presek 3

VIII
1980–81

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

V S E B I N A

UVODNIK

KAKŠEN ROKOPIS SI ŽELIJO UREDNIKI PRESEKA

Stavljanje matematičnega teksta v tiskarni je zelo zamudno in drago. V zadnjem času so se te storitve še podražile. Čeprav imamo pri Komisiji za tisk DMFA SRS veliko preveč dela z vsemi izdajami, smo se odločili, da bomo vsaj še nekaj let rokopise za Presek natipkali kar "doma", postavili celotno zrcalo, in tako gotov rokopis oddali v tiskarno, kjer ga bodo preslikali in natisnili.

Novi uredniki in drugi sodelavci pri Preseku so nas že večkrat prosili, da bi objavili vsaj kratko navodilo, kakšen rokopis je potrebno oddati uredništvu. V tem sestavku bomo ponovili najvažnejše zahteve. Rokopis mora biti natipkan s pisalnim strojem, na dober bel papir z dvojnim razmikom med vrsticami. To pomeni, da mora biti med vrsticami toliko prostora, da lahko avtor ali korektor vpiše v vmesni prostor manjkajočo besedo ali pa tudi daljše besedilo. Rob mora biti širok vsaj 2 cm in enak na vseh štirih straneh lista formata A - 4 (21 x 29,6 cm). Nesprejemljivo je, če so listi krajši ali daljši in zapognjeni. V takem primeru naj avtor predolg list razdeli na dva, krajšega pa nalepi na drug papir predpisanega formata. Vse korekture morajo biti vpisane čitljivo, če je le mogoče natipkane tako kot drug rokopis.

Vse matematične simbole natipkamo tudi v Preseku *kurzivne* (poševne). Zato prosimo, da jih avtorji podčrtajo z vijugasto črto. Tako so natipkani tudi nekateri matematični pojmi, ko v tekstu prvič nastopajo in so v članku posebno pomembni. Za zgled navajamo naslednje:

$V = 2\pi r.\sin x$ *kvadratna enačba*

Za matematične simbole pogosto uporabljamo grške črke, ki so vedno kurzivne. Zato jih ne podčrtavamo. Vse številke in vsi znaki za matematične operacije in ločila pa so vedno pokončni. V eni od prihodnjih številk bomo odtisnili večino pomembnih znakov, ki jih imamo na štirinajstih različnih glavah pri IBM pisalnem stroju.

Uredniki prosimo avtorje, da oddajo vsak rokopis v dvojniku, ali pa morajo biti vsaj slike vrisane ne samo med tekstom, pač pa še na posebnem listu papirja. Skice morajo biti narisane skrbno, da bo risar razumel, kaj je avtor želel povedati. Če imate le malo veselja za geometrijo ali pa spretne roke, predlagamo, da priložite rokopisu tako dobro sliko, da je ne bomo ponovno risali. Paziti morate le na širino slike. V splošnem imamo le dve različni širini: 7,5 cm ali 16 cm. V prvem primeru morate določiti, kateri tekst bo natipkan vzporedno s sliko.

Če je potrebno, navedite na koncu sestavka literaturo, iz katere ste črpali snov za prispevek. To ni samo vljudno po obstoječih pravilih, pač pa za marsikaterega bralca tudi koristno, da izve, kje bi našel še več o obravnavani snovi.

Vsekakor pa bo najbolje, če si pred tipkanjem vašega članka ogledate, kako smo podoben članek natipkali v naši reviji. Če vam bo uspelo, da nas boste v dobrem posnemali, bodo uredniki vašega prispevka še posebej veseli. Za zahtevnejše članke si oglejte še *Nekaj navodil avtorjem* v Obzorniku mat.fiz. 21 (1974) 62-64.

Ciril Velkovrh

MATEMATIKA

NENAVADNI ULOMEK

V srednji šoli sem nekoč pri reševanju raznih nalog naletel na ulomek z zanimivo lastnostjo. Treba je bilo pokazati naslednjo enakost:

$$\frac{10100101}{11000011} = \frac{101010101}{110010011}$$

Problem sam seveda ni bil zahteven in kaj hitro sem ga ugnal ob upoštevanju dejstva, da sta dva ulomka a/b in c/d enaka natanko takrat, ko velja $ad = bc$.

Naloga 1: Tudi sami se prepričajte, da res velja zgornja enakost!

Ko sem ulomka malo bolje pogledal, sem opazil, da se desni ulomek od levega razlikuje po tem, da ima v števcu in imenovalcu na sredini vrinjeno enojko. Da kljub temu velja med njima enakost, se mi je zdelo zanimivo, zato sem poskusil v števcu in imenovalcu namesto ene vriniti dve enojki. Presenečenje! Spet sem ugotovil enakost med ulomkoma. Potem sem raziskal še primere s tremi, štirimi in več enojkami. Vedno znova se mi je na koncu računa nasmehnila enakost dveh ulomkov.

Naloga 2: Prepričajte se npr., da je $\frac{10100101}{11000011} = \frac{1010111110101}{1100111110011}$

Problem me je začel seveda močno zanimati in povsem naravno sem si zastavil vprašanje, ali morda ne velja splošno:

"Vrednost ulomka $\frac{10100101}{11000011}$ se ne spremeni, če števcu in imenovalcu v sredini dodamo enako mnogo (npr. n) enojk."

Spominjam se, da mi vprašanje ni dalo miru, dokler se mi po nekaj neuspelih poskusih ni posrečilo dokazati splošne veljavnosti zgornje trditve, se pravi, dokler nisem ugotovil, kaj tiči za to nenavadno lastnostjo. Ali lahko to storite tudi vi?

Naloga 3: Dokažite, da za vsako naravno število n velja enakost

$$\frac{10100101}{11000011} = \frac{1010\overbrace{11\ldots1}^{n}0101}{1100\underbrace{11\ldots1}_{n}0011}$$

V pomoč pri reševanju naj izdam, da je treba upoštevati enakost $1010 + 0101 = 1100 + 0011 = 1111$. Kako to dejstvo uporabimo, pa uganite sami!

Če boste pravilno rešili nalogo 3, potem boste gotovo spoznali, zakaj se opisani ulomek tako nenavadno obnaša. In če boste to vedeli, potem vam prav gotovo ne bo težko poiskati še druge ulomke z isto lastnostjo, saj jih je zelo veliko.

Naloga 4: Napišite še nekaj ulomkov, katerih vrednost se ne spremeni, če na določenem mestu v števcu in imenovalcu vrinemo isto število enojk!

Morda se bo komu zahotelo poiskati vse ulomke z opisano lastnostjo. Naj poskusi; toda takoj naj pristavim, da je tako zastavljen problem težji in zahteva kar precej spretnosti, zlasti pri reševanju diofantskih enačb. Je namreč poseben primer iskanja matematičnih nepak, o katerih je Presek že pisal |1|.

Pač pa je precej lažji podoben problem, če namesto enojk dodajamo ničle.

Naloga 5: Poiščite vse ulomke oblike ab/cd z lastnostjo

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a\overbrace{00\ldots0}^{n}b}{c\underbrace{00\ldots0}_{n}d}$$ za poljubno naravno število n. Pri tem so a, b, c, d naravna števila ali 0 (izraz ab seveda pomeni $10^k a + b$, če za število b, ki se lah

ko začne tudi z ničlami, rezerviramo k mest; podobno velja za c in d).

Za konec rešite še dve nalogi, ki predstavljata določeni posplošitvi naloge 3!

Naloga 6: V ulomku $\dfrac{10100101}{11000011}$ nastopata samo cifri 0 in 1, zato si lahko mislimo, da je zapisan v številskem sistemu s poljubno osnovo. Prepričajte se, da zanj v vsakem primeru velja nenavadna lastnost iz naloge 3!

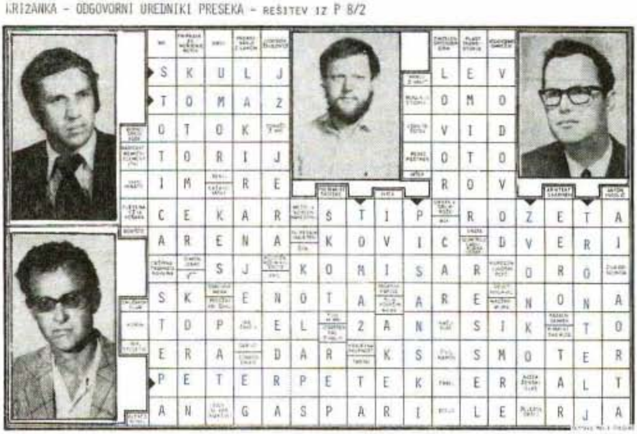
Naloga 7: Napišite nekaj ulomkov, katerih vrednost se ne spremeni, če na določenem mestu v števcu in imenovalcu vrinemo isto število enakih cifer (ne nujno enojk) ali skupin cifer (večmestnih števil)!

Vabim vas, da tudi sami poskusite najti kakšno posplošitev ali da sestavite kakšno podobno nalogo o ulomkih. Pišite nam!

|1| A. Suhadolc, *Matematične napake*, Presek <u>4</u> (1976/77), str. 4 in 67.

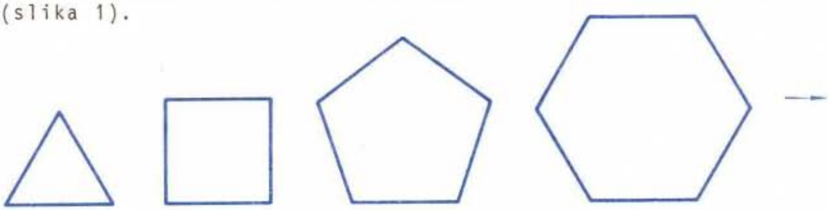
Milan Hladnik

KRIŽANKA - ODGOVORNI UREDNIKI PRESEKA - REŠITEV IZ P 8/2



PRAVILNA TELESA

Vsi smo se že srečali s pravilnimi (regularnimi) mnogokotniki (poligoni) in vemo, kakšni so! Natančno povedano je pravilno mnogokotnik konveksen ravninski lik, sestavljen iz enako dolgih ravnih črt, ki imajo v vsakem oglišču enak notranji kot (slika 1).



Slika 1: Pravilni n-kotnik obstaja za vsak $n \geqq 3$

Hitro vidimo, da je pravilnih mnogokotnikov *neskončno* mnogo. Za vsako naravno število n, $n \geqq 3$ obstaja pravilni n-kotnik. Vsi pravilni mnogokotniki z n oglišči so si podobni. Pri vsakem n obstaja v bistvu le *en* pravilni lik.

Analogija pravilnega mnogokotnika v treh razsežnostih je *pravilno telo* (regularni polieder). To je konveksno telo, ki ima za ploskve skladne pravilne mnogokotnike, ki se stikajo v oglišččih tako, da oblikujejo skladne prostorske kote! Na prvi pogled bi sklepali, da je verjetno tudi pravilnih teles neskončno mnogo, vendar temu ni tako. Pravzaprav jih je presenetljivo malo! Pri ugotavljanju števila pravilnih teles bomo uporabljali znani *Eulerjev poliederski obrazec*, ki veže število oglišč, robov in ploskev poljubnega konveksnega telesa. Za telesa s p oglišči, q robovi in r ploskvami velja zveza:

$$p - q + r = 2 \qquad (1)$$

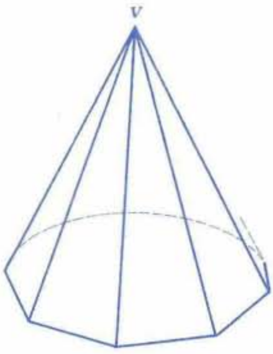
Eulerjevega obrazca ne bomo dokazali, ampak ga bomo le preverili na nekaterih zgledih:

1. Zgled: *n-strana piramida.*
n-strana piramida ima eno oglišče V na vrhu in n v n-kotni osnovni ploskvi, torej

$$p = n + 1$$

Ima n robov, ki vežejo vsako oglišče osnovne ploskve z vrhom V, in še n robov v osnovni ploskvi:

$$q = 2n$$



Slika 2: n-strana piramida

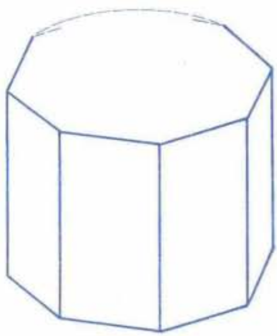
Razen osnovne ploskve ima n-strana piramida še n stranskih ploskev: eno za vsako stranico osnovne ploskve. Zato dobimo $p - q + r = (n + 1) - (2n) + (n + 1) = 2$, in vidimo, da Eulerjev obrazec res velja.

2. Zgled: *n-strana prizma.*
n-strana prizma ima

$p = 2n$ oglišč,
$q = 3n$ robov in
$r = n + 2$ ploskev

(2 osnovni ploskvi in n stranskih ploskev)

$p - q + r = 2n - 3n + n + 2 = 2$


Slika 3: n-strana prizma

3. Zgled: Če v nekem telesu prisekamo oglišče, tako kot prikazuje slika 4, se veljavnost Eulerjevega obrazca ohranja:

Slika 4: Transformacija oglišča, v katerem se stika n robov.

Recimo, da ima prvotno telo p_0 oglišč, q_0 robov in r_0 ploskev, ter da Eulerjev obrazec velja, torej

$$p_0 - q_0 + r_0 = 2 \qquad (2)$$

Poglejmo, koliko oglišč, robov in ploskev ima naše novo telo. Eno oglišče smo odstranili, obenem smo dodali novo oglišče za vsak rob, ki je imel krajišče v starem oglišču. Vzemimo, da je bilo n takih robov, tako da je število oglišč zdaj:

$$p = p_0 + n - 1$$

Ko smo telo prisekali, smo dobili novo ploskev

$$r = r_0 + 1$$

ki je n-kotnik, zato imamo tudi n novih robov

$$q = q_0 + n$$

Če zdaj izračunamo:

$$\begin{aligned} p - q + r &= (p_0 + n - 1) - (q_0 + n) + (r_0 + 1) \\ &= p_0 - q_0 + r_0 + n - 1 - n + 1 \end{aligned}$$

in upoštevamo (2), dobimo

$$p - q + r = 2$$

Veljavnost Eulerjevega obrazca se res ohranja.

Vrnimo se spet k pravilnim telesom. n-strana piramida ($n \neq 3$) ni pravilno telo, saj ima za ploskve n-trikotnikov in en n-kotnik, pravilno telo pa ima vse ploskve *skladne*. To dejstvo nam pomaga dobiti zvezo med številom ploskev in številom robov. Recimo, da so vse ploskve n-kotniki ($n \geqq 3$) . Ker leži vsak rob na dveh mnogokotnikih, velja zveza:

$$2q = nr \qquad (3)$$

Podobno zvezo dobimo med številom oglišč p in številom robov q. V pravilnem telesu se mora v vsakem oglišču sekati enako mnogo, recimo d, mnogokotnikov. Pri tem takoj opazimo, da mora biti $d \geqq 3$. V vsakem oglišču se stika torej d robov, in ker ima vsak rob dve krajišči (oglišči), dobimo:

$$2q = dp \qquad (4)$$

Iz (3) in (4) dobimo:

$$r = 2q/n \ , \quad p = 2q/d \ , \quad n \geqq 3 \ , \quad d \geqq 3 \qquad (5)$$

Če vstavimo (5) v (1), dobimo:

$$2q/d - q + 2q/n = 2$$

oziroma

$$1/d + 1/n = 1/q + 1/2 \qquad (6)$$

Ker je $q > 0$, dobimo iz (6)

$$1/d + 1/n > 1/2 \qquad (7)$$

Ločimo dva primera:

a) $d \leqq n$. Tedaj je $1/n \leqq 1/d$ in (7) postane:

$$2/d \geqq 1/n + 1/d > 1/2$$

$$\Rightarrow d < 4 \Rightarrow \underline{d = 3}$$

b) $n \leqq d$. Tedaj je $1/d \leqq 1/n$ in (7) postane:

$$2/n \geqq 1/n + 1/d > 1/2$$

$$\Rightarrow n < 4 \Rightarrow \underline{n = 3}$$

Torej je bodisi n bodisi d enak 3. Vse možnosti prikazuje razpredelnica:

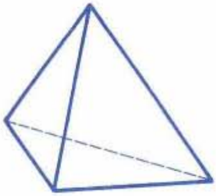
	n	d	$1/d+1/n$	$1/q$	q	r	p
1.	3	3	2/3	1/6	6	4	4
2.	3	4	7/12	1/12	12	8	6
3.	4	3	7/12	1/12	12	6	8
4.	3	5	8/15	1/30	30	20	12
5.	5	3	8/15	1/30	30	12	20

Drugih možnosti ni, saj je pri $n = 3$ in $d = 6$ že $1/q = 0$, kar je seveda nemogoče!

