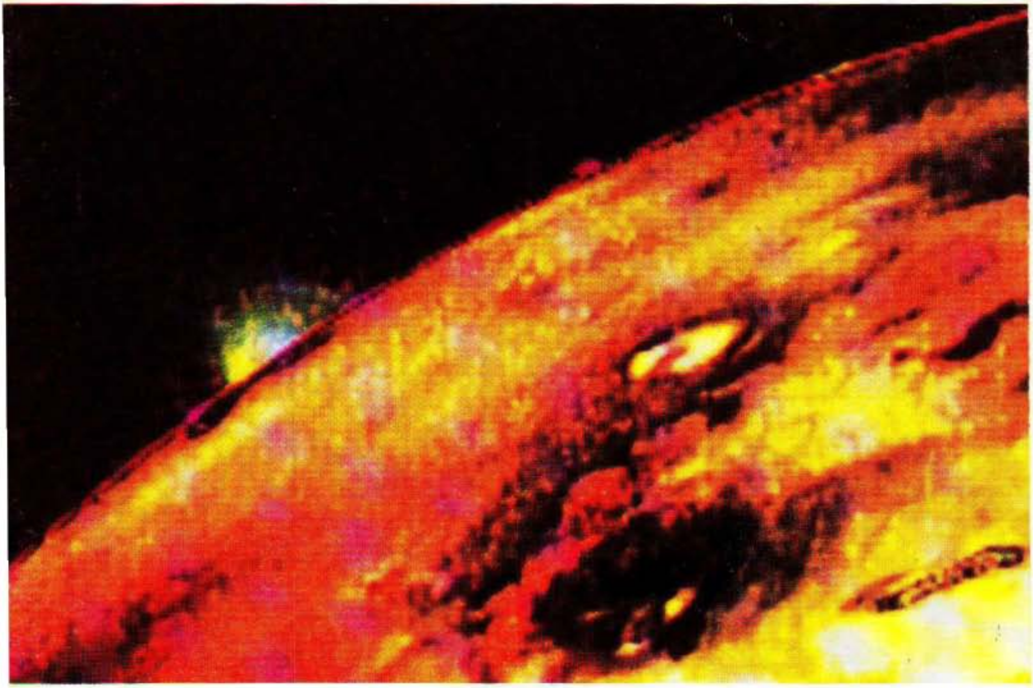
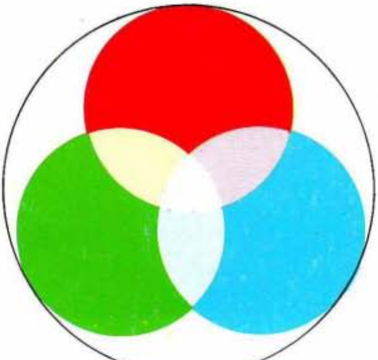
p r e 2

s e k

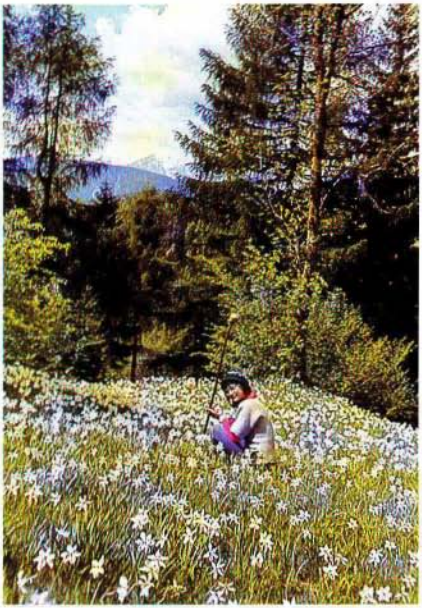
VIII
1980-81



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME



IZDAJA DMFA SRS




UVODNIK

V prejšnji številki sem potarnal, da bi težko zbrali prispevke za kaj več številk Preseka letno. Resnici na ljubo, uredniki s težavo zberemo prispevke že za sedanji obseg. To kaže, da imamo preozek krog sodelavcev, ki poleg svojega rednega dela ne zmorejo še več pisati v Presek. Za dober prispevek se je treba kar potruditi, pisanje vzame mnogo časa.

Zelo veseli bomo vaših prispevkov. Ne ustrašite se napisati članka. Ne objavimo ga takoj, ko ga dobimo, pa tudi v koš ga ne vržemo kar tako. Najbrž mislite, da dobi urednik prispevek v roke, ga prebere, se prizanesljivo nasmehne, če je prispevek slab, in ga vrže v koš. Pa ni tako! Najprej prebere prispevek odgovorni urednik in se odloči, komu ga bo dal v strokovni pregled ali recenzijo. Recenzent ga podrobneje pregleda in napiše strokovne pripombe, če mu kaj ni všeč. Potem članek vrne avtorju, da ga popravi in upošteva pripombe. Ko dobimo popravljeni članek, razpravlja o njem uredniški odbor in odloči, v kateri številki bo izšel. Tak je postopek pri vseh prispevkih, pa naj bo avtor učenec osnovne šole ali učitelj na univerzi. Na koncu mora biti članek dober, to pomeni, da je zanimiv, poučen, in predvsem strokovno neoporečen.

Vse prihodnje sodelavce prosim, da pošljejo s prispevkom še kopijo za primer, če bi se prispevek izgubil. Takrat je urednik v škripcih. Če izgubi prispevek, izgubi ponavadi za vedno tudi sodelavca, ki je prispevek napisal.

Andrej Likar

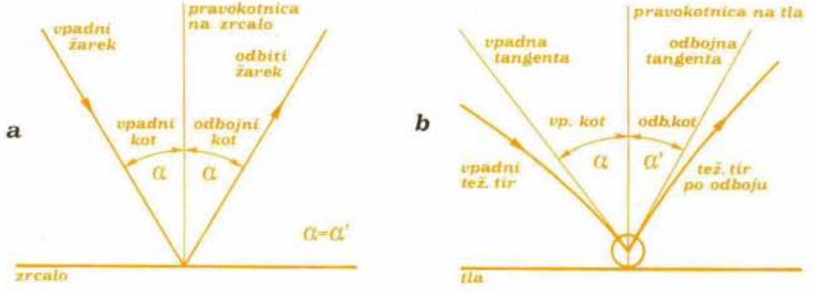
V S E B I N A

FIZIKA

ODBOJ ŽOGE

Odbojni zakon za svetlobo gotovo poznate. Na sliki 1a sta narisana žarka pred odbojem in po odboju na zrcalu. Kot, ki ga oklepata vpadni žarek in pravokotnica na zrcalo, je vpadni kot. Kot, ki ga oklepata odbiti žarek in pravokotnica, je odbojni kot. Odbojni zakon pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, žarka in pravokotnica na zrcalo pa ležijo v isti ravnini. Običajno se tako odbija valovanje, če se mu na meji dveh območij spremeni hitrost.

Odbojni zakon ne velja vedno. Pri transverzalnem valovanju v prožni snovi, na primer, je odboj bolj zapleten. Tako je tudi pri odboju žoge, kjer žarka (slika 1b) nadomestimo s tangentama na težiščni tir tik pred odbojem oziroma tik po njem. Ta sestavek govori o odboju idealno prožne žoge od togih tal. Idealno prožna žoga pri odboju od togih tal ne izgubi nič kinetične energije. Kinetična energija pred odbojem je torej enaka ki

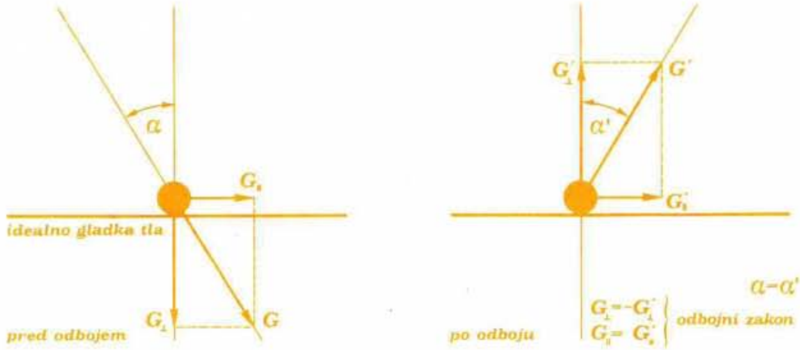


Slika 1: Odbojni zakon - a) za svetlobo b) za žogo

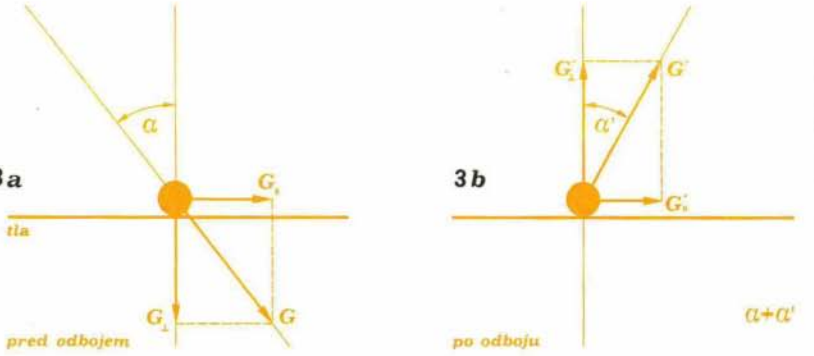
netični energiji po njem. To je idealizacija, ki je dobra, če so tla dovolj toga, žoga pa izdelana iz zelo prožne snovi.

Če so tla, od katerih se odbije žoga, idealno gladka, se žoga odbije po odbojnem zakonu. Slika 2 pokaže, da je to res. Vektor gibalne količine tik pred, oziroma tik po odboju leži v vpadni oziroma odbojni tangenti na težiščni tir. Gibalno količino tik pred trkom razstavimo na dve komponenti: na $\vec{G}_\perp$, ki je pravokotna na tla, in $\vec{G}_\parallel$, ki je s tlemi vzporedna. Tudi silo, s katero delujejo na žogico tla, lahko razstavimo podobno: na $\vec{F}_\perp$ in $\vec{F}_\parallel$. Če so tla idealno gladka, lahko delujejo na telo le s silo, ki je pravokotna nanje. Ker torej komponente $\vec{F}_\parallel$ ni, se po izreku o gibalni količini ohrani $\vec{G}_\parallel$. Sila $\vec{F}_\perp$ povzroči, da se obrne smer komponenti gibalne količine $\vec{G}_\perp$. Velikost celotne gibalne količine $\vec{G}$ mora namreč ostati po odboju nespremenjena, ker se ohrani kinetična energija žoge. To velja tudi, če se žoga pred odbojem vrti okrog poljubne težiščne osi. Ker je komponenta $\vec{F}_\parallel$ enaka nič, je tudi navor glede na težiščno os med trkom enak nič. Žoga se po trku vrti enako, kot se je pred njim.

