena stopila za zgornjo. S štetjem ugotovite, da je tako dobljena vsota ista kot v prvem primeru.

Da tudi v matematični pisavi ločimo, katera dva člena smo najprej sešeli, ju damo v oklepaj. Prvi primer zapišemo:

$$(3 + 4) + 2 = 9$$

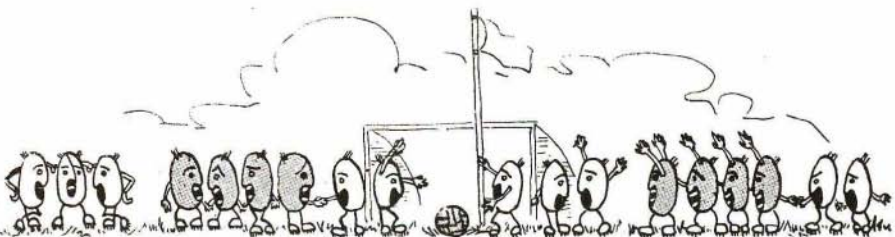
dr drugega pa

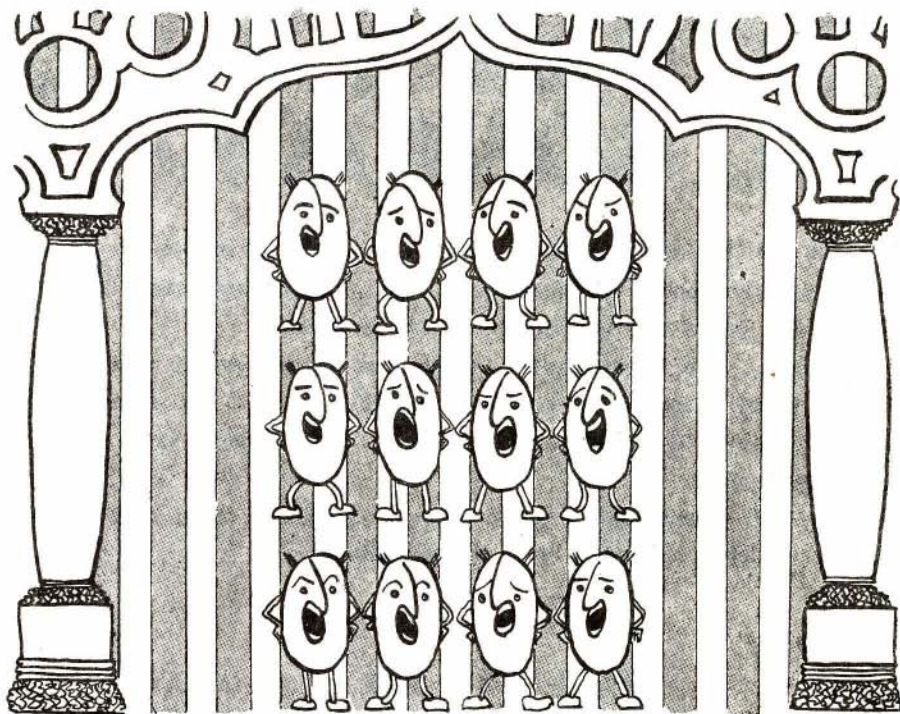
$$3 + (4 + 2) = 9$$

Spoznali smo novo lastnost vsote — zakon o združevanju členov:

Vsoto treh členov sestavimo na dva načina: najprej poiščemo vsoto prvih dveh členov in tej prištejemo tretji člen, ali pa prištejemo k prvemu členu vsoto drugega in tretjega člena. Vsota je v obeh primerih ista.

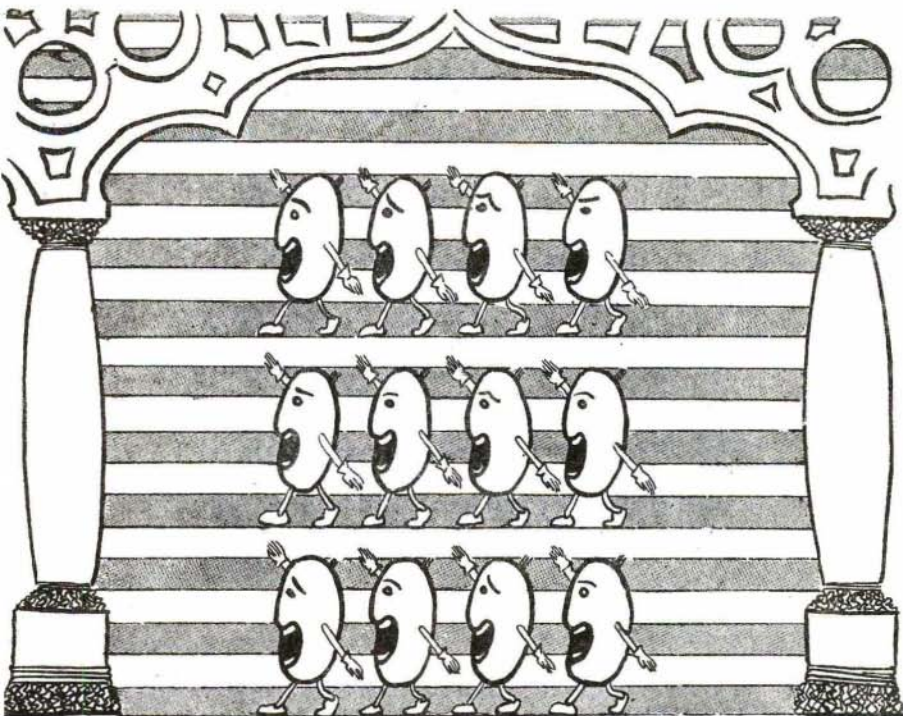
$$(3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2)$$





"Pamparabam, pamparabam, pamparampamba - pam - bam - pam."
 Fižolčki korakajo v četverostopih. Troje četverostopov vidimo na sliki.
 Pozabimo za trenutek, kaj je četverostop. Pozabimo, da so v njem Fižolčki. Tako nam četa predstavlja le število četverostopov (tri). Vsak četverostop pa predstavlja število Fižolčkov, ki so v njem (štiri). Število Fižolčkov v vsej četi imenujemo **produkt** števila Fižolčkov v posamezni vrsti in števila vrst v četi. Na sliki vidimo, da je produkt števil štiri in tri število dvanajst. To zapišemo takole:

$$4 \cdot 3 = 12$$



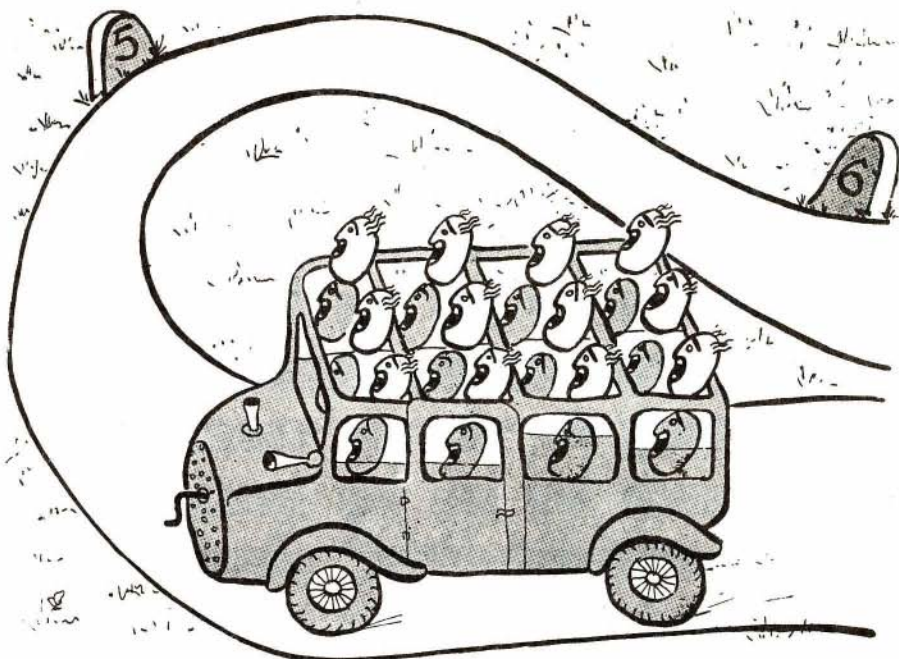
Poleg vsote moremo iz dveh naravnih števil sestaviti še eno naravno število: njun produkt. Števili, iz katerih sestavimo produkt, imenujemo **faktorja** produkta.

"Na desno!" Četa se strumno zasuče. Sedaj je čisto drugačna. Fizolčki stoje v trostopih, v vsej četi pa so štirje trostopi. Število Fizolčkov v vrsti in število vrst v četi sta se zamenjali, število Fizolčkov v vsej četi pa je ostalo nespremenjeno.

To je zakon o zameni faktorjev:

Faktorja v produktu smemo zamenjati, produkt se pri tem ne spremeni.

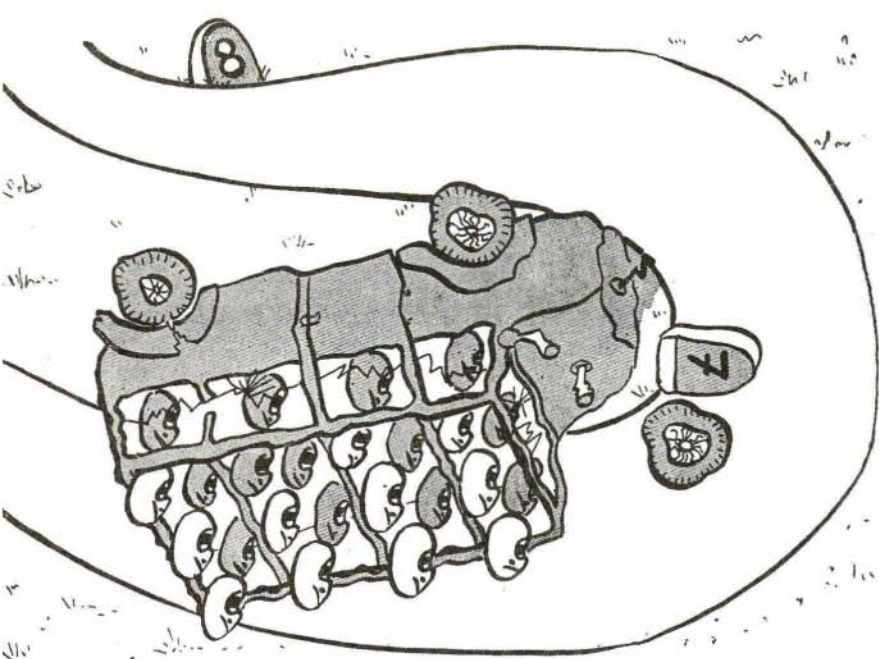
$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$$



Po opravljeni dolžnosti se peljejo Fižolčki na izlet v dvonadstropnem avtomobilu. V vsakem nadstropju sede Fižolčki v štirih vrstah, v vsaki vrsti trije Fižolčki. Koliko je vseh v vozilu? Število v nadstropju je produkt števila Fižolčkov v vrsti in števila vrst v nadstropju. Število vseh pa je produkt števila potnikov v nadstropju s številom nadstropij. V vsakem nadstropju je trikrat štiri, to je dvanajst Fižolčkov, v avtomobilu pa je dvakrat dvanajst ali štiriindvajset junakov.

"O joj, prejoj!" Medtem ko smo šteli Fižolčke, smo pozabili na vozilo.

Prepuščeno samemu sebi se je prevrnilo v jarek. Človek se povsod kaj nauči. Tudi ta nesreča ni brez pouka. Avtomobil leži na boku. Fižolčki so razporejeni v treh plasteh, v vsaki plasti so štiri vrste, v vsaki vrsti dva Fižolčka. V plasti je torej štirikrat dva ali osem Fižolčkov, vseh pa je trikrat osem ali štiriindvajset.