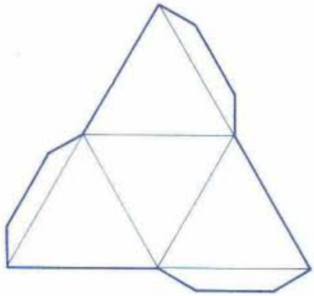
Ostaja torej *največ* 5 pravilnih teles - res malo! Da pa jih je res 5, pokažemo s konstrukcijo!

1. pravilno telo - tetraeder

Pri $n = 3$ in $d = 3$ je telo sestavljeno iz trikotnikov, in v vsakem oglišču se stikajo tri ploskve. Ima 6 robov ($q = 6$), 4 oglišča ($p = 4$) in 4 ploskve ($r = 4$). Telo prikazuje slika 5. Imenuje se *tetraeder*. Model si lahko napravimo iz papirja. Iz debelega papirja izrežemo lik na sliki 6. Papir prepognemo vzdolž črtkastih črt in zlepimo tako, da nanesemo lepilo na trapeze.



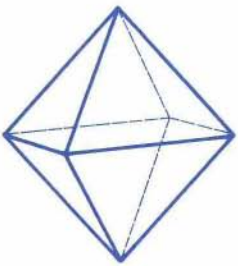
Slika 5: Tetraeder



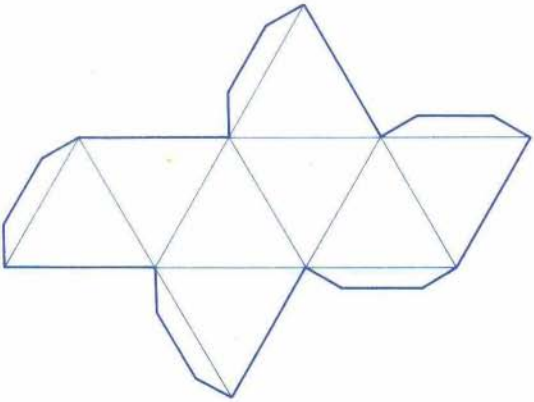
Slika 6: Papirnati model tetraedra

2. pravilno telo - oktaeder

Pri $n = 3$ in $d = 4$ dobimo telo, sestavljeno iz trikotnikov. Po štirje se stikajo v enem oglišču. Ima 12 robov, 6 oglišč in 8 ploskev. Imenuje se *oktaeder*. Načrt za papirnat model oktaedra kaže slika 8.



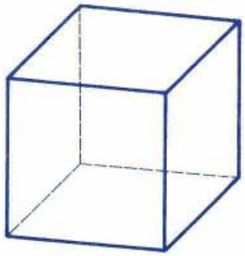
Slika 7: Oktaeder



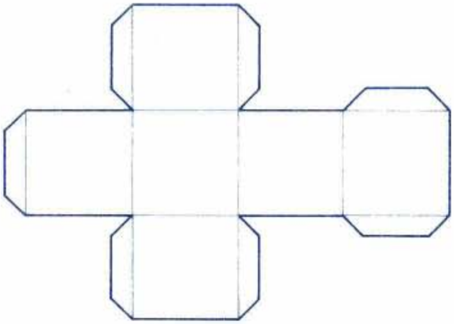
Slika 8: Papirnati model oktaedra

3. pravilno telo - heksaeder

$n = 4$ pomeni, da imamo opravka s četverokotniki in iz $d = 3$ vidimo, da se v vsakem oglišču stikajo trije četverokotniki. Telo, ki ga dobro poznamo, ima 12 robov, 8 oglišč in 6 ploskev. Imenuje se *heksaeder* ali *kocka*. Načrt je narisan na sliki 10.



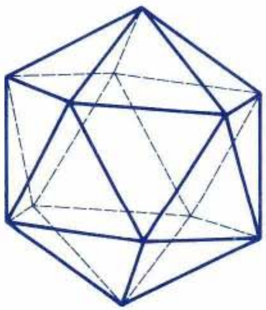
Slika 9: Kocka ali heksaeder



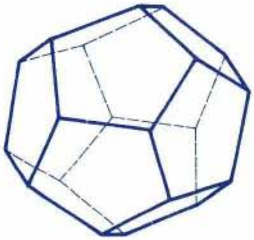
Slika 10: Papirnati model kocke

4. pravilno telo - ikozaeder

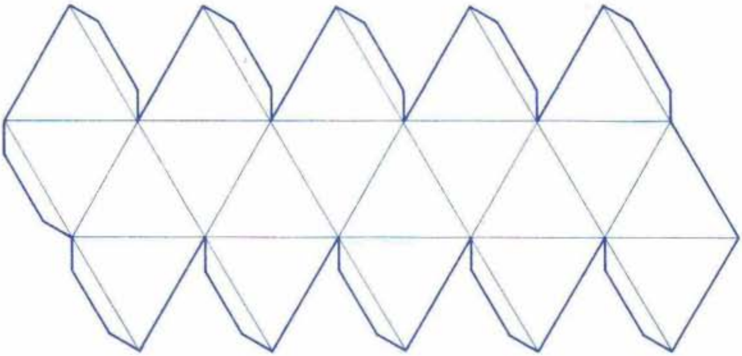
$n = 3$ nam pove, da je telo sestavljeno iz trikotnikov. Ker je $d = 5$, se jih v vsakem oglišču stika po 5. Skupaj ima 30 robov, 12 oglišč in 20 ploskev. Imenuje se *ikozaeder*. Načrt prikazuje slika 12.



Slika 11: Ikozaeder



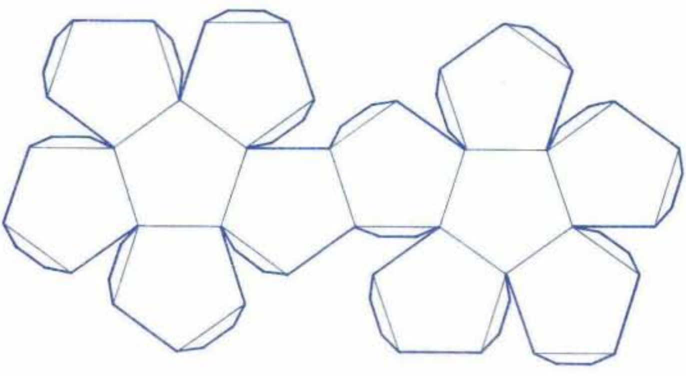
Slika 13: Dodekaeder



Slika 12: Papirnati model ikozaedra

5. pravilno telo - dodekaeder

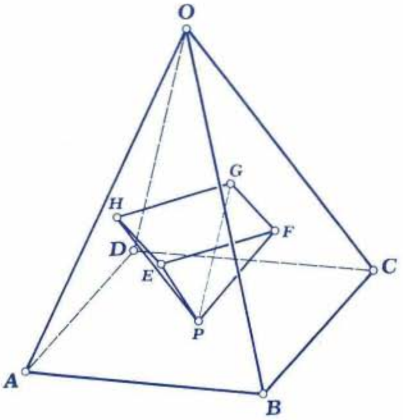
Ker je $n = 5$, je telo sestavljeno iz petkotnikov; v vsakem oglišču se stikajo 3 ploskve. Telo se imenuje *dodekaeder*. Načrt pa kaže slika 14.



Slika 14: Papirnati model dodekaedra

Tako smo videli, da res obstaja natanko pet pravilnih teles.

Naloga 1. Vzemimo 4-strano piramido, sestavljeno iz enega kvadrata in štirih enakostraničnih trikotnikov. V središčih (težiščih) ploskev piramide *OABCD* (Slika 15) postavimo oglišča novega telesa *PEFGH*. Dve oglišči novega telesa združimo z robom, če ležita v sosednjih ploskvah starega telesa.



H središče ΔAOD
E središče ΔAOB
F središče ΔBOC
G središče ΔCOD
P središče *ABCD*

Slika 15: 4-strana piramida *OABCD* z včrtano piramido *PEFGH*

Vprašanji: (1) Ali je novo telo podobno prvotnemu?
(2) Izračunaj razmerje prostornin teh dveh teles!

Naloga 2. Na enak način kot v nalogi 1 dobimo nova telesa iz naših pravilnih teles - to se pravi, oglišča novega telesa so središča ploskev starega. Dve oglišči združimo, če ležita v sosednjih ploskvah starega telesa. Kakšna so ta telesa?

John Shawe Taylor

MATEMATIKA

FIZIKA

NAMIZNA AVTOMOBILSKA DIRKA

Ogledali si bomo zanimivo igro za več igralcev. Vzemimo papir z nizkim karom (najmanj format A4) in narišimo na njem avtomobilsko stezo poljubne oblike, start in cilj (lahko sta skupaj) pa narišimo kot ravni črti. Z žrebom določimo vrstni red avtomobilov (tekmovalcev) in razdelimo startna mesta. Nato se začne dirka in prvi avto se požene naprej. Zmaga avto, ki prvi prevozi ciljno črto.

Kako vozimo? Osnovna enota poti naj bo stranica kvadrata, avtomobili pa se gibljejo (skačejo) po križiščih mreže. Vsak igralec, ki je na vrsti, mora premakniti svoje vozilo po naslednjih pravilih:

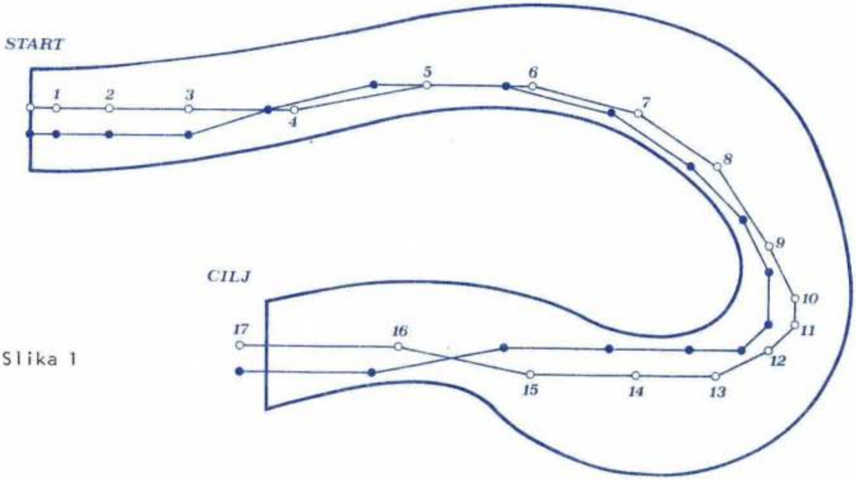
1) Hitrost se lahko spremeni za 1, 0 ali -1 enoto na potezo v obeh pravokotnih smereh. S tem smo definirali največji pospešek in največje zaviranje (negativni pospešek) vseh avtomobilov.

2) Noben avto ne more priti na mesto, kjer se že nahaja drug avto.

3) Avto, ki ga zanese s proge (to se navadno zgodi zaradi prepoznega zaviranja), ne more več voziti. Daljica, ki veže dva zaporedna položaja avtomobila, mora v celoti ležati znotraj proge.

Poglobimo se še malo v tehniko vožnje. Pot, hitrost in pospešek so sestavljeni iz dveh delov, namreč iz komponente v smeri sever-zahod (abscisa) in komponente v smeri sever-jug (ordinata).

Hitrost se lahko v vsaki potezi poveča za enoto (pospešek 1), ostane ista (pospešek 0) ali pa se za enoto zmanjša (pospešek -1). To seveda velja za obe komponenti, saj drugače ne bi mogli voziti v ovinkih. Če se je na primer avtomobil v prejšnji potezi premaknil za 3 enote proti vzhodu in 1 enoto proti severu, se sme sedaj premakniti za 2, 3 ali 4 enote proti vzhodu in za 0, 1 ali 2 enoti proti severu. Oglejmo si to še na sliki:



Slika 1

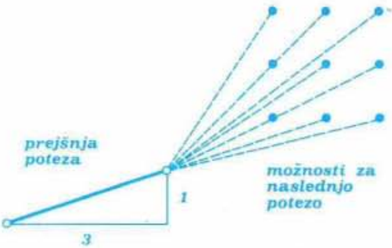
Važen element dirke je seveda zaviranje in je zaradi tega vožnja v ovinkih precej zapletena. K hitrosti pa najbolj prispeva vožnja tesno ob notranjem robu ovinka. Odveč je pripomba, da vozila na začetku dirke mirujejo.

Vso dirko si bomo označevali s pisali različnih barv, vse položaje istega avtomobila pa bomo sproti povezovali z daljicami. Te daljice nam bodo na koncu tekmovanja lepo prikazale poti avtomobilov, ki so zelo podobne pravim.

Pa si oglejmo še primer manjše tekme dveh avtomobilov, prvemu recimo ○ , drugemu pa ● .

Prvi avto ima nekaj prednosti pred ostalimi, kar ni za dirkače formule ena nič novega.

Dirke zelo lepo ilustrirajo gibanje vozil, še posebej pa fizikalne pojme, kot so pot, hitrost in pospešek. Kaj pa čas, boste vprašali. V gibanju vendar ne gre brez časa. To bomo takoj uredili. Recimo, da naredi vsak igralec eno potezo na minuto. Zamenjajmo povsod "na potezo" z "na minuto", pa so pravilne enote tu.



Slika 2

Pa veliko veselja z igro!

Roman Rajko

VARČEVANJE IN FIZIKA

Ljubljanska banka je ob dnevu varčevanja izdala lepo ilustrirano brošuro 100 + 1 o varčevanju z energijo v domačem okolju. V brošuri je veliko fizikalnih rebusov, ob katerih se lahko kaj naučimo. Za zgled:

Avtor se sprašuje: "Zakaj so žarnice na nitko vroče" in odgovarja: "Zato, ker samo 6 % do 10 % porabljene električne energije pretvorijo v svetlobo. Če s senčilom zasenčimo žarnico, je seveda izkoristek pod 5 % !"

Bralce Preseka pozivamo, da skušajo odgovoriti na vprašanje in morda razbrati, kaj nam je hotel avtor brošure povedati v svojem odgovoru.

Pazljivo preberite brošuro in nam pišite o svojih odkritjih. Bralca, ki bo pri tem najuspešnejši, bomo nagradili.

Marjan Hribar

SKAKALNICA V PLANICI

Smučarska skakalnica v Planici je svetovnega pomena za razvoj smučarskih poletov. Njena konstrukcija pa zasluži pozornost tudi z matematičnega in fizikalnega vidika, ker so na njenem vzdolžnem profilu nad vse ugodno rešeni problemi prehoda med odseki z različnimi krivinami.