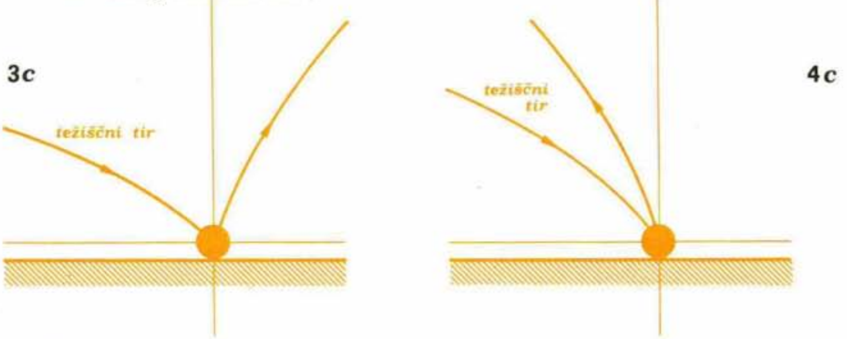
Trenje med tlemi in žogo je največkrat tako veliko, da se dotikališče žoge in tal med trkom ne premakne. Takemu odboju lahko rečemo običajen odboj. Na dotikališču žogice in tal sila



Slika 2: Odboj žoge na idealno gladkih togih tleh

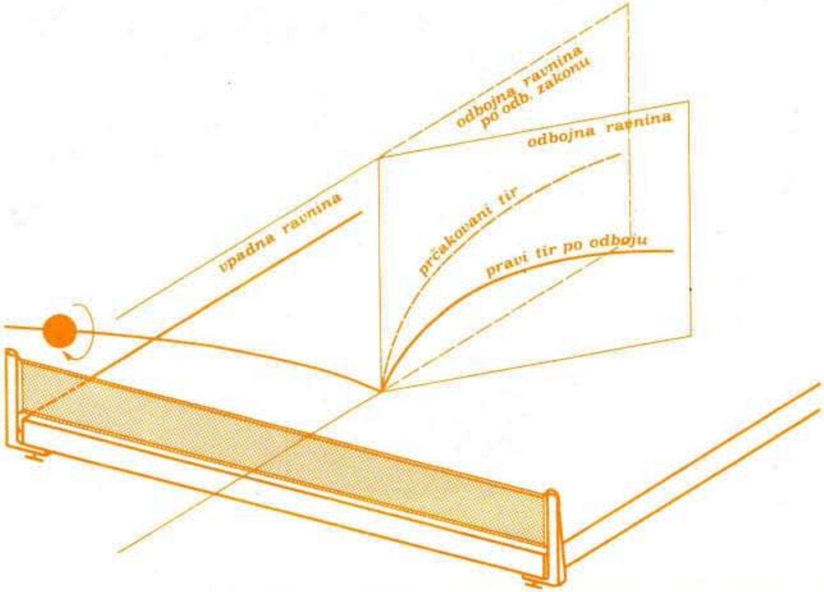


Slika 3: Razmere pri običajnem odboju žoge. Žoga se pred odbojem ni vrtela. Pri žoganju je pogosto tako, saj je težko žogo vreči in jo hkrati močno zavrteti okrog težiščne osi.



Slika 4: Odboj žoge, ki se pred odbojem vrti okrog vodoravne težiščne osi, pravokotne na tir. Žoga se nam lahko odbije nazaj v roke.

gonenja $\vec{F}$ prepreči drsenje žogice po tleh. Ta sila ne opra-



Slika 6: Odboj ping-pong žogice pri top-spin udarcu. Žogica se odbije "postrani". Odbojna ravnina, v kateri je težiščni tir žogice po odboju, ne sovpada z vpadno ravnino, v kateri leži težiščni tir žogice pred odbojem.

4. Po drugem odboju od tal nam prileti nazaj v roke. Sliki 5a in 5b sta posnetka stroboskopsko osvetljene žogice pri njenih odbojih od tal in vodoravne plošče.

Pri igranju tenisa in namiznega tenisa dobri igralci z loparjem odbijejo žogo in jo pri tem še močno zavrtijo okrog poljubne težiščne osi (top spin). Tir odbite žoge celo ni več v ravnini, ki jo tvorita vpadni tir in pravokotnica na igralno ploskev (glej sliko 6). Odbojni zakon tu čisto odpove.

Andrej Likar

O TEM, ZAKAJ SOLIJO CESTE IN ŠE O ČEM

Posoljena cesta ne poledeni. Navadno je sicer mokra, kar pa je še vedno bolje, kot da bi bila poledenela. Trenje avtomobilskih koles na poledeneli cesti je zelo majhno in na njej rado pride do prometnih nezgod.

Trenje na cesti

V laboratoriju so izmerili *koeficient trenja* za avtomobilsko kolo na asfaltnem cestišču. Na suhem cestišču so dobili okoli 1, na mokrem okoli 3/4 in na poledenelem samo okoli 1/3. Pri merjenju na cesti z vozečim se avtomobilom pa so vse tri vrednosti do dvakrat manjše. Podatki so samo okvirni, saj je koeficient odvisen še od vrste koles, vrste cestne obloge in njene onesnaženosti.

Koeficient trenja k_t nastopa v enačbi

$$F_t = k_t F$$

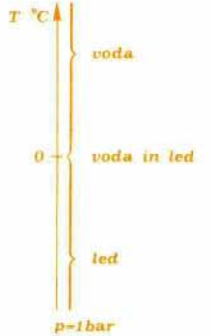
Podlaga deluje s *silo trenja* F_t na telo, ki drsi po njej. Sila F tišči telo na podlago; na vodoravni podlagi je to navadno teža telesa.

Radovedni bralec bi rad zvedel o zadevi kaj več. Vzemimo, da je tlak konstanten in enak navadnemu tlaku 1 bar = 1000 milibar. Pri tem tlaku je *tališče* ledu pri temperaturi 0^oC. Tedaj se led tali, če dovajamo toploto, in voda zmrzuje, če odvajamo toploto. Led je trdna faza in voda kapljevinska faza iste snovi (vode, H_2O), ki ju loči dobro vidna meja. Zanimajmo se za *ravnovesna stanja*. V takem stanju vztraja opazovani sistem, dokler se ne spremenijo zunanje okoliščine; majhna sprememba okoliščin izzove v sistemu le majhno spremembo. Tako smo zavili v *termodinamiko*, ki obravnava velike sisteme in opredeli njihovo stanje z majhnim številom podatkov - *spremenljivk*: temperaturo, tlakom, prostornino...

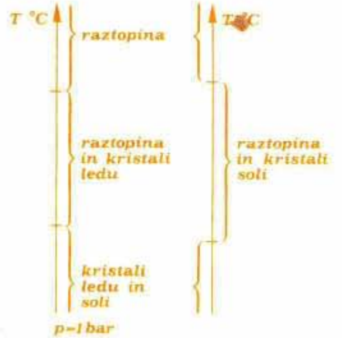
Mislimo si, da je opazovani sistem zaprt v valj, v katerem z batom dosežemo tlak 1 bar. Pri nižji temperaturi od 0^oC imamo v ravnovesju eno samo fazo - led, in pri višji temperaturi prav tako eno samo fazo - vodo. Pri temperaturi 0^oC, to je pri tališču, pa sta v ravnovesju dve fazi - led in voda. S *faznim diagramom* prikažimo, katere faze so v ravnovesju pri katerih vrednostih spremenljivk. Fazni diagram vode pri konstantnem tlaku 1 bar je pri nizki temperaturi kar se da preprost (slika 1). Tako je pri sistemu z eno *sestavino*, se pravi z eno samo čisto snovjo (spojino ali elementom).

V našem primeru moramo vključiti v razpravo še sol (kuhinjsko sol, NaCl). Pred nami je tedaj sistem z dvema sestavinama - vodo in soljo. Še naprej se zanimamo za razmere pri nizki temperaturi in pri konstantnem tlaku. Mislimo si pač, da je sistem zaprt v valju z batom, s katerim uravnavamo tlak. Poleg temperature moramo zdaj upoštevati še eno spremenljivko. To je *koncentracija* soli x, ki jo vpeljemo kot kvocient mase soli in mase sistema, se pravi skupne mase vode in soli. Čista voda ima koncentracijo 0, čista sol pa koncentracijo 1 ali 100%. (Koncentracija vode, to je masa vode, deljena z maso sistema, je kar $1 - x$ in ni neodvisna spremenljivka.)

V kapljevini se sol in voda mešata brez omejitev. Dobimo *raztopino*, ki je ena sama faza, saj v njej ne moremo opaziti meje med vodo in soljo. V trdnini pa se sol in voda sploh ne mešata. Ni kristalov, ki bi vsebovali vodo in sol v spreminjajoči se koncentraciji (takšni enotni fazi bi rekli zlitina ali trdna raztopina). Tako imamo lahko v sistemu eno samo ali pa dve fazi: raztopino in kristale ledu, raztopino in kristale soli,



Slika 1: "Fazni diagram" sistema z eno sestavino pri konstantnem tlaku.

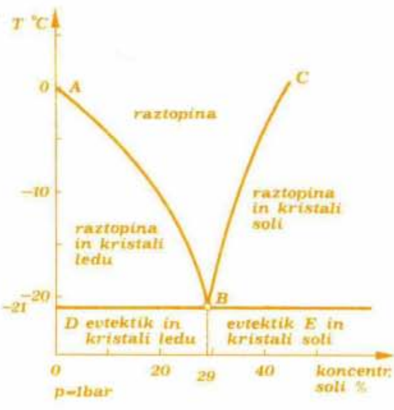


Slika 2: "Fazni diagram" sistema z dvema sestavinama pri konstantnem tlaku pri dveh koncentracijah.

kristale ledu in kristale soli. V faznem diagramu pri konstantnem tlaku in pri konstantni koncentraciji imamo več možnosti (slika 2).

Temperatura, pri kateri se začne izločati iz raztopine led, ustreza tališču čistega ledu. Pri koncentraciji 0 je ta temperatura $0^{o}C$, sicer pa je tem nižja, čim večja je koncentracija. Narišimo zdaj fazni diagram, v katerem nanesemo na abscisno os koncentracijo in na ordinatno os temperaturo. Nad črto ABC je v ravnovesju raztopina (slika 3). Na območju ABD so v ravnovesju raztopina in kristali ledu, na območju BCE pa raztopina in kristali soli. Kot vidimo, ni v ravnovesju raztopine z nižjo temperaturo od $-21^{o}C$ v točki B. To je *evtektična točka* pri koncentraciji 29%. Pri nadaljnjem ohlajanju raztopine v tej točki se raztopina strjuje v *evtetik*, to je drobnozrnato zmes kristalov ledu in kristalov soli. Kristali ledu in soli namreč drug drugega ovirajo pri rasti in se ne morejo razrasti. Pri nižji temperaturi od $-21^{o}C$ imamo v ravnovesju zmes evtetika in kristalov ledu (zmes drobnih kristalov ledu in soli in večjih kristalov ledu), če je koncentracija manjša kot 29%, in zmes evtetika in kristalov soli (zmes drobnih kristalov ledu in soli in večjih kristalov soli), če je koncentracija večja.