Število potnikov v avtomobilu smo izrazili s produktom treh faktorjev. Videli smo, da moremo to napraviti na več načinov. Prvi primer zapišemo s števkami takole:

$$(3 \cdot 4) \cdot 2$$

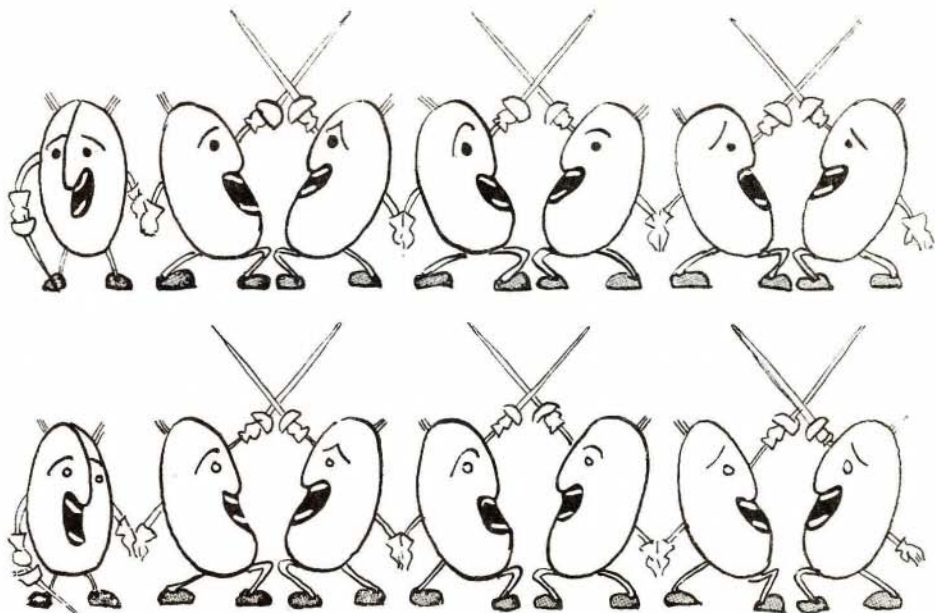
drugega pa tako:

$$3 \cdot (4 \cdot 2)$$

V obeh primerih ima produkt isto vrednost. Spoznali smo zakon o združevanju faktorjev:

Produkt treh faktorjev sestavimo na dva načina: prvič pomnožimo produkt prvega in drugega faktorja s tretjim faktorjem, drugič pa prvi faktor pomnožimo s produktom drugega in tretjega faktorja. Produkt je v obeh primerih isti.

$$(3 \cdot 4) \cdot 2 = 3 \cdot (4 \cdot 2)$$

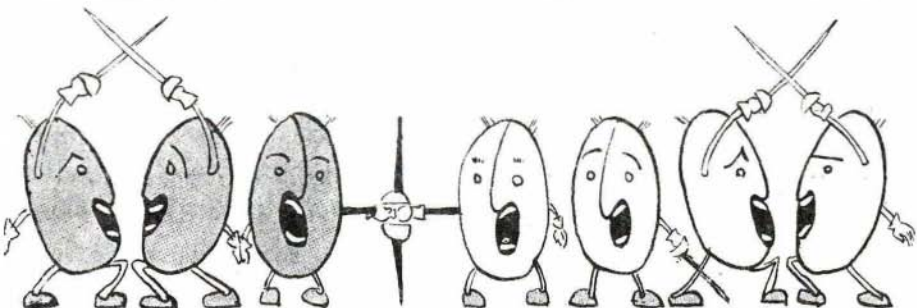
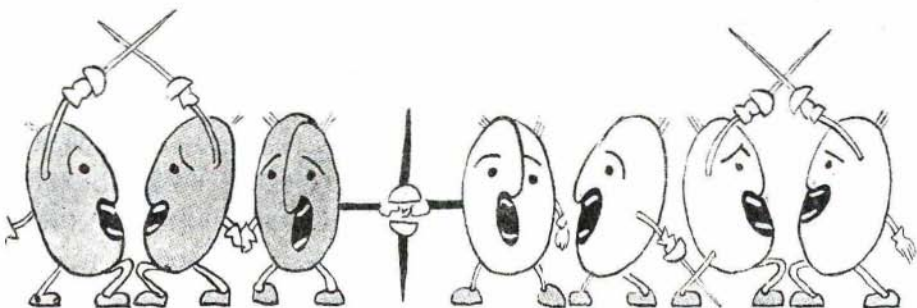


Sedaj poznamo dvoje predpisov, s katerima priredimo dvema naravnima številoma tretje. Prvi predpis — imenujemo ga **seštevanje** — priredi številoma njuno vsoto, drugi — **množenje** — pa njun produkt. Seštevanje in množenje sta osnovni **računski operaciji** ali **računska deja**. Kadar iščemo vsoto ali produkt danih števil, računamo.

Fižolčki bi nam radi predočili še razčlenitveni zakon, ki veže vsoto in produkt. Sestavimo produkt vsote dveh števil s tretjim številom. Člene vsote naj predstavljajo kar Fižolčki s četrte strani. Tam je poleg obeh členov (tri in štiri) že tudi njuna vsota (sedem). Slika pred nami pa nam kaže produkt te vsote s številom dve:

$$(3 + 4) \cdot 2$$

saj sta na sliki dve taki vrsti. Isto število dobimo, če združimo dve manjši

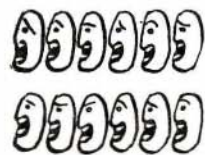


četi. V prvi sta dva troreda, v drugi sta dva četveroreda. Prva četa je produkt prvega člena vsote s tretjim številom, druga četa pa je produkt drugega člena vsote s tretjim številom: štirikrat dve. Prvotna četa, ki je produkt vsote obeh členov s tretjim številom, pa je vsota obeh čet. To pa je razčlenitveni zakon:

Produkt vsote dveh števil s tretjim številom je vsota produkta prvega člena s tretjim številom in produkta drugega člena s tretjim številom.

$$(3 + 4) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$$

Ta zadnji zakon, ki veže vsoto in produkt, je na vso moč pomemben. Skoraj vsa šolska leta vas je spremljal, za mnogimi nalogami je tičal, pa niste slutili. Gotovo je bil kriv marsikateri preglavici, ki vam jo je povzročila matematika. Zadnji primer v tem poglavju vas bo še spomnil nanj.



Na sliki je spet dvanajst Fižolčkov. Odpravljajo se na pohod. Razvrste se v četverorede. Četa ima tri popolne četverorede. Mogli bi korakati tudi v četi s štirimi troredi, v četi z dvema šesteroredoma ali pa v četi s šestimi dvoredi. In vse to zato, ker je število dvanajst tako produkt števil tri in štiri ali štiri in tri, kakor produkt števil dve in šest ali šest in dve. Pravimo, da je število dvanajst **deljivo** s števili dve, tri, štiri in šest ali: števila dve, tri, štiri, šest so **delitelji** števila dvanajst. Število dvanajst pa je deljivo še z dvema številoma. Uganete sami? Na spodnji sliki so Fižolčki v enem dvanajsteredu. Če bi bili Indijanci, ki so izkopali bojno sekiro, bi šli na pohod v gosjem redu, drug za drugim. Četa bi imela dvanajst enoredov.

Število dvanajst je deljivo tudi samo s seboj in s številom ena. To velja seveda za vsako naravno število

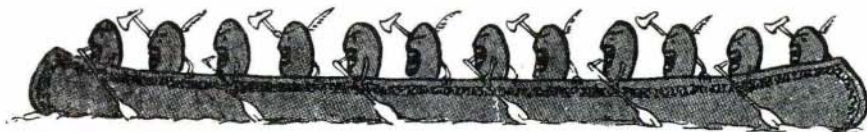
Naravno število je deljivo z drugim, kadar se da pisati kot produkt drugega števila s kakim naravnim številom.

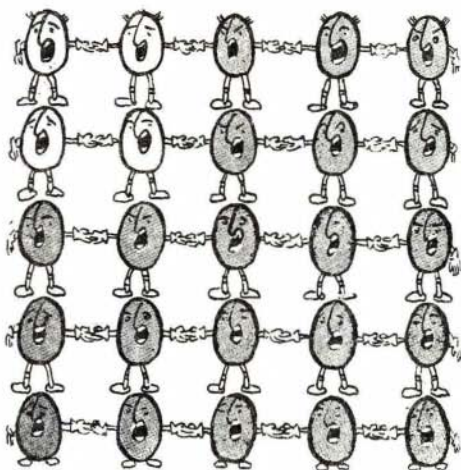
Poskusimo pet Fižolčkov razviti v več redov. Prvi red je zaman. Pričnimo z dvoredi: dva dvoreda sta popolna, v tretjem redu pa stoji en sam Fižolček. S tretjimi je še slabše: le en popoln tretji red lahko sestavimo, v drugem pa manjka en moštček. Če jih postavimo v četverored, napolnimo en sam četverored, v drugem pa koraka en sam junak. Tretji, res ne gre s to preklicano peterko. Le v en peterored ali v pet enoredov jo lahko razpostavimo. Število pet je deljivo le samo s seboj in s številom ena. Pravimo, da je pet praštevilo.



Praštevilo je število, ki je deljivo samo s seboj in s številom ena.

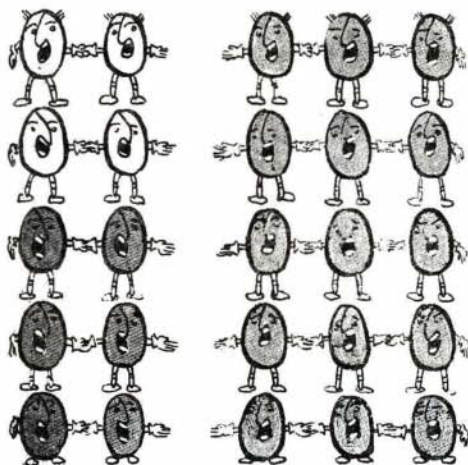
Poiščite še nadaljnja praštevila. Pri vsakem številu poskušajte skupino Fižolčkov, ki to število predstavlja, razvrstiti v več enakih redov. Števila, pri katerih se posreči le razpored v eno samo vrsto ali pa v gosji red, so praštevila. Prvih deset praštevil vam kar izdamo: dve, tri, pet, sedem, enajst, trinajst, sedemnajst, devetnajst, triindvajset in devetindvajset. Prepričajte se, da so to res praštevila!





Vrnimo se k produktu vsote dveh števil s tretjim številom. Za tretje število vzemimo kar isto vsoto. To je produkt dveh enakih faktorjev, ki ga imenujemo kvadrat števila. Izračunali bomo kvadrat vsote dveh števil. V četi Fižolčkov na zgornji sliki je število vrst enako številu Fižolčkov v vsaki vrsti. Fižolčki so razporejeni v kvadratu. Število Fižolčkov v vrsti naj bo vsota dveh števil (dve in tri), število vrst v četi pa prav ista vsota. Tako nam četa predstavlja produkt, ki ga krajše označimo:

$$(2 + 3) \cdot (2 + 3) = (2 + 3)^2$$

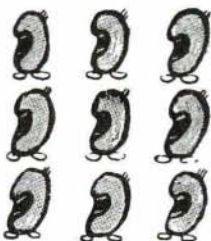
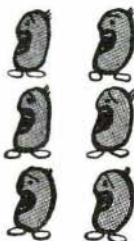
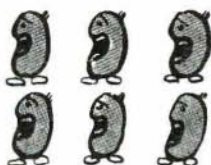
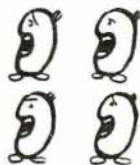
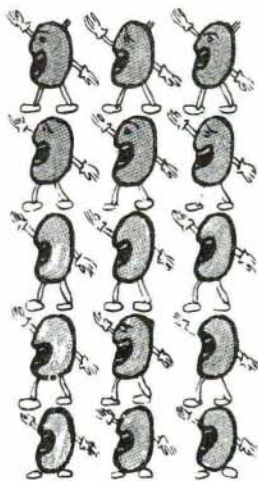
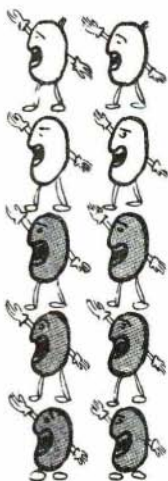


Uporabimo naš peti zakon za računanje z naravnimi števili. Produkt, ki ga predstavlja četa, je vsota dveh produktov. Prvega predstavlja četa z dvema Fižolčkoma v vsaki vrsti, drugega pa četa, v kateri so Fižolčki v troredih. Število vrst v vsaki četi pa je enako številu vrst v prvotni četi.

"Na desno!" Pred nami sta dve četi. V prvi sta dva, v drugi pa trije peteroredi. Po prejšnjem navodilu moremo vsako teh čet razstaviti na dve četi. Prva četa je produkt vsote števil dve in tri s številom dve. Razdeliti jo moremo v dve manjši četi: prva je produkt dvakrat dve, torej kvadrat števila dve, druga pa je produkt trikrat dve. Na isti način razdelimo drugo četo v produkt dvakrat tri in kvadrat števila tri. Prvotna četa je tako razpadla v štiri čete, ki po vrsti predstavljajo kvadrat števila dve, produkt trikrat dve, produkt dvakrat tri in kvadrat števila tri. Ker sta produkt trikrat dve in produkt dvakrat tri enaka, lahko zapišemo:

$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \cdot (2 \cdot 3) + 3^2$$

Kvadrat vsote dveh števil je enak vsoti kvadrata prvega člena, dvakratnega produkta obeh členov in kvadrata drugega člena.



DRUGO POGLAVJE SPREMLJA TRI POTEPUHE, KI PREMA- GAJO NEPRIČAKOVANO OVIRO IN TAKO UVEDEJO ULOMKE



rije lačni potepuhi
romajo križem svet.