Na krožnici (sl.1) z radijem r je krivina k v vsaki točki enaka recipročni vrednosti radija:

$$k = \frac{1}{r}$$

Pri enakomernem kroženju telesa po krožnici deluje nanj sila f, ki pri dani masi in pri dani hitrosti kaže proti središču kroga in je obratno sorazmerna radiju kroga:

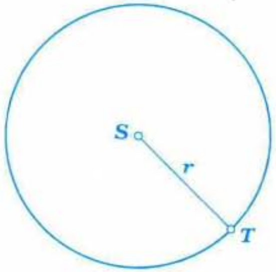
$$F = \frac{c}{r}$$

oziroma premo sorazmerna krivini krožnice:

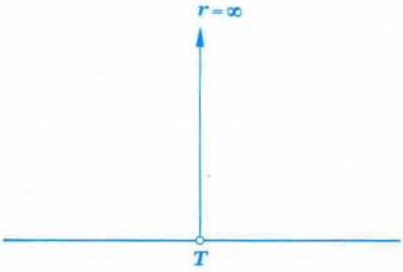
$$F = ck$$

Pri tem je c sorazmernostni faktor, ki je določen z maso in hitrostjo telesa.

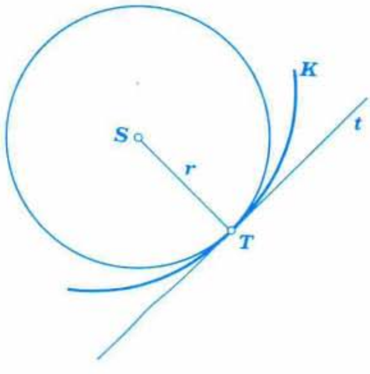
Premico (sl.2) imamo lahko za



Sl. 1 Krivina krožnice: $k = 1/r$



Sl. 2 Krivina premice: $k = 0$



Sl. 3 Krivinski krog

krožnico z neskončno velikim radijem; zato je krivina k v vsaki njeni točki enaka 0, pa tudi sila F na telo, ki se giblje po premici, je enaka 0.

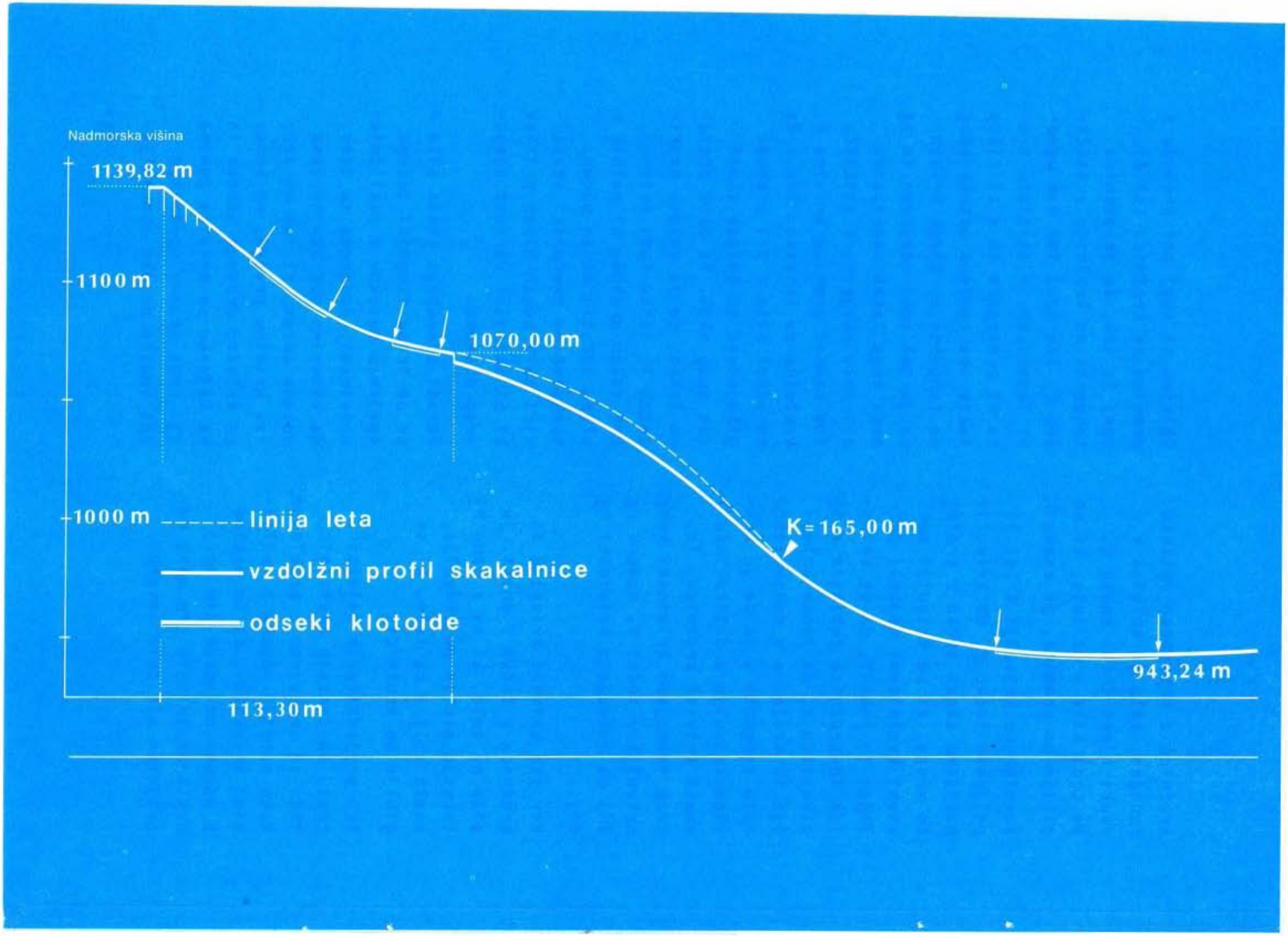
Vzemimo na krivulji K (sl.3) poljubno točko T. Ob krivulji narišemo skozi točko T krožnico kroga, ki se krivulji med vsemi krožnicami najbolj prilega; to pomeni, da se krivulja in krožnica dotikata v dotikališču T, da imata krivulja in krožnica v dotikališču isto tangento t in da je krivina krivulje v dotikališču T enaka krivini krožnice. Ta krog imenujemo krivinski krog krivulje v točki T, njegov radij pa imenujemo krivinski radij.

Ker sta krivini krivulje in krožnice v točki T enaki, je sila na telo, ki se z dano hitrostjo giblje po krivulji, enaka sili F na telo, ki se giblje po krožnici.

Pri projektiranju železnic, cest, smučarskih skakalnic itd. se srečujemo s problemom, kako spojiti odseke z različnimi krivinami, da bo prehod z odseka na odsek čim bolj usklajen in zato čim manj neprijeten ali celo nevaren.

Oglejmo si spoj pri prehodu s premice na krožnico (sl.4); spoj je tak, da je premica tangenta na krožnico v stičišču T. Tak spoj ima dve ugodni lastnosti: v stičišču trasa ni pretrgana in v stičišču imata oba spojena odseka skupno tangento t. Glede krivin pa je tak spoj neugoden in zaradi tega lahko neprijeten ali celo nevaren. V stičišču ima namreč premica krivino 0, krožnica pa krivino $1/r$. Zato utrpi sila F pri prehodu gibajočega se telesa skozi tak spoj skok. Ta skok postane lahko, če je velik, neprijeten in lahko tudi nevaren. Pri takem prehodu bi potnik v vlaku začutil močan sunek, skakalec na smučarski skakalnici pa v nogah hipen pritisk, ki bi zmanjšal varnost njegovega doskoka.

Zaradi nenadnega skoka sile F se je treba izogniti takemu spajanju odsekov z različnimi krivinami. Izognemo se tako, da vstavimo med oba spojena odseka odsek, ki ima na začetku krivino prvega, na koncu pa krivino drugega odseka in na katerem se krivina zvezno tj. brez skokov spreminja. Kot vmesne odseke uporablja-



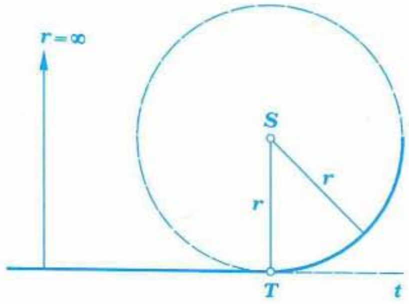
Nadmorska višina
1139,82 m
1100 m
1070,00 m
1000 m
linija leta
vzdolžni profil skakalnice
odseki klotoide
K=165,00 m
943,24 m
113,30 m

mo v ta namen razne krivulje; pri smučarskih skakalnicah uporabljajo v ta namen zlasti klotoido.

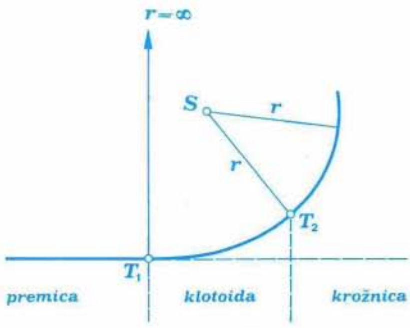
Klotoido (sl.5) odlikuje lastnost, da se njena krivina od točke do točke zvezno spreminja. V prevojni točki P ima klotoida krivino 0; gredoč od prevojne točke proti desni narašča krivina zvezno; zato se zavija klotoida spiralno proti asimptotični točki A_1. Gredoč proti levi od prevojne točke pa se klotoida spiralno zavija proti asimptotični točki A_2.

Zaradi teh odlik so klotoido uporabili konstruktorji planiške skakalnice pri določevanju njenega vzdolžnega profila (sl.7). V naletu je zgornji premočrtni odsek ($r = \infty$) povezan z lokom klotoide s srednjim krožnim odsekom ($r = 120$ m); ta krožni lok pa je nato povezan z lokom klotoide z odskočno mizo ($r = \infty$). V izteku je zgornji krožni lok ($r = 140$ m) povezan z lokom klotoide z ravnim odsekom ($r = \infty$).

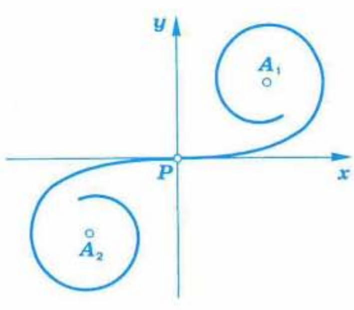
Zaradi te konstrukcije vzdolžnega profila je skakalnica zgrajena tako, da se sila tal,



Sl. 4 Spoj premice in krožnice



Sl. 5 Spoj premice s krožnico z vmesnim lokom klotoide



Sl. 6 Klotoida

ki učinkuje na skakalca, spreminja zvezno, tj. brez skokov; s tem pa je izpolnjen važen fizikalni pogoj za varnost poletov.

Alojzij Vadnal

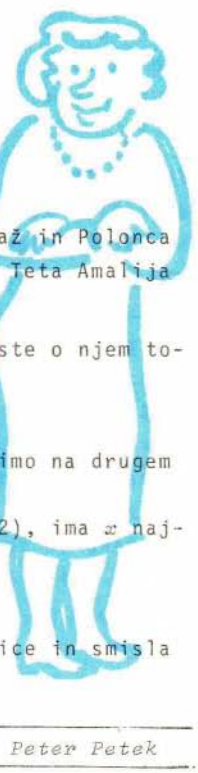
Literatura

|1| V. Šerbec, A. Novak: Planica 1934 - 1969. Komisija za tisk in propagando pri Organizacijskem komiteju Planica, Ljubljana 1969.

|2| D. Ulaga, S. Urek, M. Rožman: Planica. Mladinska knjiga, Ljubljana 1979.

|3| A.A. Savelov: Ravninske krivulje. Moderna matematika, Zagreb 1979.

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES



TETA AMALIJA SE GRE DETEKTIVA

Nekega zimskega popoldneva so sedeli Jožica, Tomaž in Polonca pri teti Amaliji, pili čaj in grizljali piškote. Teta Amalija jim je zastavila tole uganko:

"Poiščite mi neznanca, pozitiven ulomek x, če veste o njem tole:

1) Kvadrat tega ulomka leži med 7 in 8,
2) če število x zapišemo v decimalni obliki, dobimo na drugem mestu za decimalno vejico enico,
3) od vseh ulomkov, ki ustrezajo pogojema 1) in 2), ima x najmanjšo vsoto števca in imenovalca."

"Tole pa ne bo lahko", je menil Tomaž.

"Oh, kar poskusite, če imate kaj detektivske žilice in smisla za logiko, boste neznanca hitro ujeli."

Peter Petek

NALOGE

MLADIM MATEMATIKOM - VEGOVCEM

Leto je naokrog in spet bo prek 15000 osnovnošolcev merilo matematično znanje na šolskih in občinskih tekmovanjih in na republiškem tekmovanju za Vegova priznanja. Izkušnje kažejo, da le redno in vztrajno delo rodi sadove. Ne omagaj! Poskusi samostojno rešiti naslednje naloge:

Za učence od 5.r. do 8.r.

1. Koliko je šestmestnih števil, ki imajo vsoto cifer enako 3?

2. Iz cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 sestavi pet dvomestnih števil tako, da bo produkt teh števil-dvojic največji. Katera števila so to? (Vsako cifro smeš upoštevati le enkrat).

3. Pri teh dveh nalogah ne bomo uporabljali matematičnih znakov za računske operacije.

   a) S tremi dvojkami zapišemo števila:

      $222 \quad 22^2 \quad 2^{2^2} \quad 2^{22}$

      Katero število je največje?

   b) S štirimi enojkami zapiši največje število.

4. Dokaži, da je vsota vseh naravnih števil od 1 do 90 deljiva s 7 !

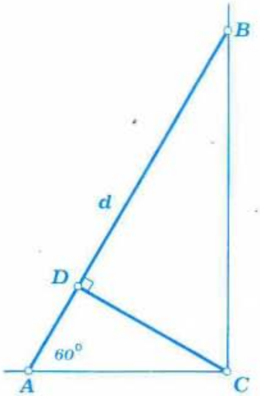
5. Tri zaporedna liha naravna števila so merska števila stranic trikotnika z obsegom 33. Poišči vse take trikotnike.

6. Iz vseh naravnih števil od 1 do 30 oblikuj po pet skupin števil tako, da bodo vsote števil v vsaki skupini enake.

7. Dano je zaporedje števil: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Ali je število 45 v tem zaporedju?

8. Koliko premic je določenih s petimi točkami? Nariši vse možnosti!

9. Na pravokotno stoječi zid postavimo lestev z dolžino d = 6 m pod kotom 60^0. Koliko metrov je pravokotna podpora CD oddaljena od stojišča lestve A (glej sliko)?



Za učence 6.r.

10. Kaj je večje $\frac{3141}{7777}$ ali $\frac{31413141}{77777777}$?

11. Za katere vrednosti x, $x \in \mathbb{N}$ veljata neenakosti:

$$\frac{2}{7} < \frac{x}{8} < \frac{4}{7}$$

12. Če je n naravno število, potem je $\frac{n(n-1)}{2}$ celo število. Dokaži!

13. Določi naravna števila n tako, da bo

$$n.(n + 1).(2n + 1) = 84$$

14. Koti nekega 4-kotnika so dani v stopinajh po vrsti z naslednjimi izrazi: x, $x + 20$, $x + 30$, $x + 50$. Poišči x in dokaži, da je štirikotnik trapez.

15. V paralelogramu $ABCD$ leži v notranjosti poljubna točka O. Dokaži, da je vsota ploščin trikotnikov AOB in COD enaka vsoti ploščin trikotnikov BOC in AOD.