Zanima nas, kaj se dogaja v sistemu, ki spočetka ni v ravnovesnem stanju. Vzemimo, da imamo v toplotno izoliranem sistemu na



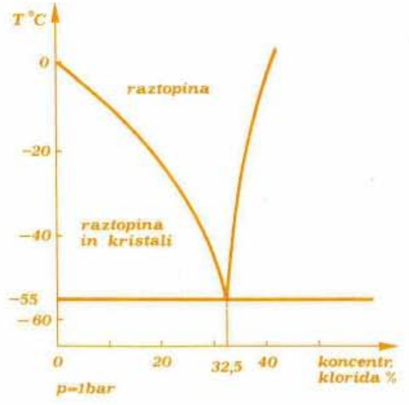
Slika 3: Fazni diagram sistema z dvema sestavinama - vodo in soljo - pri konstantnem tlaku. Narisan je le del diagrama pri temperaturi pod $0^{o}C$ in koncentraciji soli do 40%.

začetku čist led in čisto sol pri temperaturi $0^{o}C$. Tlak naj bo ves čas enak zunanjemu zračnemu tlaku. S faznega diagrama razberemo, da led in sol v teh okoliščinah ne moreta obstajati drug ob drugem. Nekaj ledu se stali in nekaj soli se raztopi v nastali vodi. Raztopina pa je preveč koncentrirana, da bi bila v ravnovesju z ledom. Led se še nadalje tali, sol pa raztaplja; pozneje, ko je raztopljena vsa sol, pa se koncentracija raztopine zmanjšuje. Led potrebuje za taljenje toploto in prav tako potrebuje sol toploto za raztapljanje v vodi. Zato se sistemu znižuje temperatura. Opisane spremembe se nadaljujejo, če je dovolj ledu in soli, dokler ni dosežena temperatura $-21^{o}C$, ki ustreza evtektični točki. Nekdaj so uporabljali zmes ledu in soli kot *"mrazotvorno zmes"*. Z njo so obdali zaprto posodo, v kateri so prevažali na primer sladoled, in vse skupaj toplotno izolirali.

Pri ledu in soli na cesti pride do podobnih sprememb. Upoštevati pa je treba, da nastopa pri tem še zrak. Vendar poskrbi ta le, da je tlak ves čas konstanten, drugače pa se ne udeležuje sprememb (le neznatno se raztaplja v raztopini). Pomembneje je, da sistem, ki ga sestavljata led in sol na cesti, ni toplotno izoliran. Iz okolice, to je od zraka in od tal, prejema toploto, če je njuna temperatura višja kot $-21^{o}C$. Tedaj imamo lahko na cesti v ravnovesju le raztopino. Kako hitro se vzpostavi tako ravnovesje, je odvisno od okoliščin: temperature, debeline ledene ali snežne plasti (če je bila zasnežena cesta prej očiščena ali se je na njej nabrala le jutranja poledica, ta ni velika) in od mase soli, ki so jo posuli na ploskovno enoto ceste, ter od hitrosti vetra.

Mimo kuhinjske soli uporabljajo ponekod za soljenje cest tudi kalcijev klorid $CaCl_2$. Medtem ko kuhinjska sol pri temperaturah pod $-21^{o}C$ ni več učinkovita, je kalcijev klorid uporaben celo do temperature $-55^{o}C$. To je namreč temperatura v evtektični točki pri koncentraciji 32,5% (slika 4). Poleg tega kalcijev klorid manj razjeda kovinske površine od natrijevega, je pa dražji. Omenimo še amonklorid (salmiak NH_4Cl) z evtektično

Slika 4: Fazni diagram sistema z dvema sestavinama - vodo in kalcijevim kloridom - pri konstantnem tlaku. Narisan je le del diagrama pri temperaturi pod 0°C in koncentraciji kalcijevega klorida do 40%.

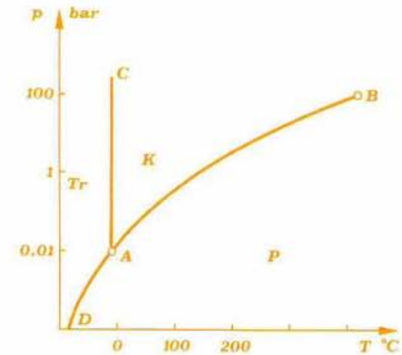


temperaturo -15,4°C. Nekatere podobne soli uporabljajo za utrjevanje smučarskih prog ob toplem vremenu. Nastali evtetik-*"snežni cement"* - pri nižji temperaturi od 0°C je še vedno boljša rešitev kot taleč se, moker sneg pri temperaturi 0°C. V tem primeru je snega več kot na posoljeni cesti in je mogoče za nekaj časa doseči evtektično točko.

Fazni diagram sistema z eno sestavino

Morda so pozornost kakega bralca pritegnili fazni diagrami. Povejmo prav na kratko nekaj več o njih. Začnimo s sistemom z eno sestavino. Vedno vključimo odvisnost od tlaka, "faznega diagrama" pri konstantnem tlaku (slika 1) sploh ne rišemo. Na območjih je v ravnovesju ena faza: plin P ali kapljevina K ali trdnina Tr (slika 5). Na meji območij, to je na krivuljah, sta v ravnovesju dve fazi: AB kapljevina in plin, AC kapljevina in trdnina ter

Slika 5: Fazni diagram sistema z eno sestavino - vodo. Druge snovi imajo v grobem podoben diagram. Led se odlikuje le po tem, da ima pri tališču manjšo gostoto od vode in se tališče z naraščajočim tlakom znižuje. Pri večini drugih snovi je pri tališču gostota trdnine večja od gostote kapljevine in se tališče z naraščajočim tlakom zvišuje. Del diagrama pri nizkih temperaturah in visokih tlakih ni narisan - tam se javljajo druge kristalne oblike ledu.



DA trdnina in plin. (Prva krivulja kaže odvisnost *nasičenega parnega tlaka* od temperature ali *vrelišče* od tlaka, druga odvisnost tališča od tlaka in tretja odvisnost sublimacijske temperature od tlaka.) V sečišču krivulj - v *trojni točki* A - so v ravnovesju tri faze: plin, kapljevina in trdnina. B je *kritična točka*. Nad kritično temperaturo, ki ji ustreza, ni mogoče utekočiniti plina s še tako visokim tlakom.

V sistemu z eno sestavino velja *fazno pravilo* (odkril ga je J.W. Gibbs 1875):

število neodvisnih spremenljivk = 3 - število faz

Kot neodvisni spremenljivki nastopata tlak in temperatura, če katero izmed njiju lahko spreminjamo neodvisno od vrednosti drugih spremenljivk. Število neodvisnih spremenljivk je: 2 na območjih, na katerih je v ravnovesju ena faza, 1 na krivuljah, na katerih sta v ravnovesju dve fazi, in 0 v trojni točki, v kateri so v ravnovesju tri faze.

Fazni diagram sistema z dvema sestavinama

Pri tem faznem diagramu nastopa dodatna spremenljivka, zato vzamemo tlak za parameter. V obravnavo vključimo še plinsko fazo. V njej se vse snovi mešajo brez omejitve, zato imamo vedno enotno plinsko fazo.

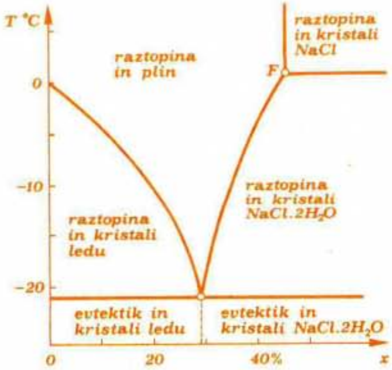
Za sistem z dvema sestavinama velja fazno pravilo

število neodvisnih spremenljivk = 4 - število faz

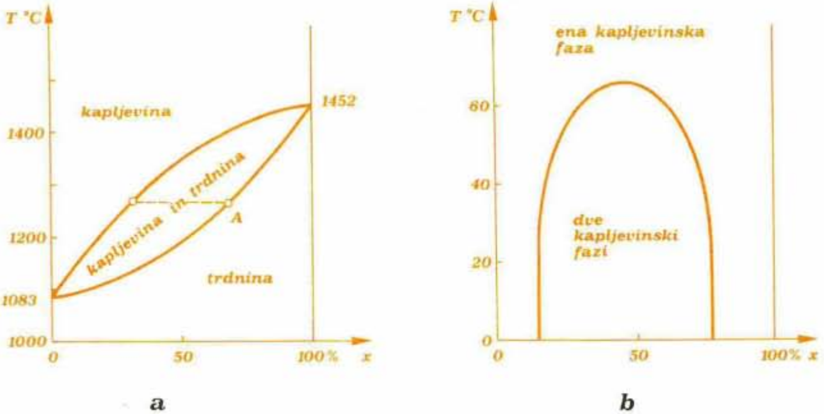
Kot neodvisne spremenljivke nastopajo tlak, temperatura in koncentracija ene sestavine, če katero izmed njih lahko spreminjamo neodvisno od drugih.

(Splošna oblika faznega pravila je:
število neodvisnih spremenljivk = število sestavin + 2 - število faz .)

Območje nad črto ABC (slika 6) ustreza ravnovesju dveh faz - plina in raztopine, tako da imamo dve neodvisni spremenljivki. Brž ko podamo tlak in temperaturo, je določena koncentracija. Na krivulji AB so v ravnovesju tri faze - plin, raztopina in kristali ledu, tako da imamo le eno neodvisno spremenljivko. Brž ko podamo tlak, sta določeni temperatura in koncentracija. V evtektični točki so v ravnovesju štiri faze - plin, raztopina, kristali ledu in kristali soli. Neodvisnih spremenljivk ni, tlak, temperatura in koncentracija so določeni.



Slika 6: Fazni diagram sistema vode in soli pri konstantnem tlaku z vključitvijo plinske faze in koncentracije soli do 50% (to je le dopolnjena slika 3). Voda in sol se v kapljevini neomejeno mešata, v trdnini pa sploh ne.