Gredo, gredo in
pridejo slednjič do pekarnе.
Kaj majhno je njihovo pre-
moženje: bore dva dinarja
premore vsak. Vsi skupaj
imajo torej produkt: trikrat
dva ali šest dinarjev. To je
kaj enostavno izračunati,
saj vemo, da je produkt
naravnih števil spet naravno
število.

Zberejo torej potepuhi
svojih šest dinarjev in naj-
mlajši stopi k peku, da jim
kupi kruha. Za šest dinarjev
dobi dva hlebca kruha.



Pustimo sedaj potepuhe, da mirno pojedjo svoj kruh, mi pa medtem presodimo dvoje vprašanj.

Koliko dinarjev je veljal en hlebec in koliko kruha je dobil vsak potepuh?

Na prvo vprašanje lahko koj odgovorimo: hlebec je stal tri dinarje. Odgovor je pravilen, ker je dvakrat tri res enako šest.

Pa smo spet pred novo nalogo: v danem produktu poznamo en faktor in moramo poiskati drugega. Računski dej, s katerim to nalogo rešimo, je **deljenje**. Iskano število imenujemo **kvocient** danih dveh števil. Kvocient števil šest in dve je število tri. To zapišemo takole:

$$6 : 2 = 3$$

Deljenje je množenju **obratna operacija**. Množiti smo mogli poljubni naravni števili. Velja to tudi za deljenje? V našem primeru se je poskus res posrečil, ker je število dve delitelj števila šest. A ne veselimo se preveč, poskušajmo poprej odgovoriti še na drugo vprašanje:

Koliko kruha je dobil vsak potepuh?

I no, boste dejali, to je sedaj kaj enostavno, ko že znamo deliti. Število hlebcev, ki jih dobi vsak potepuh, je kvocient števil dve in tri. To je število, ki da pomnoženo s tri število dve. Pa je kje tako število? Med naravnimi števili ga prav gotovo ni, ker število dve ni deljivo s številom tri. V tem primeru torej ne moremo deliti in naše veselje se je ohladilo ob bridki resnici:

Deljenje dveh naravnih števil ni vselej mogoče.

Pa bomo zaradi tega obupali? Nikakor ne! Le pogledjmo svoje tri potepuhe, medtem ko smo si mi razbijali glave z deljenjem števil, so si svoja dva hlebca lepo razdelili na tri enake dele in jih že zdavnaj pojedli.

Kako neki se jim je posrečilo, saj smo pravkar videli, da to ne gre in ne gre?

Kaj preprosto: vzeli so nož izza pasu, ga zasadili v kruh in hlebce lepo razrezali.

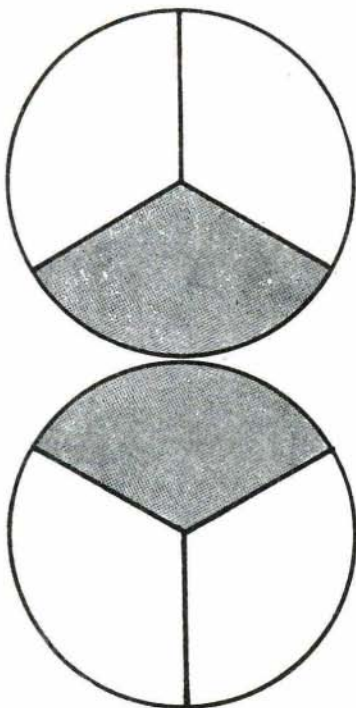
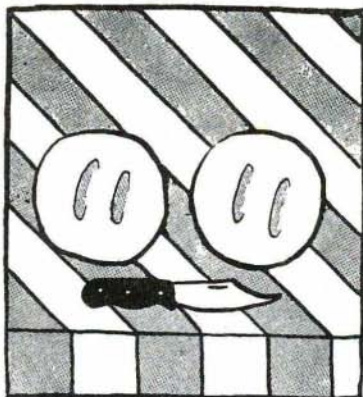
Kar zmorejo potepuhi ob deželni cesti, da bi mi, matematiki, ne zmogli! Nak in ne! Če ne gre z naravnimi števili, bo pa šlo kako drugače. Potepuhi so si pomagali z nožem, mi pa bomo poklicali na pomoč nova števila:

Da moremo deliti v vsakem primeru, uvedemo poleg naravnih števil še nova števila: ulomke.

Dve deljeno s tri je enako dvema tretjinama. Tak je sedaj naš odgovor. Vsak hlebec razrežemo na tri enake dele: tretjine. Tako dobimo iz dveh hlebcev šest takih tretjin. Te si morejo potepuhi lepo razdeliti na tri enake dele: vsak dobi dve tretjini.

Ste opazili, kako smo mogli določiti ulomek? Za to smo potrebovali dvojje naravnih števil:

Najprej smo morali povedati, na kakšne dele smo razdelili hlebec. Številu, ki pove, na koliko delov razdelimo enoto, pravimo **imenovalec** ulomka.





Nato smo potrebovali še število, ki je povedalo, koliko teh delov vsebuje ulomek. To število imenujemo **števec** ulomka.

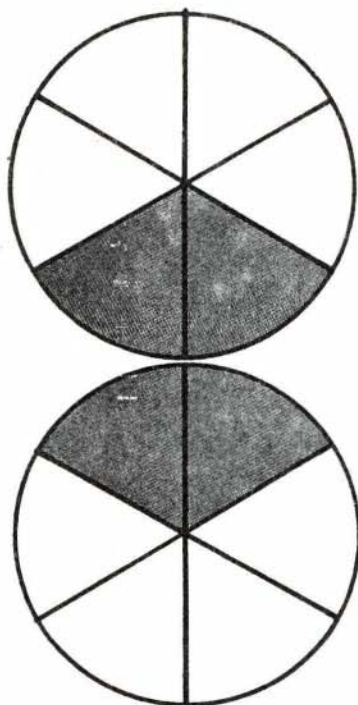
Vsak ulomek je določen z dvema naravnima številoma; s števcem in z imenovalcem.

V obravnavanem primeru ulomka dve tretjini je števec dve, imenovalec pa število tri.

Dogovorimo se še, s kakšnimi znaki bomo označevali ulomeke. Števec zapišemo nad imenovalec in ju ločimo s kratko črtico. Znak za ulomek dve tretjini je $\frac{2}{3}$.

Nič manj pravično ne bi razdelili kruha, če bi razrezali vsak hlebec na šest enakih delov (šestin). Tako bi dobili iz dveh hlebcev dvanajst šestin, vsak potepuh bi prejel štiri šestine. V obeh primerih: ko je potepuh dobil dve tretjini hlebca in ko je prejel štiri šestine hlebca, je dobil enako mnogo kruha.

Pravimo, da je ulomek $\frac{4}{6}$ enak ulomku $\frac{2}{3}$.



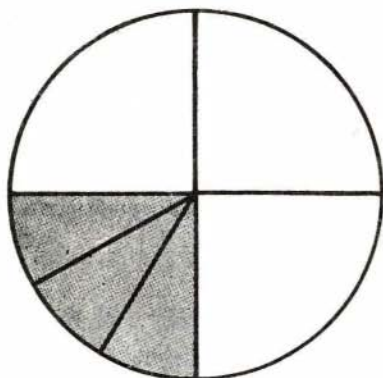
Primerjajmo oba enaka ulomka. Ko smo razdelili hlebec na šest delov, smo ga razdelili na dvakrat več delov kot prvič (imenovalec ulomka smo dvakrat povečali). Zato pa je vsak potepuh dobil dvakrat več šestin kot tretjin hlebca (števec ulomka se je prav tako dvakrat povečal).

Vrednost ulomka se ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo (ali delimo) z istim številom.

Potepuhi so spet vzeli pot pod noge in hajdi v širni svet! Pot je še dolga in kdo ve, kdaj bo spet kaj za pod zobe. Zato je najmlajši, ki je bil najbolj pameten, pojedel le eno tretjino hlebca. Drugo tretjino pa je skrivaj spravil v malho, po poti mu morda pride še prav.

Tako gredo naprej, starejša dva sita, mlajši pa z zagozdo kruha v malhi. Gredo tako ves dan in na večer srečajo tatu. Tat je potepuhu brat, pa se lepo pozdravijo, povprašajo drug drugega po poslu in sklenejo skupaj prenočiti. Tatu je ta dan posel slabo obrodil, le en hlebec kruha je mogel ukrasti. Ta hlebec si lepo razdele, vsak dobi eno četrtno in jo prične počasi mleti. Ej, žalostno je potepuško življenje!

Najmlajši ima sedaj dva kosa kruha: eno tretjino hlebca v malhi in eno četrtno v roki. Pa je najmlajši mehka duša in rad sanjari. In je tudi sedaj prišel razmišljati: Kakšen neki bi bil kos kruha, če bi oba kosa, tistega, ki ga ima v malhi, in tega, ki ga drži v rokah, združil v en sam kos? Kakšen del hlebca bi dobil iz tega? Morda bi nastal cel hlebec ali pa še več! Kdo ve, najmlajši je bil preveč lačen in je pojedel svoj kruh, preden je bil z lepo mislijo pri koncu. Kolcnilo se mu je še enkrat in je zaspal.



Kar je spodletelo potepuhu, se mora posrečiti nam. Naša naloga je poiskati vsoto dveh ulomkov: ene četrtnine in ene tretjine. Če bi hotel na to vprašanje odgovoriti najmlajši potepuh, bi zopet potreboval nož.

Vsakega obeh kosov bi moral razrezati na toliko kosov, da bi bili vsi deli enaki. Četrtnino bi moral razrezati na tri dele, tretjino pa na štiri dele. Tako bi dobil same enake kose: dvanajstine celega hlebca. Nato bi preštel, koliko dvanajstin ima: tri in štiri, skupaj sedem dvanajstin hlebca.

Tako poiščemo vsoto dveh ulomkov:
Najprej ulomka spremenimo, da sta oba imenovalca enaka:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

potem pa seštejemo števec:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Preveč se je najedel najmlajši in v spanju ga je tlačila mora. Strašne sanje so ga preganjale. Sanjalo se mu je,

da je ves svoj kruh, vseh sedem dvanajstin hlebca shranil v malho. To zalogo pa so mu zalezli zlobni tat in starejša brata. Naj se je branil tako ali drugače, nič ni pomagalo. Moral je razdeliti svoje brašno. Oddati je moral tri četrtnine svojega kruha. Kolikšen del hlebca je bil to?

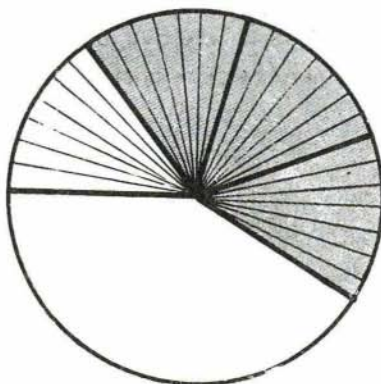
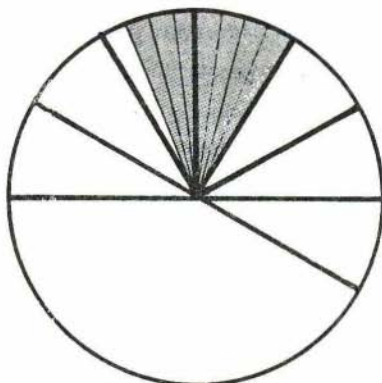
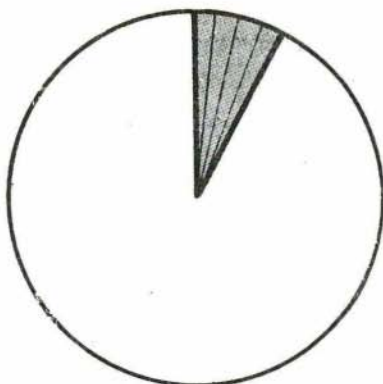
Koliko je tri četrtnine sedmih dvanajstin? Kolikšen je produkt:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12}$$

Vso svojo zalogo je najprej razdelil na štiri dele. Vsaka dvanajstina je pri tem razpadla na štiri osemištiridesetine. Ena četrtnina sedmih dvanajstin je torej sedem osemištiridesetin. najmlajši je moral oddati tri četrtnine svojega kruha, to je enaindvajset osemištiridesetin. Torej je:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12} = \frac{21}{48}$$

Produkt dveh ulomkov je spet ulomek; njegov števec dobimo tako, da zmnožimo oba števca, imenovalce pa tako, da zmnožimo oba imenovalca.



Ulomke moremo torej seštevati in množiti. Vsota dveh ulomkov je spet ulomek, prav tako je produkt dveh ulomkov spet ulomek. Vsota in produkt ulomkov imata iste lastnosti kot vsota in produkt naravnih števil. O vsem tem se lahko prepričate z računom.

Z ulomki pa smo dosegli tudi, kar smo hoteli: deljenje dveh ulomkov je v vsakem primeru mogoče. Če delimo dva ulomka, dobimo spet ulomek. Kako pa delimo z ulomkom?

