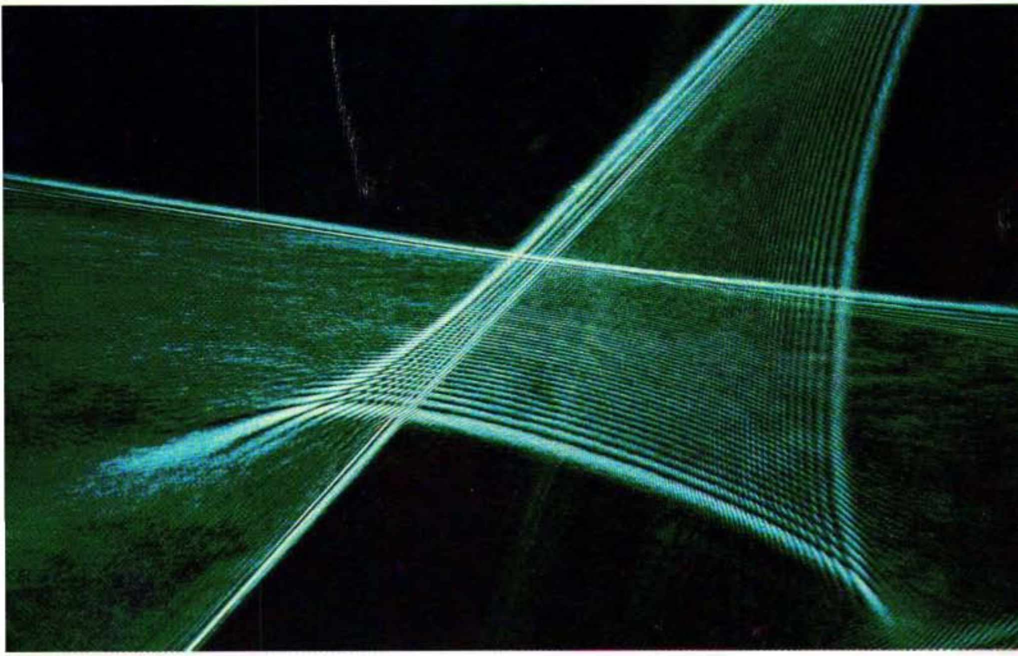
presek

4

VIII
1980-81



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

UVODNIK

KAJ VSE LAHKO NAPIŠEMO S 14-IMI GLAVAMI NA IBM PISALNEM STROJU

V tretji številki Preseka smo vam obljubili, da vam bomo predstavili simbole na vseh štirinajstih glavah, ki jih imamo pri IBM pisalnem stroju, s katerim natipkamo rokopis tudi za Presek. Odtisi vseh glav so na straneh 196 in 197. Vsaka glava ima svoje ime, razen ene, ki smo jo poimenovali sami "prazna". Prvo vam želimo pojasniti, zakaj imenujemo skupino znakov glava. Res so reliefi posameznih simbolov na aluminijasti lupini, ki se ob udarcu na določeno tipko zavrti toliko, da je ustrezna črka obrnjena proti papirju. Na eni strani glave so male črke, na drugi pa velike.

Bralci Preseka, ki jih zanimajo posamezni simboli na glavah, naj si odtise počasi ogledajo. Pregled vseh možnih simbolov pa bo prišel prav avtorjem, ki nam bodo pošiljali svoje rokopise. Prosimo jih, da upoštevajo naše možnosti. Po vsem, kar smo vam danes predstavili,lahko vidite, da je možnosti veliko, niso pa neomejene.

Da vam bo laže, vam bomo opisali nekatere znake na posameznih glavah. Večino teksta natipkamo z glavo "letter gothic". Hitro lahko opazite, da so črte pri teh črkah znatno širše kot pri nekaterih drugih skupinah. To pride predvsem prav pri ofset tisku, kjer se prenaša barva, ki je nanešena na debeli črti, ne pa na tanki. Take so še nekatere druge črke, predvsem na glavah: "artisan", "orator", "script", "courier 72 rdeča". Zato v večini primerov uporabljamo samo te glave, ostale pa so nam v pomoč le v najnujnejših primerih. Črke, ki so na prvih treh glavah,

so odtisnjene tudi na tipkah na pisalnem stroju. Glavi "artisan" (navadna in ruska cirilica) imata malo manjše črke, zato jih uporabljamo takrat, kadar tipkamo manj pomemben tekst, tekste pri opombah ali napise pod slikami. V tiskarnah imenujejo tak tekst petit (beri pti). V tem primeru prestavimo s posebno ročico na stroju mehanizem tako, da na razdaljo 1 "cole" (palca = 2,634 cm) odtipka 12 znakov v nasprotju z desetimi znaki v običajnem tekstu. Glavo "orator" uporabljamo za pisanje naslovov prispevkov in še v nekaterih posebnih primerih n. pr. oznake pri slikah in podobno. Glava "light italic" ima vse simbole poševne. Tiskarji pravijo takemu tekstu kurzivni. V matematiki uporabljamo kurzivne črke za vse matematične simbole, med njimi so to tudi vse grške črke, ki jih lahko najdete na glavah "symbol 10" in "symbol 12". Oznaka "12" pomeni isto kot ime artisan. Ponovno je treba poudariti, da znakov za matematične operacije ne pišemo kurzivno. Zadnja glava, ki smo jo kupili, je glava "script 12", ki ima pisane črke. Le-te uporabljamo za označevanje množic, za tekste, pri katerih želimo poudariti, da so napisani (pisma bralcev) ali pa za posebne okrasne tekste. Na glavi "symbol" so znaki nerazumljivi, če jih ne pogledamo dovolj pazljivo. Prvi znak je "koren", ki mu moramo ročno ali strojno dodati vodoravno črto. V nasprotnem primeru pa moramo izraz pod korenom, če ni enočlenik, napisati v oklepaju. Drugi znak je znak za absolutno vrednost, ki jo lahko zaradi majhne razsežnosti odtisnemo za pol koraka levo ali desno.Za to posebnost imamo na IBM pisalnem stroju tudi posebno tipko, s katero premaknemo mehanizem za pol koraka na levo. To možnost uporabljamo tudi pri pisanju nekaterih funkcij:
napačno: sin x, pravilno: sin$x$, log$x$, sup$M$, ker$N$, itd.
Simboli od 6. do 10. mesta so le zgornje polovice naslednjih simbolov: vsota, integral, oklepaj, zaklepaj, zaviti oklepaj. Spodnje dele teh znakov lahko najdete v drugih vrstah te glave. Ker so ti znaki sestavljivi, je njihova višina nekoliko večja od znakov na drugih glavah. Uporabljamo jih takrat, kadar imamo v teh ogradah višje izraze: ulomke in podobno. V drugi vrsti imamo vse številke, ki so odtisnjene nekoliko više, zato jih

uporabljamo za eksponente. Nekatere eksponente in indekse imamo tudi na glavah "E" in "T", na glavi "courier 72 rdeča" pa imamo na teh višinah vse številke. Na glavi "symbol" imamo tudi znak za neskončno (∞), večji in manjši, sledi (→), je približno (≃), množenje (·), deljenje ter kartezični produkt (×).

Še več raznih simbolov za matematične operacije imajo naslednje glave. Na "prazni" glavi so znaki za "manjše in enako", "večje in enako", črta nad in pod črko (slednje za konjugirano vred-ost), četrti znak v tretji vrsti (∈) lahko pomeni "je element", če naknadno zbrišemo srednji črto (⊂) pa "je podmnožica". V pe-ti vrsti pomenijo znaki od tretjega dalje: (Δ) "trikotnik",(<) "manjši", (∩) presek, (∪) unija, (>) "večji", (∡) kot, (∧) in. Na tej glavi so v predzadnji vrsti še simboli za vsak (∀), obstaja (∃), približno (~), itd. Tu so črke nekoliko manjše od velikosti običajnih črk. Zato to glavo priporočamo za pisanje eksponentov in indeksov.Še manjši pa so simboli na glavah "E" in "T", na glavi "italic 72" pa so celo vse črke kurzivne.Avtorjem priporočamo, da uporabljajo za eksponente predvsem te simbole. Marsikateri simbol ali znak pa lahko natipkamo kot kombinacijo drugih dveh znakov (kot ∢, dolar $, ni enako ≠, itd), ki pa jih na nekaterih glavah že imamo. Tako ni potrebno za vsak znak menjati glave. Nekatere znake lahko dobimo tudi z brisanjem dela že odtisnjenih znakov: ⊂ iz ∈ , ∝ iz ∞ , itd.

Ciril Velkovrh

artisan	symbol 12	cirilica	prazna
+''%/!()&*=_´	√|{}±⌈⌈∩∫ ̂	+''=%!()/IV_Ђ	≤≥=%√()'[]_¯
;1234567890-¨	1234567890 ‗ ··	1234567890-ђ	1234567890-¨
QWERTZUIOPŠ	ΓΔ←Θ→≃Ξ↑↓ℓΠ	ЉЊЕРТЗУИОПШ	αβγ∈λμυπωP*
qwertzuiopš	γδεθτζξιορπ	љњертзуиопш	qwertzuiop•
ASDFGHJKLČĆ	∇ΣΦ<Λ¶>§Ω⌡•	АСДФГХЈКЛЧЋ	AΣΔ<∩∪>∡ΛΩ|
asdfghjklčć	ασφ⌊λη⌡κω⌊÷	асдфгхјклчћ	asdfghjkl+/
YXCVBNM?:Ž	⊤≡Ψ∝∞∿∂`†∫	SЏЦВБНМ?:Ж	→φ∀∃∞~M{}
yxcvbnm,.ž	υχψ×βνμ´˜⌋	sџцвбнм,.ж	yxcvbnm,.:

Te glave se lahko včasih kupijo pri INTERTRADE, Ljubljana, Moše Pijadejeva 29

letter gothic	orator	light italic	script	symbol 10
+"%/!()&*=_´	+"%/!()&*=_´	*+"%/!()&*=_´*	;"=%&()'§/_¯	√|{}±⌈⌠⌒⌡_^
1234567890-¨	1234567890-¨	*1234567890-¨*	1234567890-´	1234567890 ¨
QWERTZUIOPŠ	QWERTZUIOPŠ	*QWERTZUIOPŠ*	QWERTZUIOPÜ	ΓΔ←Θ→≃Ξ↑↓ℓΠ
qwertzuiopš	QWERTZUIOPŠ	*qwertzuiopš*	qwertzuiopü	γδεθτζξιορπ
ASDFGHJKLČĆ	ASDFGHJKLČĆ	*ASDFGHJKLČĆ*	ASDFGHJKLÖÄ	∇ΣΦ< ¶>§Ω, •
asdfghjklčć	ASDFGHJKLČĆ	*asdfghjklčć*	asdfghjklöä	ασφ,λη,κω,÷
YXCVBNM?:Ž	YXCVBNM?:Ž	*YXCVBNM?:Ž*	YXCVBNM?!:	T ∃Ψ∝∞∿ ∂ †∫
yxcvbnm,.ž	YXCVBNM,.Ž	*yxcvbnm,.ž*	yxcvbnm,.ß	υχψ×β νμ´˜ ι

E	T	italic 72	courier 72 črna	courier 72 rdeča
123456789ΦΣ¯	1234567 89Φ!¯	*+"%/!()&*=_´*	+"%/!()&*=_´	1234567890-:
✻23'(∫$_{123}$Ω-→	✻23'(∫$_{123}$Θ-~	*1234567890-"*	1234567890-¨	1234567890-;
QWERTZUIOP+	QWERTZUIOP+	*QWERTZUIOPŠ*	QWERTZUIOPŠ	≠→|-$ {\┌┐Δ¶
σweρtε$_t$iπp=	$_{\rho}$veρtε$_T$iπp=	*qwertzuiopš*	qwertzuiopš	1←↑+¢}≠└┘∇§
ASDFGHJKL$_0$/	ASD FGHJKL$_0$/	*ASDFGHJKLČĆ*	ASDFGHJKLČĆ	√⧺•ȯō<>≤≥ⁿ"
α$_s$dδΓωχλℓ)√	α$_s$dϑγhχkℓ)√	*asdfghjklčć*	asdfghjklčć	234567890$_n$'
YXCVBNM$_r$.$^{\infty}$	YX CVBNM$_r$.$^{\infty}$	*YXCVBNM?:Ž*	YXCVBNM?:Ž	≢ $^{()}$ Ђ+×©,.◇
τxcvℝ$_n$m,∂μ	τ$_m$cvβ$_n$m,∂μ	*yxcvbnm,.ž*	yxcvbnm,.ž	† () Λ+×®,.Ħ

MATEMATIKA

PRVI KORAKI SONJE KOVALEVSKE V MATEMATIKO

Pred devetdesetimi leti (29, januarja 1891) je umrla v Stockholmu Sonja Vasiljevna Kovalevska. Rodila se je 3. januarja 1850 v Moskvi v izrazito arsitokratski družini Korvin-Krukovski; bila je torej daljna potomka ogrskega kralja Matije Korvina (1458-1490) - kralja Matjaža. Redne šole ni obiskovala, poučevali so jo samo domači učitelji. Sicer pa so bile tedaj visoke šole ženskam zaprte in to ne samo v carski Rusiji ampak tudi povsod drugod v Evropi.

S svojo nadarjenostjo, vztrajnostjo in ob pomoči slovitega matematika Karla Weierstrassa (1815 - 1897) si je pridobila leta 1874 doktorat znanosti v nemškem mestecu Göttingenu - tedanji matematični Meki. Kot prva ženska in ob silovitem odporu vse javnosti je bila izvoljena leta 1884 za profesorico matematike na univerzi v Stockholmu, kjer je delovala do svoje smrti. Kot prva ženska je prejela leta 1888 ob močni konkurenci petnajstih kandidatov Bordinovo nagrado francoske akademije znanosti za delo o gibanju togega telesa okrog fiksne točke; zaradi izredne kakovosti predloženega dela ji je žirija zvišala nagrado od 3000 na 5000 frankov. Petrograjska akademija znanosti je izvolila Sonjo Kovalevsko leta 1889 za svojega dopisnega člana zaradi zaslug za matematiko.

S svojimi deli pa se Kovalevska ne odlikuje samo na področju matematike. Napisala je tudi nekaj dobrih leposlovnih del. Kljub temu, da je izvirala iz aristokratske družine, je bila ona sama v krogu mlajše generacije zelo revolucionarna. Mnogo svojih sil je posvetila boju za pravice in enakopravnost žen. Njena sestra

Ana je leta 1871 aktivno sodelovala v Pariški komuni. Njen poznejši mož Vladimir Onufrijevič Kovalevski, znamenit paleontolog, je v mladih letih sodeloval v Italiji v garibaldinskem gibanju.

Sonja Kovalevska se je začela zanimati za matematiko že zelo zgodaj, pravzaprav še kot otrok. Imela je strica Petra, ki je pogosto prihajal v goste in ostajal pri njih po tedanjih ruskih navadah tudi po cele mesece. Stric je bil izobražen in dokaj načitan ter je Sonji rad pripovedoval vse mogoče od pravljic pa do težjih znanstvenih tem. Tako ju je pogovor večkrat zanesel tudi v matematiko. Od strica je mala Sonja prvič slišala o kvadraturi kroga, o asimptotah, o tangentah, o limitnih procesih, o Zenonovem paradoksu o Ahilu in želvi in o mnogih drugih podobnih rečeh, katerih smisla pa kot otrok še ni mogla doumeti. Kako naj namreč majhna deklica razume nesmisel, da brzonogi Ahil ne more dohiteti okorne želve. Vsi ti pogovori pa so le pustili neko sled v Sonjini domišljiji.

Zanimiv je še dogodek, ki ga je Sonja Kovalevska sama opisala v svojem leposlovnem delu "Spomini na otroštvo". Ko je imela Sonja kakih devet let, se je družina preselila iz Moskve na posestvo Polibino v Vitebski guberniji. Ob preselitvi so nalepili po stenah v zgornjih sobah svilene tapete, za spodnjo otroško sobo pa je tapet zmanjkalo. Stene te sobe so nato prelepili s časopisi in polami starega papirja; na teh polah so bili med tekstom in čudnimi znaki narisani krogi, ravne črte, krivulje in koti; vzgojiteljica je trdila, da so to matematične naloge, ki jih mala Sonjica ne more razumeti. Sonja je ure in ure rada strmela v te skrivnostne znake in slike, ki so se ji globoko vtisnili v spomin. Na steni so bili nalepljeni listi iz razmnoženih skript znamenitega ruskega matematika Mihaila Vasiljeviča Ostrogradskega (1801 - 1861) o diferencialnem in integralnem računu; po teh skriptih je že davno tega študiral matematiko Sonjin oče. Ko je več let za tem učil profesor Strannoljubski petnajstletno Sonjo višjo matematiko, se je čudil njeni hitri dojemljivosti osnovnih pojmov infinitezimalnega računa, "natanko tako, kakor da bi jih že prej poznala". In dejansko je Sonja te stvari poznala bolj ali manj zavestno že davno prej.