Slika 7: Fazni diagram sistema z dvema sestavinama - bakrom in nikljem, ki se neomejeno mešata v trdnem (a), in del faznega diagrama sistema z vodo in fenolom, ki se v kapljevinskem stanju ne mešata neomejeno (b). Pri taljenju kapljevine s koncentracijo A ima prva kaplja kapljevine koncentracijo B in obratno, pri strjevanju kapljevine s koncentracijo B ima prvi kristal trdnine koncentracijo A. (Z *x* je označena koncentracija niklja oziroma vode.) Pribijmo, da ustreza točki na diagramu ravnovesno stanje. Prehoda med dvema ravnovesnima stanjema ne moremo pojasniti samo s faznim diagramom, ampak le po dodatnih podatkih o spremembah, ki jih navadno spremlja dovajanje ali odvajanje toplote. Tak prehod lahko vnesemo v diagram kot črto med točko, ki ustreza začetnemu stanju, in točko, ki ustreza končnemu stanju, samo če so vmesna stanja, preko katerih poteka, vsaj približno ravnovesna. Sprememba je v tem primeru zelo počasna.

Vse to velja le, dokler v sistemu ni *kemijske reakcije*. Če poteka kemijska reakcija, je drugače. V točki F pride v sistemu voda-kuhinjska sol do reakcije

$$NaCl.2H_2O \rightarrow NaCl + 2H_2O$$

Doslej smo mislili s kristali soli na kristale dihidrata $NaCl.2H_2O$. Pri dovolj veliki koncentraciji soli pa obstajajo kristali kuhinjske soli NaCl brez kristalne vode. V točki F (slika 6) so v ravnovesju štiri faze - plin, raztopina, kristali dihidrata $NaCl.2H_2O$ in kristali soli NaCl brez kristalne vode. Po faznem pravilu v prejšnji obliki bi sklepali, da je v točki F v ravnovesju pet faz, saj imamo zdaj sistem s tremi sestavinami. Fazno pravilo pa ne velja v prejšnji obliki: zaradi kemijske reakcije so razmere takšne, kot da bi imeli eno sestavino manj.

Fazni diagram kalcijevega klorida je še bolj zapleten. Doslej smo s kristali kalcijevega klorida mislili na kristale heksahidrata $CaCl_2.6H_2O$. Pri naraščajoči koncentraciji in naraščajoči temperaturi pa se pojavijo kristali $CaCl_2.4H_2O$, $CaCl_2.2H_2O$, $CaCl_2.H_2O$ in $CaCl_2$.

Pri različnih parih sestavin naletimo na različne fazne diagrame. Navedimo samo zgled za sistem, v katerem se sestavini v trdnem neomejeno mešata in imamo eno samo trdno fazo (zlitino ali trdno raztopino) (slika 7a). Drugi zgled pa je sistem, v katerem se niti kapljevini ne mešata neomejeno in obstajata na izbranem območju dve kapljevinski fazi (slika 7b).

Fazni diagrami so izredno raznolični: pomislimo samo na različne kemijske reakcije in še posebej na možnost, da imamo več kot dve sestavini. Fazni diagrami so zelo pomembni v kemiji in metalurgiji.

Janez Strnad

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
8. letnik, šolsko leto 1980/81, 2. številka, str. 65 - 128.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

List naročajte na naslov Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Komisija za tisk, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, pp 227, tel.štev. (061) 265-061/53, štev.žiro računa

50101 - 678 - 47233

Naročnina za šolsko leto 1980/81 za posamezna naročila je 62,50 din, za skupinska naročila pa 50.-din; za inozemstvo 5 $ = 100.-din, 4000 Lit, 70 Asch. Posamezna številka stane 15.-din. Poštnina plačana v gotovini na pošti 61102 List sofinancirata ISS in RSS. List izhaja petkrat letno. Naklada 21.000 izv. Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "Delo", Ljubljana.

MATEMATIKA

METODA ZAPOREDNIH PRIBLIŽKOV

Približno reševanje enačb je eno važnih poglavij uporabne matematike, ki je doživelo v zadnjem času velike spremembe. Čedalje večja razširjenost računalnikov in žepnih kalkulatorjev je omogočila uporabo metod, ki včasih, ko je bilo treba vse računanje opraviti "peš", niso bile kaj prida v čislih. Tudi metoda zaporednih približkov je ena takih metod. Pa si poglejmo, kako rešujemo enačbe po tej metodi!

Denimo, da ima enačba $f(x) = 0$ na intervalu $|a,b|$ natanko en koren x^* (to je tako število, da je $f(x^*) = 0$), pa ga želimo izračunati. Enačbo spremenimo v ekvivalentno obliko $x = g(x)$, tako da ima tudi nova enačba na intervalu $|a,b|$ le koren x^*. Običajno lahko to storimo celo na več načinov, kot bomo videli na primerih. Zdaj pa poskusimo takole. Izberimo na intervalu $|a,b|$ poljubno število x_0 za začetni približek. Vstavimo x_0 v funkcijo $g(x)$ in izračunajmo $x_1 = g(x_0)$. x_1 vzamemo za nov približek korena x^*. Spet ga vstavimo v funkcijo $g(x)$ in dobimo $x_2 = g(x_1)$. S ponavljanjem tega postopka sestavimo zaporedje števil $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Vsakokrat dobimo naslednje število x_{n+1} iz prejšnjega po pravilu $x_{n+} = g(x_n)$.

Radi bi, da bi se tako dobljena števila vedno bolj približevala iskanemu korenu x^*. Z drugo besedo, absolutne vrednosti razlik

$$|x_0 - x^*|,\ |x_1 - x^*|,\ |x_2 - x^*|,\ |x_3 - x^*|,\ \ldots$$

postajajo vse manjše in se približujejo številu 0. V tem primeru so števila x_0, x_1, x_2, ... vedno boljši približki korena x^*. Lahko rečemo, da smo enačbo $f(x) = 0$ rešili, saj znamo izračunati iskani koren x^* s ponavljanjem opisanega postopka na poljubno število decimalnih mest natančno.

Pokažimo, da naše želje niso popolnoma brezupne. Vzemimo enačbo $x^2 - 11x + 10 = 0$. Vsakdo se lahko prepriča, da ima ta enačba korena 1 in 10. Poskusimo ju izračunati po opisani metodi! Enačbo lahko preoblikujemo v naslednje ekvivalentne oblike:

$$x = (x^2 + 10)/11 \ , \quad x = 11 - 10/x \ , \quad x = \sqrt{11x - 10}$$

in podobno.

Bralec lahko poišče še kakšno drugo. Mi se bomo zaenkrat zadovoljili kar s prvo. Desno stran označimo z $g(x)$

$$x = g(x) = (x^2 + 10)/11$$

Približke bomo torej računali po pravilu:

$$x_{n+1} = (x_n^2 + 10)/11$$

Izberimo za začetni približek kar $x_0 = 0$. Zapišimo prvih nekaj približkov v tabelo.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.0000	0,9091	0,9842	0,9972	0,9995	0,9999	1.0000

Po šestih korakih je rezultat na štiri decimalke natančen. Poskusimo še z začetnim približkom $x_0 = 2$, ki je večji od korena.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2.0000	1.2727	1.0563	1.0105	1.0019	1.0004	1.0000

Tudi zdaj smo dobili pravilen rezultat po šestih korakih.

Z uspehom smo nadvse zadovoljni. Tako opogumljeni se lotimo še računanja drugega korena. Izberimo za začetni približek npr. $x_0 = 11$ in računajmo naslednje približke.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
11.0000	11.9090	13.8024	18.2278	31.1140	88.9165

Zdaj pa nismo zadovoljni! Približki ne kažejo nikakršnega namena, da bi se približali korenu 10. Če kljub vsemu vztrajamo in računamo naprej, odpove naš kalkulator že po nekaj korakih, saj postanejo števila prevelika. Zaporedje je "podivjalo". Morda smo začeli s preslabim približkom? Bralec naj poskusi z drugimi začetnimi približki, ki so bližje 10, pa bo videl, da se mu ne bo godilo nič bolje. Če bo vzel $x_0 > 10$, bodo števila x_n narasla čez vse meje, pri $x_0 < 10$ pa se bodo približala prvemu korenu 1. Korena s tako izbrano enačbo $x = g(x)$ ne moremo izračunati.

Pa poskusimo z drugačno funkcijo $g(x)$. Izberimo npr. drugo obliko $x = 11 - 10/x$ in računajmo zaporedne približke po pravilu

$$x_{n+1} = 11 - 10/x_n$$

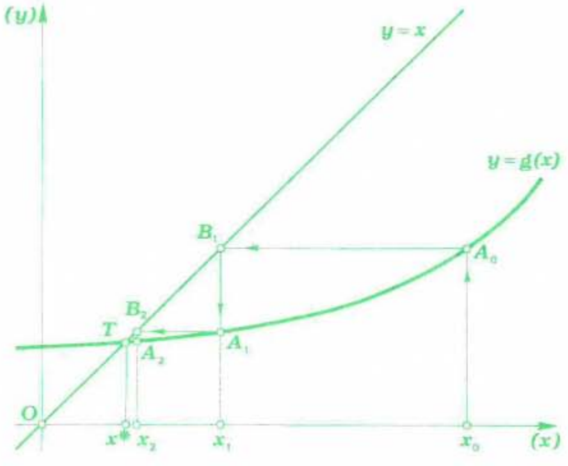
Če zdaj začnemo z $x_0 = 11$, nam gre prav lepo:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
11.0000	10.0909	10.0090	10.0009	10.0001	10.0000

Bralec naj poskusi s to obliko enačbe izračunati še koren 1. Kaj kmalu bo ugotovil, da mu to ne bo uspelo.

Primeri so nam pokazali, da je oblika enačbe $x = g(x)$, v katero prevedemo enačbo $f(x) = 0$, za izračun izbranega korena zelo pomembna. Za različne korene je treba običajno uporabiti različne oblike enačbe. Poskušali bomo ugotoviti, kakšnim pogojem mora zadoščati funkcija $g(x)$, da bomo pri primerno izbranem začetnem približku korena lahko ta koren z nekaj ponovitvami izračunali do želene natančnosti.