16. Preveri na primerih trditev: če števili m in n $(m, n \in N)$ nista deljivi s 3, potem je številčna vrednost $m^2 + n^2 + 1$ deljiva s 3! Poskusi trditev dokazati!

17. Dana je točka T in poljuben kot $\sphericalangle AVB$. Načrtaj premico p skozi točko T, ki seče kraka v točkah M in N tako, da bo $MV = NV$.

18. V perutninski farmi so ugotovili, da poprečno ena kokoš in pol znese v enem dnevu in pol eno in pol jajca. Koliko bi po danih podatkih znesle 3 kokoši v 5 dneh?

19. V trikotniku $\triangle ABC$ je notranji kot ob enem oglišču enak zunanjemu. Razlika ostalih dveh notranjih kotov je 20°. Koliko merijo notranji koti trikotnika?

Za učence od 7.r. in 8.r.

20. Naj bo a celo število.
Ali lahko trdimo:
   (1) da je a pozitivno število?
   (2) da je $a + 2$ pozitivno število?
   (3) da je $\frac{a(a+1)}{2}$ celo število?
   (4) da je $2a + 1$ neparno število?
   (5) da je $3a > a$?
   (6) da je $2a - 1 < 2a$?

21. Poišči velikostni odnos ($=$, $<$, $>$) med vrednostmi izrazov za posamezno izbiro realnih števil a, b, n in x:
   a) $2a$ in a^2
   b) a^3 in $-a^3$
   c) $a^3-(-a)^3$ in $a^3-(-a^3)$
   d) $(-0,2)^2$ in $0,2^3$
   e) $x(x-2)$ in $(x-1)^2$
   f) ab in $a + b$
   g) $a - b$ in $a : b$

22. Če je n naravno število, potem je $\frac{n^3 - n}{6}$ naravno število. Dokaži!

23. Določi vsoto:

$$\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)}, \text{ kjer je } n \geq 1 \text{ !}$$

24. Poenostavi ulomek:

$$\frac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^n}}$$

25. a) Za katere vrednosti naravnega števila k $(k \geq 3)$ je izraz: $(-5)^k.(-4)^{k-1}.(-3)^{k-2}$ pozitiven in za katere negativen?

b) Za katere vrednosti k $(k \in N)$ je vrednost izraza: $(-5)^{k-1}.(-1)^k : (-2)^{k+3}$ pozitivna in za katere negativna?

26. Izračunaj številčno vrednost funkcije

$$f(x) = x^2 - 3x - 5, \quad \text{za} \quad x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

27. Težišča vseh pravokotnih trikotnikov, ki imajo skupno hipotezo, pripadajo isti krožnici. Pokaži to z risbo in določi polmer te krožnice v odnosu do hipotenuze.

28. Dokaži, da je za poljubna cela števila a, b in c izraz

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$$

vedno deljivo s 4!

29. Dokaži, da je vsota

$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ celo število, če je n celo število!

Pavle Zajc

NOVICE

LETNA MATEMATIČNA ŠOLA, BLED-80

Letos je bila na Bledu prvič letna šola za mlade matematike. Trajala je 10 dni - od 31.6. do 9.7.1980. Njen osnovni namen je bil, da učenec osnovnih šol, ki kaže nadarjenost za matematiko, še bolj razširi obzorje in poglobi znanje.

V Plemljevem domu na Bledu se nas je zbralo šestnajst osmošolcev, izbranih na podlagi rezultatov z republiškega tekmovanja. Presenetljivo pa je, da smo bila med temi šestnajstimi le tri dekleta: Darja Grah, Jasmina Kožar in Helena Prelec. Fante pa so zastopali: Samo Balan, Aram Karalić, Samo Korpar, Janez Kovač, Matjaž Kovačec, Robert Petkovšek, Vlado Robar, Uroš Seljak, Dejan Šabjan, Jure Škarabot, Edo Wallner, Aleksander Zidanšek in Miloš Žefran.

"Krotil" nas je tovariš Dušan Grešak, s katerim smo se odlično razumeli.

Ob prihodu nas je najbolj razveselila novica, da si bomo zajtrke pripravljali sami. Resnici na ljubo, posebno raznovrstni niso bili. Za kosilo smo imeli poskrbljeno v vrtcu, večerjali pa smo v neki gostilni. Nad hrano se res ne moremo pritoževati - bila je izvrstna.

Glavni namen letne šole so bila predavanja. Vsak dan (razen nedelje) smo od 9 - 12^{30} poslušali predavatelje. Predavali so nam profesorji: Tomaž Pisanski, Marko Petkovšek, Marjan Vagaja, Angela Blaznik, Ivan Pucelj, Vladimir Batagelj in Niko Prijatelj.

Še posebej nas je pritegnil prof. Niko Prijatelj s temo o končnosti in neskončnosti. Ostale teme so bile: Reševanje problemov, Indukcije, Uporaba indukcije v binomskem izreku, Geometrija, Algebrske strukture, Grafi in Eulerjeva formula za poliedre. Pohvaliti pa moram tudi tov. Dušana Grešaka, ki nam je popolnoma nepripravljen predaval zadnji dan o kongruenci, ko naj bi bilo tekmovanje. Tekmovanja pa na našo veliko srečo ni bilo, ker je bil tovariš, ki naj bi ga vodil, odsoten. (še nekaj: v zmoti je tisti, ki misli, da smo si želeli tekmovanja - prav presenečena sem bila, ko sem ugotovila, da nas je veliko, ki tekmovanj ne maramo preveč.)

Seveda smo imeli popoldneve proste, ki smo jih, če se nismo kratkočasili z "nalogami", zapolnili z izleti: šli smo na Blejski grad, v Vintgar, veslali tudi na otok, v nedeljo pa smo šli na celodnevni izlet k slapu Savice, k Zlatorogu, potem pa ob Bohinjskem jezeru (7 km) do postaje, od koder smo se vrnili v dom. Izkazalo pa se je, da so v krčmi, kjer smo jedli, pravi Gorenjci: za 8 starih tisočakov smo dobili porcijo s 7 piškavimi čevapčiči.

No ja, to (in slabo vreme) pa je bila tudi edina "črna pika", drugače je bilo v redu. Drug od drugega smo se naučili veliko novega, sklenili nova poznanstva, na koncu pa smo se razkropili po celi Sloveniji - vsak na svoj dom.

Helena Prelec

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

BRAT IN SESTRA

Brat in sestra sta skupaj stara 28 let (24·5 let). Brat je dvakrat starejši, kot je bila sestra, ko je bil on toliko star, kot je zdaj sestra. Koliko je star vsak?

Franc Oblak

PRESEK NA KONGRESU

Od 6. do 11. oktobra lani je bil v Bečećih pri Budvi (Črna gora) 8. Kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Ob referatih, diskusijah in pogovorih je bilo nekaj časa posvečeno tudi *Preseku*. Naš sodelavec D. Milošević je imel v sekciji pouk matematike kratek pregledni referat o jugoslovanskih mladinskih časopisih. Tudi tu smo se Slovenci lepo predstavili.

Prof.dr. Sibe Mardešič (Zagreb) si ogleduje slovenske publikacije, razstavljene v času kongresa.

V času kongresa je bila v sejemskih prostorih v Budvi razstava jugoslovanskih knjig in revij ter učnih pripomočkov. Slovenske založbe je s svojimi in še z nekaterimi drugimi knjigami zastopalo le naše društvo. čeprav se je skoraj polovica poslanih paketov na pošti zakasnila za več dni, je bilo pri našem prostoru nenavadno veliko obiskovalcev. V začetku smo se čudili, kasneje pa menili, da obiskovalci drugo jugoslovansko literaturo že poznajo, slovenske pa še ne.

"Bolj za šalo kot zares" smo v Črno goro pripeljali 2000 starejših številk Preseka, ki so jih obiskovalci lahko dobili brezplačno. Z zanimanjem so segali po njem, čeprav so bile številke iz različnih letnikov. Še prav posebno pa je kup Presekov hitro kopnel v večernih urah v hotelskih prostorih, ko pri reviji nismo imeli "čuvaja". Ali to pomeni 1000 novih naročnikov?

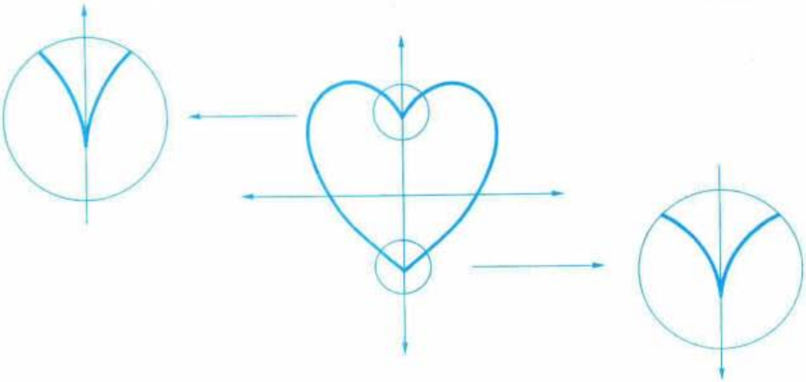
Ciril Velkovrh

PISMA BRALCEV

DRAGI PRESEK!

Z zanimanjem sem prebral članek o enačbi srca v zadnji številki. Všeč mi je bilo, da smo bralci na primeru videli, kako se "skuhajo" krivulje po naročilu, torej take z vnaprej predpisanimi lastnostmi. Vendar moram povedati, da graf, s katerim ste nam "postregli" na ovitku, ni čisto v skladu z receptom v članku. V okolici točke $x = 0$ se da funkcija opisati približno kot $y \approx (4x^2)^{1/3}/2 \pm 1$, se pravi, da sta obe srčni konici zašiljeni in ne zlomljeni. V resnici je samo z algebrajskimi operacijami zelo težko pripraviti grafe k zlomu, če se ne zatečemo k absolutni vrednosti ali k funkcijam, ki jih zložimo po odsekih. Dotlej pa se bomo morali zadovoljiti z nekoliko bolj kičastimi zašiljenimi srčki.

Alojz Kodre



Dragi tovariš Kodre,

Najlepša hvala za pozorno branje Preseka. Vaše pismo je eno redkih takih pisem, ki si jih v uredniškem odboru iz srca želimo. Želimo si pisem, ki bi opozarjala na pomanjkljivosti in skrite zanimivosti, ki jih je Presek že objavil, pa smo jih mi v uredniškem odboru, avtorji in drugi bralci spregledali.

Dovolite mi torej, tovariš Kodre, da v vašem imenu zastavim našim bralcem nalogo:

NAPIŠI ENAČBO NEZAŠILJENEGA SRCA!

Enačbo in sliko, ki tej enačbi ustreza, pošljite čimprej na naš naslov. Najlepša srca bodo nagrajena!

Tomaž Pisanski

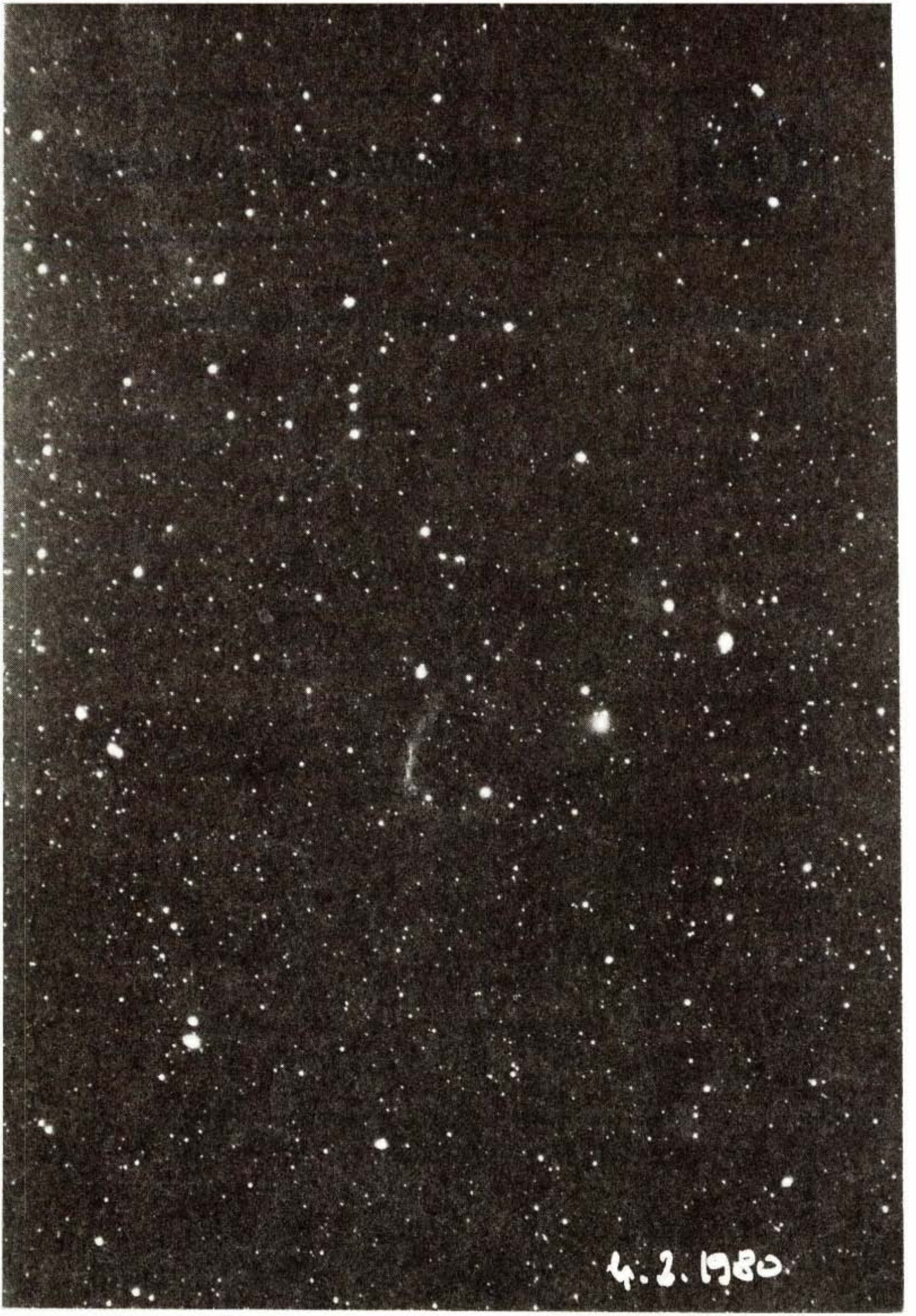
PREMISLI IN REŠI

KOMET BRADFIELD

Herman Mikuž in Bojan Dintinjana sta fotografirala komet Bradfield v dveh zaporednih nočeh /3.2.1980 in 4.2.1980/. Njuni fotografiji sta na slikah 1 in 2. Ugotovi, kateri deli neba so na obeh slikah in nato na podlagi tega določi lego kometa 3.2. na sliki, ki je bila posneta 4.2. (Sliki sta na naslednjih dveh straneh)

Andrej Čadež


3.2.1980 – 19h 06m – 19h 19m


4. 2. 1980

TEKMOVANJA - NALOGE

MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE V MERSCH-U (LUXEMBOURG)

Tega leta matematične olimpiade ni bilo in to zaradi finančnih težav. Mongolija je namreč zadnji trenutek tekmovanje odpovedala. In ker nobena druga država ni zagotovila sredstev, so nekatere države organizirale več vzporednih mednarodnih tekmovanj. Jugoslovani smo odšli na tekmovanje v Luxembourg.

Našo ekipo je sestavljajo 7 članov, saj se Boban Veličković tekmovanja iz osebnih razlogov ni udeležil. Izbrani so bili še: iz 3. razreda Nina Ležaić iz Beograda, Nebojša Eler iz Sarajeva in Igor Aurér iz Zagreba, iz 4. razreda pa Tanović Predrag in Miloš Arsenović iz Beograda, Gordan Savin iz Zagreba in Matoh Leon iz Novega mesta.