Še enkrat pomislimo na deljenje naravnih števil. Kaj pomeni šest deljeno s tri? To število pove, v koliko skupin po tri predmete se da razdeliti skupina šestih predmetov. Takoj vidimo, da je to število dve. Podobno moremo ravnati tudi pri deljenju z ulomki. Šest deljeno z eno polovico je število, ki pove na koliko polovic se da razdeliti šest predmetov. Očitno je to število dvanajst. Prav tako bi videli, da se da šest hlebcev razdeliti na osem kosov po tri četrtine hlebca.

Od tod pa že lahko razberemo pravilo za deljenje z ulomkom:

Število delimo z ulomkom tako, da ga pomnožimo z obratno vrednostjo ulomka.

Obratna vrednost ulomka je ulomek, ki ga dobimo, če v prvotnem ulomku zamenjamo števec in imenovalec. Tako je obratna vrednost ene polovice število dve, obratna vrednost treh četrtin pa štiri tretjine. Prejšnje primere res izračunamo po tem pravilu:

$$6 : \frac{1}{2} = 6 \cdot 2 = 12$$

in:

$$6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Razne pasme mačk in psov se ločijo po dolžini dlake, nog, repov, ušes, gobcev, po barvi, po velikosti in ne vem še čem. Ulomki se med seboj ločijo le po števcih in imenovalcih. Kljub temu bi lahko pričakovali, da so pasme ulomkov na vso moč pisane. Pa je le ena sama, ki se pri računanju lepo vede, ulomki z imenovalcem ena. Tri enine je toliko kot tri, štiri enine toliko kot štiri, torej: Ta zanimiva množica ulomkov, ulomki z imenovalcem ena so naravna števila.

To jasno vidimo, brž ko računamo z njimi.

Če dva ulomka te množice seštejemo, dobimo spet ulomek iste pasme:

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{1} = \frac{7}{1}$$

Prav tako spada tudi produkt dveh takih ulomkov v isto množico:

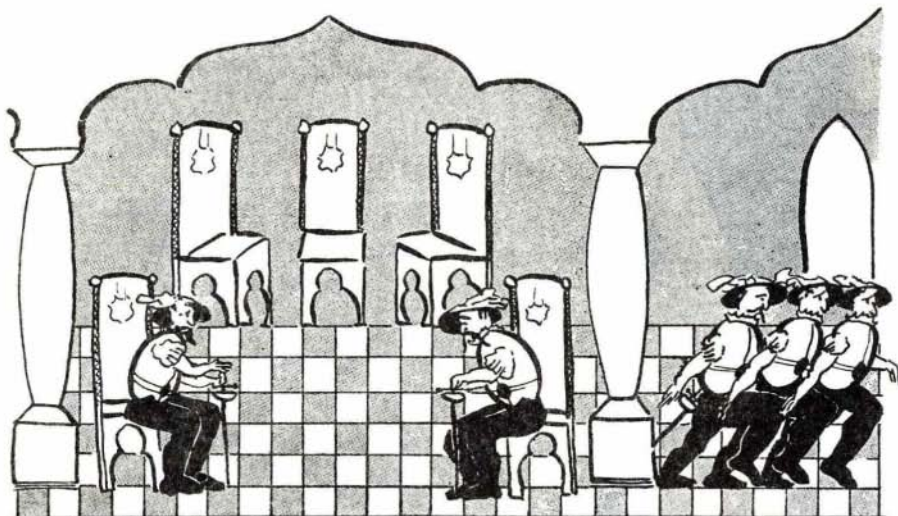
$$\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{1}$$

Seštevajo in množe se ti ulomki tako kot naravna števila. Pasma ulomkov z imenovalcem ena je čista. Kakor koli že združimo dva taka ulomka, bodisi z množenjem, bodisi s seštevanjem, vselej je rezultat spet ulomek iste vrste.

Ko smo uvedli ulomke, smo le razširili prvotni pojem števila, ker so tudi naravna števila vsebovana med ulomki.

Naravna števila so ulomki z imenovalcem ena.

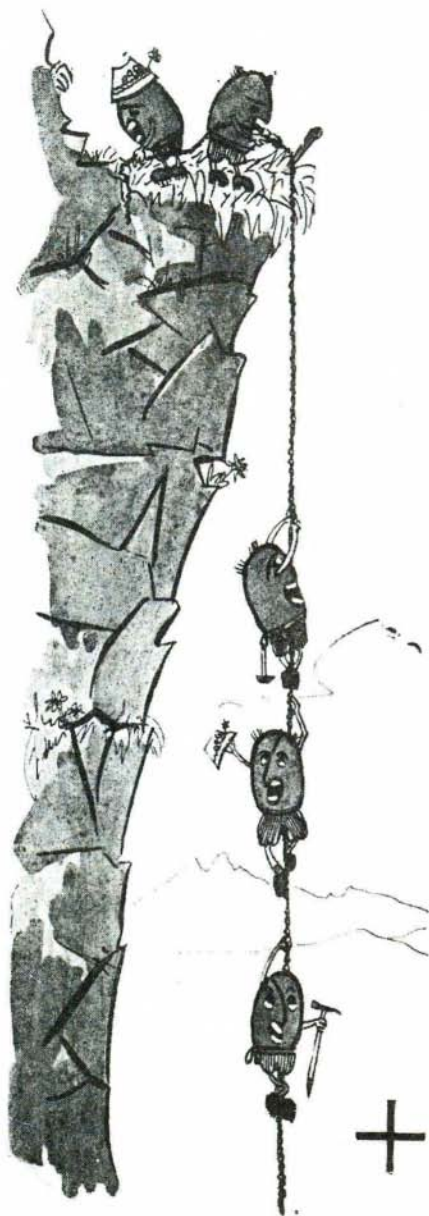
TRETJE POGLAVJE
JE ZOPET POLNO FIŽOLČKOV; PRED-
STAVIJO CELA ŠTEVILA IN TAKO
PREMAGAJO ŠE ENO OVIRO



Na sliki spet srečamo stare znance Fižolčke. Pet prijateljčkov se je zbralo na prijeten klepet.

Trem poteče čas, ne utegnejo več kramljati in odidejo. Tako obsedita le še dva Fižolčka. Ker smo sedaj že matematiki, bomo poskušali vsebino teh stavkov povedati tudi matematično.

Gotovo vam je že jasno, za kaj gre. Ko smo več skupin Fižolčkov družili v eno skupino, smo seštevali števila, ki so jih tiste skupine predstavljale. Sedaj pa se je zgodilo obratno:



iz skupine smo odvzeli manjšo skupino. To je nov računski dej: **odštevanje števil**. Odštevanje je obratna operacija seštevanja.

Kar se je zgodilo na sliki, povemo matematično: pet manj tri je dve in zapišemo:

$$5 - 3 = 2$$

Pravimo tudi: **Razlika števil** pet in tri je število dve.

V prejšnjem poglavju smo postali hudi dvomljivci, ker se nam obrat množenja — deljenje — med naravnimi števili ni vselej posrečil. Morali smo uvesti nova števila — ulomke. Isto razočaranje in podobna naloga nas čakata tudi tukaj. Ne naravna števila in ne ulomki ne zadoščajo, da bi mogli odštevati po mili volji. Da bomo to dosegli, bomo morali pojem števila še razširiti.

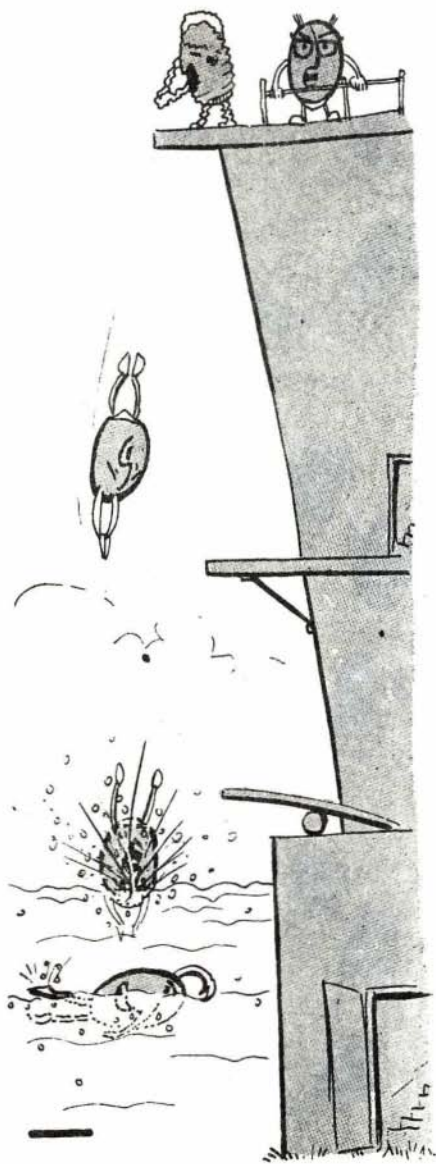
Odšteli smo število tri od števila pet, torej manjše število od večjega. V tem primeru je bila razlika res naravno število dve, odštevanje se je posrečilo. Kaj pa, če bi hoteli odšteti število pet od števila tri, če bi poskušali odšteti večje število od manjšega? To pa z naravnimi števili že ne gre več. Da bomo mogli tudi odštevati v vsakem primeru, moramo naravna števila nekako poostriti.

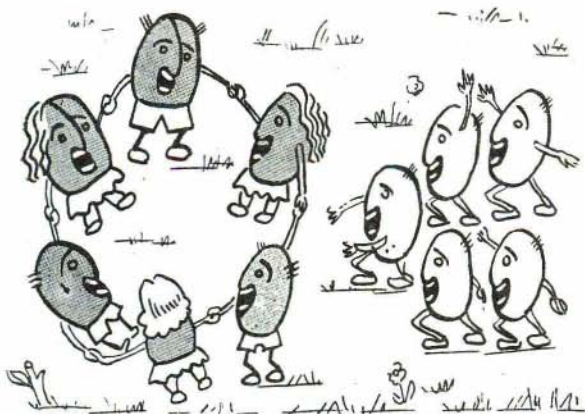
Takole napravimo:

Število, ki določa prihajajočo skupino Fižolčkov, imenujmo **pozitivno celo število**. Označimo ga s + pred številko. Na primer +3.

Številu, ki določa odhajajočo skupino Fižolčkov, pa recimo **negativno celo število**. Znak zanj je — pred številko. Na primer —3.

Uvedimo še eno število: **nič**. Označimo ga z **ničlo** 0. Pozitivna cela števila, negativna cela števila in število nič sestavljajo **množico celih števil**.

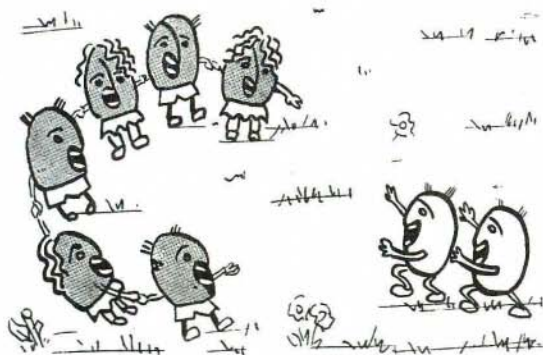
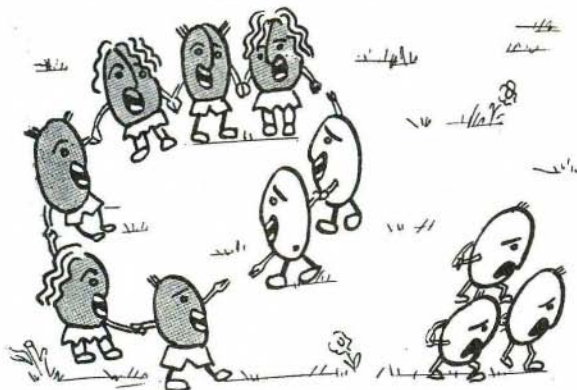




Oglejmo si še enkrat razliko pet manj tri. Takole bomo rekli: k neki večji skupini Fižolčkov pride skupina petih Fižolčkov. Ta skupina predstavlja, kot smo se pravkar dogovorili, število +5. Nato pa odide skupina treh Fižolčkov, ki predstavlja število -3. To kratko zapišemo:

$$(+5) + (-3)$$

Koliko pa je to? Isto spremembo v skupini dosežemo, če prideta k skupini dva Fižolčka. Ta dva predstavljata število +2.