Najlepšo predstavo o metodi bomo dobili po geometrični poti. Ko iščemo koren enačbe $x = g(x)$, iščemo v bistvu presečišče T krivulje $y = g(x)$ s premico $y = x$ (simetralo lihih kvadrantov). Točka T ima koordinati (x^*, x^*). Oglejmo si na sliki 1, kako dobivamo zaporedne približke $x_0, x_1, x_2, \ldots$

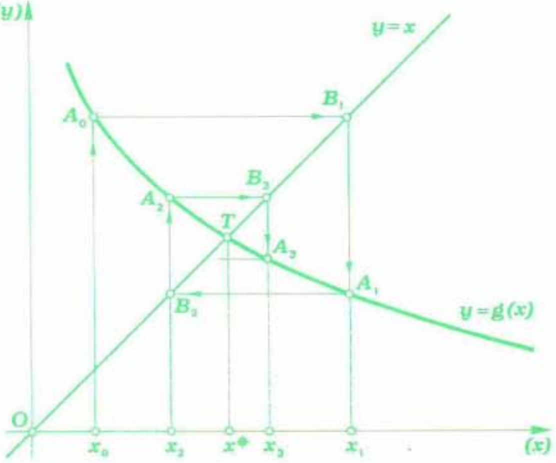


Slika 1

Izberemo x_0 in izračunamo $g(x_0)$. Točka $A_0(x_0, g(x_0))$ leži na krivulji $y = g(x)$. Število $g(x_0) = x_1$ je novi približek. Iz točke A_0 potegnemo vzporednico z osjo (x) in poiščemo presečišče s premico $y = x$. Tako dobimo točko $B_1(x_1, x_1)$. Spet izračunamo $g(x_1) = x_2$ in dobimo točko $A_1(x_1, g(x_1))$ na krivulji $y = g(x)$. Postopek nadaljujemo. Tako se po lomljeni črti $A_0B_1A_1B_2A_2B_3 \ldots$ približujemo iskanemu presečišču T.

V našem primeru se približki x_0, x_1, x_2, ... vsi z iste strani približujejo korenu x^*.

Poglejmo si še primer, ko je funkcija $g(x)$ blizu presečišča s premico $y = x$ padajoča (slika 2). Približki se tudi v tem

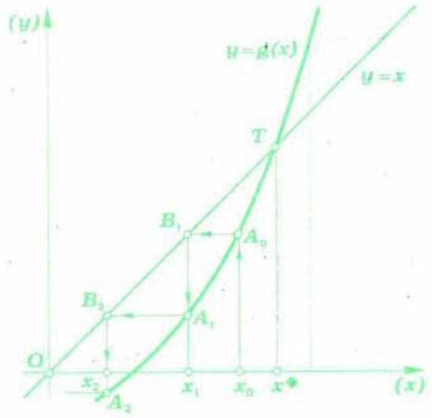


Slika 2

primeru približujejo korenu x^*, le da zdaj, kot pravimo temu, *oscilirajo*: eden je manjši od x^*, naslednji večji, potem spet manjši itd. Lomljena črta $A_0B_1A_1B_2A_2B_3$... je neke vrste spirala, ki se steka v iskano presečišče T.

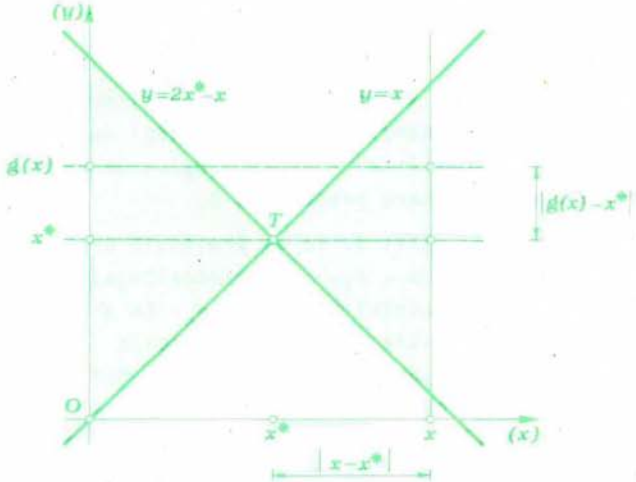
Primer, narisan na sliki 3, se od prejšnjih dveh bistveno razlikuje. Števila x_0, x_1, x_2, ... se oddaljujejo od korena x^*, kakorkoli izberemo začetni približek x_0. Če primerjamo s sliko 1, ugotovimo, da narašča na sliki 1 funkcija $g(x)$ počasneje kot premica $y = x$, na sliki 3 pa narašča hitreje kot premica $y = x$. Bralec naj na primeru pokaže, da se števila x_0, x_1, x_2, ... oddaljujejo od korena x^* tudi tedaj, ko funkcija $g(x)$ v bližini korena x^* prestrmo pada.

Oglejmo si naslednjo sliko.



Slika 3

Oglejmo si naslednjo sliko.



Slika 4

Šrafirano območje na sliki omejujeta premici $y = x$ in $y = 2x^* - x$. Denimo, da funkcija $g(x)$ poteka znotraj šrafiranega območja. Iz slike 4 je razvidno, da je tedaj

$$x \neq x^* \Rightarrow |g(x) - x^*| < |x - x^*|$$

Če vstavimo za x n-ti približek x_n, dobimo

$$|x_{n+1} - x^*| = |g(x_n) - x^*| < |x_n - x^*|$$

torej je vsak naslednji približek boljši od prejšnjega. Če pa funkcija $g(x)$ poteka zunaj šrafiranega območja, je vsak naslednji približek slabši od prejšnjega, saj velja sedaj

$$|g(x) - x^*| > |x - x^*|$$

Vprašanje: kaj se zgodi, če je $g(x) = x$ ali $g(x) = 2x^* - x$?

Z dobljenim rezultatom se še ne moremo zadovoljiti, saj ne vemo, koliko je nek približek boljši od prejšnjega in kako velika je napaka $|x_n - x^*|$.

Na ta vprašanja odgovarja naslednji izrek.

Izrek. Naj bo $|a,b|$ tak interval, da tudi funkcijske vrednosti $g(x)$ ležijo na $|a,b|$ za vsak $x \in |a,b|$. Poleg tega naj obstaja tako število c, $0 < c < 1$, da velja neenačba

$$|g(x) - g(x')| \leq c\,|x - x'|$$

za vsak par števil $x, x' \in |a,b|$. Potem ima enačba $x = g(x)$ na intervalu $|a,b|$ natanko en koren x^*. Kakorkoli izberemo na intervalu $|a,b|$ število x_0, so števila $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, ... vedno boljši približki korena x^*. Z napako n-tega približka x_n velja ocena

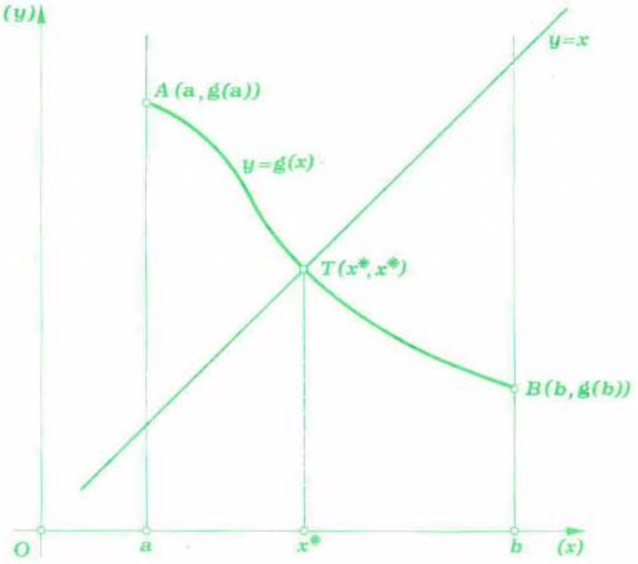
$$|x_n - x^*| \leq c^n\,(b-a)$$

torej postane napaka z rastočim n poljubno majhna.

Dokaz. Po pogojih izreka je za vsak $x \in |a,b|$ $a < g(x) < b$. Torej je tudi $a \leqq g(a)$ in $g(b) \leqq b$. Zato leži točka $A(a, g(a))$ nad premico $y = x$, točka $B(b,g(b))$ pa pod premico $y = x$ (glej sliko 5). Ker je graf krivulje $g(x)$ "nepretrgan", preseče v neki točki $T(x^*,x^*)$ premico z enačbo $y = x$. Pokažimo, da je taka točka samo ena. Recimo, da bi veljalo tudi $x_* = g(x_*)$. Potem dobimo iz pogoja za funkcijo $g(x)$

$$|x^* - x_*| = |g(x^*) - g(x_*)| \leqq c.|x^* - x_*|$$

Ker je $c < 1$, je to mogoče le, če je $|x^* - x_*| = 0$, torej $x^* = x_*$. To pomeni, da ima enačba $x = g(x)$ na intervalu $|a,b|$ natanko en koren x^*



Slika 5

Izberimo zdaj število $x_o \in |a,b|$. Prav gotovo je $|x_o - x^*| \leqq |b - a|$. Po vrsti dobimo naslednje ocene

$$|x_1 - x^*| = |g(x_o) - g(x^*)| \leqq c.|x_o - x^*| \leqq c.(b - a)$$
$$|x_2 - x^*| = |g(x_1) - g(x^*)| \leqq c.|x_1 - x^*| \leqq c^2.(b - a)$$
$$|x_3 - x^*| = |g(x_2) - g(x^*)| \leqq c.|x_2 - x^*| \leqq c^3.(b - a)$$
....

Na n-tem koraku dobimo tako oceno za napako n-tega približka:

$$|x_n - x^*| \leqq c^n.d = c^n.|x_o - x^*| \leqq c^n.(b - a)$$

Velja tole: za vsako število c, $0 < c < 1$, postajajo števila c, c^2, c^3, c^4... vse manjša in gredo proti 0.

Primer: $c = 0.5$, $c^2 = 0,25$, $c^3 = 0,125$, $c^4 = 0,0625$, ...;
$c = 0,1$, $c^2 = 0,01$, $c^3 = 0,001$, $c^4 = 0,0001$, ...;

Števila gredo proti 0 tem hitreje, čim manjši je c. Seveda gredo proti 0 tudi števila $c.(b - a)$, $c^2.(b - a)$, $c^3.(b - a)$,..., s tema pa tudi napaka n-tega približka $|x_n - x^*|$. Izrek je s tem dokazan.

Običajno uporabimo za prenehanje računanja približkov tole enostavno pravilo. Približke računamo toliko časa, da se vsa decimalna mesta, na katera računamo, ponovijo pri dveh zaporednih približkih.

Primer. Rešimo enačbo $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$. Če vstavimo števili $x = 0$ in $x = 1$ v funkcijo $f(x)$, dobimo $f(0) = 1$ in $f(1) = -3$. Ker sta vrednosti nasprotno predznačeni, leži na intervalu $|0,1|$ vsaj en koren naše enačbe. Prav tako se prepričamo, da leži vsaj en koren tudi na intervalih $|2,3|$ in $|-3,-2|$. Ker ima polinom tretje stopnje največ tri korene, leži na vsakem od teh intervalov natanko en koren. Izračunajmo najprej tistega na intervalu $|0,1|$ na štiri decimalke natančno. Enačbo zapišemo v obliki

$$x = g(x) = (x^3 + 1)/5$$

Pokažimo, da zadošča funkcija $g(x)$ pogojem našega izreka!
Ker je za $x \in |0,1|$ tudi $x^3 \in |0,1|$, je

$$1/5 \leqq g(x) \leqq 2/5 , \quad x \in |0,1|$$

Ocenimo razliko $|g(x) - g(x')|$:

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x')| &= |(x^3 + 1)/5 - (x'^3 + 1)/5| = \\ &= 1/5.|x^2 + x.x' + x'^2|.|x - x'|\end{aligned}$$

Za $x, x' \in (0,1)$ je $|x^2 + x.x' + x'^2| \leqq 3$. Torej

$$|g(x) - g(x')| \leqq 3/5.|x - x'|$$

$g(x)$ zadošča pogojem izreka s $c = 3/5$. Izberimo za začetni približek kar $x_0 = 0$. Tako dobimo

x_0	x_1	x_2	x_3
0.0000	0.2000	0.2016	0.2016

Končamo s tretjim približkom, saj se x_2 in x_3 na 4 decimalke ujemata.