Tekmovanje je bilo med 9. in 15. julijem. Zaradi finančnih težav nismo imeli nobenih skupnih priprav, temveč smo dobili domov nekaj problemov, ki smo jih reševali.

Potovali smo z vlakom tako, da smo vstopali pač v najbližjem mestu, skozi katerega je vlak peljal. Vozili smo se cel dan in prišli v Mersch vsi utrujeni in lačni. V internatu, kjer smo stanovali, smo se najprej pošteno najedli in naspali. Ko so drugega dne prispele tudi ostale ekipe, smo ugotovili, da je bilo vsega skupaj 6 držav s skupno 34 tekmovalci.

Naslednja dva dneva smo reševali naloge. Vsak dan smo imeli 4 ure časa za 3 naloge. Kriterij težavnosti je bil ravno tak kot na pravih olimpiadah.

Ko smo se končno odkrižali dolžnosti, smo začeli hoditi na izlete. Tu gre velika hvala organizatorju, enemu samemu človeku, ki je pravzaprav iz nič naredil vse. To je bil Lucien Kieffer. Po njegovi zaslugi smo si ogledali sejne dvorane EGS in bili povabljeni tudi na slavnostno večerjo. Možak je imel namreč res odlične zveze. Ker nam je poleg vsega še vedno ostalo tudi mnogo prostega časa, smo ga porabili za nakupe v Luxembourgu, za družabne igre, kot so preferans, šah, pingpong in za seznanjanje s člani ostalih ekip.

Komisija je kmalu popravila naše izdelke in razglasili so rezultate. Jugoslovani smo se zelo dobro odrezali, saj smo osvojili 3 druge in 4 tretje nagrade. Drugo nagrado so dobili Nebojša Eler, Nina Ležaić in Leon Matoh, tretjo pa Tanović Predrag, Miloš Arsenović, Igor Aurer in Gordan Savin. Tudi ekipno smo bili z osvojenimi 202 točkami drugi za Angleži, ki so zbrali 208 točk, vendar so oni imeli tekmovalca več, zato smo se imeli mi za neuradne zmagovalce. Poleg Jugoslovanov in Angležev so sodelovali še Nizozemci, Luxembouržani, Belgijci in Francozi iz province Alzacije. Konkurenca je bila dokaj močna, saj so Angleži vedno med boljšimi, zato naših rezultatov nismo podcenjevali. In če povem še, da je bila podeljena le ena prva nagrada, sedem drugih in enajst tretjih, smo uspeha lahko res veseli.

Reševali smo naslednje naloge:

1. (6 točk)

   Poišči vse funkcije, ki preslikajo Q na Q, ki zadoščajo naslednjima pogojema:

   (i) $f(1) = 2$

   (ii) $f(xy) = f(x)f(y)-f(x+y)+1$

   za vse x, y iz Q

   (Q je množica vseh racionalnih števil)!

2. (7 točk)

   A, B, C so tri kolinearne točke. B je med A in C. Na isti strani premice (A,C) so narisani trije polkrogi nad AB, BC in AC kot premeri. Skupna tangenta v B na prva dva polkroga seka tretjega v točki E. Druga skupna tangenta na pr va dva polkroga se dotika teh polkrogov v točkah U in V. Izračunaj razmerje *ploščina* ΔEUV : *ploščina* ΔEAC kot funkcijo polmerov $r_1 = \frac{AB}{2}$ in $r_2 = \frac{BC}{2}$!

3. (7 točk)

   Naj bo p praštevilo in u naravno število. Dokaži, da sta naslednji trditvi (i) in (ii) med seboj ekvivalentni:

   (i) Nobeden od binomskih koeficientov $\binom{u}{k}$ za $k = 0,1, \ldots, u$ ni deljiv s p.

   (ii) u lahko predstavimo v obliki $u = p^s q - 1$, kjer sta s in q naravni števili, $s \geq 0$, $0 < q < p$!

4. (6 točk)

   Dva kroga se dotikata (od zunaj ali od znotraj) v točki P. Tangenta na enega od krogov v točki A seka drugega v točkah B in C. Dokaži, da premica (P,A) razpolavlja kot BPC ali pa njegov komplementarni kot!

5. (7 točk)

   Deset igralcev je začelo igro z enako vsoto denarja. Po vrsti mečejo po pet kock. Vsakič, ko eden od igralcev vrže kocke, mora vsakemu ostalemu plačati $1/u$ (eno u-tino) tistega, kar tisti igralec tisti trenutek ima, kjer je u vsota vseh številk, ki jih pokažejo kocke. Vseh deset je zapovrstjo vrglo kocke. Pri desetem igralcu so kocke skupaj pokazale 12 in ko je igralec, ki je to vrgel, vsakemu izplačal eno dvanajstino tistega, kar je vsak imel, je vsak imel natančno isto vsoto denarja, s katero je igro začel. Če je mogoče, določi, koliko so pokazale kocke v vsakem od ostalih metov!

6. (7 točk)

   Določi vse pare (x,y) celih števil, ki zadoščajo enačbi:

   $$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8\ (x^2 + xy + y^2 + 1)$$

Leon Matoh

11. ZVEZNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Zvezno tekmovanje mladih matematikov je organiziral "Matematični list za učenike osnovnih škola, Beograd". Po sprejetem načelu, da naj bo tekmovanje vsako leto v drugi republiki oz. pokrajini, je bil gostitelj letošnjega tekmovanja Zrenjanin v AP Vojvodini. Tekmovanja se je udeležilo 34 sedmošolcev in 42 osmošolcev, ki so prišli iz vseh republik in AP Vojvodine; le AP Kosovo se doslej ni udeležila tekmovanja. Slovenski udeleženci - 3 sedmošolci in 7 osmošolcev - so prispeli v Zrenjanin 31. maja med zadnjimi. Nastanjeni so bili v hotelu "Vojvodina". Komisijo za izvedbo tekmovanja sestavlja po 1 predstavnik vsake republike oz. pokrajine in predstavnik Matematičkega lista. Vsak član je moral predložiti vsaj po 2 nalogi za vsak razred, komisija pa je izmed njih izbrala naslednje:

VII. razred:

1) Mati je šla po nakupih in je vzela s seboj denarne bone v vrednostih po 15 in po 20 din. Petino denarja je porabila za zajtrk, ki ga je plačala z 2 bonoma. Za polovico preostalega denarja je kupila živež in ga plačala s 3 boni. Kolika je skupna vrednost bonov, ki jih je vzela s seboj?

2) Števila a, b, c in d zadovoljujejo pogoj:
$$a^2 + d^2 - 2(ab + bc + cd - b^2 - c^2) = 0$$
Dokaži, da je $a = b = c = d$!

3) Dokaži, da je produkt dveh zaporednih naravnih števil deljiv z 12, če je večje izmed obeh števil kvadrat nekega naravnega števila!

4) Dan je poljuben štirikotnik $ABCD$. Naj bodo točke M, N, P, Q, R in S zaporedoma razpolovišča daljic AB, BC, CD, DA, AC in BD. Dokaži, da se premice (M,P), (N,Q) in (R,S) sekajo v isti točki!

5) Dana je premica p, izven nje na istem bregu premice točki A in B. Točka C je zrcalna slika točke A glede na premico

p. Sečišče premic p in (B,C) je točka D . Naj bo E poljubna točka premice p , različna od točke D . Dokaži, da je obseg trikotnika ABD manjši od obsega trikotnika ABE !

VIII. razred:

1) Dokaži, da je v skupini 6 učencev vsaj ena trojica učencev, od katerih vsak pozna ostala dva ali vsaj ena trojica učencev, od katerih nobeden ne pozna nobenega od ostalih dveh!

2) Dolžine stranic pravokotnega trikotnika so cela števila. Ali moreta biti dolžini obeh katet neparni števili? Obrazloži odgovor!

3) Učenec je potrošil določen znesek denarja za nakup torbe, knjige in peresa. Če bi bila torba 5 krat cenejša, pero 2 krat cenejše, a knjiga 2,5 krat cenejša od dejanske cene, bi bil strošek 160 din. Če bi bila torba 2 krat cenejša, pero 4 krat cenejše, a knjiga 3 krat cenejša, bi bil strošek 240 din. Koliko denarja skupno je potrošil učenec?

4) Pravokotni trikotnik ima kateti dolgi 60 cm in 80 cm. Naj bosta točki M in N razpolovišči katet. Krožnica s premerom MN seka hipotenuzo v točkah P in Q . Izračunaj dolžino daljice PQ !

5) Dan je stožec s polmerom osnovne ploskve 3 dm. Nad isto osnovno ploskvijo je konstruiran na isti strani valj, ki ima enako površino in enako prostornino kot stožec. Izračunaj površino in prostornino telesa, ki je presek valja in stožca!

Komisija je določila, da se prizna tekmovalcu za popolno rešitev 1., 4. in 5. naloge VII. razreda po 25 točk, 2. naloge VII. razreda 10 točk in 3. naloge VII. razreda 15 točk; za popolno rešitev vsake naloge VIII. razreda pa po 20 točk. Čas za reševanje nalog je bil 120 minut.

Tekmovalci so se zbrali v nedeljo, 1. junija v predavalnici Višje tehniške šole, kjer so jih pozdravili predstavnik gostitelja - zrenjaninske občinske skupščine, predstavnik Zveze društev MAFI-AS in urednik Matematičkega lista. Takoj nato so začeli reše vati naloge. Po končanem delu in po kosilu so domačini popeljali tekmovalce na ogled Zrenjanina ter naftnih polj in industrijskih naprav v občini, komisija pa je pregledala in ocenila izdelke.

Naši tekmovalci so kot ekipa zasedli 2. mesto; pred njimi je bila ekipa SR Srbije. Posamezniki pa so dosegli naslednje uspehe: V sedmem razredu je bila najuspešnejša tekmovalka Mirjana Spasojević iz Beograda, ki je dosegla vseh 100 točk. Od naših tekmovalcev je dobil Dušan Gorše iz Kočevja za doseženo 7. mesto tretjo nagrado, Urška Gašper iz Mislinje pa je bila za doseženo 14. mesto pohvaljena.

V osmem razredu je dosegla največ točk (98) Mirna Džamonja iz Sarajeva. Stanko Gruden iz Cerknega in Darja Grah iz Slovenj Gradca sta dobila za doseženo 5. oz. 7. mesto tretjo nagrado. Pohvaljena sta bila Matjaž Kovačec iz Maribora za 12. mesto in Vlado Robar iz Vidma pri Ptuju za 16. mesto.

Kot najboljša v svoji ekipi sta bila Dušan Gorše in Stanko Gruden povabljena v letno matematično šolo, ki jo na svoje stroške organizira v počitnicah Matematički list v bližini Beograda.

Stanislav Horvat

REŠITVE NALOG

PREMISLI IN REŠI VII/3 - rešitev

Pravilen odgovor je: največ deliteljev ima število 840, ki ima 32 deliteljev. Podroben potek reševanja bomo objavili v prihodnji številki.

Vladimir Batagelj

XXI. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV V MATEMATIKI - KUMROVEC 26. - 28. APRILA 1980 -

Letošnje 21. zvezno tekmovanje je potekalo od 26. do 28. aprila v Kumrovcu. Organiziralo ga je Društvo matematikov in fizikov SR Hrvatske. Tekmovanja so se udeležile ekipe vseh republik in pokrajin razen Kosova. Tekmovalcev je bilo skupno 87, in sicer 19 v 1., 25 v 2., 27 v 3. in 16 v 4. razredu. Slovensko ekipo je izbrala tekmovalna komisija na republiškem tekmovanju mladih matematikov 5. 4. letos v Kočevju. Sestavljalo jo je naslednjih 12 članov:

1. razred - Robert BAKULA, Ivan PEPELNJAK, oba I. gimnazija Ljubljana-Bežigrad, Mitja BENSA, Gimnazija Nova Gorica;

2. razred - Janez JAMNIK, Igor KUKAVICA, Mojca TAVČAR, vsi I. gimnazija Ljubljana-Bežigrad, Aleksander JURIŠIĆ, Gimnazija V. Janežič-Poljane;

3. razred - Uroš BOLTIN, Gimnazija I. Cankar, Ljubljana, Tomaž COKAN, I. Gimnazija Ljubljana-Bežigrad, Matjaž KALUŽA, Gimnazija M. Zidanšek, Maribor;

4. razred - Leon MATOH, Gimnazija Novo mesto, Maks ROMIH, I. gimnazija Ljubljana-Bežigrad.

Ivan Pepelnjak je žal tik pred odhodom zbolel, tako da ga je v ekipi zamenjal Aleksander Simonič iz 4. razreda, I. gimnazije Ljubljana-Bežigrad.

Tekmovalci so se zbrali v Ljubljani, kjer so imeli 24. in 25.4. pod vodstvom asistentov in študentov matematike krajše skupne priprave. V soboto, 26.4., so odpotovali v Zagreb in naprej v Tuheljske toplice nedaleč od Kumrovca, kjer so prebivali v dneh tekmovanja.

Tekmovalna komisija, v kateri je Slovenijo zastopal France Forstnerič, je začela z delom že v petek ob 18^h. Treba je bilo izbrati naloge in jih prevesti v jezike vseh tekmovalcev. Tekmova nje je bilo v dvorani prelepega Spominskega doma v Kumrovcu v nedeljo, 27.4. Ob 8. uri je tekmovalce pozdravil predsednik Zvezne komisije za mlade matematike mgr. Zdravko Kurnik iz Zagreba, nakar so imeli na voljo 4 ure za reševanje naslednjih nalog:

Prvi razred:

1. Cena svinčnika je celo število par. Skupna cena devetih svinčnikov je večja od 11 in manjša od 12 dinarjev, skupna cena trinajstih svinčnikov pa je večja od 15 in manjša od 16 dinarjev. Kolikšna je cena enega svinčnika?
2. Dana so števila 1, 12, 123, ..., 1234567890, 12345678901,... Vsako število dobimo iz predhodnega tako, da mu dopišemo naslednjo cifro, pri čemer cifri 0 sledi 1, za 1 pride 2, ..., za 9 pride 0 itd. Dokaži, da je vsaj eno od tako dobljenih števil deljivo s 1981!
3. Naj bo D točka na stranici BC danega trikotnika ABC, tako da je $2\overline{BD} = \overline{DC}$. Poišči vse ostale kote trikotnika, če je

   $\measuredangle ABC = 45^{o}$ in $\measuredangle ADC = 60^{o}$!
4. V mestu je 1980 križišč. V vsakem križišču se stikajo po tri ulice. Znano je, da poteka po mestu krožna avtobusna proga, ki gre skozi vsako križišče natanko enkrat. Mestni očetje so sklenili, da bodo ob vsaki ulici posadili drevje iste vrste: kostanj, brezo ali lipo. Dokaži, da to lahko storijo tako, da bo v vsakem križišču ena ulica zasajena s kostanjem, ena z brezo in ena z lipo!

Drugi razred:

1. Poišči vsa cela števila x, za katera je $x^2 + 3x + 24$ popoln kvadrat!
2. Rombu $ABCD$ je včrtan krog. Tangenta nanj seka stranici BC in CD v točkah M in N. Dokaži, da ploščina trikotnika AMN ni odvisna od izbire tangente!

3. Stranica kvadrata K je dolga 7. Ali je možno ta kvadrat prekriti z osmimi kvadrati stranice 3

a) pri pogoju, da so stranice teh kvadratov vzporedne ustreznim stranicam kvadrata K,

b) brez tega pogoja?