Tako je:

$$(+5) + (-3) = +2$$

Kaj pa pomeni razlika tri manj pet? To pomeni: k skupini pridejo trije Fižolčki, odide jih pa pet. Matematično povemo in zapišemo tako:

$$(+3) + (-5) = -2$$

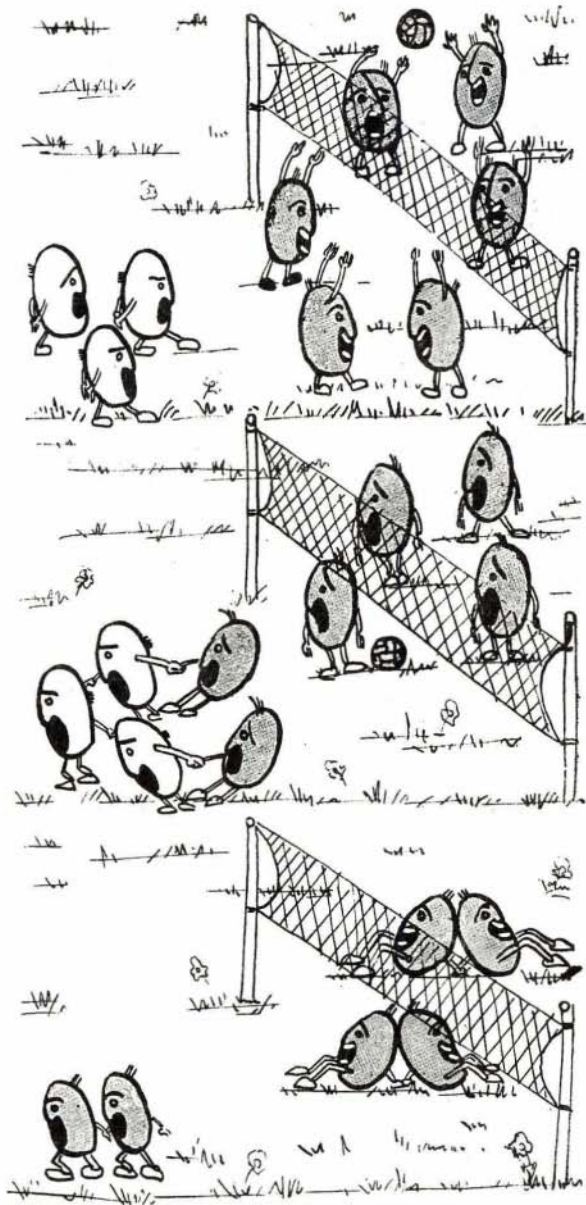
Prav lahko vidimo, kaj pomenijo vsote:

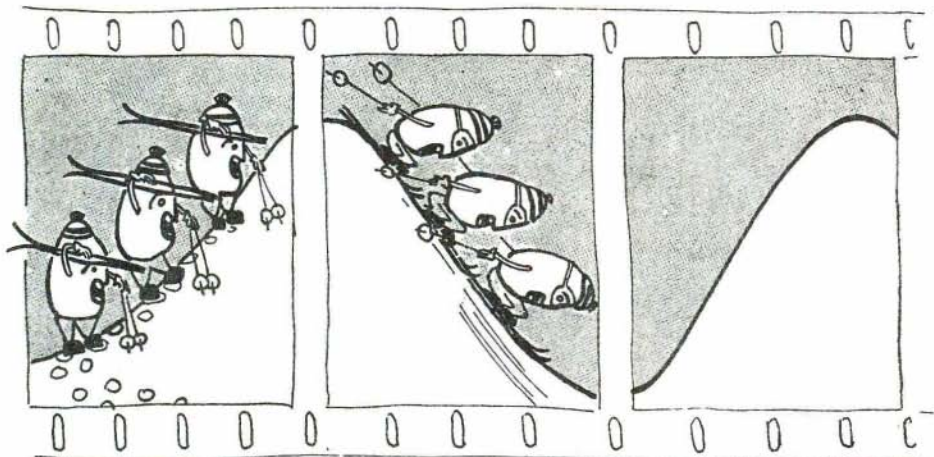
$$(+2) + (+3) = +5$$

in:

$$(-2) + (-3) = -5$$

Če smo prav presodili njihov pomen, smo tudi spoznali, da drže.





Po strmem bregu se vzpenjajo Fižolčki na goro, po drugem se spuste v dolino. Trije so prišli, trije odšli

$$(+3) + (-3)$$

Pust in prazen je bil vrh pred njimi, pust in prazen sameva za njimi. Koliko pa je Fižolčkov na vrhu, na katerem ni nobenega Fižolčka? Nič. Tudi nič smo izbrali za število, lepo smo ga označili z ničlo. Zato smemo zapisati

$$(+3) + (-3) = 0$$

Nič je lahko tudi člen vsote. Pa je kar na dlani, da števila ne spremenimo, če mu nič prištejemo

$$+3 + 0 = +3$$

$$-3 + 0 = -3$$

Tako kot enkrat ena drži

$$0 + 0 = 0$$

Ko so se Fižolčki razgibali, ko so začeli takole prihajati in odhajati, so iz vsakega naravnega števila napravili parček celih števil. Števili istega

parčka se ločita le po predznaku. Rekli bomo, da sta si nasprotni. Za število 0 pa sklenimo, da je samo sebi nasprotno.

Vsako celo število ima nasprotnika.

Vsota dveh nasprotnih si števil je enaka 0.

Pri seštevanju se pozitivna cela števila vedejo tako kakor naravna števila. Zato bomo brez skrbi zapisali 3 namesto +3 in računali na primer takole

$$3 + (-2) = 1 \qquad -3 + 2 = -1$$

Naravna števila so pozitivna cela števila.

Cela števila moremo in znamo seštevati. Res je, vse vsote, ki smo jih računali, so imele po dva člena. Vsote z več členi pa obvladamo z zakonom o zamenj članov in z zakonom o združevanju členov, ki ju poznamo še od naravnih števil sem. Nekaj primerov, ki povedo, da zakona obveljata tudi pri celih številih

$$5 + (-3) = 2 \qquad -3 + 5 = 2$$

$$[5 + (-3)] + (-1) = 2 + (-1) = 1$$

$$5 + [(-3) + (-1)] = 5 + (-4) = 1$$

Oba zakona hkrati uporabimo za kar se da kratek račun. Na primer

$$5 + (-3) + 1 = 5 + 1 + (-3) = 6 + (-3) = 3$$

Cela števila smo uvedli, da bi lahko odštevali po mili volji. Pokažimo, da se nam je želja uresničila. Iz

$$5 + (-3) = 2$$

preberemo dvojce

$$2 - 5 = -3$$

$$2 - (-3) = 5$$

Celo število odštejemo tako, da prištejemo njegovo nasprotno vrednost.

$$2 - 5 = 2 + (-5) = -3$$

$$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$$

Ustavimo se in pogledajmo, kam smo zašli. Nikjer ni več nobenega Fižolčka, pustili smo jih daleč za seboj. Korake nam vodi kar samo računanje. Ob računanju ves čas razmišljamo, kaj pravzaprav delamo, zato se počutimo že kot matematiki. Pa poskusimo, skoraj kot matematiki, pravilo za odštevanje utemeljiti še drugače. Najprej moramo jasno vedeti, kaj hočemo: radi bi razliko dveh števil.

Razlika dveh števil je število, ki ga moramo prišteti drugemu številu, da dobimo prvo število. Pravilo pa trdi, da je razlika enaka vsoti prvega števila in nasprotnne vrednosti drugega števila. Da je $5 + 4 = 5 - (-4)$, pokažemo tako, da $5 + 4$ prištejemo k -4

$$-4 + (5 + 4) = (-4 + 4) + 5 = 0 + 5 = 5$$

Upoštevali smo zakon o zamenjavi členov, zakon o združevanju členov, vsoto nasprotnih števil in vsoto s členom, enakim 0. Prav tako kot v posebnem primeru števil 5 in -4 nam ti zakoni opravičijo pravilo za odštevanje v vsakem primeru.

Lotimo se še množenja celih števil. Brez Fižolčkov smo, sami sebi prepuščeni. In kar sami zasnujmo množenje. Dvoje vodil naj nam pomaga:

Cela pozitivna števila se tudi pri množenju vedejo kot naravna števila.

Vsi računi so pokorni petim računskim zakonom.

Prvo vodilo nam pove na primer $(+2)(+3) = 2 \cdot 3 = 6$ in prav tako $(+1)(+1) = +1$, ali: tudi pri računanju s celimi števili je $1 \cdot 1 = 1$.

Da je $3 \cdot 0 = 0$ nas skoraj ni treba prepričevati. Pa vseeno pokažimo, da je to posledica razčlenitvenega zakona. Zapišimo $1 + 0 = 1$, pomnožimo s 3

$$3 \cdot (1 + 0) = 3$$

in uporabimo razčlenitveni zakon

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3$$

Od tod pa že $3 \cdot 0 = 3 - 3 = 0$. Prav tako je seveda $(-3) \cdot 0 = 0$. Pa zapišimo

$$2 + (-2) = 0$$

in obe strani pomnožimo s 3. Spet uporabimo razčlenitveni zakon in ne pozabimo na množenje z 0

$$2 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 = 0$$

Produkt $(-2) \cdot 3$ je nasproten produktu $2 \cdot 3$, produkt $2 \cdot 3$ pa je pozitiven, zato

$$(-2) \cdot 3 = -(2 \cdot 3)$$

Pomnožimo prav tako $3 + (-3) = 0$ z -2

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) = 0$$

Produkt $(-2) \cdot (-3)$ je nasproten produktu $(-2) \cdot 3$, zato je pozitiven

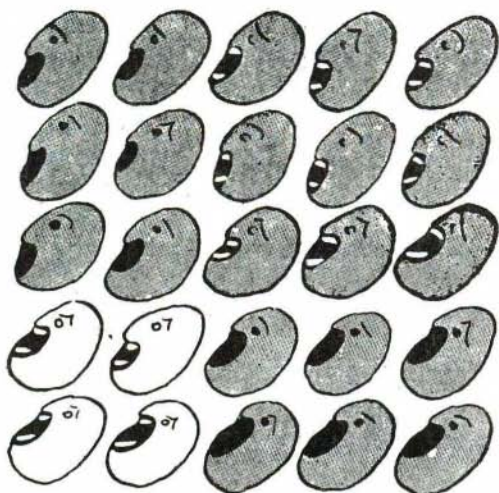
$$(-2) \cdot (-3) = +(2 \cdot 3)$$

To, kar smo napravili s številoma 2 in 3, napravimo s poljubnima celima številoma in si zapomnimo:

Produkt enako predznačenih števil je pozitiven.

Produkt različno predznačenih števil je negativen.

Produkt, ki ima vsaj en faktor enak 0, je enak 0.

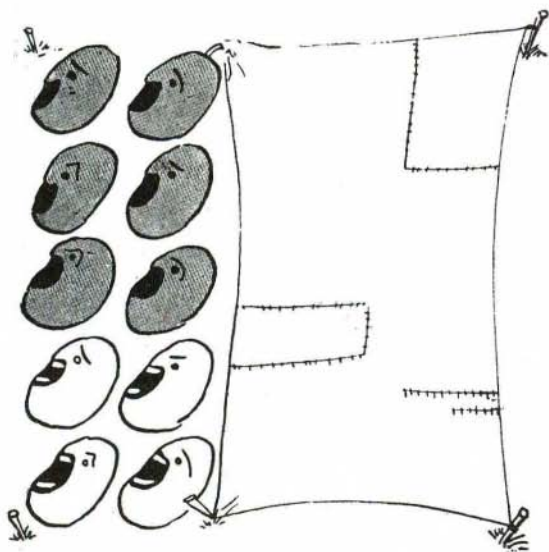


Pravila za računanje s celimi števili so tudi Fižolčkom všeč. Radi bi nam uprizorili račun, v katerem bodo predložena in z zgledom podkrep-
ljena.

Kvadrirajmo razliko

$$(5 - 3)^2$$

Da je to $2^2 = 4$, vemo. Pa zapišimo razliko kot vsoto $5 - 3 = 5 + (-3)$ in kvadrirajmo, kot smo navajeni — s celimi števili računamo prav tako kakor z naravnimi.



Kvadrat razlike raz-
členimo v tri dele

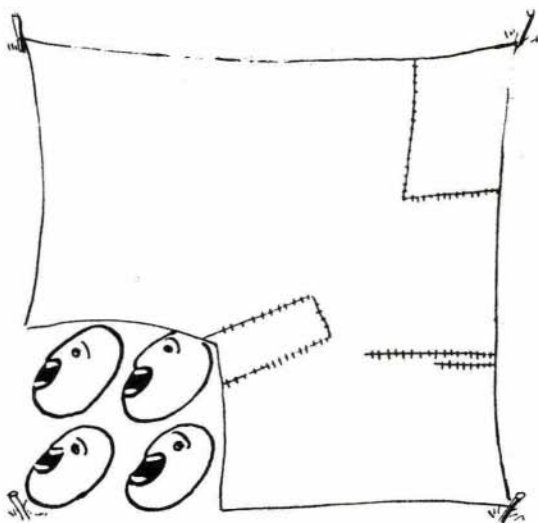
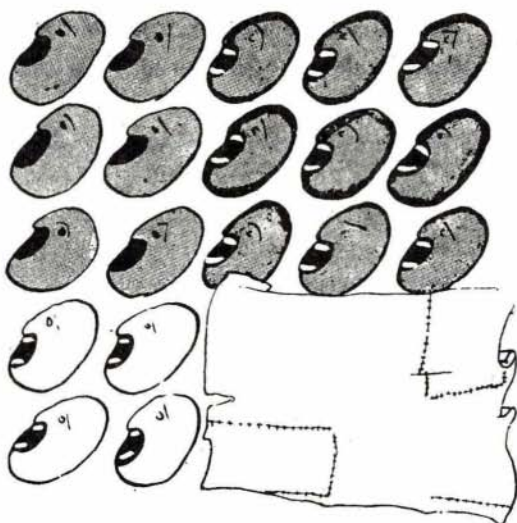
$$5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 3^2$$

Nazadnje je kvadrat
razlike enak

$$5^2 - 2 \cdot (5 \cdot 3) + 3^2$$

To pa nam znajo
pokazati Fižolčki v štirih
dejanjih.