K Sonjinim staršem je večkrat prihajal na obisk sosed, profesor fizike Tirtov. Nekoč je prinesel s seboj svoj učbenik elementarne fizike; v poglavju o optiki je uporabil trigonometrične funkcije, ki jih tedaj Sonja še ni poznala. Sonja je z velikim zanimanjem preštudirala knjigo in premagovala težave v zvezi s trigonometričnimi funkcijami na svoj izviren način. Ko je povedala Tirtovu, da je knjigo prebrala in razumela, ji ta ni verjel in bil je prepričan,da se Sonja samo baha. Užaljena je začela Tirtovu razlagati težja poglavja iz knjige. Tirtov se je prepričal, da se ne hvali in da je knjigo po svoje povsem dobro razumela; čudil se je njenemu razumevanju in popolnoma spremenil o njej svoje mnenje. Sonjinemu očetu jo je glede nadarjenosti primerjal z genialnim francoskim matematikom Pascalom (1623 - 1662) in svetoval, da naj se hči posveti matematiki. Po daljšem prigovarjanju in obotavljanju je oče vendarle najel hčerki domačega učitelja, profesorja matematike Strannoljubskega.

Tako si je utrla pot Sonja Kovalevska kljub neugodnim splošnim razmeram v čudežni svet matematike.

Alojzij Vadnal

Literatura:

E. T. Bell, *Veliki matematičari*. Nakladni zavod ZNANJE, Zagreb 1972. Str. 384 - 408.

K. Hofer, *Sonja Kovalevska*.Mladinska knjiga, Ljubljana 1974.

PASCALOV TRIKOTNIK

Kadar slišimo besedo trikotnik, pomislimo najprej na geometrijski lik s tremi oglišči, stranicami in koti. To pot pa ne bomo govorili o takih trikotnikih. *Pascalov trikotnik* je ime za zanimivo shemo naravnih števil, ki jo zaradi preglednosti zapišemo v trikotni obliki. Shema ima neskončno mnogo vrstic. V n-ti vrstici stoji $n+1$ števil, prične pa se z vrstico 0, v kateri je le število 1. Zapisali bomo prvih nekaj vrstic Pascalovega trikotnika, bralec pa naj skuša ugotoviti pravilo, po katerem dobimo števila neke vrstice iz števil prejšnje vrstice.

vrstica	
0	 1
1	.... 1 1
2	.... 1 2 1
3	.... 1 3 3 1
4	.... 1 4 6 4 1
5	.... 1 5 10 10 5 1
6	.... 1 6 15 20 15 6 1
7	..... 1 7 21 35 35 21 7 1
8	... 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	.. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Slika 1

Shema se nadaljuje v nedogled. Ste uganili pravilo? Seveda, saj je prav preprosto. *Vsaka vrstica se začne in konča z 1, vsako od ostalih števil v vrstici pa dobimo tako, da seštejemo obe števili, ki stojita nad njim v prejšnji vrstici.* Vzemimo npr. vrstico 4 s števili 1, 4, 6, 4, 1 . Vrstico 5 dobimo tako, da začnemo z 1, izračunamo vsote $1+4 = 5$, $4+6 = 10$, $4+6 = 10$, $4+1 = 5$, nato pa končamo z 1.

vrstica 4: 1 4 6 4 1

vrstica 5: 1 5 10 10 5 1

Slika 2

Zdaj lahko izračunamo števila v vrstici 6: 1, 1+5 = 6, 5+10 = = 15, 10+10 = 20, 10+5 = 15, 5+1 = 6, 1 . Na ta način lahko iz računamo poljubno mnogo vrstic Pascalovega trikotnika.

Pojasnimo ime našega trikotnika! Zgodovinarji domnevajo, da so to shemo poznali že v stari kitajski in indijski civilizaciji. Evropi so jo posredovali Arabci; *Omar Khayyam*, pesnik, matematik in filozof, jo je zapisal okoli leta 1100. Prvi, ki je napisal o tej shemi obravnavo in našel mnoge njene lastnosti, je bil francoski matematik 17. stoletja *Blaise Pascal*. Od tedaj nosi trikotnik njegovo ime.

Pravilo, po katerem računamo števila Pascalovega trikotnika, bomo zapisali bolj "matematično". V ta namen moramo števila najprej označiti. Naj bo $P(n,k)$ število, ki stoji na k-tem mestu v n-ti vrstici trikotnika. Pri tem teče število n od 0 naprej, število k pa teče pri vsakem n od 0 do n. Tako je npr. $P(0,0) = 1$; $P(1,0) = 1$, $P(1,1) = 1$; $P(2,0) = 1$, $P(2,1) = 2$, $P(2,2) = 1$ itd. Za vsak n je $P(n,0) = P(n,n) = 1$. Zapišimo v naših oznakah dve sosednji vrstici

vrstica n: $P(n,0) \ldots\ldots P(n,k-1), P(n,k) \ldots\ldots P(n,n)$

vrstica $n+1$: $P(n+1,0) \ldots\ldots\ldots P(n+1,k) \ldots\ldots\ldots P(n+1,n+1)$

Slika 3

S slike 3 vidimo, da moramo Pascalova števila definirati takole.

Definicija. *Pascalova števila* imenujemo števila, ki jih dobimo po naslednjem pravilu:

a) $P(0,0) = 1$

b) za vsak $n=0,1,2,\ldots$ naj bo

$$P(n+1,0) = P(n+1,n+1) = 1$$
$$P(n+1,k) = P(n,k+1) + P(n,k) \quad (1 \leq k \leq n) \qquad (1)$$

S to definicijo so Pascalova števila natanko določena.

Pascalov trikotnik je zanimiv za matematiko zaradi mnogih lastnosti, ki jih imajo njegova števila. V njem se skrivajo nekatera pomembna zaporedja naravnih števil. Pascalova števila se pojavijo pri reševanju raznovrstnih problemov. *Donald E. Knuth* (znan ameriški strokovnjak za računalništvo) je celo zapisal: *v Pascalovem trikotniku je toliko zanimivih lastnosti, da vsaka nova ne preseneti nikogar več razen tistega, ki jo je našel.*

Pascalova števila dobimo pri potenciranju binoma $(1 + x)$. Oglejmo si prvih nekaj potęnc:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & (1 + x)^0 = 1 \\ n = 1 & (1 + x)^1 = 1 + 1x \\ n = 2 & (1 + x)^2 = 1 + 2x + 1x^2 \\ n = 3 & (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3 \end{array}$$

....

Uredimo koeficiente v trikotno shemo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

....

Začetek je obetajoč, saj so to začetne vrstice Pascalovega trikotnika.

Ni težko dokazati, da velja to pravilo tudi za vsako nadaljnjo vrstico, vendar bomo dokaz vseeno izpustili. *Koeficienti, ki jih dobimo pri razvoju binoma $(1 + x)^n$ po potencah x, so Pascalova števila iz n-te vrstice Pascalovega trikotnika:*

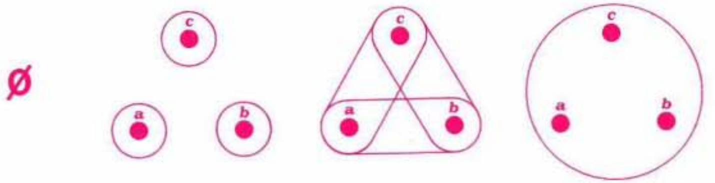
$$(1+x)^n = 1 + P(n,1)x + P(n,2)x^2 + \ldots + P(n,n-1)x^{n-1} + x^n \qquad (2)$$

Kadar govorimo o Pascalovih številih v zvezi z razvojem binoma $(1 + x)^n$, jih imenujemo raje *binomski koeficienti* in jih označimo z *binomskimi simboli* $\binom{n}{k} = P(n,k)$. Simbol $\binom{n}{k}$ preberemo "*n nad k*". Zgornji obrazec, zapisan z binomskimi simboli, se imenuje *Newtonova binomska formula*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n \qquad (3)$$

Naloga 1. Izračunaj koeficient pri x^5 v razvoju binoma $(1 + x)^{10}$!

Pascalova števila se pojavijo tudi pri naslednjem problemu. Naj bo S poljubna množica z n elementi in k poljubno naravno število med 0 in n. *Množica S ima ravno $P(n,k)$ različnih podmnožic s k elementi.* Trditev se da dokazati na različne načine, npr. z matematično indukcijo. Mi si bomo namesto dokaza raje ogledali primer, ko ima množica S tri elemente: $S = \{a,b,c\}$. S ima natanko eno podmnožico z 0 elementi, to je kar prazna množica $\emptyset$. Podmnožice z enim elementom so tri: $\{a\}$, $\{b\}$ in $\{c\}$. Prav tako dobimo tri podmnožice s po dvema elementoma: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ in $\{b,c\}$. Edina podmnožica s tremi elementi pa je kar vsa množica S. Dobili smo števila 1, 3, 3, 1 tretje vrstice Pascalovega trikotnika.



$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(3,0) = 1$	$P(3,1) = 3$	$P(3,2) = 3$	$P(3,3) = 1$

Slika 4

Ogledali si bomo nekaj najpomembnejših lastnosti Pascalovega trikotnika.

1) Pascalov trikotnik je simetričen glede na navpično premico, ki ga razpolavlja:

$$P(n,k) = P(n,n-k)$$

Pravilo (1) je namreč tako, da ohranja simetrijo vrstice. Začetna vrstica je simetrična (saj vsebuje samo število 1), zato so simetrične vse vrstice.

2) Vsota vseh števil v n-ti vrstici je enaka 2^n

$$2^n = 1 + P(n,1) + P(n,2) +\ldots+ P(n,n-1) + 1$$

To najlažje vidimo, če postavimo v obrazec (2) $x = 1$.

3) Postavimo v obrazec (2) $x = -1$, pa dobimo še

$$0 = 1 - P(n,1) + P(n,2) - P(n,3) + \ldots$$

Naloga 2. Izračunaj vsoti

$$1 + P(n,2) + P(n,4) + P(n,6) + \ldots$$

in

$$P(n,1) + P(n,3) + P(n,5) + \ldots$$

(*Rezultat*: obe vsoti sta enaki 2^{n-1}) .

Naloga 3. Izračunaj vsoto vseh števil nad n-to vrstico Pascalovega trikotnika!

(*Rezultat*: $2^n - 1$) .

Nazadnje nas zanima, kako bi lahko najenostavneje izračunali neko število $P(n,k)$. Ena možnost je seveda, da izračunamo po pravilu (1) prvih n vrstic Pascalovega trikotnika. Vendar hitro opazimo, da ne potrebujemo vseh vrstic v celoti.

Primer . Da izračunamo število $P(5,2) = 10$, potrebujemo le takle del trikotnika

```
              1
           1     1
        1     2     1
     1     3     3     .
  .     4     6     .     .
.    .    10     .     .     .
```

Slika 5

Naloga 4. Koliko števil je najmanj potrebno zapisati, da dobimo število $P(n,k)$?

(*Rezultat*: $k.(n-k)$, če ne upoštevamo robnih enic).

Število $P(n,k)$ pa lahko izračunamo tudi po naslednji preprosti formuli

$$P(n,k) = n.(n-1)\dots(n-k+1)/(1.2.3\dots k) \qquad (4)$$

Tudi tega obrazca ne bomo dokazali, pač pa si bomo na primeru ogledali, kako ga uporabimo. Izračunajmo npr. $P(10,4)$! Tu je $n=10$, $k=4$, $n-k+1=7$. V števec ulomka moramo zapisati vsa števila med 10 in 7, v imenovalec pa števila od 1 do 4:

$$P(10,4) = 10.9.8.7/(1.2.3.4)$$

Okrajšajmo 9 s 3 in 8 z 2.4=8, pa dobimo

$$P(10,4) = 10.3.7 = 210$$

Naj bo s tem o Pascalovem trikotniku zaenkrat dovolj.

Franci Forstnerič

MATEMATIKA

POENOSTAVLJENA DOMINA

Ker je sinček star komaj pet let, sem mu sklenil olajšati igranje domine. Takole sem postopal. Najprej sem odstranil vse dvojne domine (0,0), (1,1), ... (6,6). Nato sem izločil še vse tiste, ki so vsebovale ničlo. Ostalo mi je 15 domin:

(1,2) , (1,3) ... (1,6) ; (2,3) , (2,4) ...... (5,6).

"To bi morala biti za njegovo starost primerna igra", sem si dejal in že sva položila prvo igro. Imela sva smolo, zataknilo se nama je in sva morala nehati, še preden sva postavila vse domine na mizo. "Nič ne de, to se pri domini rado pripeti", sem ga tolažil in že sva zaigrala drugo igro. Z istim neuspehom! Tretjič, ista polomija! Zamislil sem se.

Vzel sem papir in nanj narisal šest točk (s toliko števili je imela najina domina opravka). Samo zaradi lepšega sem točke narisal tako, da so tvorile pravilen šesterokotnik. Nato sem spojil vsako točko z vsako drugo in tako dobil vse stranice in vse diagonale šestkotnika (15 po številu).

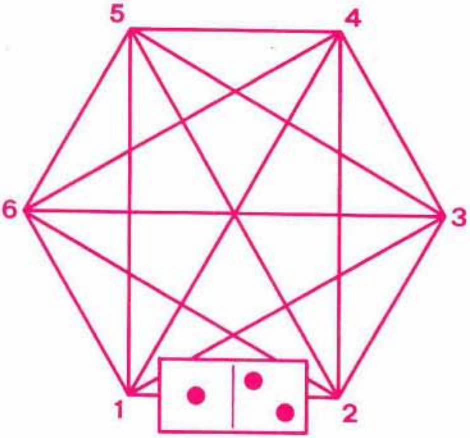
Potem sem modroval: če ustreza vsakemu oglišču število (od 1 do 6), mora vsaki stranici ali diagonali (med njima ni razlik) ustrezati dvojica števil, torej domina. Igrati domino je potemtakem isto kot začeti pri enem oglišču šesterokotnika, se pomakniti po eni stranici ali diagonali, ki izvira iz istega oglišča, doseči drugo oglišče, tam izbrati novo stranico ali diagonalo itd. Končati igro domine pa pomeni prerisati ves šesterokotnik, ne da bi odmaknil pero od risbe in ne da bi dvakrat prerisal isto daljico.

Z vzklikom "to je graf!", mi je prišla na misel prva lanska številka Preseka, kjer je bilo dokazano tole: graf moremo prerisati na zgoraj zahtevani način le, če so vsa njegova oglišča soda (to pomeni, da iz vsakega oglišča izhaja sodo število daljic-povezav) ali če sta natanko dve lihi oglišči, vsa ostala pa soda.

Na moji risbi je kar šest oglišč lihih (iz vsakega moli po pet daljic), zato ni mogoče grafa prerisati na zahtevani način. In prav tako ni mogoče nikoli zaključiti igre tako "poenostavljene" domine.

Vprašanje: zakaj moremo igro navadne domine pripeljati do konca?

Karel Bajc



P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome. 8. letnik, šolsko leto 1980/81, 4. številka, str. 193-256

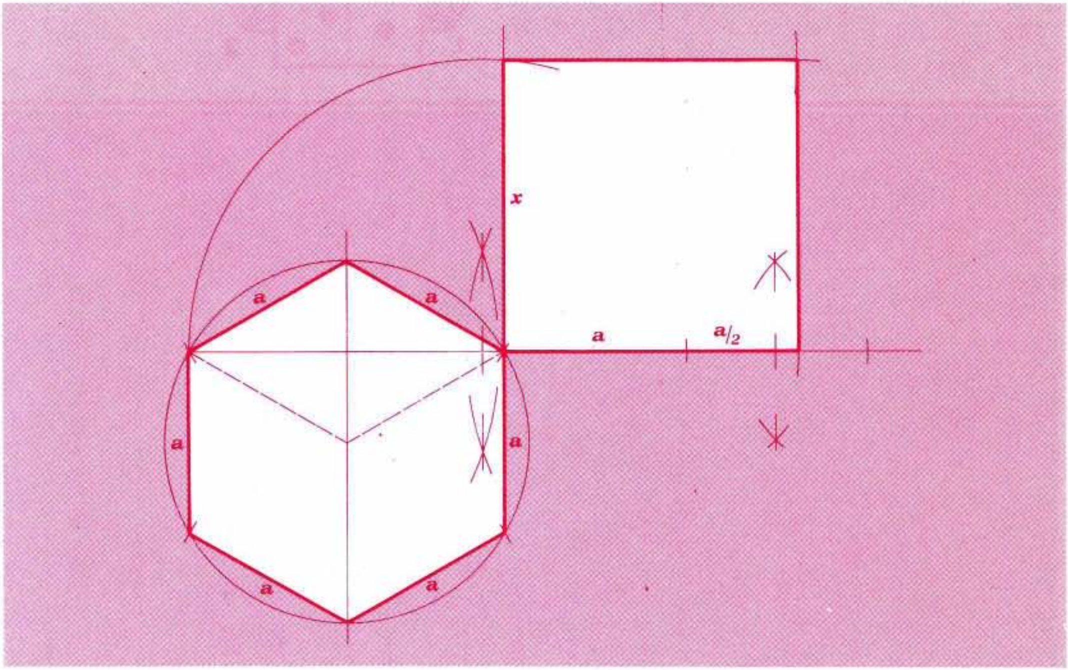
Rokopis sta natipkali Alenka Stepančič in Majda Kelbelj, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

List naročajte na naslov Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Komisija za tisk, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, pp 227, tel. štev. (061) 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1980/81: za posamezna naročila ja 62,50 din, za skupinska naročila pa 50.- din; za inozemstvo 4$ = 120.- din, 4000 Lit, 60 Asch. Posamezna številka stane 15.- din. Poštnina plačana v gotovini na pošti 61102. List sofinancirata ISSin RSS. List izhaja petkrat letno. Naklada 20000 izv. Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "Delo", Ljubljana.