4. Za naravna števila $a_1, a_2, \ldots, a_{19}; b_1, b_2, \ldots, b_{21}$ velja

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{19} < 200$$
$$1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{21} < 200$$

Dokaži, da obstajajo med njimi štiri števila a_i, a_j, b_p, b_q, pri čemer je $a_i < a_j$, $b_p < b_q$, tako da velja

$$a_j - a_i = b_q - b_p \text{ !}$$

Tretji razred:

1. V množici naravnih števil reši enačbo

$$x^{5-x} = (6-x)^{1-x} \text{ !}$$

2. Danih je 19 daljic z dolžinami $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$, tako da je $1 = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{19} = 1980$. Dokaži, da lahko med njimi izberemo tri tako, da so to stranice nekega trikotnika!

3. Naj bo S presek diagonal četverokotnika $ABCD$. Če je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^0$ in $\measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^0$, poišči kot med diagonalama!

4. Poišči vse polinome oblike

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$a_i \in \{-1, 1\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \{1, 2, \ldots\})$$

tako da ima vsak od njih vse ničle realne!

Četrti razred:

1. Dana je elipsa z enačbo $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Dokaži, da točke, ki jih dobimo pri vrednostih $t = t_i$ $(i = 1,2,3,4)$, ležijo na isti krožnici natanko tedaj, ko je $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = k\pi$ za neko celo število k !

2. Naj bo S množica n realnih števil in T množica vsot po k različnih števil iz S ($n,k \in N$, $n \leq k$). Dokaži, da ima množica T vsaj $k(n-k)+1$ elementov!

3. Dano je naravno število a. Zaporedje $\{a_n\}$ tvorimo takole:

$$a_0 = a ;$$

če je $a_n = c_0 + 10c_1 + \ldots + 10^k c_k$ ($c_i \in N$, $0 \leq c_i < 10$; $i = 0,1,2,\ldots,k$), naj bo

$$a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + \ldots + 10^{k-1} c_k$$

Katera števila se pri danem a pojavijo v zaporedju $\{a_n\}$ neskončnokrat?

4. Naj bo $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, tako da sta $0,1 \in f([0,1])$ in da za vsak par števil $x,y \in [0,1]$ velja

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}$$

Dokaži, da obstaja natanko en $x \in [0,1]$, za katerega velja $f(x) = x$!

Ko je tekmovalna komisija pregledala in ocenila izdelke tekmovalcev, se je odločila za podelitev naslednjih nagrad in pohval:

1. razred -	I. nagrada:	Nikola Miljković, Srbija;
		Mladen Ďespić, BiH;
	III. nagrada:	Anamarija Juhas, Vojvodina;
		Vojislav Pantić, Srbija;
	pohvala:	Andreja Tepavčević, Vojvodina;
		Robert Bakula, Slovenija;
2. razred -	II. nagrada:	Ivica Bošnjak, Vojvodina;
	pohvala:	Dejan Danilović, Srbija;
		Pavle Pandžić, Hrvatska;
		Dragan Vukotić, Srbija;
		Hajrudin Fejzić, BiH;
3. razred -	I. nagrada:	Nebojša Elez, BiH;
	III. nagrada:	Nina Ležaić, Srbija;

pohvala: Vidan Govedarica, BiH;
Denis Gračanin, Hrvatska;
Igor Aurer, Hrvatska;
Predrag Habaš, Vojvodina;

4. razred - II. nagrada: *Leopold Matoh, Slovenija*;
Gordan Savin, Hrvatska;
Predrag Tanović, Srbija;
III. nagrada: Boban Veličković, Srbija;
pohvala: *Maks Romih, Slovenija*;
Miloš Arsenović, Srbija.

Bera slovenskih tekmovalcev (ena II. nagrada, dve pohvali) je skromnejša kot prejšnja leta. Upoštevati moramo, da je bilo nasploh podeljenih razmeroma malo nagrad, kar pomeni, da so bile naloge težke. Tako je npr. v II. razredu dosegel najboljši 73%, drugouvrščeni pa 58% možnih točk. V tretjem razredu pa so najboljši trije dosegli po vrsti 98%, 70% in 53% možnih točk. Leon Matoh iz Novega mesta je bil v četrtem razredu s 75% točk najboljši in se je tako uvrstil v jugoslovansko ekipo za mednarodno matematično olimpiado. Za dve prosti mesti v olimpijski ekipi pa so se izbrani kandidati, med njimi Maks Romih, potegovali še v ponedeljek, 28. 4. dopoldne, na t.im. "mali olimpiadi". Reševali so naslednje tri naloge:

1. Cela števila a, b in c za vsak $n \in N$ zadoščajo kongruenci

   $$a^n + nb + c \equiv 0 \pmod{m}$$

   Dokaži, da je b^2 deljivo z m !

2. Krožnici k_1 in k_2 se sečeta v točkah A in B . Iz točke M krožnice k_1 potegnemo premici MA in MB , ki naj sečeta krožnico k_2 v točkah N in P (različnih od A in B). Dokaži, da obstaja skupna točka vseh višin MC trikotnikov MNP , ko se točka M giblje po krožnici k_1 !

3. Zaporedje realnih števil x_n je podano z enačbami

   $$x_0 = a$$

$$x_1 = b$$
$$x_{n+1} = (x_n^2 + c)/x_{n-1} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Dokaži: če so a, b in $\frac{a^2 + b^2 + c}{ab}$ cela števila, so vsi členi zaporedja cela števila!

Olimpijsko ekipo sestavljajo: Nebojša Elez, Nina Ležaić, Leon Matoh, Gordan Savin, Predrag Tanović, Boban Veličković, Miloš Arsenović in Igor Aurer.

V ponedeljek opoldne se je s slovesno razglasitvijo rezultatov in podelitvijo nagrad ter priznanj za udeležbo (izročal jih je predsednik Društva matematikov in fizikov SR Hrvatske prof.dr. Ivan Ivanšić) tekmovanje zaključilo.

Marko Petkovšek

KOLEDAR TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE ZA VEGOVA PRIZNANJA 1980/81

- do 11. aprila 1981 šolska tekmovanja za BRONASTO VEGOVO PRIZNANJE za učence od 5. do 8.r.
- 18. aprila 1981 občinska tekmovanja za SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE za učence od 6. do 8.r.
- 23. maja 1981 republiško tekmovanje za ZLATO VEGOVO PRIZNANJE za učence 7. in 8.r.

Gotovo ste opazili, da gre letos za dve spremembi:

- Koledar tekmovanj smo delno premaknili v mesec april. Vodile so nas izkušnje, da so prav v mesecu maju še druga tekmovanja.
- V letošnjem šolskem letu bodo prvič tekmovali na republiškem tekmovanju tisti sedmošolci, ki bodo dosegli na občinskem tekmovanju 20 do 25 točk. Skupina najboljših sedmošolcev bo zastopala našo republiko na zveznem tekmovanju.

Pavle Zajc

RAZPIS TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1980/81

Urnik za to šolsko leto je naslednji:

Matematika: predtekmovanje bo 7. marca (sobota) od 9. do 11. ure, tekmovanje pa 4. aprila (sobota) od 10. do 12. ure.

Fizika: predtekmovanje bo 11. aprila (sobota) od 9. do 11. ure, tekmovanje pa 16. maja (sobota) od 10. do 12. ure.

Predtekmovanja izvedejo aktivi profesorjev matematike in fizike na srednjih šolah. Ti sestavijo komisijo za predtekmovanje, ki oceni izdelke svojih dijakov. Za strokovno plat izvedbe predtekmovanj in tekmovanj sta sestavljeni republiški komisiji, ena za matematiko, druga za fiziko. Ti dve komisiji pripravita naloge za predtekmovanji in za tekmovanji, za vsak razred po štiri. Razmnožene naloge za predtekmovanja, rešitve in druge napotke pošljeta predsednikom šolskih komisij. Na osnovi ocen predlagajo šolske komisije najboljše dijake svoje šole za republiški tekmovanji. Predlagani srednješolci morajo pravilo-ma doseči vsaj polovico možnih točk, od tega kriterija pa se lahko odstopi, če noben tekmovalec v posameznem razredu na šoli ne preseže 60% od vseh možnih točk. Izjemoma lahko predlagajo tudi dobre dijake, ki se zaradi opravičljivih razlogov niso mogli udeležiti predtekmovanja. Šole lahko prijavijo svoje učence za republiški tekmovanji le, če so izvedle predtekmovanja (same ali več skupaj). Kot prijavnica za predtekmovanje velja vprašalnik, objavljen v tej številki. Tega izrežite ali prepišite, izpolnite in pošljite priporočeno do srede, 25. februarja 1981 na naslov: Petkovšek Marko, 61001 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 227, s pripisom: Prijava za predtekmovanji.

Dijaki srednjih šol, ki imajo drugačen učni načrt kot gimnazije, se lahko po posvetu s profesorjem prijavijo za drug razred kot ga obiskujejo. Šol, ki se ne bodo prijavile za predtekmovanje, ne bomo naknadno obveščali!

Izmed predlaganih tekmovalcev bosta republiški komisiji izbrali kandidate za republiški tekmovanji, do 30 v vsakem razredu. Le v izjemnem primeru, če predlaganih primerno dobrih tekmovalcev ne bo dovolj, bosta komisiji upoštevali tudi predloge šol, ki predtekmovanj ne bodo izvedle. Komisije za predtekmovanje po šolah morajo oceniti izdelke, sestaviti seznam predlaganih dijakov in ga poslati na zgornji naslov (z oznako matematika oz. fizika) do

14. marca 1981 - za matematiko
22. aprila 1981 - za fiziko

Republiško tekmovanje iz matematike bo v Ljubljani, v prostorih I. gimnazije - Bežigrad, iz fizike pa v Velenju, v prostorih Rudarskega šolskega centra. Na predvečer republiškega tekmovanja iz fizike bo družabna prireditev z merjenjem znanja srednješolskih skupin iz fizike. O podrobnostih tega tekmovanja bomo obvestili šole posebej.

Želimo, da bi se predtekmovanj udeležile vse srednje šole v Sloveniji. Zato pozivamo tudi dijake, da opozorijo svoje učitelje na ta razpis. Profesorje matematike in fizike pa seveda prosimo, da sodelujejo pri izvedbi predtekmovanj, vzpodbujajo dijake in jim svetujejo pri pripravah. Predvsem jih prosimo, da sodelujejo z republiškima komisijama pri izdelavi nalog. Za vse predloge in pripombe bomo zelo hvaležni, naslovite pa jih na komisijo za popularizacijo, z navedbo za matematiko oz. fiziko. Mladim nadebudnežem želimo v letošnjem tekmovalnem ciklusu čimveč dobrih idej ob reševanju nalog!

Marko Petkovšek, Bojan Golli

Prijavnici sta natisnjeni na naslednji strani.

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

ŠOLA: . . . .

NASLOV: . . . .

POŠTNA ŠT. TELEFON . . . .

Predtekmovanje bomo - ne bomo izvedli (ustrezno obkrožite)

Predtekmovanje bomo izvedli skupaj s šolami: . . . .

. . . .

Priimek, ime, domači naslov in telefon predsednika komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Imena članov komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Cenimo, da bo na šolskem tekmovanju sodelovalo

v I. razredu .... dijakov v III. razredu .... dijakov
v II. razredu .... dijakov v IV. razredu .... dijakov

Skupaj: .... dijakov

Opomba: število dijakov rabimo, da bomo vedeli, koliko izvodov s formulacijami nalog vam bomo poslali.

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ FIZIKE

ŠOLA: . . . .

NASLOV: . . . .

POŠTNA ŠT. TELEFON . . . .

Predtekmovanje bomo - ne bomo izvedli (ustrezno obkrožite)

Predtekmovanje bomo izvedli skupaj s šolami: . . . .

. . . .

Priimek, ime, domači naslov in telefon predsednika komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Imena članov komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Cenimo, da bo na šolskem tekmovanju sodelovalo

v III. razredu .... dijakov
v II. razredu .... dijakov v IV. razredu .... dijakov

Skupaj: .... dijakov

Opomba: število dijakov rabimo, da bomo vedeli, koliko izvodov s formulacijami nalog vam bomo poslali.

REŠITVE NALOG

NENAVADNI ULOMEK - REŠITVE NALOG S STRANI 131

1. -
2. -
3. Pišimo $1010\overbrace{111\ldots11}^{n}0101 = 1010.10^{n+4} + \overbrace{111\ldots11}^{n}.10^4 + 101 =$

   $= 1010(10^{n+4}-1) + \overbrace{111\ldots11}^{n+4} = 1010(10^{n+4}-1) + \frac{1}{9}(10^{n+4}-1) =$

   $= 9091.\ \frac{1}{9}(10^{n+4}-1)$. Podobno dobimo $1100\underbrace{111\ldots11}_{n}0011 =$

   $= 9901.\ \frac{1}{9}(10^{n+4}-1)$. Torej za vsako naravno število n velja

   $$\frac{1010\overbrace{111\ldots11}^{n}0101}{1100\underbrace{111\ldots11}_{n}0011} = \frac{9091}{9901}$$

4. Opisano lastnost imajo npr. vsi ulomki $\frac{ab}{cd}$, kjer je $a+b = c+d =$ število, sestavljeno iz toliko enojk, kot smo za b ali d rezervirali mest (za obe števili enako). V prilogi 3 je tako $a = 1010$, $b = 0101$ (4 mesta) , $c = 1100$. $d = 0011$ (4 mesta) in $a+b = c+d = 1111$. Po zgornji metodi lahko poiščemo poljubno mnogo ulomkov z dano lastnostjo, npr. $\frac{803}{704}$ (a=8, b=003, c=7, d=04), $\frac{73038}{6105}$ (a=73, b=038, c=6, d= 105) itd. Pristaviti pa je treba, da nikakor niso vsi ulomki take vrste. Ulomek $\frac{228}{336}$ (a=2, b=28, c=3, d=36) npr. zadošča vsem zahtevam naloge 4, vendar ga ne moremo dobiti po zgornji metodi.

5. Nalogo rešijo ulomki $\frac{ab}{cd}$, pri katerih velja $10^p ad = 10^q bc$, kjer je p (q) število mest pri b (d) . Ta pogoj takoj sledi iz zahtevane enakosti

$$\frac{a10^{n+p}+b}{c10^{n+q}+d} = \frac{a10^{p}+b}{c10^{q}+d}$$

(prav za prav je njej ekvivalenten). Pogoj $10^{p}ad = 10^{q}bc$ lahko krajše izrazimo tudi takole $a(0,d) = c(0,b)$; cifre števil b in d pišemo takoj za decimalno vejico. Primeri ulomkov z iskano lastnostjo so $\frac{23}{69}$ $(a=2,\ b=3,\ c=6,\ d=9)$, $\frac{309}{721}$ $(a=3,\ b=09,\ c=7,\ d=21)$, $\frac{45105}{24056}$ $(a=45,\ b=105,\ c=240,\ d=56)$ itd.

6. Dokaz je povsem analogen dokazu naloge 3, le namesto 10 vzamemo novo osnovo b $(b > 1)$. Tako dobimo

$$1010\overset{n}{111\ldots11}0101 = (1010(b-1)+1)\,\frac{b^{n+4}-1}{b-1} \quad \text{in}$$

$$1100\overset{n}{111\ldots11}0011 = (1100(b-1)+1)\,\frac{b^{n+4}-1}{b-1} \quad .$$

7. Sledimo isti ideji kot v nalogah 3 in 4 s to razliko, da sedaj namesto enojke vrivamo m-mestno število x. Za b in d dopustimo mk mest in zahtevajmo $a+b = xxx\ldots xx$ (k x-ov) , pa lahko pišemo

$$a\underbrace{xx\ldots x}_{n}b = a10^{m(n+k)} + \overset{n}{xx\ldots x}.10^{mk} + b = a(10^{n(n+k)}-1) +$$

$$+ \underbrace{xx\ldots x}_{n+k} = a(10^{m(n+k)}-1) + x\,\frac{10^{m(n+k)}-1}{10^{m}-1} =$$

$$= (a(10^{m}-1) + x)(10^{m(n+k)} - 1):(10^{m}-1) \quad \text{in podobno}$$

$$c\underbrace{xx\ldots x}_{n}d = (c(10^{m}-1)+x)(10^{m(n+k)}-1):(10^{m}-1)\ .$$ Primer takega ulomka je $\frac{507}{903}$ $(a=5,\ b=07,\ c=9,\ d=03,\ x=12,\ m=2)$. Nadaljne primere si lahko izmislite sami.