Najprej postavijo kva-
drat števila pet. Odvza-
mejo produkt petkrat tri.
Dodajo kvadrat števila tri.
Odvzamejo produkt trikrat
pet.



To, kar smo napravili z naravnimi števili, da smo dobili cela števila, ponovimo z ulomki. Tako nastane **množica racionalnih števil**. Ta razpade v pozitivna racionalna števila, v negativna racionalna števila in še je med njimi število 0. Tudi vsa prejšnja števila so med njimi.

Cela števila so racionalna števila z imenovalcem 1, naravna števila so pozitivna racionalna števila z imenovalcem 1.

Racionalna števila brez ovir seštevamo, odštevamo in množimo. S pozitivnimi in negativnimi števili lahko tudi delimo. Toda

deljenje z nič je nesmiselno.

Kvocien $3:0$ bi bilo število, ki ga moramo pomnožiti z 0, da dobimo 3. Toda produkt s faktorjem nič je nič in nikdar tri. Koliko pa je $0:3$?

Ozrmo se še enkrat nazaj. Skozi kraljestvo števil so nas vodili štirje računski deji. Pojem števila smo širili toliko časa, da smo dosegli racionalna števila, med katerimi vsi štirje deji potekajo nemoteno. Osnovni operaciji: seštevanje in množenje, pa ostajata pri vsaki razširitvi pokorni petim računskim zakonom. Računska naloga je zapoved: dani sta dve števili, poišči tretje. Zapoved odenimo v matematično pisavo. Za iskano število izberemo poseben znak, največkrat je to črka x . Potem, ko dobi ime, povemo, kako je povezano z znanimi števili. Na primer:

Odštevanje zahteva: poišči razliko šest manj tri, to je število, ki ga moramo prišteti k tri, da dobimo šest

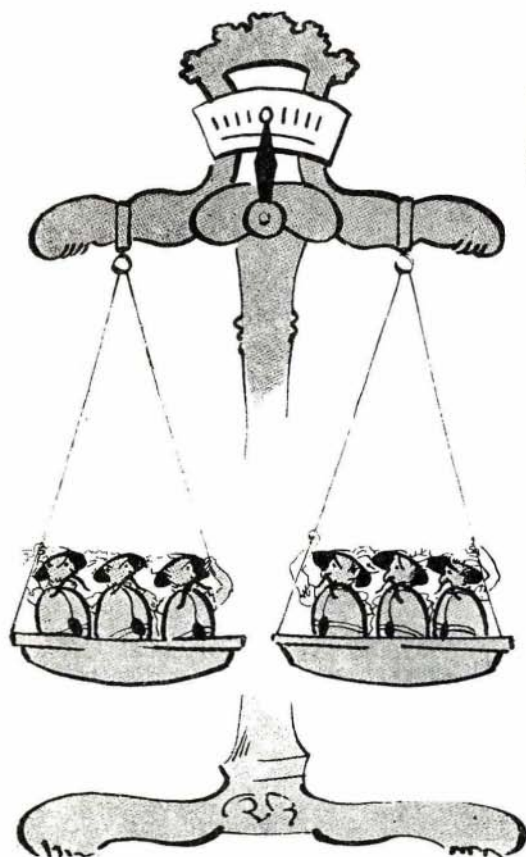
$$x + 3 = 6$$

Deljenje zahteva: poišči število, ki ga moramo pomnožiti s 3, da dobimo 6

$$3 \cdot x = 6$$

To so preprosti primeri enačb. Bolj zamotane enačbe pa vprašujejo po številu, ki je z znanimi povezano na vse bolj zapleten način. Kako ravnati z njimi, bo povedalo prihodnje poglavje.

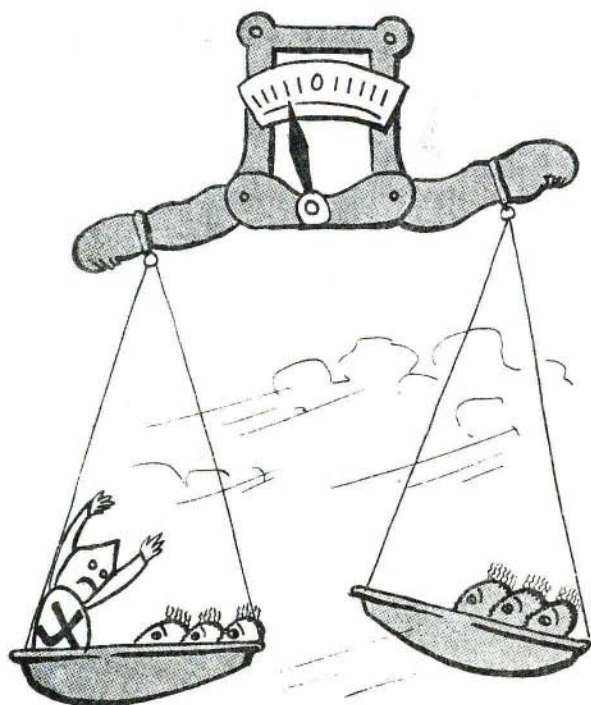
ČETIRTO POGLAVJE
NAS PRESTRAŠI S SKRIVNOSTINIM
NEZNANČEM, KI GA BRŽ RAZKRIN-
KAMO IN SE TAKO NAUČIMO
REŠITI ENAČBE



ehtnico prav gotovo
vsi poznate. To je
takale priprava: dve
skodelici in jeziček.

Jeziček je strog sodnik. Brž
ko je breme na eni skodelici
različno od bremena na drugi
skodelici, že zakriči: "Ni prav,
ni prav!" Če pa sta obe skode-
lici enako obremenjeni, jeziček
zadovoljno miruje sredi med
obema.

Na sliki so se vkrcali v
vsako skodelico trije Fižolčki.
Ker je breme obeh skodelic
enako, jeziček lepo miruje na
svojem mestu.



To je tako lep pojav, da ga moramo opisati še matematično.

$$3 = 3$$

zapišemo in to pomeni, da so v vsaki skodelici trije Fižolčki. Tudi s temle je jeziček zadovoljen:

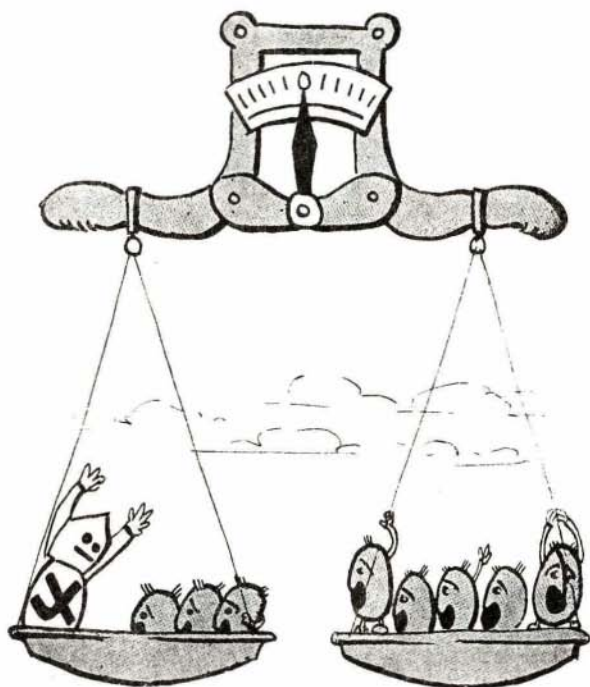
$$2 + 3 = 5$$

saj je tudi v tem primeru na vsaki skodelici enako število Fižolčkov.

Ste opazili podobnost med tehtnico in našo pisavo? Enačaj je strogi sodnik: jeziček. Levo od enačaja je zapisana vsebina leve skodelice, desno od enačaja pa vsebina desne skodelice. Enačaj pove, da je jeziček zadovoljen s stanjem tehtnice in da miruje sredi med skodelicama.

Takle matematičen izraz, ki nam pripoveduje, da je na tehtnici vse v redu, imenujemo **enačbo**. Enačbi, ki smo ju zapisali, sta pravzaprav nezanimivi. Z njima se prav gotovo ni vredno ukvarjati.

Sedaj pa se je zgodilo nekaj strašnega. Na levi skodelici se je pojavil skrivnostni neznanec in jeziček tehtnice se je nevarno nagnil v levo.



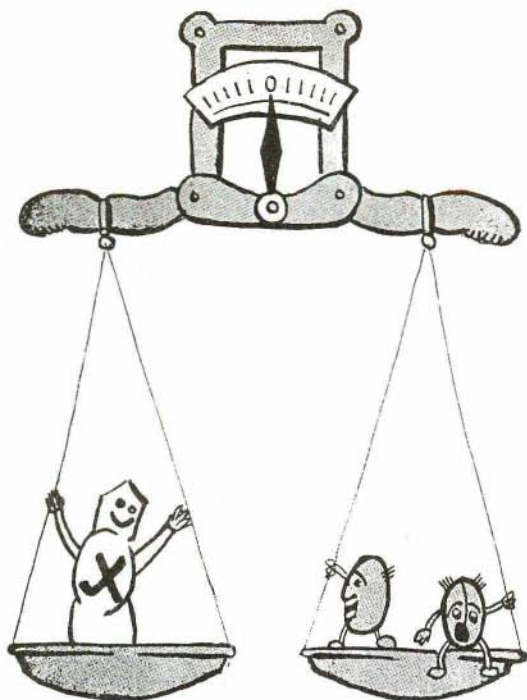
Brž prihiti več Fižolčkov in se vkrca v desno skodelo, da bi spravili jeziček na pravo mesto. To so ga polomili! Jeziček je res zapustil prejšnjo levo lego, zato pa se je

preveč nagnil v desno. Šele ko zapusti desno skodelico toliko Fižolčkov, da jih ostane na njej le pet, se vrne jeziček na pravo mesto.

Poskušajmo to, kar se je zgodilo na tehtnici, zapisati matematično. Dogodek opišimo z enačbo. Tu je nebodigatreba skrivnostni neznanec. Zanj si moramo izmisliti še kakšen primeren znak. Kar s črko x ga označimo, ker jo že nosi na halji. Položaj na tehtnici opišemo takole:

$$x + 3 = 5$$

Tole pa že ni več tako nedolžno, kot sta bili prejšnji dve enačbi. To ni več čez in čez veljavna resnica. Enačaj v zadnji enačbi ne pripoveduje samo, da sta bremen v obeh skodelicah enaki, ampak tudi zahteva: razkrinkajte skrivnostnega neznanca na levi strani!



Lotimo se tega posla. Ves čas pa moramo paziti, da ne pridemo navzkriž z enačajem. Paziti moramo, da ostane jeziček tehtnice na svojem mestu.

Če damo v vsako skodelico enako število Fižolčkov, ostane jeziček zadovoljen. Prav tako, če iz obeh skodelic odvzamemo isto število Fižolčkov:

Na obeh straneh enačbe smem isto število prišteti, od obeh strani enačbe smem isto število odšteti.

Vzemimo iz vsake skodelice troje Fižolčkov. Od vsake strani enačbe odštejemo število tri:

$$x + 3 - 3 = 5 - 3$$

ali:

$$x = 2$$



Naša naloga je rešena, neznanec je razkrinkan. Kot vidimo, ga je le za dva Fižolčka. In res sta bila le dva Fižolčka takole napravljena. Navihanca taka!