NALOGE

PRAVILNI ŠESTKOTNIK IN KVADRAT*

Dobro si oglejte sliko in dokažite, da imata pravilni šestkotnik in kvadrat enaki ploščini.



Dragoljub M. Miloševič

prevedel *Peter Petek*

*Preberite še članek Pravilni šestkotnik, P VIII/2 str. 106

FIZIKA

SVETLOBA LASERJA

"Tanki curki svetlobe švigajo med vesoljskima ladjama. Ladjo kapitana Blaka nevarno premetava, v komandni sobi so vsi napeti. Končno le zadetek v polno! Mogočen laserski top je zadel v občutljivo točko sovražnikove ladje ..."

To bi lahko bil kratek povzetek iz televizijske nadaljevanke, v kateri ne manjka vsega sposobnih računalnikov in drugih avtomatov, pa laserskega orožja. Marsikdo od vas je najbrž na podoben način prvič slišal za *laser*. Slišali ste še, da je mogoče z laserji vrtati v jekleno pločevino fine luknje, da je laser uporaben pri operacijah, da ga lahko uporabimo celo za brisanje napačno odtipkanih črk in podobno.

Laser srečamo tudi v šoli. Učitelj ga pri pouku uporablja kot svetilo. Daje ozek, skoraj vzporeden, zelo svetel curek rdeče svetlobe. Učitelj nam z navdušenjem pokaže, kako se laserski curek uklanja na ostrih robovih predmetov. Po prehodu skozi optično mrežico se razprši curek v pravo pahljačo. Podobno se razprši curek pri prehodu skozi gosto tkanino. Vsi ti poskusi nam dokazujejo, da je svetloba *valovanje*. Podobne pojave lahko opazujemo tudi pri svetlobi navadnih svetil, le da so manj izraziti. Kar poglejmo skozi tanko zaveso luči v oddaljeni hiši. Okoli luči vidimo množico lepo urejenih barvastih lis. Tudi te so posledica uklona svetlobe.

V čem se svetloba laserja razlikuje od svetlobe običajnih svetil, da so pri njej valovni pojavi tako izraziti?

Pojdimo po vrsti!

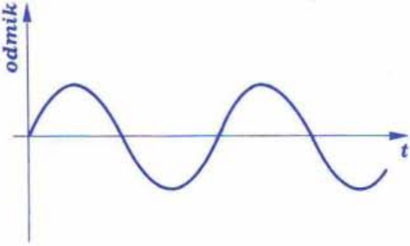
Laser oddaja svetlobo v ozkem curku. Druga svetila oddajajo svetlobo v vseh smereh in le z lečami ali z zrcali jo lahko delno usmerimo. Poskusimo s prizmo razkloniti svetlobo v spekter! Pri običajnih svetilih dobimo pri takem poskusu na zaslonu več barvnih lis ali kar celo mavrico. Šele s filtri, ki prepuščajo le izbrano barvo, lahko spekter omejimo. Pika, ki kaže, kam se je po prehodu skozi prizmo odklonil laserski žarek, ostane nerazklonjena. Za vse naše poskuse lahko trdimo, da je laserska svetloba *enobarvna*.

Opredelimo to zadnjo trditev bolj natančno! Svetlobo z izbrano barvo opredelimo, če povemo njeno *valovno dolžino* ali pa *frekvenco*. Vidna svetloba ima valovne dolžine od 450 nm do 700 nm. Prva valovna dolžina ustreza modri, druga pa rdeči svetlobi. Frekvenca modre svetlobe je $6{,}7 \cdot 10^{14}$ s^{-1}, frekvenca rdeče svetlobe pa $4{,}5 \cdot 10^{14}$ s^{-1}. Vse te valovne dolžine ali frekvence so zastopane v spektru svetlobe s Sonca. Iz spektra sončne svetlobe lahko s filtrom izrežemo pasove s širino okoli 10 nm ali s frekvenčno širino okoli 10^{13} s^{-1}. Curek svetlobe iz živosrebrne luči lahko s prizmo ločimo v curke, ki so veliko bolj enobarvni. Spektralna širina svetlobe v takih curkih je okoli 10^{-3} nm ali okoli 10^{8} s^{-1}. Tudi šolski laser nam daje svetlobo s približno tako spektralno širino. Posebno skrbno izdelani laserji pa dajejo svetlobo, pri kateri je spektralna širina še veliko manjša - celo 10^{3} s^{-1}.

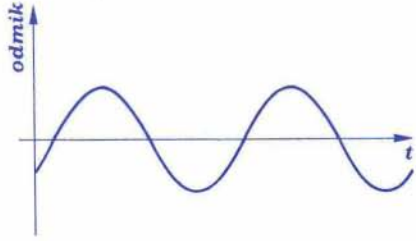
Ostane nam še najvažnejša razlika med svetlobo laserja in svetlobo navadnih svetil. Pravimo, da je svetloba laserja *koherentna* za razliko od svetlobe navadnih svetil, ki je *nekoherentna*.

Ob pojmu koherentnosti se bomo pomudili nekaj dlje. Prej smo trdili, da lahko na osnovi poskusov zaključimo, da je svetloba valovanje. Vsa valovanja imajo nekatere skupne lastnosti. Za vse veljata enaka zakona za lom in odboj, vsa valovanja se uklanjajo ob ovirah, pri vseh opazimo interferenco. V šoli vse te pojave najprej srečamo pri valovih na vodnem površju, ki jih lahko naredimo sami na zelo preprost način. Poskusimo še enkrat!

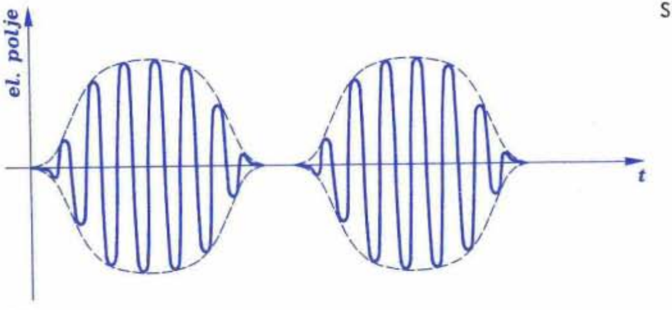
Vzemimo na primer deščico in jo pomakajmo v vodo v enakomernem



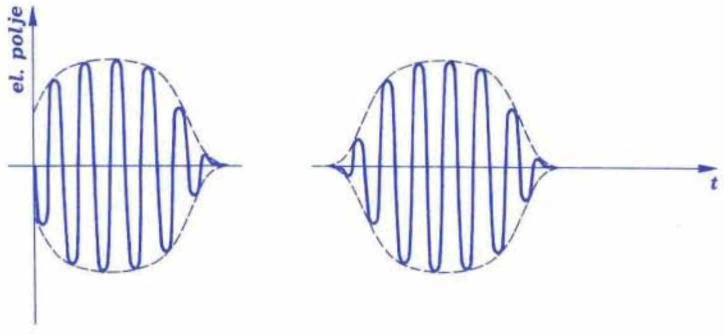
Sl.1a



Sl.1b



Sl.2a



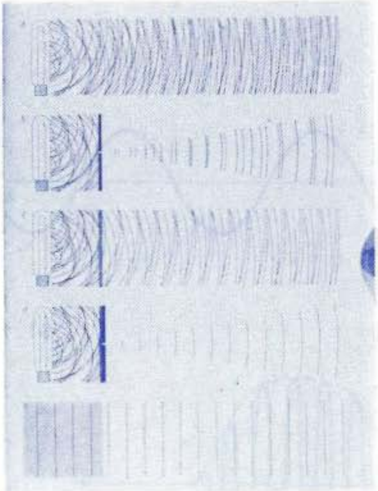
Sl.2b

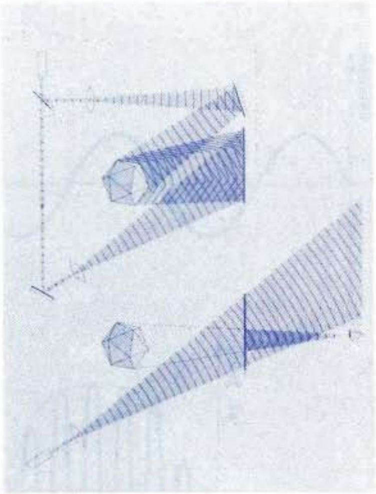
taktu. Od deščice se širijo valovi na vse strani. Na gladini, po kateri se širijo valovi, delci vode *nihajo*. O tem se lahko prepričamo, če damo na gladino majhno stiroporno kroglico. Kroglica in delci okoli nje nihajo v ritmu paličice, ali kakor pravimo, s frekvenco paličice. Slika 1a naj ponazarja časovni potek nihanja na izbranem mestu. Na podoben način niha ob istem času delec na drugem mestu. Slika 1b ponazarja tako nihanje na mestu, ki je bolj oddaljeno od izvira. Nihanje zaostaja za nihanjem v

Sl.3a

Sl.3c

Sl.3b





Sl.4b

Sl.4a

prvi točki. Zaostanek pa je ves čas enak. Rekli bomo, da je med nihanjima *konstantna fazna razlika*. Če vsi delci v prostoru, po katerem se širi valovanje, nihajo s konstantnimi faznimi razlikami, pravimo, da je valovanje koherentno. Tako je valovanje, ki ga zbuja paličica na vodnem površju. Tako je tudi valovanje svetlobe v laserskem curku. Električno in magnetno polje v curku svetlobe nihata v izbranih točkah s konstantno fazno razliko.

Svetloba iz navadnih svetil ni koherentna. V dveh dovolj oddaljenih točkah v curku take svetlobe sta nihanji povsem nepovezani, lahko ju predstavimo s slikama 2a in 2b.

Sliki 3a in 3b naj rabita kot dodatno pojasnilo razlike. Kažeta trenutno sliko svetlobnih valovanj v laserskem curku in v curku navadne svetlobe, v kateri smo s filtrom izbrali eno barvo. Črte predstavljajo grebene svetlobnih valov. V laserskem curku so grebeni vzporedni in v enakomernih razmikih. Od navadnega svetila se razširjajo neenakomerni krogelni valovi na vse strani. Slika 3c kaže, kako lahko tudi iz navadnega svetila dobimo kratek čas trajajoče koherentne valove.

Zaradi koherentnosti je svetloba laserja že na oko različna od svetlobe običajnih svetil. Usmerimo laserski curek proti zaslonu in ga razpršimo z močno lečo. Svetla pega na zaslonu je videti zrnata. Če zaslon hitro premikamo, zrnatost izgine in zaslon je enakomerno osvetljen. Razložimo si to!

Po lomu skozi lečo se širi proti zaslonu svetloba v krogelnih koherentnih valovih. Na zaslonu se svetloba razprši.Lahko si mislimo, da je vsaka točka na zaslonu izvir valovanja, ki vpada v oko. Vsi ti izviri nihajo s stalnimi faznimi razlikami, kakor je prej nihalo električno in magnetno polje v curku valovanja. Valovanja z zaslona se v nekaterih smereh ojačijo, v drugih pa oslabijo. Kjer pride do ojačenja, vidimo na zaslonu svetlo, kjer pride do oslabitve pa temno piko. Ko se zaslon premika, potujejo prek mrežnice v hitrem zaporedju ojačena in oslabljena mesta, zato vidimo zaslon enakomerno svetel. Ko osvetljuje zaslon nekoherentna svetloba, se fazne razlike med nihaji izvorčkov na zaslonu neprestano spreminjajo. S tem se neprestano spreminjajo tudi smeri, v katerih pride do ojačenja in do oslabitev. Podobno kot pri gibajočem se zaslonu zazna oko le enakomerno svetlo sliko.

Naslednja zgodba bo pokazala, kakšne imenitne možnosti nam daje koherentnost laserske svetlobe.

> *"Danes bomo govorili o fotografiranju"*, je razglasil učitelj, ko je vstopil v razred.*"le kaj novega lahko pri tem izvemo?"* so si mislili dijaki. Vsi so že imeli v rokah fotografski aparat. Vedeli so,da sta v njem objektiv in zaslonka, da ga je treba naravnati, če naj bo slika na filmu ostra. Vedeli so celo, kako se lomijo curki svetlobe pri prehodu skozi lečo in znali izračunati razdaljo slike od leče, če so poznali razdaljo predmeta od leče in goriščno razdaljo leče.
>
> Učitelj je prižgal grafoskop in položil nańj košček enakomerno sivega filma. *"To je fotografija šahovske figure"*, je izjavil. Učenci so debelo gledali. Na zaslonu niso videli drugega kot sivo liso z nekaj nejasnimi črtami. Kazalo je, da jim hoče učitelj prodati cesarjevo novo obleko.
>
> Učitelj je prižgal laser in razpršil curek z razpršilno lečo. Poklical je k sebi Janeza, ki je najbolj glasno ugo-

varjal. Janez je pogledal skozi film v stožcu laserske svetlobe. Pred njim je zažarela v rdeči svetlobi figura. Kot da bi jo gledal skozi okno. Vsi so si ogledali "čudež" in čakali pojasnilo.

Učitelj je pripovedoval:"*Ta košček filma je hologram-uklonska slika šahovske figure. Na uklonskih črtah, ki jih je zarisala svetloba pri fotografiranju, se uklanja svetloba, prav tako kakor se je prej uklanjala na mrežici ali na zavesi. Ko opazujemo uklonsko sliko, se nam zdi, kot da bi svetloba prihajala iz predmeta za hologramom.*

Toda kako pridemo do holograma?

Govorili smo že, da je vsaka točka osvetljenega predmeta izvir novega valovanja. Ko telo osvetljuje navadna svetloba, nihajo ti izviri neodvisno drug od drugega. Če hočemo dobiti sliko predmeta, lahko kvečjemu zberemo del oddane svetlobe z lečo na filmu. Vsaki točki vidnega dela predmeta pripada točka na sliki. Na enak način - z lečo - bi lahko preslikali predmet tudi, ko ga osvetljuje laserska svetloba. Vendar imamo tu novo možnost. Vse osvetljene točke - naši izviri svetlobe - nihajo sedaj s konstantno fazno razliko. Tiste točke, ki jih valovanje iz laserja zadene prej, prehitevajo v nihanju tiste, ki jih val iz laserja zadene kasneje. Za naš namen je pomembno, da ostanejo fazne razlike konstantne, dokler traja slikanje. Posnetek naredimo, kakor kaže slika 4a. Film osvetljujeta hkrati dve valovanji. Prvo je tisto, ki se odbija od predmeta, drugo pa je del valovanja, ki osvetljuje predmet. Valovanji se na nekaterih mestih ob filmu ojačita, na drugih pa oslabita. Na filmu ostanejo zato zapisane zelo na gosto temne in svetle črte. Slika 4b pa nam kaže, kaj se zgodi, ko damo posnetek v laserski curek, da bi opazovali sliko.

Učenci so bili navdušeni. Janez se je že razvnemal: "*Ali ne bi bilo imenitno, da bi nam TV mreža posredovala holograme, doma pa bi v laserskem projektorju gledali prostorske TV programe!*"

Spoznali smo nekaj lastnosti laserske svetlobe, po katerih se odlikuje pred svetlobo navadnih svetil. Uklonska fotografija pa je le ena od možnosti, ki nam jih laserska svetloba ponuja. Še mnoge so uporabe laserjev, o katerih ne moremo govoriti. Večkrat berete o njih v časopisih, morda vam bo to, kar ste prebrali v pomoč, da boste te uporabe lažje razumeli. Kdaj prihodnjič pa si bomo ogledali,kako laser deluje.

Martin Čopič
Priredil *Marjan Hribar*

PRESEKOV ŠKRAT

Tretjo številko Preseka ste letos dobili z zamudo ali pa tudi ne. Morda boste v njej opazili več tiskarskih škratov kot navadno. Zakaj? Pri pripravah in nastajanju te številke smo po svoje hiteli, po drugi strani pa smo delali prepočasi. Rokopise za strojepisko smo pripravili kakih deset dni po dogovorjenem roku. To samo po sebi ne bi bilo tako hudo, če ne bi imela ta napaka "mlade". Ta čas bi lahko v obdobju treh mesecev, kolikor časa navadno nastaja številka Preseka, nadoknadili. Istočasno smo oddali rokopis v tipkanje in slike risarju. Na žalost pa je bil risar prav v tem času službeno odsoten, tako da smo slike dobili šele čez mesec dni. Ko bi morala strojepiska opraviti korekture na zloženem Preseku, je zbolela. Tedaj pa so nastopili še novoletni prazniki. S to številko smo morali pohiteti, ker prinaša razpis tekmovanja iz matematike in fizike v srednjih in osnovnih šolah. Zato smo se odločili, da jo izdamo brez drugih jezikovnih korektur in brez branja tiskarskih korektur. Bralce prosimo, da nam napake v tretji številki oprostite, mi pa vam obljubimo, da se bomo v prihodnje bolj potrudili.