Naloga. Izračunaj še druga dva korena. Obakrat računaj približke po formuli $x_{n+1} = \sqrt[3]{5x_n - 1}$. Za začetni približek vzemi enkrat $x_0 = 2$, drugič pa $x_0 = -3$. Če računaš s kalkulatorjem, bodi pri računanju negativnega korena previden. Približki x_n so zdaj negativni, zato je treba zapisati zgornjo formulo v obliki $x_{n+1} = -\sqrt[3]{|5x_n - 1|}$, sicer bo kalkulator ugotovil "napako".

Primerne oblike enačbe ni prav lahko najti s samim poskušanjem. Zato si bomo zdaj ogledali nek enostaven način, kako lahko tako obliko vedno najdemo. Enačba $f(x) = 0$ je prav gotovo ekvivalentna enačbi $x = x + p.f(x)$, kjer je p neka od 0 različna konstanta. Konstanto p skušamo določiti tako, da bo funkcija $g(x) = x + p.f(x)$ v bližini korena, ki ga računamo, zadoščala pogojem našega izreka s čim manjšim številom c.

Primer. Z metodo zaporednih približkov izračunajmo kvadratni koren $\sqrt{r}$. Rešujemo torej enačbo $x^2 = r$. Najprej jo zapišimo v obliki $f(x) = r - x^2 = 0$, potem pa

$$x = g(x) = x + p.(r - x^2)$$

Ocenimo razliko $|g(x) - g(x')|$:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= |x - x' - p.(x^2 - x'^2)| = \\ &= |x - x' - p.(x - x').(x + x')| \leqq \\ &\leqq |x - x'|.|1 - p.(x + x')| \end{aligned}$$

Število p določimo tako, da bo drugi faktor za $x = x' = x_0$

enak 0:

$$p = 1/(2.x_0)$$

Približke bomo torej računali po formuli

$$x_{n+1} = x_n + (r - x_n^2)/(2x_0)$$

Vzemimo npr. $r = 30$, $x_0 = 5$

$$x_{n+1} = 3 + x_n - x_n^2/10$$

Dobljene približke spet zapišemo v tabelico

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5.0000	5.5000	5.4750	5.4774	5.4772	5.4772

Torej je $\overline{30} \doteq 5,4772$ na 4 decimalke natančno.

Če za p ne vzamemo konstante, ampak kakšno primerno izbrano funkcijo $p = p(x)$, lahko dobimo še boljše rezultate.

Naloga. V zgornjem primeru smo ocenili

$$|g(x) - g(x')| \leqq |x - x'|.|1 - p.(x + x')|$$

Izberimo p tako, da bo desni člen $|1 - p.(x + x')|$ čim manjši, ko bo x' blizu x , torej

$$p = p(x) = 1/(2x)$$

Če to vstavimo v formulo za računanje približkov, dobimo

$$x_{n+1} = x_n + (r - x_n^2)/(2x_n) = (x_n + r/x_n)/2$$

Izračunaj $\sqrt{30}$ z istim začetnim približkom $x_0 = 5$ po tej formuli! Kaj opaziš?

Naloga. Na podoben način lahko izpeljemo formulo za računanje tretjega korena $\sqrt[3]{m}$. To je rešitev enačbe

$$x^3 = m$$

Funkcijo $g(x)$ poiščemo tako kot prej v obliki

$$g(x) = x + p(m - x^3)$$

Pokaži, da je zdaj najbolje izbrati $p = 1/(3x_0^2)$, kjer je x_0 začetni približek. Izračunaj na ta način nekaj tretjih korenov. Nato pa zamenjaj konstanto p s funkcijo $p(x) = 1/(3x^2)$ in ponovi račun.

V naših primerih smo po metodi zaporednih približkov računali le korene t.i. *algebraičnih funkcij* (to so funkcije, v katerih nastopajo samo potence in koreni). Metoda pa je zelo uspešna tudi pri enačbah, kjer nastopajo *transcendentne funkcije*. Primeri takih funkcij so trigonometrične, eksponentna, logaritemska in druge funkcije. Vendar je za transcendentno funkcijo $g(x)$ običajno težje pokazati, da zadošča pogojem izreka. Pomagati si moramo s pojmom *odvoda* funkcije. Bralcu, ki ga zanima več o reševanju takih enačb in mu odvajanje ni tuje, priporočamo knjižico |1|.

Literatura:

|1| Zvonimir Bohte: Numerično reševanje enačb. DZS, Ljubljana 1974.

|2| Bogoljub Stanković: Teorema o nepokretnoj tački. Matematička biblioteka 39, Beograd.

Franci Forstnerič

SREČNO 1981

ŠTEVILO CELOŠTEVILSKIH TRIKOTNIKOV Z DANIM OBSEGOM

O celoštevilskih trikotnikih, to je o trikotnikih, ki imajo za dolžine stranic naravna števila, je bilo v Preseku objavljeno že nekaj sestavkov. Tokrat bomo odgovorili na vprašanje, koliko je takih trikotnikov, ki imajo za obseg predpisano število .

Dogovorimo se, da bomo primere, ko imamo za dolžine stranic ista tri števila le morda v drugem vrstnem redu, šteli le enkrat. Vprašanje lahko zastavimo tudi v obliki: koliko je vseh trojic naravnih števil (a,b,c) , za katere velja $a \leqq b \leqq c$, $c<a+b$ in $a+b+c=n$. Označimo s $T(n)$ število takih trojic. Za majhne vrednosti števila n hitro najdemo vrednosti za $T(n)$:
$T(3) = 1$ (trikotnik $(1,1,1)$), $T(4) = 0$, $T(5) = 1$ (trikotnik $(1,2,2)$), $T(6) = 1$ (trikotnik $(2,2,2)$), $T(7) = 2$ (trikotnika $(1,3,3)$ in $(2,2,3)$), $T(8) = 1$, $T(9) = 3$, ...

Če poiščemo vse mogoče razdelitve števila n na tri cela pozitivna števila

$$n = a + b + c$$

še ni rečeno, da trojica (a,b,c) predstavlja dolžine stranic nekega trikotnika. Kot vemo, bo to res, če bo dolžina poljubne stranice večja od razlike in manjša od vsote drugih dveh. Hitro se lahko prepričamo, da bo v primeru, ko je $a \leqq b \leqq c$ to res natanko tedaj, ko bo $c < a+b$. Poiskati moramo torej število mogočih razcepitev števila n na tri naravna števila a,b in c , za katere velja

$$a \leqq b \leqq c \quad \text{in} \quad c < a+b$$

Število razdelitev števila n na tri dele, $n = a+b+c$, za katere velja prvi pogoj, znamo izračunati (glej Presek VIII/1). Dobimo naslednje število

$$r_3'(n) = ((n-3)^2+6(n-3)+5+3\mathrm{D}(2,n-3)+4\mathrm{D}(3,n-3))/12$$

pri čemer je $\mathrm{D}(i,j) = 1$, če je število j deljivo z i in $\mathrm{D}(i,j) = 0$, če ni. Lahko pa uporabimo tudi eno od formul

$$r_3'(n) = \{n^2\}_{12}/12 = \{n^2/12\}$$

kjer je $\{m\}_{12}$ k številu m najbližji večkratnik števila 12 in $\{x\}$ najbližje celo število številu x. Da velja res tudi druga zveza, se bo lahko prepričal bralec sam.

V številu razdelitev $r_3'(n)$ pa jih je za naš primer nekaj preveč, vse trojice namreč ne morejo biti dolžine stranic nekega trikotnika. Odšteti je treba vse primere, ko je $c \geqq a+b$. Če označimo $a+b = j$, potem do porazdelitev števila n na tri dele lahko pridemo tudi tako, da najprej razdelimo $n = j+c$, kjer j lahko preteče vsa naravna števila med 2 in $2n/3$ (vključno). (Da mora biti $j \leqq 2n/3$, ugotovimo na naslednji način: najprej gotovo velja $c \geqq n/3$, saj bi v nasprotnem primeru bila vsa tri števila pod $n/3$ in njihova vsota ne bi bila enaka n. Od tod pa sledi $j = a+b = n-c \leqq$ $\leqq 2n/3$). Pri vsakem j naredimo še $r_2'(j)$ razcepov na dva dela $j = a+b$, $a \leqq b$ in dobimo vse razdelitve, ki smo jih omenili zgoraj. Od dobljenih razdelitev odštejemo tiste, ki ne dajo trikotniške trojice. Odšteti moramo vse razcepe, pri katerih je $c \geqq a+b$, to se pravi $c \geqq j$ ali $j \leqq n-j$, kar pomeni $j \leqq n/2$. Vse prepovedane trojice dobimo, če seštejemo za vsak j, $j=2,3,\dots,k$, število njegovih razcepitev na dva cela pozitivna sumanda ($j=a+b$, $a \leqq b$), teh razcepitev pa je $r_2'(j)$. Število k je največje celo število, ki ne presega števila $n/2$. Odšteti moramo torej vsoto

$$S_n = r_2'(2) + r_2'(3) + \dots + r_2'(k)$$

Pri tem upoštevajmo obrazec za $r_2'(j)$, ki smo ga srečali v Preseku VIII/1

$$r_2'(j) = (j - 1 + \mathrm{D}(2,j))/2$$

Upoštevali pa bomo tudi obrazec za vsoto prvih m naravnih števil

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = m(m + 1)/2$$

ki smo ga srečali v članku o matematični indukciji (Presek V/2). Ločiti moramo štiri možnosti: če je število n oblike $n = 4s$, dobimo

$$\begin{aligned} S_n &= ((1 + 1) + (2 + 0) + (3 + 1) + \dots + (2s - 1 + 1))/2 = \\ &= ((2s - 1).2s/2 + s)/2 = s^2 = n^2/16 \end{aligned}$$

Podobno za n oblike $n = 4s+1$ velja

$$\begin{aligned} S_n &= ((1 + 1) + (2 + 0) + (3 + 1) + \dots + (2s - 1 + 1))/2 = \\ &= s^2 = (n - 1)^2/16 = (n^2 - 2n + 1)/16 \end{aligned}$$