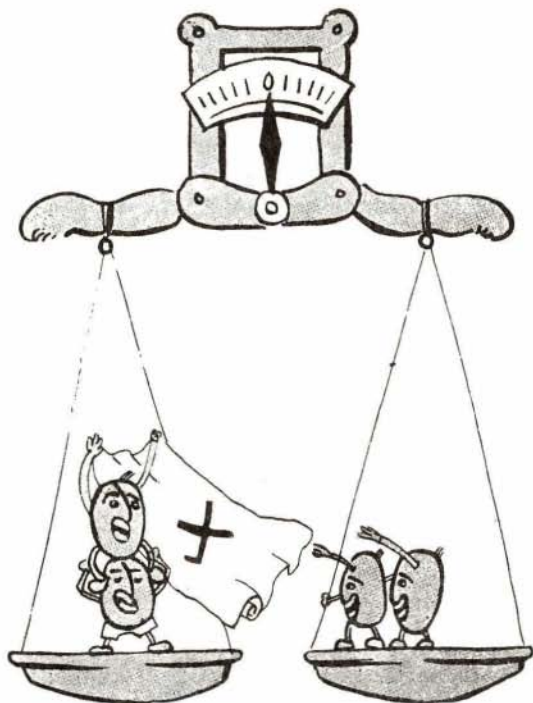
Število x imenujemo **neznanko**. Naš cilj je najti vrednost neznanke. Pravimo tudi, da iščemo **rešitev enačbe**.

Rešitev enačbe je število, ki ga moramo vstaviti v enačbo na mesto neznanke x , da postane leva stran enačbe enaka desni strani enačbe.

Rešitev enačbe, ki smo jo pravkar obravnavali, je število dve. Če ga vstavimo na mesto neznanke x , dobimo:

$$2 + 3 = 5$$

in to je res.



Poskusimo rešiti bolj zamotano enačbo:

$$3x - 2 = x + 4$$

Tole pove: Na levi skodelici so trije neznanci, na desni en neznanec in štirje Fižolčki. Na desni manjkata dva Fižolčka, da bi bila tehtnica v ravnovesju.

Ta enačba je trši oreh, kot je bila prejšnja, pa jo bomo vseeno ugnali. Najbolj nas jezi neznanec na desni skodeli (ali neznanka na desni strani enačbe). Stran z njim (z njo)! Vzemimo ga s skodele. (Neznanko odštejemo od desne strani enačbe.) Toda pazimo! Jeziček se bo premaknil, če ne bomo hkrati isto storili tudi na levi skodeli. Tudi z leve skodele moramo vzeti enega neznanca. (Tudi od leve strani enačbe odštejemo neznanko):

$$3x - 2 - x = x + 4 - x$$

To pa je:

$$2x - 2 = 4$$

Ko smo tako dosegli, da ni nobenega neznanca na desni strani, uredimo še levo stran. Dodajmo manjkajoča Fižolčka. Seveda storimo to tudi na desni strani. Na obeh straneh enačbe prištejmo število dve:

$$2x - 2 + 2 = 4 + 2$$

ali:

$$2x = 6$$

Ravnovesje na tehtnici se ne poruši, če bremeni obeh skodelic hkrati – dvakrat povečamo. Prav tako ostane tehtnica v ravnovesju, če bremeni dvakrat pomanjšamo.

Obe strani enačbe smemo z istim številom množiti, obe strani enačbe smemo z istim številom deliti.

Vrnimo se k našemu primeru. Na obeh skodelah obdržimo le polovico bremena. To pomeni, da obe strani enačbe delimo s številom dve:

$$2x : 2 = 6 : 2$$

ali

$$x = 3$$

in naloga je končana. Našli smo vrednost neznanke. Rešitev enačbe je število tri.

Vsaka stran enačbe

$$3x - 2 = x + 4$$

je vsota dveh členov. Člene, v katerih nastopa kot faktor neznanka, imenujemo **neznane člene**. Tistim členom, v katerih ni neznanke, pa pravimo **znani členi**. Na levi strani naše enačbe je neznani člen $3x$, znani pa -2 . Na desni strani enačbe je neznani člen x , znani člen pa 4 .

Še enkrat prehodimo pot, ki nas je privedla do rešitve enačbe:

Prvi korak odpravi neznani člen na desni strani enačbe.

Drugi korak odpravi znani člen na levi strani enačbe.

Po teh dveh korakih je na desni strani le še znani člen, na levi pa je samo neznani člen. V tem členu je neznanka morda še pomnožena s kakim znanim številom.

V tretjem koraku se znebimo še števila, s katerim je neznanka pomnožena.

Pot pa nas privede do cilja le, če se ves čas držimo zlatega pravila:

Kar storiš na eni strani, stori tudi na drugi strani enačbe.

Vse, kar storimo, storimo z računskimi dejji: na obeh straneh enačbe isto število prištejemo, od obeh strani enačbe isto število odštejemo, obe strani enačbe z istim številom pomnožimo ali obe strani enačbe z istim številom delimo.

Reševanje enačb nam ne sme delati nobenih težav. Zato se upamo prisluhniti temule pogovoru:

"Reci, Pitagora, dej,
potomec Modríc helikónskih,
koliko vodiš s seboj
učencev po poti modrostí?"
"Vrli Políkrat kar štej,
podatke povem ti z uganko:
Za matematiko le
gori polovica učencev.
Zadnjo narave skrivnost
odkriti želi četrtna.
Modro sedmina molči,
o večnih besedah razmišlja.
V hiši še žene so tri,
Teána je prva med njimi.
Muzam hvaležen živim
za toliko srčnih učencev."

Koliko učencev je imel Pitagora? Ne znamo povedati naravnost, ker šegavi Pitagora sam ovinkari z odgovorom. Zato recimo: Pitagora je imel x učencev. Matematike se je učilo $\frac{1}{2}x$ učencev, $\frac{1}{4}x$ je bilo naravoslovcev, $\frac{1}{7}x$ modroslovcev in še tri žene so bile povrh. Seštejmo, pa dobimo število vseh učencev, x :

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3$$

Ulomki na desni so v samo napoto. Pometimo jih! Pomnožimo vso enačbo z 28:

$$28x = 14x + 7x + 4x + 84$$

Združimo neznane člene na desni v en sam člen

$$28x = 25x + 84$$

Sedaj je enačba že lepo očedena. Le še neznani člen $25x$ moramo odstraniti z desne strani enačbe. Odštejmo ga! (Seveda od obeh strani enačbe!):

$$3x = 84$$

Obe strani enačbe delimo s 3. Naloga je končana

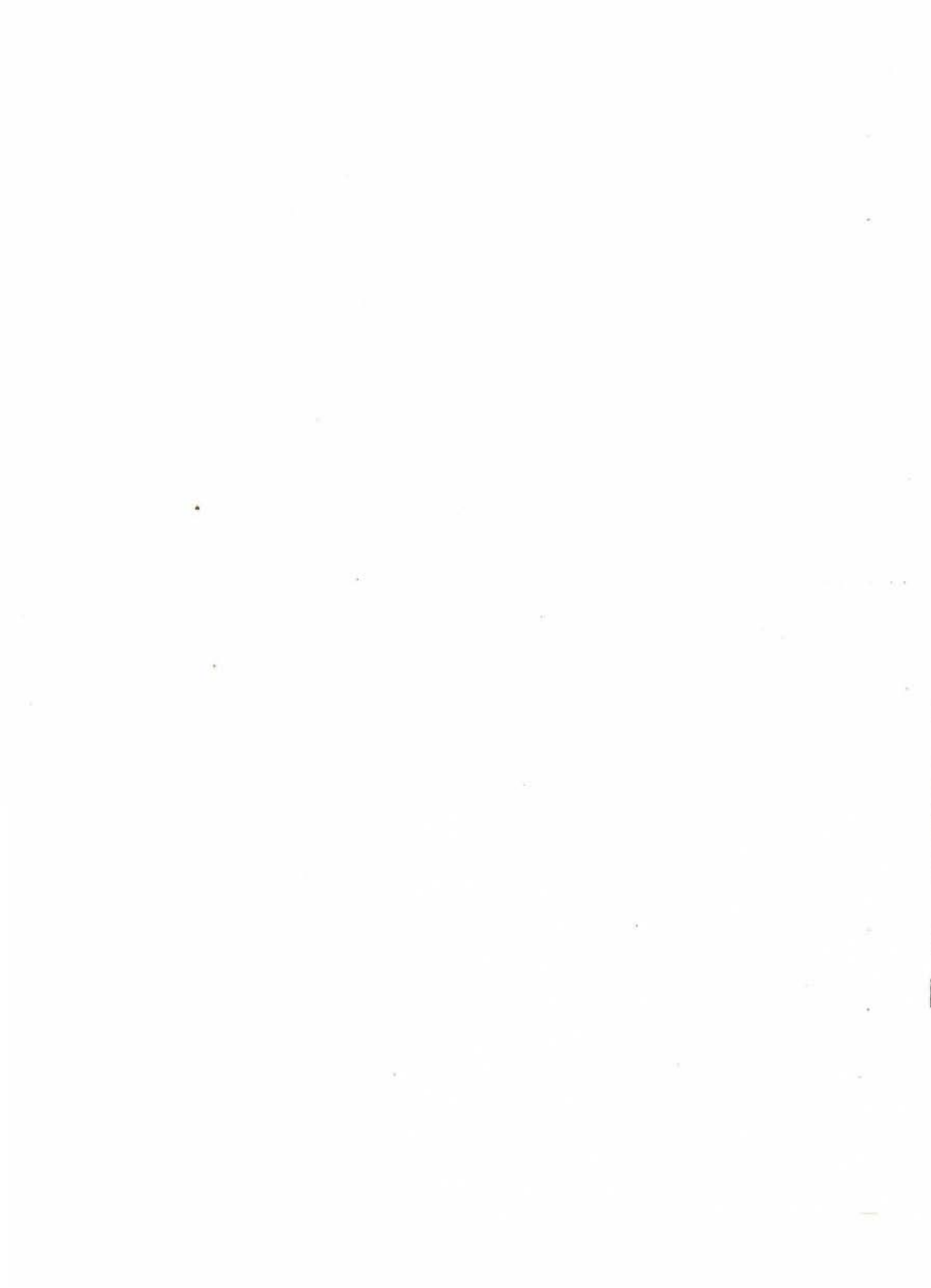
$$x = 28$$

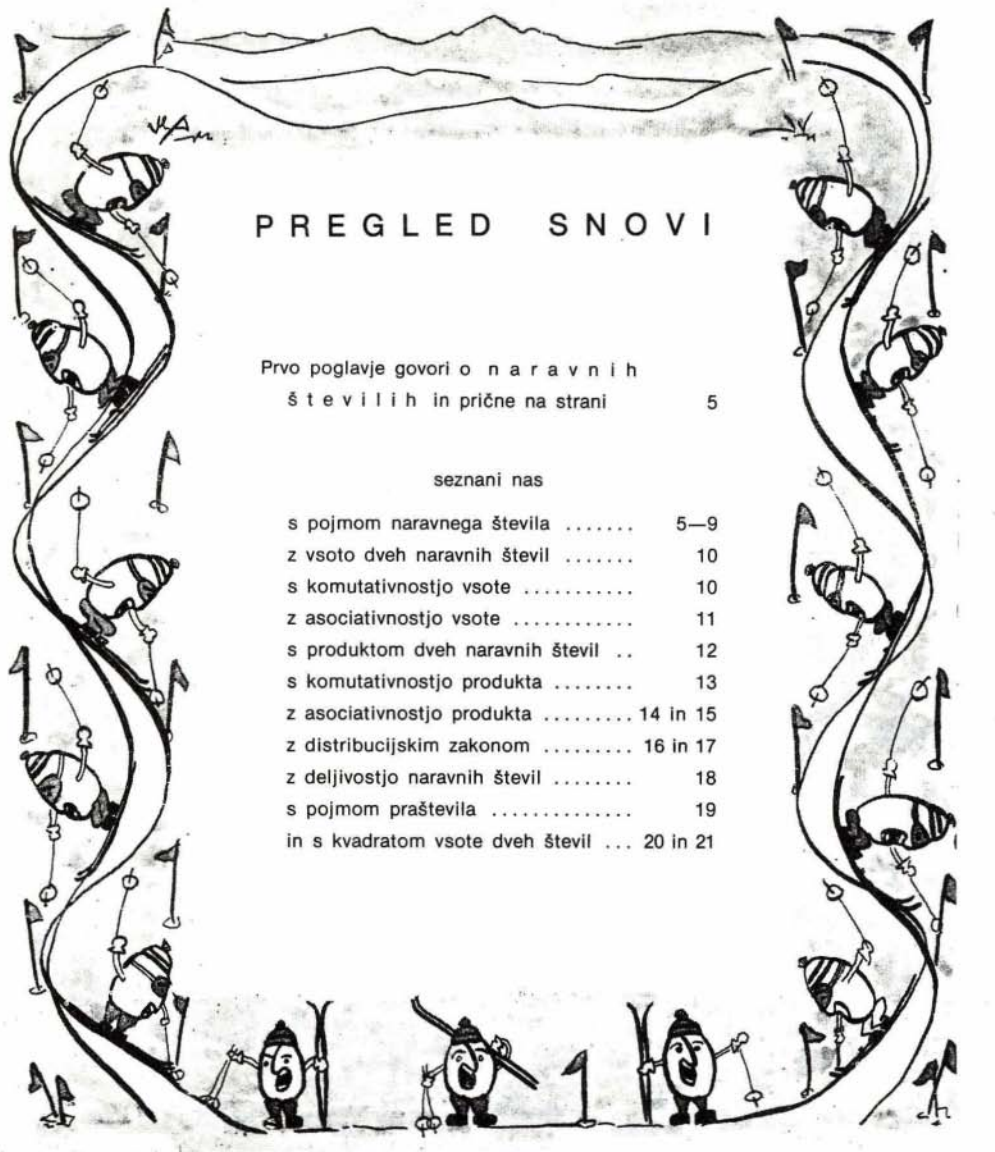
Pitagora je imel osemindvajset učencev: štirinajst matematikov, sedem naravoslovcev, štiri modrijane in tri žene.