Ciril Velkovrh

POROČILO O LETNI ŠOLI MLADIH MATEMATIKOV

Rogoznica 1980, v juliju, 1 teden

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Hrvatske že tradicionalno organizira vsako leto matematično šolo za uspešne matematike z republiških tekmovanj. Običajno je bila ta šola v Primoštenu, dijaki pa so prenočevali v šotorih v kampu Esperanto. Ker so letos kamp ukinili, je bila šola prestavljena v 26 km oddaljeno Rogoznico, kjer smo živeli v privatnih hišah. Sprememba je bila za vse udeležence majhno razočaranje. Iz slovenske ekipe smo bili v to šolo izbrani štirje dijaki: Ivan Pepeljnjak (1. razred), ki se zaradi bolezni ni mogel udeležiti zveznega tekmovanja ter Robert Bakula (1. razred), Igor Kukavica (2. razred) in Tomaž Cokan (3. razred), prvouvrščeni iz republiškega tekmovanja.

Organizatorji, DMFA SR Hrvatske, so kljub ne najboljšim pogojem vzorno izpeljali vso organizacijo. Predavanja so bila v dopoldanskem času 3 ure dnevno, razen v nedeljo. Ivan Stojmenović iz Novega Sada nam je razložil vse o polinomih, profesorja iz Zagreba pa sta predavala o topologiji in linearni algebri. Slovenci smo predavanjem z lahkoto sledili, ker smo veliko slišali že na pripravah na zvezno tekmovanje, ki jih je izvrstno organiziral Marko Petkovšek.

V nedeljo smo obiskali prelepo pokrajino ob slapovih Krke. V prostem času smo plavali, zvečer pa smo se zbirali vsi skupaj na družabnih večerih.

Tomaž Cokan

MATEMATIČNA PREDAVANJA ZA SREDNJEŠOLCE

V drugi polovici šolskega leta 1979/80 je Društvo matematikov, fizikov in astronomov organiziralo skupino matematičnih predavanj za srednješolce. Namen predavanj je bil pomagati krožkom na srednjih šolah, pomagati pri pripravah na tekmovanje, in predvsem zbuditi večje zanimanje za matematiko pri srednješolcih. Predavanja so vodili profesorji in asistenti s fakultete, zato so bila zastavljena z vso resnostjo in natančnostjo, hkrati pa so predavatelji izbrali teme, ki temeljijo na srednješolski snovi in ki predstavljajo zanimiva poglavja iz sveta matematike.

Tako so dijaki spoznavali zanimive, včasih za njih povsem tuje poglede na matematične strukture, ki pa so za matematika vsakdanje, brez katerih ne bi mogli sestaviti pregledne in dosledne teorije. Vsako predavanje je bilo kot majhno okno, skozi katerega so dijaki poškilili v široko področje matematike, vsakič v drugo poglavje. Razdrobljena slika, ki so jo pri tem dobili, seveda še zdaleč ne predstavlja niti del področij, kjer se matematik udejstvuje, vendar so le ugotovili, da poleg tega, kar se učijo v srednji šoli, kar pogosto sloni na nepovezanih izrekih, obstaja mnogo polnejša struktura, ki je neprotislovno zgrajena iz le malega števila aksiomov.

Za vsako predstavljeno področje so predavatelji sestavili vrsto nalog, ki prikazujejo najrazličnejše probleme, kjer se lahko uporabi pridobljeno znanje. Nekaj nalog so skupaj rešili še na predavanjih, ostale pa so dijaki dobili za poglabljanje in kot koristne vaje za matematična tekmovanja. Tako so celo v priprave slovenske ekipe za zvezno tekmovanje vključili predavanje *induktivna metoda v matematiki*.

Prvega predavanja se je udeležilo 37 srednješolcev iz bežigrajske, viške, poljanske, Cankarjeve in pedagoške gimnazije ter iz ETŠ, kar je že samo po sebi dokaz, da je zanimanje za to obliko izvenšolske dejavnosti dovolj veliko, da zahteva nadaljevanje zastavljene poti. Proti koncu je številčnost slušateljev sicer upadla na okoli 20, vendar se je zato dvignila kvaliteta. Dijaki so vedno bolj sledili predavateljem s tehtnimi vprašanji in odgovori. Pogosto se je po končanem predavanju razvila diskusija o zanimivosti in uporabnosti na novo pridobljenega znanja.

Predavanja so se takole zvrstila:
Matrike, kjer smo spoznali matrike reda 2 × 2. Obravnavali smo jih kot prava števila in definirali vsoto in produkt. Od osnovnih operacij smo prešli na uporabo matrik in na posplošitev matrik na matrike dimenzije $n \times n$ in $m \times n$.

Kot močno orodje za reševanje nalog z deljivostjo smo spoznali *kongruence*, s katerimi smo se od teorije množic (ekvivalenčne relacije)sprehodili preko teorije števil (deljivost, praštevila) do algebre (kolobar in obseg).
Pri *verižnih ulomkih* smo razvijali racionalna in iracionalna števila v ulomke oblike $a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + \ldots))$, ki so bili končni za racionalna števila in neskončni za iracionalna števila. Na tej osnovi smo dobili vrste za iracionalna števila.

Poenostavljen zapis za končno in neskončno vsoto smo vpeljali pri *končnih zaporedjih*. Izpeljali smo lastnosti končnih vrst in osnovne formule sumiranja.

Pri *interpolacijah* smo ugotovili, da n točk v ravnini natanko določa polinom stopnje $n - 1$. Raziskali smo nekaj lastnosti polinomov in na eleganten način rešili nekaj zagonetnih nalog, ki bi se elementarno težko rešile.

Tudi družboslovci ne morejo brez matematike. Razvrščanje prebivalcev v različne interesne skupine po drevesni metodi in grupiranje teh interesov v splošnejše strukture smo spoznali pri *matematiki v družboslovju*.

Fareyeva zaporedja so izredno zanimiva zaporedja ulomkov med 0 in 1. Na začetku nekam tuja oblika zaporedja nam je omogočila, da smo mnogo na prvi pogled različnih problemov obdelali pod istim imenovalcem: celoštevilske rešitve enačbe $ax + by = 1$, izražanje ulomkov z vsoto ulomkov oblike $1/x$, in racionalne približke realnih števil.

Geometrijska disekcija je teorija o razrezavanju ploščinskih likov. Iz dobljenih kosov lahko sestavimo poljuben ploščinsko enak lik. Ukvarjali smo se z minimalno disekcijo in kot zgled razrezali enakostraničen trikotnik, ter grški in rimski križ in jih sestavili v kvadrat.

Z numeričnim reševanjem polinomov smo se srečali pri *uporabi Hornerjevega algoritma*. Da ne bi ostali zgolj pri teoriji polinomov in njihovih ničel, je vsak udeleženec predavanja dobil v roke žepni računalnik za programiranje in sam poiskal korene algebrajskih enačb po različnih interpolacijskih metodah.

Predavanje *krivulja, ki zapolni kvadrat* je bilo obogateno s filmom. Ogledali smo si krivuljo, ki omejuje končno ploskev, obseg pa ima neskončen. Nato pa smo videli, da lahko različne krivulje (Hilbertova in Sierpinskijeva), ki nimajo ploščine, v limiti zapolnijo kvadrat.

Že omenjeno predavanje *induktivna metoda v matematiki* je bilo namenjeno pogledu na reševanje nalog. Seznanili smo se z nevarnostmi in ugodnostmi induktivnega sklepanja, izpeljali metodo popolne indukcije in analizirali vlogo induktivnega razmišljanja pri reševanju nalog. Slišali smo mnogo koristnih predlogov in nasvetov za tekmovalne naloge.

Topologija v ravnini nam je predstavila nekaj povsem novih pojmov, ki se bolj oddaljujejo od srednješolske matematike. Spoznali smo okolice, rob,notranjost in zunanjost množic, povezane množice, ter lomljene črte in poligonalne loke.

Ta predavanja, ki so bila lani zopet po dolgem premoru, naj bi bila vsako leto in prispevala svoj delež, da bi se še več srednješolcev začelo globlje ukvarjati z matematiko.

Poleg tega pa smo na pobudo nekaj mladih matematikov, ki so tekmovali na zveznem prvenstvu, organizirali razširjeni krožek bežigrajske gimnazije v poslopju VTO matematika, kjer dijaki izmenjujejo mnenja in rešitve ter diskutirajo o metodah, ki so pomembne za reševanje tekmovalnih nalog. Vse bralce Preseka in druge srednješolce vljudno vabimo na obe obliki udejstvovanja.

Mark Pleško

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

DALJICA IN RAVNILCE

V veliki risalni ravnini sta dani daleč vsaksebi točki P in Q.

Problem: S pomočjo ravnilca, ki je dosti krajše od razdalje med P in Q, je treba ti dve točki povezati z daljico.

Z ravnilcem lahko brez težav povežemo z daljico dve točki, ki sta vsaksebi za manj kot je dolžina ravnilca, bolj oddaljenih točk pa seveda ne moremo povezati kar tako.

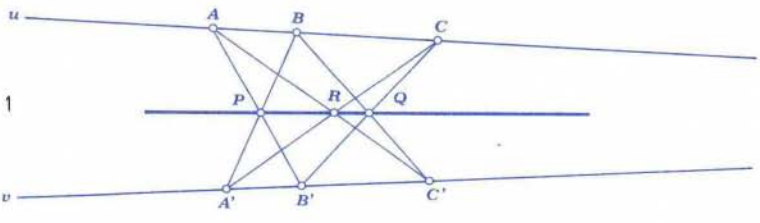
Kako torej uženemo problem?

Oglejmo si potek z uporabo *Pascalovega izreka*.
Mladi *Blaise Pascal* (1623 - 1662) je odkril tole geometrijsko zakonitost:

Na dveh premicah u, v sta dani dve trojici točk: točke A, B, C na premici u in A', B', C' na premici v. Denimo, da se pari premic

$$(A, B') \text{ in } (A', B)$$
$$(B, C') \text{ in } (B', C)$$
$$(C, A') \text{ in } (C', A)$$

Sl. 1



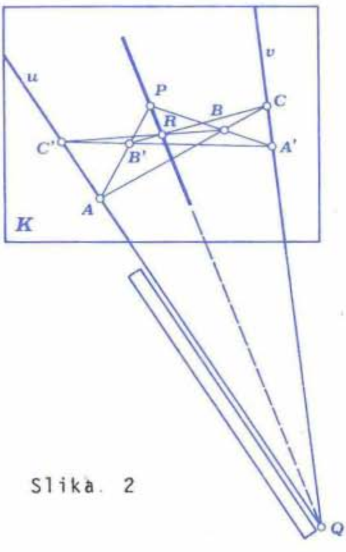
sečejo, presečišča označimo P, Q, R. Potem velja: Točke P, Q in R leže na skupni premici. (Sl. 1)

Zdaj pa k našemu problemu!

Z ravnilcem lahko dano točko P "obkrožimo" s štirikotnikom K, ki je dovolj majhen, da lahko v njem povežemo poljuben par točk z našim orodjem. Iz oddaljene točke Q lahko z ravnilcem s poskušanjem narišemo dve premici, ki se obe sečeta s štirikotnikom K . Označimo njuna preseka s K z u in v.

Potem na daljici u izberemo točko A in na daljici v točko A', pa ju povežemo s točko P. Na premici (A, P) izberemo znotraj štirikotnika K novo točko A in na premici (A', P) spet znotraj K novo točko B, tako da velja:

- premici u in (A',B') se sečeta znotraj štirikotnika K v neki točki C';
- premici v in (A, B) se sečeta znotraj štirikotnika K v neki točki C.



Slika 2

Blaise Pascal je kot šestnajstletnik objavil razpravo *Essay pour les coniques*, kjer je strnil svoja dognanja v zvezi s šestokotniki, ki so včrtani v stožernice, pri čemer pa je že poznal *Desarguesovo* delo s področja geometrije. Zanimal se je tudi za praktične izume (priprave za izsuševanje močvirij; vozila za prevoz večjega števila potnikov - predhodniki tramvajev, avtobusov). Pri raziskavi igre z ruleto je naletel na probleme v zvezi s krivuljo cikloido in z določitvijo ploščine lika, ki ima na meji cikloido. Metode, ki jih je predlagal, je pozneje uporabil *W. Leibniz* pri izumu infinitezimalnega računa. Več originalnega gradiva je v delu: Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics*, Mc Graw-Hill, New York and London 1929 (knjigo ima CTK v Ljubljani), in Dover publ. vol. 1., 2. 1959 (knjigi ima matematična knjižnica v Ljubljani).

Z ravnilcem določimo še presečišče premic (B, C') in (B', C) v štirikotniku K in ga označimo z R.

Zakonitost, ki smo jo navedli na začetku, nam zatrjuje, da ležijo točke P, R in Q na isti premici. Točk P in Q zdaj ni več problem povezati: z ravnilcem povežemo najprej točki P in R, na to pa dobljeno daljico toliko časa podaljšujemo, da prispemo v točko Q in naloga je rešena.

Ivan Pucelj

NALOGA O PRESEKOVEM ZNAMENJU

Presekovo znamenje (glej naslovno stran, desno spodaj) je sestavljeno iz treh krogov, ki ponazarjajo medsebojno prepletanje treh ved: matematike, fizike in astronomije. Poskusi narisati ustrezno znamenje za *štiri* vede! Zastopani naj bodo vsi možni preseki štirih likov, a vsak samo enkrat.
Pozor: s samimi krogi najbrž ne bo šlo!

Marko Petkovšek

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

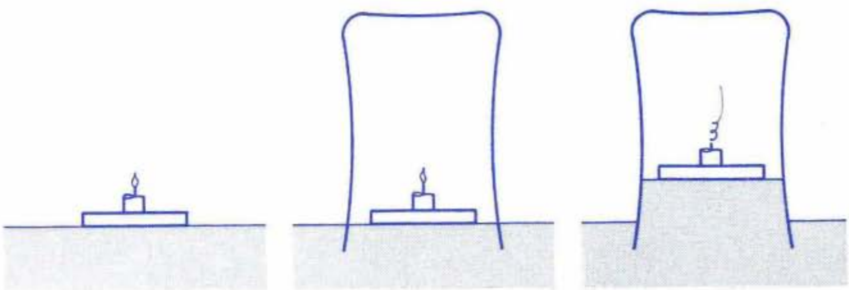
PREPROST POSKUS - NAPAČNA RAZLAGA

To pot naredimo eksperiment, ki ga najdemo opisanega v starejših učbenikih kemije. V umivalnik nalijemo vodo. Na vodo položimo kos lesa - ladjico, nanjo pa navpično pritrdimo krajšo svečo. Najlažje jo prilepimo s kapljajočim parafinom, ko jo prižgemo. Večji kozarec (mogoče tak za vlaganje zelenjave) nato poveznemo na ladjico s svečo in sicer tako, da potopimo rob kozarca v vodo. Tako zapremo dostop svežemu zraku v kozarec. Sveča porabi ves kisik, ki je bil v zraku, in ugasne.Ker v poveznjenem kozarcu ni več kisika, ga nadomesti voda iz umivalnika. Res se vodna gladina v kozarcu dvigne in sicer za približno 1/5 dela prostornine kozarca. Ker je v zraku približno 20 volumskih odstotkov kisika, sklepajo iz tega, da s tem poskusom lepo prikažemo kolikšen prostorninski del kisika je v zraku.

Razlaga, ki smo jo dali, je hudo sumljiva. Bralce pozivamo, naj poiščejo šibke točke naše razlage. Izmislijo naj si poskuse, ki bodo podpirali njihove argumente. Kako pa bi morali narediti tak poskus, da bi bil še vedno preprost, a "čist", se pravi brez napačnih trditev?

Odgovore pošljite najkasneje do 1. avgusta letos. Najpopolnejše odgovore bomo nagradili.

Andrej Likar



SLIKOVNA KRIŽANKA

1850-1891

NJEN ROJS

VELIKA RUSKA MATEMA-ČARKA

VÉDENJE O ČEM

SUROVA OLJNA KISLINA

DESNI PRITOK DRINE

OTOK SZ OD SARDINIJE

DIKTAT

KRMILO PRI AVTU

PROPELER

MUSLIM. M. IME

TR

NIKELJ

NEPOKOJ

SUBOTICA

NAJVEČJI PLANET OSONČJA

SAMUEL (OKRAJŠ.)