Milan Hladnik

1. Takih števil je 21. Zapiši jih!

2. Števila so: 90, 81, 72, 63 in 54.

3. a) $22^2 = 484$

   $2^{2^2} = 2^4 = 16$

   $2^{22} = 2^9 . 2^{13} = 512 . 2^{13}$, tako je 2^{22} največje zapisano število s tremi dvojkami brez znakov za računske operacije.

   b) 1111, 111^1, 11^{11}, 11^{1^1}, 1^{111}, 1^{11^1}, $1^{1^{11}}$, $1^{1^{1^1}}$. Največje število je 11^{11}.

4. $2.S = (1+2+...+89+90) + (90+89+...+2+1) = 90.91$,
   $S = 45.91 = 45.7.13$

5. $(2x-1)+(2x+1)+(2x+3) = 33$. Sledi $x = 5$ in dolžine stranic a, b, c so $(a,b,c) \in \{(9.11.13);(9,13,11),(11,9,13),$
   $(11,13,9),(13,9,11),(13,11,9)\}$

6. Vsota števil v posamezni skupini je 93. Ena od možnosti je razdelitev oblike:

   (1,30,2,29,3,28), (4,27,5,26,6,25), ...

7. Zakonitost zaporedja je, da z vsoto dveh zaporednih členov dobimo naslednji člen:

   0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 ,
   54 , ... , torej ...

8. Rešitev je pet: ena premica, pet premic, šest premic, osem premic in deset premic.

9. $\overline{AD} = 1,5$ m

10. Ulomek je razširjen z 10001. Torej, ...

11. Rešitvi sta $x = 3$ in $x = 4$.

12. Števili n in $n-1$ sta dve zaporedni naravni števili. Torej je eno od njiju gotovo sodo.

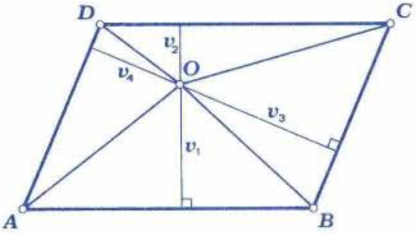
13. $84 = 2.2.3.7 = 3.(2.2).7 = 3.(3+1).(2.3 + 1)$, odtod $n = 3$.

14. $x + (x+20)+(x+30)+(x+50) = 360$. Sledi $x = 65$. Koti so $x = 65^\circ$, $(x+20) = 85^\circ$, $(x+30) = 95^\circ$ in $(x+50) = 115^\circ$. Štirikotnik je trapez, kajti kota ob krakih trapeza sta suplementarna.

15. $v_a = v_1 + v_2$, $v_b = v_3 + v_4$.

Od tod

$$\frac{1}{2}av_1 + \frac{1}{2}av_2 = \frac{1}{2}a(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}av_a, \quad \frac{1}{2}bv_3 + \frac{1}{2}bv_4 = \frac{1}{2}b(v_3 + v_4) = \frac{1}{2}bv_b$$



16. Reši sam!

17. Skozi T potegni pravokotnico na simetralo kota!

18. Označimo: K - kokoš, D = dan, J = jajce, potem sklepamo:

$$(1\tfrac{1}{2}K,\ 1\tfrac{1}{2}D,\ 1\tfrac{1}{2}J) \Rightarrow (3K,\ 1\tfrac{1}{2}D,\ 3J) \Rightarrow (3K,\ 3D,\ 6J) \Rightarrow$$

$(3K, 1D, 2J) \Rightarrow (3K, 5D, 10J)$. Odgovor: tri kokoši bi v petih dneh znesle 10 jajc.

19. $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha = 90^\circ$. Za $\beta - \gamma = 20^\circ \Rightarrow \beta = 55^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, za $\gamma - \beta = 20^\circ \Rightarrow \beta = 35^\circ$, $\gamma = 55^\circ$.

20. (1) ne, (2) ne, (3) da, (4) da, (5) ne, (6) da. Utemelji s primeri!

21. Reši sam!

22. $n^3-n = (n^2-1)n = n(n-1)(n+1)$, to je produkt treh zaporednih naravnih števil, ki je vedno deljiv s 6.

23. $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$, za $k = 1, 2, 3, \ldots$ dobimo:

$$\frac{3}{1^2.2^2} = 1 - \frac{1}{2^2}, \quad \frac{5}{2^2.3^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}, \quad \frac{7}{3^2.4^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}, \ldots$$

$$\ldots \quad \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

če seštejemo zgornje enakosti, dobimo isto vsoto

$$\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

24. x^{n+1}

25. a) Za lihe k je izraz pozitiven, za sode negativen.
b) Reši sam!

26. $f(\frac{3+\sqrt{29}}{2}) = 0$

27. Polmer je $\frac{1}{6}$ hipotenuze!

28. $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 =$
$= 2a.2b + 2b.2c + 2c.2a = 4(ab + bc + ac)$

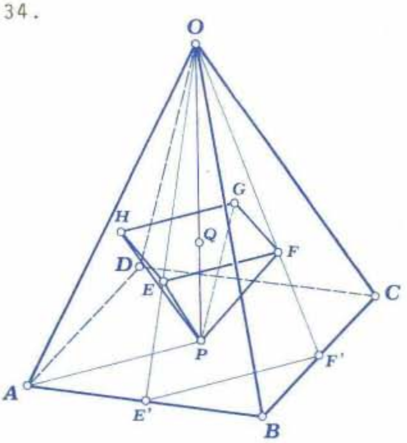
29. Dano vsoto lahko zapišemo v obliki $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Primerjaj z rešitvijo naloge 22.

Pavle Zajc

REŠITVE NALOG

PRAVILNA TELESA rešitev s str. 134.

Naloga 1.



(1) Vemo, da $\overline{OE}:\overline{OE}' = 2:3$ (E je središče trikotnika OAB)

$$\overline{E'F'}:\overline{AB} = \overline{AP} : \overline{AB} = 1:\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \overline{EF}:\overline{AB} = 2:3\sqrt{2} = \sqrt{2}:3$$

razmerje $\overline{PQ} : \overline{OP} = 1:3$ (Q je središče kvadrata $EFGH$)

Da si bosta piramidi podobni, mora biti

$\overline{EF}:\overline{AB} = \overline{PQ}:\overline{OP}$. Kot smo videli, to ni res; torej piramidi si nista podobni!

(2) Vemo, da je prostornina stožca z osnovno ploskvijo S in višino h enaka $1/3.hS$.

To se pravi, če računamo razmerje osnovnih ploskev in razmerje višin naših dveh piramid, bomo lahko izračunali razmerje prostornin.

Razmerje površin osnovnih ploskev je

$$(\overline{EF} / \overline{AB})^2 = 2/9$$

Razmerje višin pa je

$$\overline{QP}:\overline{OP} = 1/3$$

Zato je razmerje prostornin $1/3 . 2/9 = 2/27$.

John Shawe Taylor

BRAT IN SESTRA - ODGOVOR S STRANI 156

Brat je star 16 let (14 let), sestra pa 12 let (10'5 let).

Franc Oblak

TETA AMALIJA SE GRE DETEKTIVA - rešitev s str. 150

Rešitev: $= 2\frac{5}{7} = \frac{19}{7}$

Peter Petek

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
8. letnik, šolsko leto 1980/81, 3. številka, str. 129 - 192

Rokopis sta natipkali Metka Žitnik in Majda Kelbelj, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

List naročajte na naslov Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Komisija za tisk, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, pp 227, tel.štev. (061) 265-061/53, štev. žiro računa

50101 - 678 - 47233

Naročnina za šolsko leto 1980/81 za posamezna naročila je 62,50 din, za skupinska naročila pa 50.-din; za inozemstvo 5 \$ = 100.-din, 4000 Lit, 70 Asch. Posamezna številka stane 15.-din. Poštnina plačana v gotovini na pošti 61102 List sofinancirata ISS in RSS. List izhaja petkrat letno. Naklada 20.000 izv Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "Delo", Ljubljana.

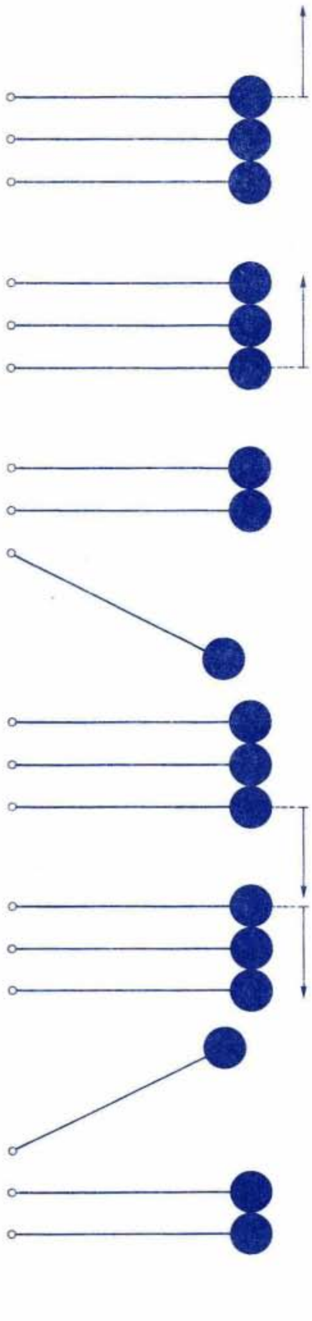
POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

Tokrat smo dobili šest vaših pisem. Le trije med vami so poskus pravilno opisali, vendar so ga pomanjkljivo razložili. Še najbolj smo bili zadovoljni z odgovorom Andreja Florjančiča iz Kopra. Knjižno nagrado Leksikon Cankarjeve založbe - Fizika mu bomo poslali po pošti.

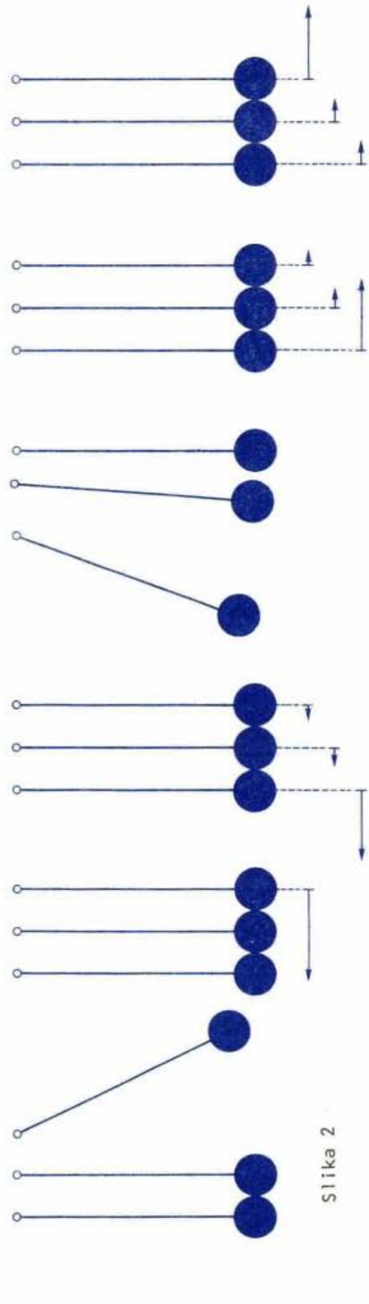
Kaj se dogaja s tremi frnikulami, ki so obešene na nitih, če odmaknemo zunanjo frnikulo od drugih dveh in jo spustimo? Na začetku poskusa obe zunanji frnikuli izmenično nihata vsaka v svojo smer približno do višine, iz katere smo spustili prvo frnikulo, srednja frnikula pa miruje. Čez čas se amplitude zmanjšajo, nihati pa začne tudi srednja frnikula. Na koncu nihajo vse tri hkrati, trkov pa ni več.

Ko dvignemo desno frnikulo iz ravnovesne lege, ji povečamo potencialno energijo. Ko frnikulo spustimo in se vrne v ravnovesno lego, ima prav tolikšno kinetično energijo, saj na frnikulo ne deluje nobena zunanja sila razen sile teže. Zračni upor zanemarimo. Vzemimo, da so trki med frnikulami idealno prožni. Desna frnikula preda tedaj vso svojo kinetično energijo srednji frnikuli in se ustavi. Srednja frnikula še v mirovni legi odda vso kinetično energijo levi sosedi. Prejeta kinetična energija se pri dvigu leve frnikule pretvori v potencialno energijo. Potem se ves pojav ponovi v nasprotni smeri. Ob popolnoma prožnih trkih frnikul bi bili odmiki zunanjih frnikul enaki, srednja frnikula pa bi mirovala.

Trki pa niso popolnoma prožni. Pri takih trkih se del kinetične energije porabi za povečanje notranje energije frnikul. Desna frnikula po trku s srednjo frnikulo ne miruje, ampak se giblje z majhno hitrostjo v prvotni smeri. Hitrost je tem večja, čim



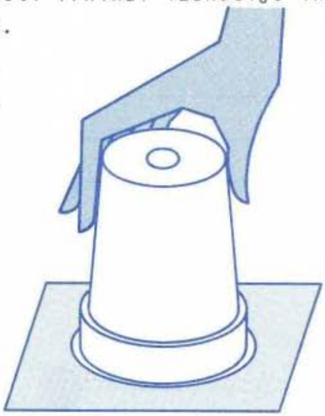
Slika 1



Slika 2

bolj neprožen je trk. Tudi srednja frnikula obdrži po trku z levo sosedo majhno hitrost v isti smeri. Prejeta kinetična energija leve frnikule je manjša od kinetične energije, ki jo je imela desna frnikula, ko se je vrnila v ravnovesno lego. Zato se leva frnikula dvigne do manjše višine, kot je bila tista, iz katere smo spustili desno frnikulo. Tudi preostali dve frnikuli zanihata iz ravnovesne lege, vendar sta amplitudi manjši zaradi manjših hitrosti v ravnovesni legi. Potem frnikule zanihajo na drugo stran in so spet vse tri istočasno v ravnovesni legi, saj nihajni čas ni odvisen od amplitude nihanja. Leva frnikula se po trku s srednjo giblje naprej z majhno hitrostjo v desno. Tudi srednja frnikula po trku z desno sosedo obdrži majhno hitrost v isti smeri. Ta hitrost je po velikosti večja od hitrosti v prvi polovici nihaja, ko se je frnikula gibala v levo. Po vsakem trku je kinetična energija zunanje frnikule manjša, zato se tudi njena amplituda manjša. Hitrosti preostalih dveh frnikul sta po vsakem trku večji, zato so tudi amplitude nihanja vedno večje. Spodnji sliki kažeta lege frnikul in njihove hitrosti v posameznih trenutkih prvega nihaja. Zgornja slika kaže idealen prožni trk, spodnja pa naš poskus, kjer trki niso popolnoma prožni. Na sliki so označene hitrosti frnikul v ravnovesni legi ob zaporednih trkih. Trki naših frnikul so skoraj popolnoma prožni, zato šele čez čas opazimo, da niha tudi srednja frnikula. Po velikem številu trkov se hitrosti frnikul izenačijo in vse tri nihajo sočasno, trkov pa ni več.