Skupaj smo prešteli Pitagorove učence. Bralec sam pa naj, preden knjigo zapre, pomaga muzam prešteti jesenski plen:

Erosa vsega v solzah
ob poti je našla Kiprída
"Bratec, ne hlipaj, povej,
od kod tvoja jeza togotna!"
"Jabolka, sočna, okusna,
tovoril sem tod s Helikóna,
kar me preplavi vreščeč
modric razposajena jata.
Kakor bi trenil, Evtérpa
odnesla mi je dvanajstino,
Kifó petino za njo,
Taliíja pa jabolk osmino.
Zginil je dvajseti del
z Melpómeno. A Terpsihóra
zmáknila je četrtno,
s sedmino ušla je Eráto.
Še Polihímnijska skromna
je trideset sadežev vzela.
Bolj sta olajšali me
Uránija in Kaliópa,
prva za tristo plodov
in druga za sladkih stodvajset.
Žalost me tare in srd,
ko štejem ta borni ostanek:
petdeset jabolk, poglej,
izropan bom spravljal domov."







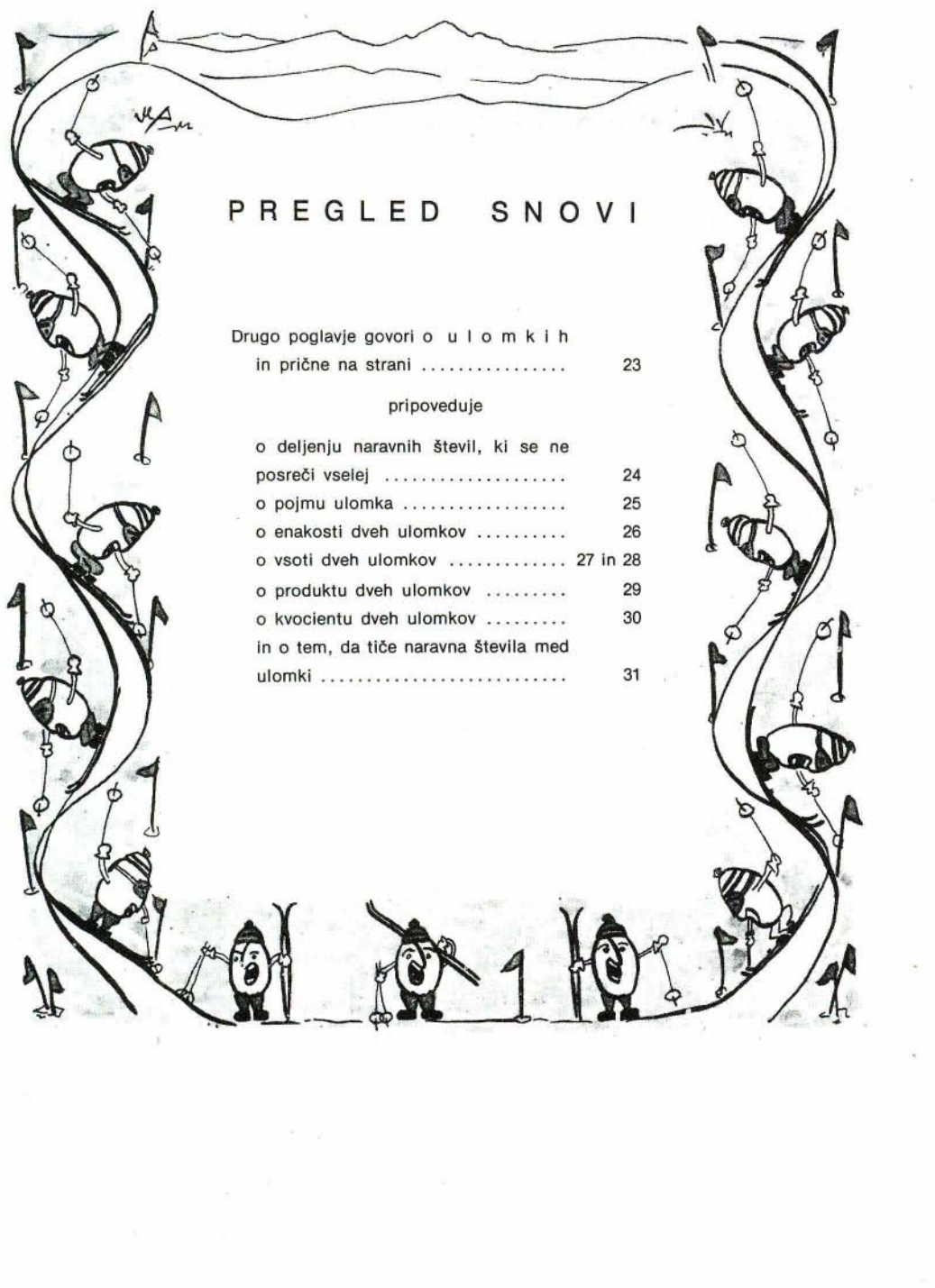
PREGLED SNOVI

Prvo poglavje govori o n a r a v n i h
š t e v i l i h i n p r i č n e n a s t r a n i

5

seznanani nas

s pojmom naravnega števila	5—9
z vsoto dveh naravnih števil	10
s komutativnostjo vsote	10
z asociativnostjo vsote	11
s produktom dveh naravnih števil ..	12
s komutativnostjo produkta	13
z asociativnostjo produkta	14 in 15
z distribucijskim zakonom	16 in 17
z deljivostjo naravnih števil	18
s pojmom praštevila	19
in s kvadratom vsote dveh števil ...	20 in 21

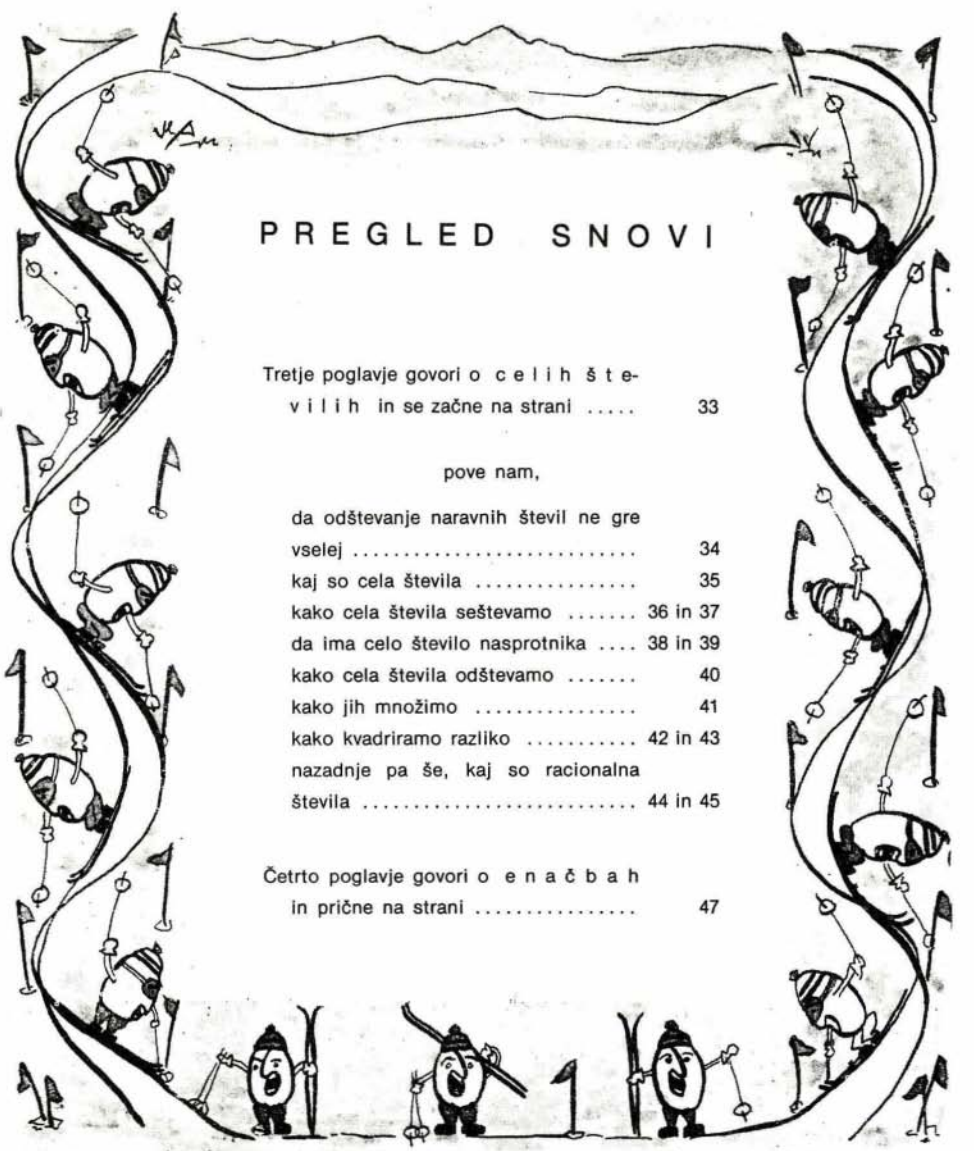


PREGLED SNOVI

Drugo poglavje govori o u l o m k i h
in prične na strani 23

pripoveduje

o deljenju naravnih števil, ki se ne posreči vselej	24
o pojmu ulomka	25
o enakosti dveh ulomkov	26
o vsoti dveh ulomkov	27 in 28
o produktu dveh ulomkov	29
o kvocientu dveh ulomkov	30
in o tem, da tiče naravna števila med ulomki	31



PREGLED SNOVI

Tretje poglavje govori o c e l i h š t e -
v i l i h in se začne na strani 33

pove nam,

da odštevanje naravnih števil ne gre vselej	34
kaj so cela števila	35
kako cela števila seštevamo	36 in 37
da ima celo število nasprotnika	38 in 39
kako cela števila odštevamo	40
kako jih množimo	41
kako kvadriramo razliko	42 in 43
nazadnje pa še, kaj so racionalna števila	44 in 45

Četrto poglavje govori o e n a č b a h
in prične na strani 47

PRESEKOVA KNJIŽNICA — 7.

France Križanič, UKROČENA MATEMATIKA — Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fizič namesto množic. 2., popravljena izdaja, str. 1 — 64, naklada 30 000 izvodov.

Ilustriral Miloš Požar. Jezikovno pregledal Janko Moder.

Cena: skupinska naročila 40.- din, posamezna naročila 50.- din.

P R E S E K — list za mlade matematike, fizike in astronome 8. letnik, šolsko leto 1980/81, 5. številka, str. (257—320).

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Daniel Bezek (bralci sprašujejo in odgovarjajo), Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover, Tomaž Fortuna, Franci Forstnerič, Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Metka Luzar-Vlachy (poskusi—premisli—odgovori), Andrej Kmet (Presekova knjižnica—matematika), Ljubo Kostrevec (premisli in reši), Jože Kotnik, Edvard Kramar (tekmovalja—naloge), Matilda Lenarčič (pisma bralcev), Andrej Likar (odgovorni urednik), Norma Mankoč-Borštnik (Presekova knjižnica fizika), Franci Oblak, Peter Petek (naloge bralcev), Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Skulj, Zvonko Trontelj, Marjan Vagaja, Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice—zanimivosti).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — PRESEK, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. št. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 62,50 din, za skupinska naročila pa 50.- din; za inozemstvo 5 \$ = 150.- din, 4000 Lit, 70.- Asch.

List sofinancirata ISS in RSS.

Stavek Partizanska knjiga, ofset tisk ČGP "DELO", Ljubljana.

List izhaja petkrat letno v nakladi 21 000 izvodov.

1981 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 496
Poštnina plačana v gotovini na pošti Ljubljana 61102.



PRESEKOVA KNJIŽNICA



1. Vidav Ivan, JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva (2. natis), 1975
2. Zajc Pavle, TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovalnj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, 1977
3. Prosén Marijan, ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi napravami opazujemo in merimo, 1978
4. Strnad Janez, ZAČETKI SODOBNE FIZIKE - Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad Janez, RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce, 1979
6. Landau L.D., J.B. Rumer, KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI - Nobelovec predstavi spremenjene poglede na prostor, čas in maso, 1979
7. Križanič France, UKROČENA MATEMATIKA - Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic, 1981