X

SUKANEC

TRIGONOM. FUNKCIJA

UROŠEVAC

VEZNIK

STRAN NEBA

PRIPRAVA ZA REŠE-VANJE V GORAH

ULITA TISKAR. ČRKA

VZDRŽNEŽ

POTOMCI ŠPANCEV V J. AMERIKI

POMOTA

PRITOK ILMENSKEGA JEZERA V SZ

NIŠ

JEZERO NA MEJI ZDA-KANADA

LAŽJA POŠKODBA

NEMŠKO Ž. IME

NEMŠKI MATEMATIK - NJEN PROFESOR (KARL)

SELEN

NOČNI POJAV

PADAVINA

SKUPINA ŽIVALI

TUJA IN NAŠA ČRKA

IGLAVEC

RDEČI KRIŽ

PRIPOMO-ČEK ZA TEHTANJE

SIN ZEUSA IN EGINE

T

TNI KRAJ

STAR VOJAŠKI KRUH

MESTO, KJER JE BILA UNIV. PROFESOR

ERBIJ

GLASBENO ZNAMENJE

PRIHODI V GOSTE

NAJVEČJA AFRIŠKA REKA

ŽLAHTNI PLIN

ŽIVINSKO KRMILO

MOLIBDEN

LAHNA TKANINA

ROGER VADIM

MESTO, KJER JE ŠTUDIRALA

ISKE

NIVO

PREBIVALEC BRD

VISOKA KARTA

RADO ČASL

SKLADAT. DELIBES

REKA SKOZI BERN (KRAJŠE)

KRANJ

NAGRADA, KI JO JE DOBILA 1888

IVAN TAVČAR

SLOV. KARIKA-TURIST (ANDREJ)

MAKEDON. PLES

ZADETEK PRI TOMBOLI

ZIMZELENA SREDOZEM. RASTLINA

NADUHA

ITALEC

SENČNICA

PODELITEV IMENA

IZVRŠNI ODBOR

KRAPINA

BRUSILNO SREDSTVO

BARIJ

ČEBELI PODOBNA ŽUŽELKA

SPOJ PRI ŠIVANJU

REKA MED NDR IN POLJ.

ŠTEVILKA

LATINSKI VEZNIK

NAZIV

REKA SKOZI INNSBRUCK

ALJA KAČEVA

ENOTA ZA MOČ

PERJE PRI REPI

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

TEKMOVANJA MLADIH VEGOVCEV V ŠOLSKEM LETU 1979/80

Šolska tekmovanja:

Po nepopolnih podatkih je letos tekmovalo več kot 11000 učencev od petega do osmega razreda; ena tretjina jih je prejela bronasto Vegovo priznanje.

Občinska tekmovanja:

V jubilejnem letu tekmovanj je bil odziv na občinskih tekmovanjih do zdaj najštevilnejši. Poglejmo tabelo:

razred	št. tekmovalcev	št. SVP	v %
6.	1501	589	39,24
7.	1336	392	29,34
8.	1337	353	26,40
	4174	1334	31,29

Republiško tekmovanje:

Udeležba na republiškem tekmovanju se že nekaj let suka okrog 200 osmošolcev; letos jih je bilo 193. Najvišje - zlato Vegovo priznanje je prejelo 54 tekmovalcev ali 28 %. Zanimiva je ugotovitev, da so se letos zelo dobro odrezali učenci iz Štajerske, manj uspešni pa so bili sovrstniki iz ljubljanskega območja.

Prijetno je bilo srečanje najbolje uvrščenih osmošolcev in srednješolcev na sprejemu, ki ga vsako leto prireja Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo SRS. Ne smemo pozabiti in se zahvaliti Ljubljanski banki - Gospodarski banki SRS za zelo potrebno denarno pomoč.

UVRSTITEV TEKMOVALCEV

I. nagrada : ŽEFRAN Miloš, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica
MAHNIČ Andrej, o.š. D. Bordon, Koper

II. nagrada : GRAH Darja, o.š. F. Vrunč, Slovenj Gradec
GRUDEN Stanko, o.š. Spomenik NOB, Cerkno
ROBAR Vlado, o.š. Videm pri Ptuju

III. nagrada : KARALIĆ Aram, o.š. Bičevje, Ljubljana
KOVAČEC Matjaž, o.š. S. Šlander, Maribor

SELJAK Uroš, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, WALLNER Edvard, o.š. Borovnica, ZIDANŠEK Aleksander, o.š. D. Jereb, Slovenske Konjice, PETKOVŠEK Robert, o.š. J.Mihevc, Idrija, KORPAR Samo, o.š. F. Osojnik, Ptuj, KOVAČ Janez, o.š. Zbor odposlancev, Kočevje, DOMA Mitja, o.š. T. Čufar, Ljubljana, BALAN Samo, o.š. S. Šlander, Maribor, ŠKARABOT Jure, o.š. R. Robič, Limbuš, ŠABJAN Dejan, o.š. 17. oktober Beltinci, RICHARD Peter, o.š. P. Voranc, Maribor, KORELC Jože o.š. J. Slak - Silvo, Trebnje, VONČA Bogdan, o.š. I. Cankar, Vrhnika, KOŽAR Jasmina, o.š. Piran, PRELEC Helena, o.š. R. Bordon, Koper, REBEC Jana, o.š. R. Bordon, Koper, KUKAVICA Davor, o.š. B. Kidrič, Ljubljana, HARTNER Aleš, o.š. A. Šilih, Velenje, VRTAČNIK Petra, o.š. M. Nemec, Radeče, STRAŠEK Mateja, o.š. Šmarje pri Jelšah, ROZMAN Franc, o.š. D.Jenko, Cerklje, DROBNIČ Matija, o.š. T. Čufar, Ljubljana, ŠTURM Roman, o.š. C. Golar, Škofja Loka, OŠO Simon, o.š. Postojna, BAJŽELJ Primož, o.š. L. Seljak, Kranj, VINDŠNURER Primož, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, JAKLIČ Jure, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, BLAGAJAC Goran, o.š. S. Šlander, Maribor, BAŠA Irena, o.š. D. Kette, Ilirska Bistrica, PINTAR Cirila, o.š. Prešernova brigada, Železniki, VARŠEK Janja, o.š. I. Cankar, Vrhnika, VIDMAR Tim, o.š. V Vodnik, Ljubljana, MAJHEN Janja, o.š. A.T. Linhart, LIPOVŠEK Daša, o.š. T. Čufar, Ljubljana, POLIČ Darko, o.š. Lenart v Slov. goricah, HERIČKO Marjan, o.š. Lackov odred, Kamnica, GRM Sašo, o.š. Prule, Ljubljana, SAKSIDA Sandi, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, MULEJ Darko, o.š. F. Saleški Finžgar, Lesce, ČEVDEK Magda, o.š. Renče, Trbovlje, HROVAT Ivan, o.š. M. Šobar - Nataša, Novo mesto, BOLČINA Katja, o.š. T. Tomšič, Ljubljana, BENDA Vladimir, o.š. Ljubno ob Savinji, JAKLIČ Boštjan, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, NOVAK Irena, o.š. R. Jakopič, Ljubljana, GAŠPERLIN Meta, o.š. Bratov Ribar, Brežice, PANGERŠIČ Joža, o.š. Revirski borci, Trbovlje.

NALOGE ZA OBČINSKO TEKMOVANJE

6. razred:

1. V trikotniku ABC je $\alpha = 70^\circ$ in $\gamma = 54^\circ$. Izračunaj kota, ki ju oklepa simetrala kota β s stranico AC.

2. S katero cifro se končuje produkt devetdesetih enakih faktorjev 3?

3. Če eno stranico pravokotnika zmanjšamo za 4 cm, drugo pa povečamo za 4 cm, dobimo kvadrat s ploščino 100 cm^2. Kolika je ploščina pravokotnika?

4. Razredne proslave so se udeležili učenci, učitelji in starši. Na proslavi je bilo 16 učencev, 4 učitelji, 5/12 udeležencev je bilo očetov, 1/4 mater. Koliko ljudi se je udeležilo proslave?

5. Trikotnik ABC je enakokrak. Skozi poljubno točko E na stranici AB potegnemo vzporednici z obema krakoma. Presečišče s stranico BC označimo z M, presečišče s stranico AC z N. Za koliko se razlikujeta obsega trikotnika ABC in štirikotnika $EMCN$?

7. razred:

1. V izrazu $a^2 + a + 1$ zamenjaj število a z nasprotnim številom.
   a) Za koliko se razlikuje dobljeni izraz od danega?
   b) Izračunaj vrednost prvega in drugega izraza, če je $a = -1/3$.

2. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$:
   Označi $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{CD} = \vec{d}$.
   a) Nariši vektor $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$.
   b) Nariši vektor $\overrightarrow{BE}$ in ga izrazi z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

3. Ugotovi, za katera naravna števila je vrednost ulomka $\frac{n^3 - n^2 + 3}{n - 1}$ celo število.

4. Nariši deltoid $ABCD$ ($\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{DC}$), ki je dan s podatki: $\overline{BD} = 7$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\alpha = 90^\circ$.

5. V paralelogramu $ABCD$ je stranica $\overline{AB}$ dvakrat daljša od stranice $\overline{BC}$. Točka R je središče stranice $\overline{AB}$. Dokaži, da je daljica $\overline{CR}$ pravokotna na daljici $\overline{DR}$.

8. razred:

1. Določi število a tako, da bo imela enačba $\frac{6a}{3x+1} - 1 = \frac{3a}{5}$ rešitev $x = -2$. Preveri rešitev!

2. Koncertna vstopnica je stala 120 din. Po znižamju cene so prodali polovico več vstopnic, kot bi jih po prvotni ceni. Dohodek koncerta se je s tem povečal za četrtino tistega, kar bi iztržili po pravi ceni. Za koliko je bila znižana cena vstopnice?

3. Če ulomku $\frac{a}{b}$ ($a \in N, b \in N$ in $a < b$) števec potenciramo s 3, imenovalec pa povečamo za 3, dobimo ulomek, ki je trikrat večji od ulomka $\frac{a}{b}$. Določi ta ulomek!

4. Ploščini dveh podobnih trikotnikov merita 36 cm^2 in 25 cm^2, obsega pa se razlikujeta za 24 cm. Izračunaj obsega obeh trikotnikov.

5. Sod ima obliko pokončnega valja in je napolnjen z vodo ($r = 10$ cm, $v = 25$ cm). Koliko vode ostane v sodu, če ga nagnemo tako, da oklepa osnovna ploskev z vodoravno ravnino kot 45°?

NALOGE ZA REPUBLIŠKO TEKMOVANJE

1. Kocka ima rob a. Vsako diagonalo kocke podaljšamo na vsako stran za $a/2$. Tako dobimo osem točk, ki so ogljišča nove kocke. Izračunaj prostornino te kocke!

2. Ko je množil dve naravni števili, od katerih je eno za 10 večje od drugega, se je učenec zmotil. Pri deseticah produkta je dobil za 4 premalo. Ko je za preskus delil produkt z manjšim številom, je dobil količnik 10 in ostanek 9. Kateri števili je množil?

3. Uro, ki prehiteva v enem dnevu za 4 minute, smo naravnali danes ob 6. uri. Kolik bo pravi čas, ko bo ta ura jutri kazala 20. uro?

4. Funkcija $y = f(x)$ je dana z enačbo $3x - 4ay - 12a^2 = 0$. Določi a tako, da je ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije $y = f(x)$ in koordinatni osi, enaka 48.

5. Na stranici AB enakostraničnega trikotnika ABC z dano stranico a določi točko D tako, da bo $BD = \frac{2}{7} AB$. Iz točke D nariši pravokotnico DE na stranico BC, iz točke E pravokotnico EF na stranico AC in iz točke F pravokotnico FG na stranico AB.
Izračunaj ploščino štirikotnika $DEFG$, če poznaš stranico trikotnika!

Pavle Zajc

PREMISLI IN REŠI

16 KART - rešitve pošljite čimprej!!

Kot vemo, ima vsaka igralna karta *barvo* in *vrednost*. Izberi 16 kart vseh štirih barv (*pik*, *srce*, *karo* in *križ*) in štirih vrednosti (*as*, *kralj*, *dama*, *fant*). Izbrane karte razvrsti v razpredelnico, tako da dobiš drugo pod drugo štiri vrste, v vsaki vrsti po štiri karte. V tej kvadratni tabeli pa morajo veljati naslednje lastnosti:

(a) v vsaki vrstici morajo biti vse štiri barve
(b) v vsakem stolpcu morajo biti vse štiri barve
(c) v vsaki vrstici morajo biti vse štiri vrednosti
(d) v vsakem stolpcu morajo biti vse štiri vrednosti

Z drugimi besedami: v nobeni vrstici ali stolpcu se ne smeta dve karti ujemati niti v barvi niti v vrednosti.

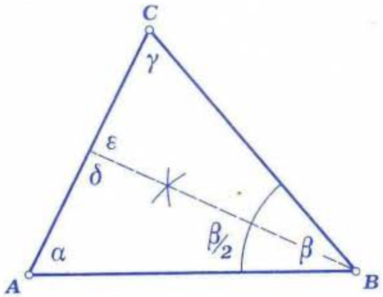
Tomaž Pisanski

REŠITVE NALOG

REŠITVE NALOG ZA OBČINSKO TEKMOVANJE s str. 227

6. razred:

1.



$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$

$\beta = 56^0$

$\beta/2 = 28^0$

$\delta = \beta/2 + \gamma$

$\delta = 82^0$

$\varepsilon = \alpha + \beta/2$

$\varepsilon = 98^0$

2. 3.3.....3

90 faktorjev

Produkt štirih faktorjev 3.3.3.3 se končuje z 1, prav tako produkt oseminosemdeset enakih faktorjev 3. Torej se produkt devetdesetih enakih faktorjev 3 končuje s cifro 9.

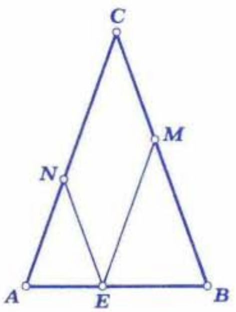
3. $a_1^2 = 100$ $\quad a - 4 = 10$ $\quad b + 4 = 10$ $\quad p = a.b$

$a_1 = 10$ cm $\quad a = 14$ cm $\quad b = 6$ cm $\quad p = 48$ cm^2

4. $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

Očetje in matere predstavljajo 2/3 udeležencev. Preostala 1/3 udeležencev so učenci in učitelji (20 ljudi). Na proslavi je bilo torej 60 ljudi.

5



$EM \parallel AC$ in $EN \parallel BC$

ΔAEN $\wedge$ ΔEMB sta enakokraka, zato je $AN = EN$ in $EM = BM$.

$EM + MC = BC$

$\underline{EN + NC = AC}$

$EM + MC + EN + NC = BC + AC$

Obsega se razlikujeta za dolžino stranice AB.

7. razred:

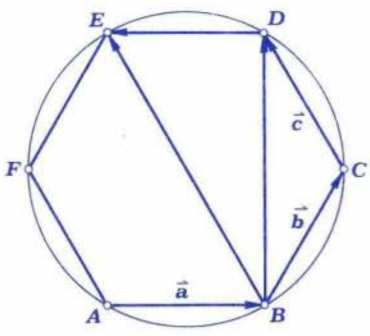
1. $(-a)^2 + (-a) + 1 = a^2 - a + 1$

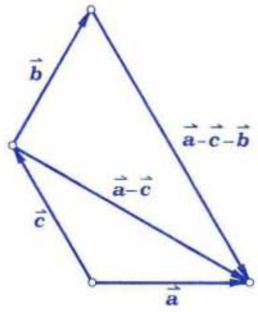
 a) $(a^2 + a + 1) - (a^2 - a + 1) = 2a$

 b) $a^2 + a + 1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{7}{9}$

 $a^2 - a + 1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{13}{9}$

2. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

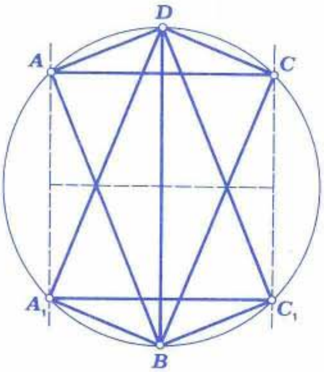




3. $$\frac{n^3-n^2+3}{n-1} = \frac{n^2(n-1)+3}{n-1} = \frac{n^2(n-1)}{n-1} + \frac{3}{n-1} = n^2 + \frac{3}{n-1}$$

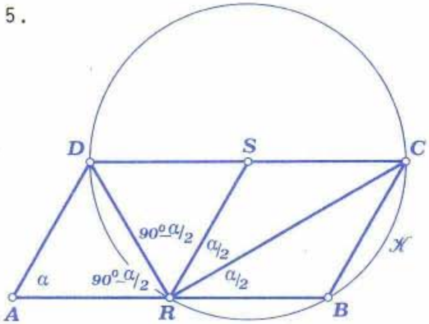
Dani ulomek je celo število samo za naravni števili $n = 2$ in $n = 4$.

3.



Dve rešitvi: deltoid $ABCD$ in deltoid A_1BC_1D.

5.



$\overline{AB} = 2\overline{BC}$

$\overline{AR} = \overline{RB}$

Narišemo RS AD. Nalogo lahko rešimo na dva načina:

1. $\overline{DS} = \overline{SC} = \overline{SR}$

   $\sphericalangle$ DRC je obodni kot nad premerom kroga $K(S,\overline{SR})$, zato je pravi kot.