Na prav tak način dobimo tudi

$$S_n = (n - 2)(n + 2)/16 = (n^2 - 4)/16 \text{ , če je } n \text{ oblike } n = 4s+2$$

in

$$S_n = (n - 3)(n + 1)/16 = (n^2-2n-3)/16 \text{ , če je } n \text{ oblike } n = 4s+3$$

Lahko se prepričamo, da vse štiri rezultate lahko pišemo v eni obliki, če uporabimo simbol $\mathrm{D}(i,k)$

$$S_n = (n^2 - 2n\mathrm{D}(2,n-1) + \mathrm{D}(4,n-1) - 3\mathrm{D}(4,n-3) - 4\mathrm{D}(4,n-2))/16$$

Če označimo s $\lfloor p \rfloor$ največje celo število, ki ne presega števila p (na primer $\lfloor 7/3 \rfloor = 2$, $\lfloor 4,2 \rfloor = 4$), lahko izraz za število S_n pišemo v obliki

$$S_n = \lfloor n/4 \rfloor . \lfloor (n+2)/4 \rfloor$$

ki jo lahko hitro preverimo, če se ozremo na zgornje štiri oblike za S_n . Število različnih celoštevilskih trikotnikov, ki imajo za obseg dano število n, je torej dano z obrazcem

$$T(n) = \{n^2/12\} - \lfloor n/4 \rfloor . \lfloor (n+2)/4 \rfloor \quad , \; n = 3,4,5,\dots$$

Lahko pa ta izraz pišemo še v kakšni drugi obliki, ena med njimi je, da ga izrazimo s simboli $\mathrm{D}(i,k)$. V ta namen damo izraza za $r_3'(n)$ in S_n na skupni imenovalec in ju uredimo

$$T(n) = (n^2 + (6n+12)\mathrm{D}(2,n-1) + 16\mathrm{D}(3,n-3) - 3\mathrm{D}(4,n-1) + 9\mathrm{D}(4,n-3) + 12\mathrm{D}(4,n-2) - 16)/48$$

Pišimo števec v obliki $n^2 + 6n\mathrm{D}(2,n-1) + p$, pri tem je p enak enemu od števil -16, -7, -4, 0, 5, 9, 12 ali 21, glede na to, kako je z deljivostjo števil $n-1$ z 2 in 4, $n-2$ s 4 ter $n-3$ s 3 in 4. Na isti način kot smo za število $r_3'(n)$, lahko tudi sedaj uporabimo oznako $\{m\}_{48}$ za k številu m najbližji večkratnik števila 48 ali pa $\{x\}$ za najbližje celo število k številu x. Torej zapišemo

$$T(n) = \{n^2 + 6n\mathrm{D}(2,n-1)\}_{48}/48 , \quad n=3,4,5,\ldots$$

ali pa

$$T(n) = \{(n^2 + 6n\mathrm{D}(2,n-1))/48\} , \quad n=3,4,5,\ldots$$

Zadnja oblika je posebno ugodna pri računanju števila $T(n)$ pri dani vrednosti števila n, pri tem si lahko pomagamo na primer s kalkulatorjem.

Število $T(n)$ ima nekatere zanimive lastnosti kot na primer:

1) $T(2m) = T(2m-3)$, $m=3,4,5,\ldots$
2) $T(2m+12) = T(2m) + m + 3$, $m=2,3,4,\ldots$
3) Naj bo $n > 2$ in sodo število, število r pa tako celo število, da velja: $n = 12k + r$, $4 \leq r \leq 14$, $k = 0,1,2,\ldots$. Potem velja

$$T(n) = (n^2 - r^2)/48 + T(r)$$

Te lastnosti boš lahko dokazal sam, morda najhitreje iz druge formule za $T(n)$, če jo posebej izpišeš za vse situacije.

Reši še naslednji nalogi:

4) Za kateri n je $T(n) = n$?
5) Naj bo n praštevilo. Dokaži, da je tedaj vseh $T(n)$ trikotniških trojic takih, da jih sestavljajo po tri tuja si števila!

Ob koncu dodajmo še tabelo za število $T(n)$ celoštevilskih trikotnikov z danim obsegom n, za $3 \leq n \leq 40$:

n	$T(n)$	n	$T(n)$	n	$T(n)$	n	$T(n)$
		11	4	21	12	31	24
		12	3	22	10	32	21
3	1	13	5	23	14	33	27
4	0	14	4	24	12	34	24
5	1	15	7	25	16	35	30
6	1	16	5	26	14	36	27
7	2	17	8	27	19	37	33
8	1	18	7	28	16	38	30
9	3	19	10	29	21	39	37
10	2	20	8	30	19	40	33

Edvard Kramar

	100	PRIPRAVA ZA MERJENJE KOTOV	UBOJ	PREKRI-VANJE Z LAKOM	JUGOSLOV. ŽELEZNICE		
	S	K	U	L	J		
	T	O	M	A	Ž		
KOPNO SREDI VODE	O	T	O	K	DOMAČE Ž. IME		
RADIOAKT. KEMIČNI ELEMENT (Th)	T	O	R	I	J		
IVAN MINATTI	I	M	RENIJ / OBŽALO-VANJE	R	E		PRE ŠK
PLETENA OŽJA KOŠARA	C	E	K	A	R	MESTO V VZHODNI MAKEDONIJI	
BORIŠČE	A	R	E	N	A	SL. PESNIK (KAJETAN) / ŠOK	
	OBŠIRNA TRAVNATA RAVNINA	SIMON JENKO / √	S	J	POLITIČNI VODJA VOJ. ENOTE / PRSI	K	
SMUČARSKI KLUB	S	K	OSNOVNA MERA / POLOŽAJ PRI ŠAHU	E	N	O	
KANON	T	O	P	IME ČRKE L	E	L	T M / IZR F ŽI
VEK, STOLETJE	E	R	A	DARILO / EDVARD GRIEG	D	A	
	P	E	T	E	R	P	
ALFRED NOBEL	A	N	SLOV. SLIKAR (MAKSIM)	G	A	S	

				ZIMZELEN SREDOZEM. GRM	PLAST TRANSI- STORJA	VODOVODNO OMREŽJE				
			"KRALJ ŽIVALI"	L	E	V				
			REKA V JV ETIOPIJI	O	D	O				
			EDEN OD ČUTOV	V	I	D				
			PEVEC PESTNER	O	T	O				
			JAŠEK	R	O	V				
BIVALEC ...TSKE		IVICA						ARHITEKT SAARINEN		ANTON INGOLIČ
Š	T	I	P	OKRAS V OBLIKI ROŽE MIK	R	O	Z	I	T	A
K	O	V	I	Č	VRATA IZUMITELJ LADIJ. VIJAKA (JOŠEF)	D	V	O	R	I
O	M	E	S	A	R	MAKEDON. LJUDSKI PLES	O	N	O	ŽILA OD- VODNICA
T	A	TROPSKE PAPIGE TUJA POVRŠIN. MERA	A	R	A	DEVETI INTERVAL MADŽAR. M. IME	N	O	N	A
...UJE ...IME ...ASTEK ...RI ...ALIH	Ž	A	N	KAČJI GLAS	S	I	K	KAZALNI ZAIMEK HIMALAJ- SKA KOZA	T	O
R	KRAJEVNA SKUPNOST TANTAL	K	S	CILJ, NAMEN	S	M	O	T	E	R
E	T	E	K	ERBIJ	E	R	NIZEK ŽENSKI GLAS	A	L	T
.	A	R	I	ZGOLJ	L	E	ŽELEZOV OKSIJ	R	J	A

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

ASTRONOMIJA

NOVI REZULTATI RAZISKAV OSONČJA

Sonce in Osončje sta že dolgo predmet človekovega zanimanja in raziskav. Generacije astronomov, fizikov, matematikov in drugih znanstvenikov so se ukvarjale s preučevanjem dinamičnih in fizikalnih lastnosti ter s preučevanjem kemijskega sestava in izvora snovi v Soncu in planetih. Vse do človekovega prodora v vesolje je tudi ta veja pogosto zadevala ob osnovno težavo astronomije kot znanosti: podatki, ki jih dobimo iz meritev, so pogosto posredni in ne obsegajo vseh količin, ki bi jih radi poznali. Vesoljska doba pa je prinesla spektakularne spremembe na tem področju. Dobili smo številne zanesljive podatke s planetov samih ali iz njihove bližine. Ti podatki dajejo celovito sliko o telesih Osončja in o Osončju kot celoti. V tem pogledu je bilo najplodnejše leto 1979, ko je bil v Montrealu 17. kongres mednarodne astronomske unije. Tu povzemamo nekaj zaključkov s tega kongresa.

VENERA

Na koncu leta 1978 je Venero začela obkrožati ameriška sonda Pioneer Venus I, kmalu zatem pa se je spustilo na Venero zapovrstjo šest sond: štiri ameriške in dve sovjetski. Osnovni namen teh misij je bilo raziskovanje Venerine atmosfere. Vendar so bile sonde opremljene tudi z radarji za opazovanje delov Venerine površine, tako da so na osnovi teh opazovanj in opazovanj na Zemlji izdelali relief nekaterih delov planeta.

<u>Atmosfera</u>

Venerina atmosfera je - podobno kot Marsova - sestavljena v glavnem iz ogljikovega dioksida, ki ga je 96,6%, 3,2% je dušika, preostalih 0,2% pa je vode, kisika, argona, helija, žvepla in drugih elementov.

Pri sestavi je posebno zanimivo to, da je žlahtnih plinov več, kot so jih pričakovali. V vesolju je teh plinov sicer precej, v atmosferah Zemlje in Marsa pa jih je mnogo manj. To dejstvo naj bi bilo posledica dvostopenjskega razvoja atmosfer planetov, ki so blizu Sonca. Po teoriji o dvostopenjskem razvoju naj bi se oblikovale *prvotne* atmosfere ob kondenzaciji planeta iz *prvinskega sončnega oblaka*, to je oblaka, iz katerega se je z zgoščevanjem razvilo Sonce. V tistem času je bil sončni veter zelo močan, pa tudi planeti so se še ogrevali, ker so se krčili pod vplivom lastne teže. Posledica tega je bila, da je prvotne atmosfere planetov preprosto odpihnilo v vesolje (Merkur še danes nima atmosfere). Nove *sekundarne* atmosfere naj bi kasneje nastale iz plinov, ki so se polagoma sproščali iz notranjosti planetov. Na osnovi te teorije je bila večina astronomov mnenja, da odstotek žlahtnih plinov, ki so zelo pogosti v prvotni atmosferi, raste z oddaljenostjo planeta od Sonca. Rezultati z Venere kažejo, da je njena atmosfera v resnici pretežno sekundarna, vendar je iz neznanih razlogov zadržala del prvotnih sestavin, ki so drugačne od onih na sosednjih planetih. To bi bilo mogoče, če bi npr. prvinski sončni oblak v začetku ne bil homogen, ampak bi se v njem izoblikovala področja, ki bi bila relativno bogatejša s tem ali drugim plinom.