Poskus z dvema frnikulama se od gornjega razlikuje le v tem, da si ti dve izmenjujeta energijo neposredno.



Nova naloga za vas pa je tale:

Shranite prazen kozarček od jogurta, da ga boste lahko uporabili za naslednji poskus. Dno kozarčka preluknjajte z vročim žebljem in luknjo na zunanji strani kozarčka zamašite s plastelinom. V kozarec do roba nalijte vodo in ga pokrijte z listom papirja. Kozarec nad pomivalnim koritom obrnite. Kaj se zgodi? Na to odstranite zamašek na dnu. Razložite izid poskusa!

Odgovore nam pošljite do 1. marca 1981. Najboljše med njimi bomo nagradili s knjigami.

Metka Luzar-Vlachy

BISTROVIDEC

PREŠTEVANJE ČRK

Izmisli si katerokoli število in ga črkuj oziroma napiši z besedami. Nato te črke preštej, dobljeno vsoto pa zopet zapiši z besedami in nadaljuj ta postopek, dokler ne prideš do števila 3, pri katerem gre vse skupaj v nedogled.

Dokaži, da se opisani proces konča pri 3 ne glede na to, s katerim številom si začel.

Da bomo lažje razmišljali, si oglejmo dva primera:

1) tri cele tisoč štiristo šestnajst desettisočink, dvainštirideset, petnajst, osem, štiri, pet, tri ...
2) minus tisoč petsto dvaindvajset, osemindvajset, trinajst, osem, štiri, pet, tri ...

Roman Rojko

NOVE KNJIGE

KOCJANČIČ Drago / Fotografirajmo, snemajmo. - Ljubljana : Mladinska knjiga, 1980. 278 str. - Cena 670.- din

Moram reči, da sem bil zelo vesel, ko sem prvič prelistal novo knjigo Draga Kocjančiča. Gre za izredno skrbno napisano, bogato opremljeno delo, namenjeno vsem ljubiteljem fotografskega aparata in filmske kamere. Pa še dve bistveni prednosti pred mnogimi podobnimi knjigami ima: nastala je pri nas in njen avtor se s fotografiranjem in snemanjem poklicno ukvarja. Naše založbe namreč, namesto da bi spodbujale domače avtorje, prav pretiravajo s prevajanjem vse mogoče konjičkarske literature in nam pri tem pogosto ponujajo knjige, ki so zastarele, v naših razmerah neuporabne ali pa so jih napisali ljudje, ki se "spoznajo" na vse - od kuhanja do mizarstva. Da o nemogočih prevodih sploh ne govorimo!

Kocjančičeva knjiga začne pri lastnostih svetlobe, spoznavanju kamere in filmskega traku ter nas nato uvaja v snemalno tehniko, razsvetljavo, kompozicijo, barve ter obdelavo raznih motivov. Poseben poudarek daje avtor filmski snemalni tehniki. Ker iz lastnih izkušenj vem, kako razočaran je večkrat začetnik nad tistim, kar pride iz filmske kamere, lahko branje tega dela knjige vsem prizadetim še posebej priporočim. Avtor nas navdušuje tudi za čim bolj odgovoren, tehnično neoporečen odnos do snemanja - podobno, kot ga imajo poklicni fotografi in snemalci. Skoraj vsak amater ve, da se to obrestuje, vendar večkrat ne "zmore" tega napora. Ob sedanjih visokih cenah materiala bo tudi ta knjiga spodbuda za bolj premišljeno pritiskanje na sprožilec.

Omenim naj še svojo edino kritično pripombo. Avtor ima (skupaj z mnogimi drugimi profesionalci) velik odpor proti osvetlitveni avtomatiki in celo vgrajenemu svetlomeru. Kot amater z dolgoletnimi izkušnjami moram povedati, da mi ni bilo nič bolj zoprnega, kot prenašati svetlomer poleg kamere. Cenejši svetlomerji imajo tudi zelo širok kot merjenja in dajejo neizkušenemu uporabniku včasih neuporabne rezultate. Dober vgrajen svetlomer, ki meri skozi objektiv, je napredek, ki se mu nikakor ne splača odpovedati. Sicer pa že avtomatika prevzema tržišče, če nam je všeč ali ne. To, kar se dobi pri nas, večkrat sicer ni vredno visoke cene. Iz izkušenj pa vem, da pri najboljših (večinoma japonskih) modelih osvetlitvena avtomatika deluje natančno in zanesljivo, lahko pa jo tudi izključimo ali popravimo njene rezultate, kadar se nam to zahoče.

Pohvaliti moram razumljivost, uporabnost in originalnost teksta. Poznavalcu je očitno, da je Drago Kocjančič večino tega, o čemer piše, sam preizkusil, da je skrbno premislil in odmeril tudi bolj teoretična poglavja. Potrudil se je najti čim več slovenskih izrazov namesto običajnih tujk. Slikovni material v knjigi je odličen in praktično ves posnet doma. Lepa dopolnitev so tudi fotografije Joca Žnidaršiča.

Skratka, Fotografirajmo, snemajmo je odlična knjiga, ki jo je vredno prebrati in tudi kupiti, če imamo v svojem proračunu denar za kako takole dražje delo.

Peter Legiša

MAL Vitan / Tretje oko (Kaj početi s kamero, če si začetnik?). - Ljubljana : Mladinska knjiga (Pionirjeva knjižnica), 1979. - Cena 61.- din

Pred nami je trideset strani dolg živobarven zvezek, poln fotografij in zabavnih ilustracij Matjaža Schmidta, ki bodo začetniku olajšale pot k obvladovanju fotografskega aparata in filmske kamere. Avtor Vitan Mal v sproščenem, odrezavem jeziku pojasnju je delovanje snemalne opreme in tehniko snemanja. Marsikaj zanimivega vplete iz svojih poklicnih izkušenj. Mladi fotoamaterji bodo v njej našli odgovore na večino važnejših problemov, s katerimi se srečujejo pri delu, in obilico koristnih nasvetov. Še posebno bi branje priporočil lastnikom filmskih kamer, zakaj - roko na srce - posneti kolikor toliko dober film ni lahko.

Knjižica nas uči resnega, tehnično dovršenega dela pri snemanju in fotografiranju. Opozori nas, da se lahko mnogo naučimo tudi v kinu, če smo dovolj pozorni. To je gotovo slabo opravičilo za tiste, ki mislijo, da se je amaterju nemogoče meriti s poklicnimi snemalci. Vsem mladim in tudi starejšim, ki bi radi posneli še boljše fotografije in filme, bo knjižica v veliko pomoč.

Peter Legiša

TESLA Nikola, Moji pronalasci. My Investions, prev. Tomo Bosanac, Vanja Aljinović. - Zagreb : Školska knjiga, 1977. - 109 strani.

V zelo lepo opremljeni knjigi, ki je bila izdana ob praznovanju 120. obletnice rojstva Nikole Tesle, so zbrani članki, ki jih je Tesla objavljal 1919. leta v časopisu Electrical Experimenter. V njih je opisal svoje življenje in delo pod skupnim naslovom: Moja odkritja.

Tesla je svoj življenjepis namenil mladim bralcem, zato je spominom na mladost namenil kar precej prostora. Bil je namreč prepričan, da so bila prav mladostna doživetja in izkušnje zelo pomembne za njegovo nadaljnje delo. Temu sta namenjeni prvi dve poglavji knjige. V naslednjih štirih poglavjih nas Tesla na razumljiv in zelo slikovit način seznanja s svojim raziskovalnim delom, svojimi odkritji in izumi. Tako v tretjem poglavju spregovori o sistemu za proizvajanje, prenos in uporabo izmeničnega toka. Jedro tega je bil indukcijski motor, zgrajen na osnovi vrtilnega magnetnega polja. V naslednjem poglavju se srečamo z raziskavami s področja visokofrekvenčnih in visokonapetostnih tokov. Sledi poglavje o brezžičnem prenosu energije in sporočil, ki je prav gotovo eden Teslinih najpomembnejših uspehov. Knjigo zaključuje poglavje o daljinskem upravljanju in avtomatih, kjer Tesla tudi razmišlja o neslutenih možnostih uporabe strojev "z razumom".

Knjiga bo privlačna in zanimiva za vse tiste mlade bralce, ki jih zanimata zgodovina in razvoj fizike in elektrotehnike. Tudi ljubitelji življenjepisov velikih znanstvenikov jo bodo radi brali. Knjiga je pisana v angleškem in srbohrvaškem jeziku. Poleg lepe opreme jo odlikujejo tudi originalne risbe in slike ne katerih Teslinih pomembnejših izumov. Na koncu nam prevajalca v spremni besedi osvetljujeta dogodke iz Teslinega življenja z izčrpnim opisom zgodovinskega ozadja tedanje dobe. Škoda le, da nimamo slovenskega prevoda te knjige.

Metka Luzar-Vlachy

STAREJŠE ŠTEVILKE PRESEKA

Vsako leto se na Presek naroči več novih naročnikov, ki si želijo tudi vse starejše številke našega lista. Ker smo nekatere že popolnoma razprodali, jim želje ne moremo izpolniti. Zato se obračamo na tiste, ki bi lahko pogrešali nekatere številke, da nam jih odstopijo. Lahko jih osebno prinesete v pisarno Komisije za tisk, ali pa nam jih pošljete po pošti. Primanjkujejo nam naslednje številke

letnik	leto	številka
0		PRAPRESEK
1	1973/74	1.,2.,3.,4.
2	1974/75	1.,2.,3.
3	1975/76	2.
4	1976/77	2.,3.,5.
5	1977/78	1., 3.

V zameno lahko dobite kako drugo številko Preseka, knjižico iz Presekove knjižnice ali belo Presekovo značko.

Marija Hrovath

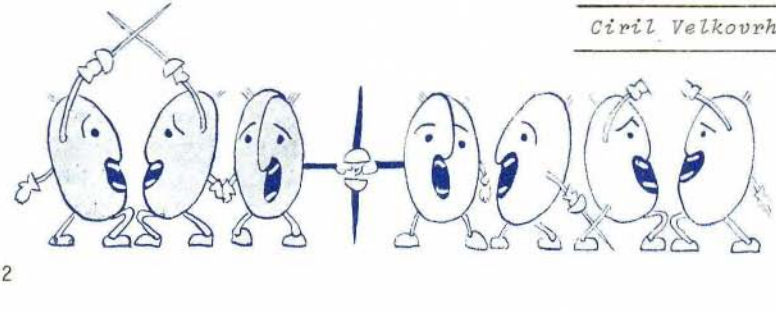
FIŽOLČKI NA POHODU

Mladinska knjiga je že leta 1951 izdala drobno knjigo velikega formata z naslovom "Kratkočasna matematika". Knjigo je napisal prof. France Križanič, opremil pa Miloš Požar. To je bila prva knjiga na Slovenskem, s katero so želeli popularizirati matematiko med najmlajšimi. Na dobrih petdesetih straneh avtor razloži osnovne računske operacije z opisovanjem dogodivščin, ki jih doživlja množica fižolčkov. čeprav takrat še ni bilo tolikega zanimanja za matematiko, je knjiga kmalu pošla. Kasneje so jo prevedli in izdali tudi Hrvatje. Zaradi izvirne in domiselne zgodbe, preprostega in prijetnega jezika, je bila večkrat izrečena želja, da bi jo ponatisnili. še posebej se je to ponavljalo po leto 1971, ko smo v Sloveniji z uvajanjem "novematematike" vpeljali v obvezno osnovno izobraževanje tudi pojem množice.

V letošnjem letu se nam je ponudila prilika, da omenjeni tekst z manjšimi korekturami ponatisnemo. Vsi naročniki Preseka so to brošuro že dobili kot peto številko. Uspeli smo jo natisniti in razposlati že pred izidom tretje in četrte številke. Slednjo boste dobili okrog prvega maja.

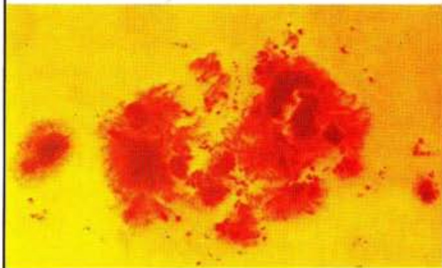
Ker menimo, da ta brošura ne bo zanimiva le za naročnike Preseka, prosimo učitelje matematike, da jo priporočijo tudi drugim učencem predvsem v nematematičnih razredih ter v nižjih razredih, za katere je list Presek še pretežak. V ta namen smo natisnili večjo naklado kot običajno, ki jo lahko še naknadno naročite. Posamezna številka stane 50.- din, za skupinska naročila pa je cena 40.- din.

Ciril Velkovrh



presek 1

VII
1979-80



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 2

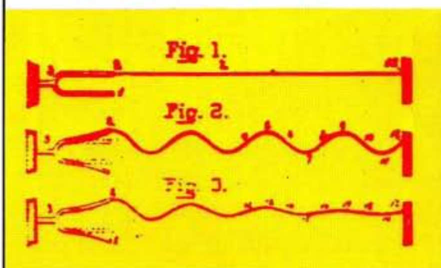
VII
1979-80

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 3

VII
1979-80

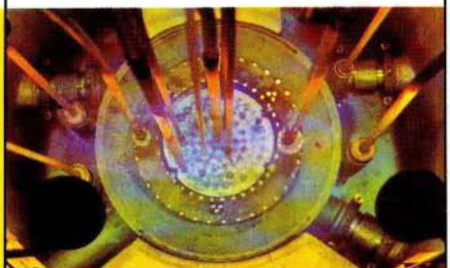


LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 4

VII
1979-80

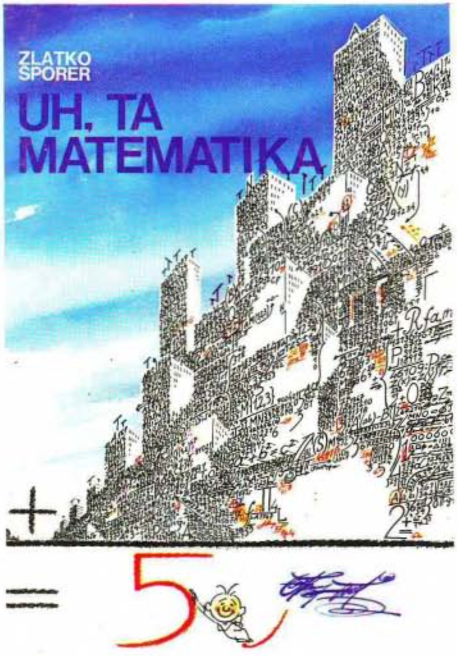


LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

NOVE KNJIGE

ŠPORER Zlatko / Uh, ta matematika. - Zagreb : Školska knjiga, 1976. 225 str.



Kdor se je že kdaj igral z električnim vlakcem ve, kakšen užitek je to. Ko sem prelistaval knjigo *Zlatka Šporerja* se me je lotilo taisto ugodje. Ne vem, ali mora biti človek matematik, da doživi ta užitek, ali pa je bogastvo duhovitosti, ki jih kaže knjiga *Uh, ta matematika* na voljo tudi tistim, ki matematike na marajo. Avtor je knjigo posvetil prav njim. Zato vse bralce Preseka prosim, da jim še vi prenesete avtorjevo posvetilo. Knjigi dajejo posebno razsežnost posrečeni komentarji in ilustracije *Nedeljka Dragića*. Težko je ločiti igrivost avtorja od nagajivosti in humorja ilustratorja. Knjigo, v kateri strani 9 + 1 sledi stran $\sqrt{121}$ in strani 2.5.19 sledi stran CXCI, priporočam prav vsem!

Tomaž Pisanski