2. Trditev lahko dokažemo tudi z izreki o kotih, kot je razvidno iz skice.

8. razred:

1. $\frac{6a}{-5} - 1 = \frac{3a}{5} \implies a = -\frac{5}{9}$. Preskus napravi sam.

2. Označimo: prodanih vstopnic: N

   znižanje cene: x

   znižana cena: $120 - x$.

   Za dohodek koncerta dobimo: $\frac{3N}{2}\cdot(120 - x) = \frac{5}{4}\cdot N\cdot 120$

   oziroma

   $\frac{3}{2}\cdot(120 - x) = \frac{5}{4}\cdot 120$. Torej $x = 20$.

   Cena vstopnice je bila znižana za 20 din.

3. Dobimo

$\frac{a^3}{b+3} = \frac{3a}{b}$

$\frac{a^2}{b+3} = \frac{3}{b}$

$a^2 b = 3(b + 3)$

$b(a^2 - 3) = 9$

$b = \frac{9}{a^2-3}$

Zaradi

$b \in N$, $a^2 - 3 = 9 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a \notin N$

ali $a^2 - 3 = 3 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a \notin N$

ali $a^2 - 3 = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2.$

Nazadnje dobimo $b = \frac{9}{2^2-3} = 9$

Iskani ulomek je $\frac{2}{9}$.

4. Velja:

$\frac{o_1}{o} = k$

$\frac{p_1}{p} = k^2$

$k^2 = \frac{36}{25}$

$k = \frac{6}{5}$

$o_1 - o = 24$

$\frac{6o}{5} - o = 24$

$o = 120$

$o_1 = o + 24$

$o_1 = 144$

5. $\Delta D_1C'C_1$ je enakokrak pravokotni trikotnik: $x = 2r$.
Iskano prostornino dobimo iz zvez:

$V_{D'C'C_1D_1} = \pi r^2 x$

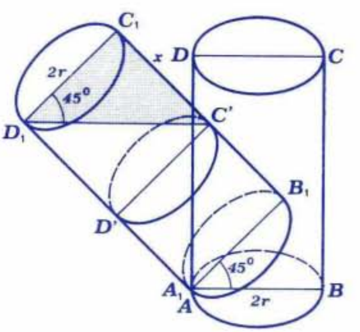
$V_{D'C'C_1D_1} = 2\pi r^3$

$V_{AB_1C'D_1} = V - \frac{1}{2}V_{D'C'C_1D_1}$

$V_{AB_1C'D_1} = \pi r^2 v - \pi r^3$

$V_{AB_1C'D_1} = \pi r^2 (v - r)$

$V_{AB_1C'D_1} = 4710 \text{ cm}^3$



Pavle Zajc

REŠITVE NALOG ZA REPUBLIŠKO TEKMOVANJE s str. 228

1. Rob kocke je x, njena diagonala je $d_1 = a(1 + \sqrt{3})$. Od tod dobimo:

$$x\sqrt{3} = a(1 + \sqrt{3}) \qquad V = \frac{a^3|1+\sqrt{3}|^3}{3\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \qquad V \doteq 0,53\ a^3$$

2. Označimo manjše število z x, večje z $x + 10$ in dobljeni produkt s P. Tedaj velja

$$P = x(x + 10) - 40$$
$$P = 10x + 9$$

Sledi

$$x(x + 10) - 40 = 10x + 9$$
$$x^2 = 49$$
$$x = 7$$

Manjše število je 7, večje 17.

3. V 1 dnevu prehiti ura za 4 minute.
V 1 uri prehiti ura za $\frac{4}{24}$ minute. To je $\frac{1}{360}$ ure.
V x urah prehiti ura za $\frac{x}{360}$ ure.

Od 6. ure danes do 20. ure jutri je 38 ur. Se pravi

$$x + \frac{x}{360} = 38$$

$$361x = 38.360$$

$$x = \frac{38.360}{361}, \quad x = \frac{720}{19}$$

$$x = 37 \text{ ur } 53 \text{ min } 41 \text{ sek}$$

Pravi čas je 19 ur 53 min 41 sek.

Druga možna pot je: $24 : 24\frac{1}{15} = x : 38$

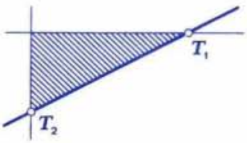
$$x = \frac{24.38}{24\ \frac{1}{15}}$$

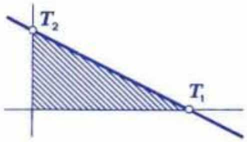
4. Očitno je $a \neq 0$. Graf funkcije je premica, ki seka koordinatni osi v točkah $T_1(x_1,0)$ in $T_2(0,y_2)$. Za neznani koordinati dobimo: za $y_1 = 0$ je $x_1 = 4a^2$ in za $x_2 = 0$ je $y_2 = -3a$.

Imamo dve možnosti:

če je $a > 0$, je
$p = x_1(-y_2)/2 = 6a^3 = 48$
$a = 2$

če je $a < 0$, je
$p = x_1 \cdot y_1/2 = -6a^3 = 48$
$a = -2$

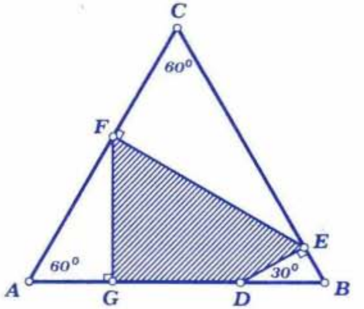




5. $\overline{DB} = \frac{2}{7}a$, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}a = \frac{1}{7}a$

$\overline{EC} = a\cdot\frac{1}{7} = \frac{6}{7}a$, $\overline{CF} = \frac{3}{7}a$

$\overline{FA} = a - \frac{3}{7}a = \frac{4}{7}a$



Za ploščine dobimo:

$p(DEFG) = p(ABC) - p(DBE) - p(ECF) - p(AGF)$

$p(DEFG) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{DB}^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{EC}^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{FA}^2\sqrt{3}}{4}$

$p(DEFG) = \frac{\sqrt{3}}{8}(2a^2 - \overline{DB}^2 - \overline{EC}^2 - \overline{FA}^2)$

$p(DEFG) = \frac{\sqrt{3}}{8}(2a^2 - \frac{56}{49}a^2)$, $p(DEFG) = \frac{3\sqrt{3}}{28}a^2$

Pavle Zajc

REŠITVE NEKATERIH NALOG Z 21. ZVEZNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V prejšnji številki Preseka (VIII/3) ste brali poročilo o tem tekmovanju, sedaj pa objavljamo še rešitve nekaterih nalog, ki so jih za vas pripravili tekmovalci sami. Rešitev še kakšne naloge z omenjenega tekmovanja ter z male olimpiade (to je izbirnega tekmovanja za olimpijsko ekipo) pa boste našli v kakšni od prihodnjih številk Preseka.

1. razred, 1. naloga:

Cena svinčnika je celo število par. Skupna cena devetih svinčnikov je večja od 11 in manjša od 12 dinarjev, skupna cena 13-ih svinčnikov pa je večja od 15 in manjša od 16 dinarjev. Kolikšna je cena enega svinčnika?

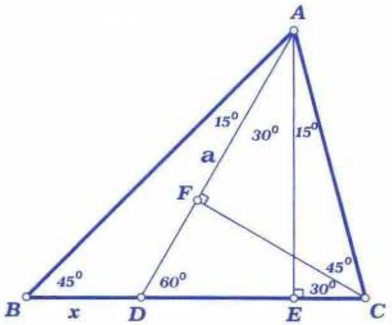
Rešitev : Ceno enega svinčnika, izraženo v dinarjih, označimo z x. Iz danih omejitev sledita neenakosti:

$$\left.\begin{array}{l} 11 < 9x < 12 \Rightarrow 1{,}23 \leqslant x < 1{,}33 \\ 15 < 13x < 16 \Rightarrow 1{,}16 \leqslant x \leqslant 1{,}23 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 1{,}23$$

Cena svinčnika je torej 1,23 din = 123 par.

1. razred, 2. naloga:

Naj bo D točka na stranici BC danega trikotnika ABC, tako da je $2BD = DC$. Poišči vse ostale kote trikotnika, če je $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ in $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.



Rešitev : Daljico AD označimo z a, BD pa z x. Višina na BC je hkrati tudi višina polovice enakostraničnega trikotnika ADE, s stranico a. Iz tega sledi: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trikotnik ABE je enakokrak. Iz tega sledi:

$$BD + DE = AE \Longrightarrow x + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\text{, torej je } x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Sedaj načrtajmo še pravokotnico iz C na AD. ΔCDF je polovica enakostraničnega trikotnika. Iz tega sledi:

$$FC = x\sqrt{3} = \frac{a(3-\sqrt{3})}{2}, \quad FA = AD - DF = a - x = \frac{a(3-\sqrt{3})}{2}.$$

Ugotovili smo, da velja $FC = FA$, torej je trikotnik ΔAFC enakokrak. To se pravi $\measuredangle FAC = \measuredangle FCA = 45^o$. Zdaj pa lahko izračunamo tudi ostale kote trikotnika ΔABC :

$$\measuredangle ACB = 30^o + 45^o = 75^o \quad \text{in}$$
$$\measuredangle BAC = 15^o + 45^o = 60^o .$$

1. razred, 4. naloga:

V mestu je 1980 križišč. V vsakem križišču se sekajo po tri ulice. Znano je, da poteka po mestu krožna avtobusna proga, ki gre skozi vsako križišče natanko enkrat. Mestni očetje so sklenili, da bodo ob vsaki ulici posadili drevje iste vrste: kostanj, brezo ali lipo. Dokaži, da to lahko storijo tako, da bo v vsakem križišču ena ulica zasajena s kostanjem, druga z brezo in tretja z lipo!

Rešitev : Ker je število ulic po katerih poteka krožna pot sodo, jo je mogoče posaditi s kostanji in brezami. Po poti izmenično posadimo vsako prvo ulico s kostanjem, vsako drugo pa z brezami. Ker je šla pot skozi vsako križišče natanko enkrat, je v vsakem križišču še ena prosta ulica, ki jo zasadimo z lipo.

2. razred, 2. naloga:

V dani romb $ABCD$ je včrtana krožnica. Potegnimo katerokoli tangento na to krožnico, ki seče stranici BC in CD v točkah M in N. Dokaži, da ploščina ΔAMN ni odvisna od izbire tangente!

Rešitev : Naj na primer P_{AMN} označuje ploščino trikotnika AMN in podobno za druge trikotnike. Dobimo:

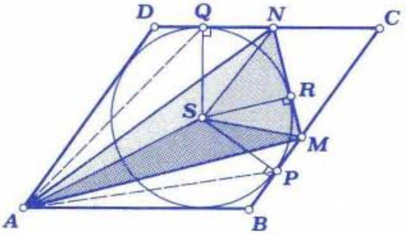
$$P_{AMN} = P_{AMS} + P_{ASN} + P_{SMN}$$
$$\underline{P_{AMS} = P_{APS} + P_{SPM} - P_{APM}}$$
$$\left.\begin{array}{l} P_{SPM} = r.PM.\frac{1}{2} \\ P_{APM} = r.PM \end{array}\right\} \Longrightarrow P_{ASM} = P_{APS} - \frac{1}{2}.r.PM$$

$$\underline{P_{ASN} = P_{ASQ} + P_{SQN} - P_{ANQ}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{SQN} = r.NQ.\frac{1}{2} \\ P_{ANQ} = r.NQ \end{array}\right\} \Rightarrow P_{ASN} = P_{ASQ} - \frac{1}{2}.r.NQ$$

Ker so PM, MR, RN in NQ tangentni odseki iste krožnice, velja:

$PM = MR$ in $RN = NQ$



$$\underline{P_{SMN} = P_{MRS} + P_{SRN}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{MRS} = r.PM.\frac{1}{2} \\ P_{SRN} = r.NQ.\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{SMN} = \frac{1}{2}.r.PM + \frac{1}{2}.r.NQ$$

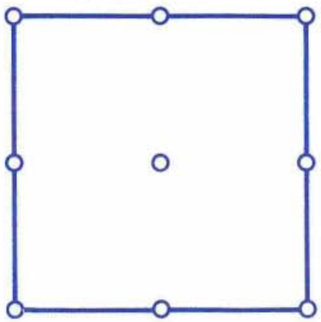
Iz tega sledi: $P_{AMN} = P_{APS} + P_{ASQ} = P_{APSQ}$

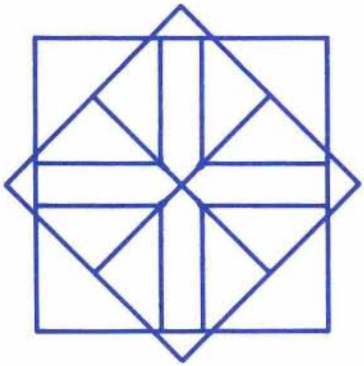
Ker ima četverokotnik $APSQ$ konstantno ploščino ne glede na lego tangente MN, je s tem naloga rešena.

2. razred, 3. naloga:

Stranica kvadrata K ima dolžino 7. Ali lahko ta kvadrat pokrijemo z osmimi kvadrati, katerih stranice imajo dolžino 3

a) pri pogoju, da so stranice teh kvadratov vzporedne z ustreznimi stranicami kvadrata K ?
b) brez tega pogoja?





Rešitev : a) V ogljišča, na razpolovišča stranic in v središče kvadrata K postavimo 9 točk. Poljubni dve točki ne moremo prekriti s kvadratom 3×3, če ima le-ta stranice vzporedne s stranicami kvadrata K. Ker je točk 9, kvadratov 3×3 pa le 8, kvadrata K ni mogoče prekriti.
b) Da bi dokazali, da je kvadrat K možno prekriti, je dovolj, da navedemo eno možnost. To prikazuje slika 5. Sam se prepričaj, da je res pravilna!

3. razred, 3. naloga:

Naj bo S presek diagonal četverokotnika $ABCD$. Če je $\angle SAB = \angle SBC = 30^\circ$ in $\angle SCD = \angle SDA = 45^\circ$, poišči kot med diagonalama!

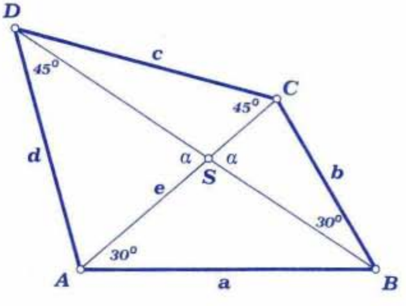
Rešitev : Označimo z α iskani kot med diagonalama. Iz enakosti

$$\angle BAC = \angle SBC = 30^\circ$$
$$\angle ACB = \angle SCB$$

sledi podobnost trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle SBC$, torej je $\angle ABC = \alpha$.
Prav tako iz

$$\angle ADS = \angle ACD = 45^\circ$$
$$\angle DAS = \angle DAC$$

sledi : $\triangle DAS \sim \triangle DAC$,
torej $\angle ADC = \alpha$.



Iz obeh parov podobnih trikotnikov $\triangle ABC \sim \triangle SBC$ in $\triangle DAS \sim \triangle DAC$ dobimo naslednje zveze med stranicami:

$$SB = \frac{ab}{e} \quad , \quad SA = \frac{d^2}{e} \quad , \quad SD = \frac{dc}{e} \quad \text{in} \quad SC = \frac{b^2}{e}$$

Upoštevajmo $AC = AS + SC$, torej $\frac{d^2}{e} + \frac{b^2}{e} = e$, $d^2 + b^2 = e^2$.
Uporabimo sinusni izrek v trikotnikih $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$:

$$\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{e}{2b}$$

$$\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{e}{d\sqrt{2}}$$

in dobimo $2b = \sqrt{2}d$, torej $d = b\sqrt{2}$.

Dobljeno enakost upoštevamo v zvezi $e^2 = d^2 + b^2 = 2b^2 + b^2 = 3b^2$ in dobimo razmerje $e : b = \sqrt{3}$, torej je

$$\sin\alpha = \frac{e}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \alpha_1 = 60^\circ \text{ ali } \alpha_2 = 120^\circ .$$

Kota med diagonalama sta torej enaka 60° in 120°.

3. razred, 4. naloga:

Poišči vse polinome oblike $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \{-1,1\}$; $i = 0,1,2,\ldots,n$; $n \in \{1,2,\ldots\}$
tako, da ima vsak od njih vse ničle realne!

Rešitev : Označimo ničle danega polinoma z $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in uporabimo Vietove formule:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \pm 1 .$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \pm 1$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n . \frac{a_0}{a_n} = \pm 1$$

Če kvadriramo prvo enakost in dobljenemu rezultatu odštejemo drugo enakost, dobimo:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \pm 2$$

Ker vsota kvadratov ne more biti negativna, dobimo:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 3 \quad \text{in} \quad \frac{a_{n-2}}{a_n} = -1 \text{ , torej } a_{n-2} \neq a_n .$$

Upoštevajmo še, da je aritmetična sredina večja ali kvečjemu enaka geometrijski sredini:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}$$

V neenakost vstavimo $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 3$, $x_1^2x_2^2\ldots x_n^2 = 1$ in dobimo $\frac{3}{n} \geq 1$ oziroma $3 \geq n$.

a) $n = 1$. Dobimo naslednje rešitve: $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x - 1$, $p_3(x) = -x + 1$ in $p_4(x) = -x - 1$.

b) $n = 2$. Z upoštevanjem $a_{n-2} \neq a_n$ dobimo v tem primeru naslednje polinome: $p_5(x) = x^2 + x - 1$, $p_6(x) = x^2 - x - 1$, $p_7(x) = -x^2 + x - 1$ in $p_8(x) = -x^2 - x - 1$. Diskriminanta je v vseh primerih pozitivna, zato so vse ničle realne. Tudi ti polinomi predstavljajo rešitve dane naloge.

c) $n = 3$. Sedaj sta aritmetična in geometrijska sredina števil x_1^2, x_2^2, x_3^2 enaki, to pa je res le tedaj, ko so ta števila med seboj enaka: $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$; $x_1, x_2, x_3 = \pm 1$. Ker pa velja: $x_1 + x_2 + x_3 = \pm 1$, sta vsaj dve števili med seboj različni. Torej so možne le naslednje rešitve:

$$p_9(x) = (x + 1)^2(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$p_{10}(x) = -(x + 1)^2(x - 1) = -x^3 - x^2 + x + 1$$
$$p_{11}(x) = (x + 1)(x - 1)^2 = x^3 - x^2 - x + 1$$
$$p_{12}(x) = -(x + 1)(x - 1)^2 = -x^3 + x^2 + x - 1 .$$

4. razred, 2. naloga:

Naj bo S množica n realnih števil in T množica vsot po k različnih števil iz $S (n,k \in N; n \geq k)$. Dokaži, da ima T vsaj $k(n - k) + 1$ elementov!

Rešitev : Nalogo lahko rešimo s popolno indukcijo po številu n. Označimo število različnih vsot z A_n. Treba je dokazati, da velja $A_n \geq (n - k)k + 1$:

Za nek $n = k$ je $A = 1$ in neenakost velja. Denimo, da velja za nek n in dokažimo, da velja potem tudi za $n + 1$! Uredimo vse vsote števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$, za katera velja neenakost $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, po velikosti. Največji vsoti izmenoma nadomestimo vsako število z a_{n+1} in tako dobimo k novih vsot. Te so vsekakor večje od pravotnih, poleg tega pa so med seboj različne, saj se poljubni dve razlikujeta le v enem členu. Po predpostavki velja $A_n \geq (n - k)k + 1$; tej neenakosti prištejemo še k novih vsot in dobimo: $A_{n+1} \geq A_n + k \geq (n + k)k + 1 + k =$
$= [(n + 1) + k]k + 1$.

S tem je trditev dokazana.

4. razred, 3. naloga:

Dan je $a \in N$. Zaporedje tvorimo takole $a_0 = a$. Če je: $a_n = c_0 + 10c_1 + \ldots + 10^k c_k$ $(c_i \in N;\ 0 \leq c_i \leq 10\ ;\ i = 0,1,\ldots,k)$, potem naj bo $a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + \ldots + 10^{k-1}c_k$. Katera števila se v zaporedju $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ponavljajo neskončnokrat?

Rešitev : Najprej poiščemo zvezo med zaporednima členoma a_n in a_{n+1}: $a_n = 10a_{n+1} - 19c_0$

Iz dobljene zveze pa sledi še:

$$19 | a \implies 19 | a_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$
$$19 \nmid a \implies 19 \nmid a_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

Dokažimo, da je zaporedje strogo padajoče za $k \geq 2$:

$a_n > a_{n-1} \iff c_0 + 10c_1 + \ldots + 10^k c_k > 2c_0 + c_1 + \ldots + 10^{k-1}c_k$ oziroma $(10^k - 10^{k-1})c_k + \ldots + 9c_1 > c_0$.

Ker pa za vsak $k \geq 2$ velja: $(10^k - 10^{k-1})c_k + \ldots + 9c_1 > 10^k - 10^{k-1} \geq 90$ in je c_0 manjše od 10 in tako tudi od 90, neenakost res velja.

Poglejmo še primer, ko je $k = 1$: $c_0 + 10c_1 \geq 2c_0 + c_1 \iff 9c_1 \geq c_0$
Tu velja enakost le v primeru, ko je $c_1 = 1$ in $c_0 = 9$, sicer pa velja strogi neenačaj. Iz dobljenih neenakosti lahko torej povzamemo: zaporedje pada toliko časa, da pride pod 20, nato pa se zgodi ena od naslednjih dveh možnosti.

a) Začetno število a je deljivo z 19, zato so vsi členi zaporedja deljivi z 19. V tem primeru pride zaporedje do 19 in tam obtiči; 19 se prične ponavljati.

b) a ni deljivo z 19, torej pade zaporedje pod 19. Ugotoviti je treba, kaj se dogaja s števili od 1 do 18. Z računom ugotovimo, da se prične ponavljati cikel dolžine 18, ki vsebuje vsa števila od 1 do 18:

18,17,15,11,3,6,12,5,10,1,2,4,8,16,13,7,14,9,18,...

Rešitve pripravil *Aleksandar Jurišić*,
sodelovala *Mitja Bensa* in *Leon Matoh*

ENAKOSTI - Rešitev iz Preseka 8/1, str. 18

V Bistrovidcu (Presek 7(1979-80)4, 213) in nato,pomotoma, še enkrat (Presek 8(1980-81)1,18) smo vam zastavili za nalogo poiskati rešitve enačbe

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc} \qquad (1)$$

Odgovor na to vprašanje nam je poslal le *Nardin Boštjan* iz Nove Gorice, ki pa je poiskal samo rešitve z $a = 1$. Zato skupaj premislimo, kako bi poiskali vse rešitve.

Začnimo z naslednjo ugotovitvijo: če je (a, b, c, d) rešitev enačbe (1), so njene rešitve tudi:

(c, d, a, b)	$\overline{cd} \times \overline{ab} = \overline{dc} \times \overline{ba}$
(b, a, d, c)	$\overline{ba} \times \overline{dc} = \overline{ab} \times \overline{cd}$
(d, c, b, a)	$\overline{dc} \times \overline{ba} = \overline{cd} \times \overline{ab}$

ki pa predstavljajo v bistvu isto rešitev. Ker se v teh štirih rešitvah vsaka od cifer a, b, c in d enkrat pojavi na prvem mestu v rešitvi, lahko naše nadaljnje iskanje omejimo na rešitve, za katere velja $a \leq b, c, d$.

Povrnimo se nazaj k enačbi (1) in jo zapišimo v enakovredni obliki:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$$

iz katere dobimo po krajšem računu enačbo:

$$a.c = b.d \qquad (2)$$

Iz dobljene enačbe (2) takoj razberemo skupini rešitev oblike: (a, b, b, a) in (a, a, b, b), pri čemer sta a in b poljubni od nič različni cifri $(a \leq b)$.

Kaj pa, če je $a = 0$? Tedaj ima enačba (1) obliko

$$\overline{b} \times \overline{cd} = \overline{b0} \times \overline{dc}$$

Če je tudi $b = 0$, je enačba izpolnjena pri poljubnem paru cifer c in d; kar da rešitve oblike $(0, 0, c, d)$. Sicer pa dobimo,po krajšanju z b, enačbo

$\overline{cd} = 10 \times \overline{dc}$

iz katere izhaja $d = 0$. Ustrezne rešitve imajo obliko: $(0, b, c, 0)$, pri čemer sta b in c poljubni cifri.

Ostale so nam še netrivialne rešitve, ki zadoščajo dodatnim pogojem: $a \neq b$, $a \neq d$ in $a \neq 0$. Ključ do teh rešitev je naslednja ugotovitev: ker je $a \neq b$ in $a \neq d$, se mora dati število $k = a.c$ zapisati vsaj na dva načina kot produkt dveh faktorjev manjših od 10. Nadaljevanje je razvidno iz tabele:

$k = a.c = b.d$	(a, b, c, d)	$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$
4 = 1.4 = 2.2	1 2 4 2	12 × 42 = 21 × 24
6 = 1.6 = 2.3	1 2 6 3	12 × 63 = 21 × 36
= 3.2	1 3 6 2	13 × 62 = 31 × 26
8 = 1.8 = 2.4	1 2 8 4	12 × 84 = 21 × 48
= 4.2	1 4 8 2	14 × 82 = 41 × 28
9 = 1.9 = 3.3	1 3 9 3	13 × 93 = 31 × 39
12 = 2.6 = 3.4	2 3 6 4	23 × 64 = 32 × 46
= 4.3	2 4 6 3	24 × 63 = 42 × 36
16 = 2.8 = 4.4	2 4 8 4	24 × 84 = 42 × 48
18 = 2.9 = 3.6	2 3 9 6	23 × 96 = 32 × 69
= 6.3	2 6 9 3	26 × 93 = 62 × 39
24 = 3.8 = 4.6	3 4 8 6	34 × 86 = 43 × 68
= 6.4	3 6 8 4	36 × 84 = 63 × 48
36 = 4.9 = 6.6	4 6 9 6	46 × 96 = 64 × 69

Vladimir Batagelj

REŠITVE NALOG

KOLIKO JE KOMBINACIJ? - Rešitev iz P-8/1, str. 46

V prvi številki VIII. letnika Preseka 1980/81 je na strani 46 Saši Pucko iz Cerkelj ob Krki vprašal, na koliko načinov je mogoče v ornamentu (slika 1) prebrati vprašanje. Saši je dijak matematične smeri gimnazije Brežice. V pismu ob nalogi je zapisal, da je idejo za nalogo dobil ob reševanju magičnih kvadratov. Naloga je zelo zanimiva.

Lahko jo seveda posplošimo. Mislimo si, da je tekst krajši ali daljši. Struktura uganke naj ostane enaka. Namesto črk uporabimo številke. Besedilo KOLIKOJEKOMBINACIJ? bi prepisali v tekst:

```
                  ?
                K J ?
              K O I J ?
            K O L C I J ?
          K O L I A C I J ?
        K O L I K N A C I J ?
      K O L I K O I N A C I J ?
    K O L I K O J B I N A C I J ?
  K O L I K O J E M B I N A C I J ?
K O L I K O J E K O M B I N A C I J ?
  K O L I K O J E K B I N A C I J ?
    K O L I K O J E I N A C I J ?
      K O L I K O J N A C I J ?
        K O L I K O A C I J ?
          K O L I K C I J ?
            K O L I I J ?
              K O L J ?
                K O ?
                  K
```

Slika 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Originalno besedilo je namreč dolgo 19 znakov. Na sliki 2 si poglejmo nekaj manjših zgledov.

```
                                         9
                        7              1 8 9
           5          1 6 7          1 2 7 8 9
  3      1 4 5      1 2 5 6 7      1 2 3 6 7 8 9
1 2 3  1 2 3 4 5  1 2 3 4 5 6 7  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1      1 2 5      1 2 3 6 7      1 2 3 4 7 8 9
           1          1 2 7          1 2 3 8 9
                        1              1 2 9
                                         1
```

Slika 2

V vsaki shemi se srednji znak pojavi samo enkrat. To pomeni, da mora vsaka pravilna kombinacija skozi središče ornamenta. Po levi strani pridemo do središča, po desni pa nadaljujemo do konca. Takole napravimo! Naj n pove velikost lika. To pomeni, da je zapis dolg $2n + 1$ znakov. Imamo torej n začetnih znakov, za tem srednji znak in še n končnih znakov. Z $x(n)$ označimo število pravilnih kombinacij. Naj $y(n)$ označuje število pravilnih začetkov. Zaradi simetrije je $y(n)$ tudi število koncev. Ker nam vsak pravilni začetek daje s poljubnim pravilnim koncem pravilno kombinacijo in na ta način dobimo ravno vse pravilne kombinacije, je očitno:

$$x(n) = y(n).y(n) = y(n)^2.$$

Samo še $y(n)$ moramo znati izračunati, pa bo naloga rešena. Oglejmo si spet nekaj majhnih likov. Zadoščajo le leve polovice - začetki. Tokrat bomo v polje vpisali število različnih delov besedila od tega polja do središča. Glej sliko 3!

```
                                   1
                       1         3 1
           1         2 1       3 2 1
 1 1     1 1 1     1 1 1 1   1 1 1 1 1
   1       2 1       3 2 1     4 3 2 1
             1         3 1       6 3 1
                         1         4 1
                                     1

 n = 1    n = 2     n = 3      n = 4
```

Slika 3

V vsakem večjem opazimo vse manjše like. Bralec naj poskusi ugotoviti pravilo, po katerem nastajajo tile liki. Starejši bralci bodo opazili v liku dva Pascalova trikotnika! Če seštejemo števila začetnih označenih polj, dobimo ravno $y(n)$. Tako je $y(1) = 2$, $y(2) = 5$, $y(3) = 11$, $y(4) = 23$, itd. Z matematično indukcijo je mogoče dokazati, da je

$$y(n) = 2^n + 2^{n-1} - 1 = 3.2^{n-1} - 1.$$

Število kombinacij je

$$x(n) = (3.2^{n-1} - 1)^2$$

Razpredelnica na sliki 4 prikazuje $y(n)$ in $x(n)$ za majhne vrednosti . Za našo začetno nalogo je $n = 9$. Zato je odgovor na zastavljeno vprašanje: $x(9) = 588\ 289$.

	$y(n) = 3.2^{n-1} - 1$	$x(n) = (3.2^{n-1} - 1)^2$
1	2	4
2	5	25
3	11	121
4	23	529
5	47	2209
6	95	9025
7	191	36481
8	383	146689
9	767	588289
10	1535	2356225
11	3071	9431041
12	6143	37736449
13	12287	150970369
14	24575	603930625
15	49151	2415820801

Slika 4

Med rešitvami, ki smo jih prejeli sta bili le dve popolnoma pravilni. Nalogo sta pravilno rešila *Janez Košmrlj* iz Žlebiča št. 2, Ribnica na Dolenjskem in *Tomaž Pogačnik* iz Ljubljane. Precej blizu rešitvi sta prišla še *Andrej Florjančič* iz Kopra in *Marko Lampe* iz Velenja.

Uredniški odbor je sklenil, da izvrstno rešitev Tomaža Pogačnika nagradi s knjigo J. Rakovec: Osnovni pojmi topologije.

Tomaž Pisanski

PREMISLI IN REŠI - REŠITEV IZ DRUGE ŠTEVILKE

Pravilno rešitev, spominčico za število π nam je poslalo 22 bralcev, nekateri tudi po dve ali več. Žal smo dobili tudi dve napačni rešitvi, ko sta si bralca kar po svoje prikrojila decimalke. Bržkone gre napako pripisati temu, da se v šoli še niso učili o obsegu in ploščini kroga in pomenu števila π. Kar škoda, da ne moremo objaviti rešitve vseh dvaindvajsetih. Vsaj naštejmo jih:

Marija Božnar iz Malega vrha, p. Šmarje Sap, Gojko Cesar z Otiškega vrha pri Dravogradu, Magda Čevdek iz Nove Gorice, Zoran Grom iz Drenovega griča, p. Vrhnika, Andrej Jamnik in Lojze Tomaževič iz Kranja, Andrej Janc iz Beltinec, Irena Jerala iz Kranja, Ivan Jovan iz Srednjega Doliča pri Mislinji, Karmen Kompara iz Podnanosa, Franc Koželj iz Trebnje gorice, p. Krka, Mateja Kropec iz Rogaške Slatine, Janez Kvaternik iz Šmarate, p. Stari trg pri Ložu, Marko Lampe iz Velenja, Jože Lekšan iz Starega trga pri Ložu, Liljana Mihelič iz Vrhpolja pri Kamniku, Tomaž Ranzinger iz Žalca, Ciril Rosc iz Luč pri Savinji, Veronika Rot iz Ljubljane, Breda Sladič iz Novega mesta, Irena Šifrar iz Črete pri Orehovi vasi, Marina Šimec iz Črnomlja in matematični krožek iz Kostanjevice.

Objavljamo tri spominčice naših bralcev. *Ciril Rosc* je sestavil pesmico:

> *"Hej, v črki π izdaj skrivnost,*
> *ki računa obseg nam kroga."*
>
> *"Številka približna odkriva skrivnost,*
> *saj ni nam pretežka tale naloga."*

Franc Koželj nam je poslal globok filozofski vzdih.

Mir, k tebi v varno zavetišče si nadvse želim, ker tukaj človeško življenje postaja trpljenja pot, ki nam zagrinja pota sprave.

Janez Kvaternik pa je sestavil šaljiv stavek.

Pot v šolo z malim avtobusom je vesela, kajti med potjo uganjamo pogostoma zabavne humoreske.

Vsem trem bomo poslali knjižico D.J. Struik, Kratka zgodovina matematike, ki je izšla v knjižnici Sigma.

Na koncu poglejmo še, kako je v svobodnem prevodu zapisal spominčico profesor *Janko Moder*.

Naj z rimo
v pesmi počastimo
še nekoga:
Slovi naj kroga
krotilec, Sirakužan!
Število izračunal
nam je res čudovito,
tule skrito.
Če nemara kdaj
sam kôd pozabimo
brž to pesmico
uporabimo!

Peter Petek

PRAVILNI ŠESTKOTNIK IN KVADRAT - Rešitev s str. 208

Stranica šestkotnika je označena z a, stranica kvadrata naj bo x. Dokazati moramo

$$6.a^2\sqrt{3}/4 = x^2 \quad \text{oziroma} \quad x^2 = 3a^2\sqrt{3}/2 \quad .$$

Višinski izrek pove, da je kvadrat višine na hipotenuzo pravokotnega trikotnika enak produktu odsekov, na katera ta višina deli hipotenuzo. Zato sledi

$$x^2 = m.n = (3a/2).a\sqrt{3}$$

Eden od odsekov je po konstrukciji enak $3a/2$, drugi, krajša diagonala šestkotnika, je enak dvojni višini enakostraničnega trikotnika, torej $a\sqrt{3}$. Res je

$$x^2 = 3a^2\sqrt{3}/2$$

in dokaz je končan.

Dragoljub M. Milošević
Peter Petek

PREŠTEVANJE ČRK - Rešitev iz Preseka VIII/3, stran 187

Naloga je bila takale: Izmisli si katerokoli število in ga črkuj oziroma napiši z besedami. Nato te črke preštej, dobljeno vsoto pa zopet zapiši z besedami in nadaljuj ta postopek, dokler ne prideš do števila 3, pri katerem gre vse skupaj v nedogled.

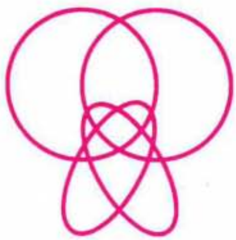
Dokaži, da se opisani proces konča pri 3 ne glede na to, s katerim številom si začel.

Lastnost v hipu preiskusimo na številih od 0 do 10, pa tudi pripone "najst", "jset" in "deset" imajo manj črk, kot je vrednost, ki jo predstavljajo. Tako je lastnost očitna od 0 do 99. Tudi besede "sto", "tisoč", "milijon" in tako naprej imajo bistveno manj črk, kot je njihova vrednost, "neskončno" pa ima samo devet črk. Naša lastnost torej velja za vsa naravna števila. Vsa druga števila pa dajo po prvem štetju črk naravno število, s tem pa smo dokaz končali.

Roman Rojko

NALOGA O PRESEKOVEM ZNAMENJU - rešitev s str. 222

Slika kaže eno od možnih rešitev z 2 krogoma in 2 elipsama:



Če štejemo tudi zunanje neomejeno polje, ima Presekovo znamenje 8 polj, znamenje za 4 vede pa 16 polj. Koliko polj bi imelo znamenje za n ved? Da bodo v njem zastopani vsi možni preseki morata vsakemu polju znamenja za n - 1 ved ustrezati dve polji za n ved: eno leži znotraj, drugo pa zunaj n-tega lika. Če torej število ved povečamo za 1, se število polj podvoji. Eni vedi ustrezata očitno dve polji, n vedam potemtakem 2^n polj.

Kako pa vidimo, da se znamenja za 4 vede ne da sestaviti iz samih krogov?

Eulerjeva formula za povezane ravninske mnogokotniške mreže se glasi

$$o - r + p = 2$$

Tu je o - število oglišč, r - število robov in p - število polj mreže (vključno z zunanjim).

Denimo, da mrežo sestavljajo štiri krožnice. Koliko ima oglišč, robov? Dve krožnici v ravnini sta lahko brez skupnih točk, ali pa imata skupne vse svoje točke, natanko eno točko ali pa natanko dve točki. Prvi trije primeri tu ne pridejo v poštev, saj potem ne bi dobili vseh možnih presekov; prav tako se v eni točki ne smejo sekati tri ali celo več krožnic. Vsak par krožnic prispeva potemtakem natanko dve oglišči mreže. Ker lahko med štirimi krožnicami izberemo 6 različnih parov, ima mreža $o = 6\times 2 = 12$ oglišč.

Posamezna krožnica se seka s tremi drugimi krožnicami, tako da leži na njej 6 oglišč mreže, ki jo razdelijo na 6 lokov - robov mreže. Torej je $r = 4\times 6 = 24$.

Iz Eulerjeve formule dobimo s temi podatki

$$p = r - o + 2 = 14$$

Rabili pa bi 16 polj, torej s samimi krogi ne gre. Elipsi na sliki se sekata v 4 točkah, tako da dobimo dve oglišči in 4 robove več, to pa nam da ravno dve manjkajoči polji.

Prav tak razmislek nam pokaže, da je pri n krožnicah

$$o = (n(n - 1)/2)\times 2 = n^2 - n$$
$$r = n \times (2(n - 1)) = 2(n^2 - n)$$
$$p = r - o + 2 = n^2 - n + 2$$

če je $n \geq 2$. Formula za p pa očitno velja tudi pri $n = 1$. Označimo $k(n) = n^2 - n + 2$ in $p(n) = 2^n$. Velja

$$k(n) = p(n) \qquad \text{za } n = 1,2,3$$
$$k(n) < p(n) \qquad \text{za } n \geq 4$$

S samimi krogi lahko narišemo le znamenja za 1,2 ali 3 vede.

Marko Petkovšek

PRESEK LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE IN ASTRONOME - rešitev iz P-8/1, str. 45

Edino pravilno rešitev zastavljene naloge nam je poslal Drnovšek Roman iz Reteč pri Škofji Loki, učenec 8. razreda OŠ "Cvetko Golar". Takole pravi:

Naloga v 1. številki Preseka na strani 45 je podobna nalogi o trdnjavi iz 3. številke lanskega letnika. Naslov našega lista PRESEK LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE IN ASTRONOME ima 51 črk in presledkov. Da pa ne bi risal tabelo 26x26 in v njej sešteval števila iz prejšnjih polj, sem poskusil drugače. Pri rešitvi za trdnjavo vidimo, če obrnemo šahovsko desko tako, da je zgoraj "cilj" in spodaj "start", da je to pravzaprav Pascalov trikotnik. Iz njega razberemo, da je iskano število poti med "startom" in "ciljem" enako:

$$\binom{50}{25} = \frac{50!}{25!\,(50-25)!} = \frac{50!}{(25!)^2}$$

Ker pa so 4 končne točke, to pomnožimo še s 4. Rešitev je torej $4.50!/(25!)^2$, kar je približno $5,056\,424\,256 \cdot 10^{14}$.

Romanovi rešitvi ni kaj dodati. Najbrž je končno vrednost izračunal na žepnem računskem strojčku in mu je zmanjkalo decimalnih mest. Na vsa mesta natančna vrednost je:

$$4.\binom{50}{20} = 505\,642\,425\,751\,008.$$

Še nasvet tistemu, ki bi želel izračun preveriti: vrednost binomskega koeficienta je priporočljivo računati po pravilu:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{in} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Romanu smo za nagrado poslali knjigo Ivana Vidava, *Algebra*, 2. natis, DMFA SRS 1980.

Vladimir Batagelj

"UKROČENA MATEMATIKA"

Kaj pomenita napisa na mornarskih signalnih zastavah, ki ju dviguje fižolček iz zgodbe "Ukročena matematika"?

Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

"PRESEKOVE REVIJE"

V letošnjem koledarskem letu prejemamo v zameno za Presek naslednje revije iz Jugoslavije in inozemstva:

1. ASTRO AMATER. - Sarajevo : Akademsko astronomsko društvo
2. ČOVJEK I VSEMIR. - Zagreb : Zagrebačka zvjezdarnica
3. GALAKSIJA : časopis za popularizacijo nauke.- Beograd : Beogradski izdavačko-grafički zavod, novinarska delatnost "Duga"
4. IMPULS : spisanie za popularizacija na fizikata. - Skopje : Fakulteta za fiziku, škola mladih fizičara
5. KVANT : naučno-populjarnyj fizičko-matematičeskij žurnal.-Moskva : Akademii nauk SSSR i Akademii pedagogičeskih nauk SSSR
6. MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST : za učenike srednjih škola.- Zagreb : Društvo matematičara i fizičara SRH
7. MATEMATIČKI LIST : za učenike osnovne škole.- Beograd : Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije
8. MATEMATIČKI ZABAVNIK : list za matematičku razonodu učenika osnovne škole. - Beograd : Arhimedes
9. MLADI FIZIČAR : časopis za učenike osnovne škole. - Beograd : Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije
10. NUMERUS : popularno matematičko spisanie za učenici na osnovnoto učilište. - Skopje : Društvato na matematičarite na grad Skopje
11. PHYSIK IN DER SCHULE. - Berlin : Volk und Wissen Volkseigener Verlag
12. PIONIR : poljudnoznanstvena revija za mladino. - Ljubljana : Mladinska knjiga
13. TIM : revija za tehnično in znanstveno dejavnost mladine. - Ljubljana : Tehniška založba Slovenije
14. VASIONA : časopis za astronomiju. - Beograd : Astronomsko društvo "Rudjer Bošković"

Bralcem Preseka priporočamo tudi te revije. Izposodijo si jih lahko osebno v matematični knjižnici oz. knjižnici oddelka za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana, Jadranska c. 19.

RAKOVEC Janez / Osnovni pojmi topologije. - Ljubljana : Državna založba Slovenije, 1980. - 240 str., cena 320.- din (256.- din).

Dobesedno pomeni "topologija" nauk o legi. To je novejša veja matematike, ki se podobno kot geometrija ukvarja s prostorom in raznimi množicami točk v njem. Vendar topologije ne zanimajo toliko kvantitativni pojmi, kot so razdalje, velikosti kotov in ploščine. Prostor preučuje bolj iz kvalitativnega (kakovostnega) vidika. Čeprav je tukaj nemogoče natančno povedati, kaj pomeni ta kvalitativni vidik, bo morda nekaj primerov dalo bralcu občutek, za kaj gre. Tako s stališča topologije ni razlike med krožno in eliptično ploščo, ker lahko krožno ploščo zvezno preoblikujemo (to je, raztegnemo ali skrčimo brez pretrganja) v eliptično. Med kolobarjem in krožno ploščo pa je kvalitativna razlika, kajti krožne plošče ne moremo preoblikovati v kolobar z raztezanjem in krčenjem, ne da bi jo kje pretrgali. Kvalitativna razlika je tudi med krožno ploščo z robom (to je, skupaj s krožnico) in med krogom brez roba. Očitna razlika je tudi med premico in množico, ki je unija dveh vzporednic; druga množica je namreč sestavljena iz dveh ločenih kosov, prva pa je povezana. Seveda kvalitativne razlike med množicami v teh primerih tukaj ne moremo natančno opredeliti (za to bi potrebovali topološke pojme homeomorfizma ter odprtih in povezanih množic). Edina pot, da spoznamo, kaj je topologija, je, da jo študiramo. Čeprav izhaja topologija iz nazornih geometričnih predstav, je vseeno ena od najbolj abstraktnih matematičnih disciplin. Ukvarja se tudi s prostori, ki si jih ne moremo predstavljati, kljub temu pa jih lahko matematično preučujemo.

Bralcu, ki se želi seznaniti z osnovnimi pojmi topologije, toplo priporočam knjigo dr. Janeza Rakovca "Osnovni pojmi topologije". Knjiga je napisana v zelo jasnem slogu in bo dostopna vsakemu srednješolcu, ki ga zanima matematika; seveda pa zahteva branje določeno mero zbranosti. Bralcu bo razširila splošno matematično znanje in mu poglobila razumevanje že poznane snovi. Velik poudarek je dal avtor povezavi topologije z analizo in geometrijo. Pojme, kot so ureditev točk na premici, limite zapo redij in zveznost funkcij, ki jih srečamo v srednješolski matematiki, obravnava na matematično ekzakten - a vendar dostopen način. Pokaže, kje nastopa pri obravnavi teh pojmov topologija. Prepletanje topologije z drugimi področji bo pripomoglo k boljšemu razumevanju matematike kot celote. Med tekstom so v knjigi razvrščene tudi naloge.

Knjiga dr. Rakovca ne bo samo razširila bralčevega znanja, kar mu bo koristilo kot morebitnemu bodočemu študentu matematike, temveč se bo ob njej lahko privadil tudi na matematično strogost in logiko. Za branje te knjige je potrebno nekaj znanja o množicah, geometriji in realnih številih , ki ga dobimo že v prvem letniku srednje šole.

Bojan Magajna

POLONIJO MIRKO, MATEMATIČKI PROBLEMI ZA RADOZNALCE. - ŠKOLSKA KNJIGA : ZAGREB, 1979. - 174 STR.

Vsem bralcem Preseka knjižico močno priporočam! V njej je 200 problemov iz rekreacijske matematike. Na koncu so zbrane rešitve. Avtor je dobro vedel, da knjiga problemov brez rešitev ni vredna veliko, saj prav vseh nalog ne bomo znali sami ugnati. Po drugi strani pa nas naloge veselijo le, če jih sami rešujemo. Zato je med rešitve in probleme vrinil še čisto kratke odgovore, oziroma navodila, ki nam pomagajo preden obupamo pred težko nalogo. Seveda ti kratki odgovori večinoma zadoščajo, če želimo preveriti ali je naša rešitev pravilna. Napotki in navodila pa nam podaljšajo užitek pri trenju orehov.

Knjiga je primerna za vse starosti in poklice. Le veselje do težkih nalog moramo imeti! Seveda naloge niso težke zaradi matematike. Tako težke so, kot je težko odkriti storilca v dobro napisanem kriminalnem romanu, čeprav ležijo pred nami vsi podatki.

Zahtevnejši bralci in poznavalci rekreacijske matematike bodo mnoge med nalogami spoznali. Priznati pa bodo morali, da nosi vsaka avtorjev pečat. Mislim, da take knjige v slovenščini še nimamo, pa bi jo morali imeti. Žal je ta knjiga tudi v jugoslovanskem merilu redkost.

Tomaž Pisanski

ŠESTA ŠTEVILKA PRESEKA

SODELAVKA ASTRONOMSKO-GEOFIZIKALNEGA OBSERVATORIJA V LJUBLJANI, PAVLA RANZINGER, JE PRIPRAVILA SKICO ZA PRESEKOVO ZVEZDNO KARTO, KI BO IZŠLA KOT PRILOGA K ŠESTI ŠTEVILKI LETOŠNJEGA PRESEKA. LETA BO VSEBOVALA NA 32-IH STRANEH POJASNILA H KARTI, NAVODILA ZA NJENO UPORABO, SEZNAM VAŽNEJŠIH OZVEZDIJ TER NEKAJ SKIC IN FOTOGRAFIJ. VEČINO SLEDNJIH JE POSNEL ŠTUDENT BOJAN DINTINJANA.

ZADNJO LETOŠNJO ŠTEVILKO PRESEKA S PRILOGO BODO DOBILI BREZPLAČNO VSI REDNI NAROČNIKI PRESEKA. TO NAM JE USPELO ZARADI DOBREGA GOSPODARJENJA PRI LISTU IN VAŠEGA REDNEGA PLAČEVANJA NAROČNINE.

ZVEZDNA KARTA PA BO ZANIMIVA TUDI ZA DRUGE UČENCE IN LJUBITELJE ASTRONOMIJE. VSI, KI ŽELIJO TO BROŠURO S PRILOGO, JO LAHKO DOBIJO ZA CENO 5O.-DIN (PRI SKUPINSKEM NAROČILU ŠOL PA JE CENA LE 4O.-DIN). NAJBOLJ ZAGRETI, KI BI ŽELELI KARTO OBESITI NA STENO, LAHKO DOBIJO ZVITO (IN NE ZLOŽENO) LE OSEBNO PRI KOMISIJI ZA TISK DMFA SRS, LJUBLJANA, JADRANSKA C. 19, ZA CENO 10.-DIN.

Ciril Velkovrh

presek 6
VIII
1980 81

Pavla Ranzinger

PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA

Fotografije
Bojan Dintinjana

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

NOVE KNJIGE

ŠUVALEK Maja, VUJNOVIĆ Vladis, MARGETIĆ Branko / Natjećemo se u znanju iz astronomije. - Zagreb : Školska knjiga, 1979. 170 str.

To je priročnik iz astronomije, namenjen učencem osnovne šole za pripravo na tekmovanje pri gibanju Znanost mladini. Vendar priročnik presega ta okvir. V njem so metodično zbrana vprašanja in naloge z odgovori in rešitvami iz teh poglavij: spoznavanje zvezdnega neba, astronomski instrumenti, planeti, Sonce, zvezde in galaksije. Ob koncu je seznam glavne astronomske literature - knjig in časopisov pri nas od 1928. leta dalje. Priročnik je mogoče uporabljati tudi pri rednem pouku naravoslovnih predmetov ali krožkih v osnovni šoli in v prihodnje v 1. oz. 2. letniku usmerjenega izobraževanja. Knjiga je dobrodošla za vse, ki se zanimajo za astronomijo.

Marijan Prosén