Venerino površino popolnoma zakrivajo oblaki in je z Zemlje ne moremo videti. Vesoljske sonde so odkrile, da sestavljajo te oblake v glavnem kapljice žveplene kisline in kristalčki žvepla. To so kaj neprijazni oblaki. Najvišja oblačna plast je med 63 in 67 km nad površino planeta, na nočni strani pa so oblaki nekoliko niže. Ta najvišja oblačna plast je debela nekoliko kilometrov in jo sestavljajo kapljice s premerom od 1 do 1,3 tisočinke milimetra. Pod to plastjo je na višini kakih 58 kilometrov še redkejša oblačna plast. Kapljice, ki jo sestavljajo, so debelejše - od 10 do 20 tisočink milimetra. Tretja oblačna plast, ki je na višini od 49 km do 52 km, je najgostejša in jo sestavljajo delci različnih velikosti. Po tej lastnosti spominja na oblake na Zemlji. Še niže so druge oblačne plasti, vendar mnogo redkejše od tretje goste plasti. Ameriške sonde so registrirale samo eno tako plast, sovjetske pa tri. Kaže, da so najnižji oblaki nekako 5 km nad površino planeta.

Venerina površina je zaradi goste in vroče atmosfere zelo negostoljubna. Gostota in tlak sta na površini nekako devetdeset krat večja kot na Zemlji, temperatura pa je približno tolikšna kot v vroči pečici, to je dobrih 400^{0}C. Pričakovali bi, da je na površini Venere temneje kot v višjih plasteh zato, ker debeli in gosti oblaki ne prepuščajo svetlobe. Sonde pa so zabeležile ravno nasprotno: v večjih globinah je bolj svetlo. To pripisujejo pogostim bliskom. V plasti med 5 km in 11 km nad površino planeta so zabeležili do 25 bliskov v sekundi, kar pomeni, da bliski neprestano svetijo. Bliske spremlja močno grmenje, ki traja tudi do 15 minut.

Površina

Že vesoljska ladja Pioneer Venus I, ki je obkrožala Venero, je z radarjem odkrila ogromno depresijo. Ta razpoka v plašču planeta je globoka do 7 km in se razteza 1400 kilometrov daleč v smeri vzhod-zahod. Razpoka spominja na podobno razpoko, ki so jo našli na Marsu in so ji dali ime Valles Marineris. Na istem področju so naprave odkrile tudi nekatere gladke predele, katerih narava še ni povsem jasna. Posebno visok predel na Venerini površini so odkrili že prej z radarskimi opazovanji z Zemlje. Ta predel, imenovan Maxwell, se dviguje za okrog osem kilometrov nad Veliko severno planoto, ki je tudi sama 3-5 kilometrov višja od okolice. Maxwell se torej dviguje za več kot 10 kilometrov nad povprečno površino planeta. Po nekaterih izračunih je to tudi najvišja gora, ki jo Venerina skorja sploh lahko prenese. če bi bila kakšna gora višja, bi njen hidrostatični tlak povzročil plastične deformacije ob vznožju, tako da bi se gora verjetno posedla zaradi lastne teže.

Sonde, ki so obkrožale Venero, so dale mnogo več radarskih podatkov, ki jih še analizirajo. Rezultati bodo zato objavljeni kasneje.

JUPITROVI SATELITI

Marca 1979 je ameriška sonda Voyager I potovala mimo Jupitrovih satelitov in nato nadaljevala pot proti Saturnu. V okviru enajstih eksperimentov je ta sonda poslala na Zemljo tudi okoli 18000 fotografij.

Podatki o samem planetu, njegovi atmosferi in magnetnem polju so sicer zanimivi, vendar do neke mere ponavljajo podatke, ki so jih v letih 1973 in 1974 poslale sonde Pioneer. Meritve z Voyagerja so sicer bolj natančne in bolj številne od prejšnjih, vendar rezultati za zdaj ne vodijo do drugačnih pogledov na pojave v atmosferi ali magnetosferi Jupitra. Po drugi strani pa so izredno zanimivi rezultati raziskovanj štirih največjih Jupitrovih satelitov - Ie, Evrope, Ganimeda in Kaliste. Če dodamo k temu še odkritje Jupitrovega obroča, je jasno, da so vloženi napori in sredstva bogato obrodili.

Najzanimivejša in najpomembnejša odkritja so vsekakor povezana s satelitom Io, ki je najbližji Jupitrov veliki satelit. Io je svetel rdeče rumen objekt, ki dobro odbija svetlobo. Odbije približno 60% svetlobe, ki pade nanj. Med štirimi velikimi sateliti samo v spektru njegove svetlobe pogrešajo črto, ki bi izdajala prisotnost vode ali ledu na površini. Satelit Io je razen Zemlje tudi edino telo v Osončju, na katerem so do danes zabeležili vulkansko aktivnost. Zdi se namreč, da je zaradi velike bližine Jupitra na tem satelitu močno plimovanje (razlika med plimo in oseko je do 100 metrov), ki ga greje, tako da je njegova notranjost stalno v raztaljenem stanju. Na posnetkih Voyagerja I so zabeležili sedem vulkanskih izbruhov. Kaže, da je tako močna vulkanska aktivnost reden pojav na satelitu Ii, saj na njem niso našli niti enega meteoritskega kraterja (na Luni npr. so vsi kraterji, ki jih vidimo že z manjšim daljnogledom, posledica udarcev meteoritov. Ker tam ni vulkanske aktivnosti in atmosferske erozije, ki bi polnila nižja mesta, se kraterji ohranjajo milijarde let). Predvidevajo namreč, da snov, ki jo izbruhajo vulkani, zelo hitro zapolni vse globeli. S tem zabriše sledove udarcev meteoritov, ki gotovo kdaj pa kdaj udarijo na površino Ie tako kot na druga telesa Osončja.

Majhen del snovi, ki jo izbruhajo vulkani, ima dovolj veliko hitrost, da ubeži teži Ie in se usmeri v približno krožni tir okrog Jupitra. Na ta način je nastal oblak v obliki svitka ob tiru okrog Jupitra, vendar je ravnina svitka nekoliko nagnjena glede na ravnino tira Ie. Vesoljska sonda je izmerila, da odda ja svitek precej močno ultravijolično svetlobo, ki jo pripisujejo sevanju visoko ioniziranih žveplovih atomov, delno pa tudi sevanju vodikovih atomov. Odtod sklepajo, da sta v svitku predvsem žveplo in vodik. Poleg tega mora obstajati neki do se daj še nepojasnjen mehanizem, ki dovaja svitku moč okrog 500 000 megawattov, saj sicer svitek ne bi mogel tako močno sevati ultravijolične svetlobe.

Radijska merjenja z Zemlje so pokazala, sonde Pioneer pa so še potrdile, da teče od enega Jupitrovega magnetnega pola preko Ie na drugi Jupitrov magnetni pol nekakšna tokovna cev. V njej nosijo naboj nabiti delci, ki zaidejo v cev iz visokih plasti Jupitrove atmosfere. Sondo Voyager I so posebej opremili, da razišče to tokovno cev. Iz neznanih razlogov se je cev premaknila iz prejšnjega položaja, tako da Voyager ni šel skozi njo, ampak se ji je samo približal. Kljub temu so z magnetometri uspeli izmeriti, da je tok, ki teče po cevi, vsaj 10000 amperov, morda pa doseže tudi 100 000 amperov.

Površino satelita Ie so preiskali tudi z infrardečim detektorjem. Tako so določili temperaturo posameznih delov satelita. Ugotovili so, da so nekateri deli neverjetno topli, saj je temperatura lahko tudi 17°C, kar je za 150°C topleje od okolice. Ker je tališče žvepla - to je "lave" na Ii pri 112°C, toplih področij ne moremo imeti za jezera lave. Njihovo naravo bomo morali še naprej raziskovati.

Od raziskanih Jupitrovih satelitov je bila Evropa v najneugodnejšem položaju za opazovanja. Vendar so ugotovili, da je njen premer nekoliko večji, gostota pa nekoliko manjša, kot so do tedaj mislili. Zato sklepajo, da sestavlja led morda celo 20% vse snovi tega satelita. Na svetli rumeni površini (odbija 60% sončne svetlobe) se jasno odraža čudna mreža rdečih razpok, za katere do sedaj nismo vedeli. Mreža spominja na počeno jajčno lupino ali pa na mrežo kapilar v človeškem očesu. Njena narava je zdaj povsem neznana.

Dva največja Jupitrova satelita Ganimed in Kalisto imata približno enako velikost in gostoto. Sestavljata ju približno enaka deleža skal in ledu.

Ganimed je sivo moder (odbija le 40% sončne svetlobe). Njegova površina pa kaže številne sledove tektonske aktivnosti, ki so verjetno nastali ob strjevanju satelitove skorje. Meteoritskih kraterjev na površini je razmeroma malo. Zato sklepajo, da je bila površina v času zadnjega močnega meteoritskega bombardiranja pred štirimi milijardami let zaradi Jupitrovih plimskih sil še mehka in ni mogla zadržati sledov meteoritskega bombardiranja. Posebnost Ganimeda so tudi plitvi kanali sinusnih oblik, ki nepravilno brazdajo površino, pa tudi redka atmosfera, ki so jo odkrili, ko je (gledano z Voyagerja) neka zvezda zašla za Ganimedom.

Kalisto je temen satelit, ki odbija manj kot 20% sončne svetlobe in je vsa prekrita z meteoritskimi kraterji različnih velikosti. Kaže, da je imela zaradi svoje velike oddaljenosti od Jupitra ob času velikega meteoritskega bombardiranja že trdo skorjo in je zato lahko za razliko od Ganimeda ohranila sledove. Kljub temu pa se znanstveniki še vedno čudijo nekaterim velikim kraterjem, ki imajo premer več kot 100 km. Najbolj izstopa velikanski bazen, ki je verjetno nastal ob strahovitem meteoritskem udarcu. Nekakšni koncentrični valovi se od tega bazena raztezajo do razdalj 1000 km.

Zoran Knežević

prev. *Andrej Čadež*

REŠITVE NALOG

Prejeli smo dve rešitvi naloge Gol ali vratnica. Obe sta pravilni, poslali pa sta ju Tominc Lada, gimn. Miloša Zidanška Maribor in Tavčar Mojca, I. gimn. Ljubljana. Objavljamo Mojcino rešitev.

Če naj žoga zadene vratnico, se sme središče žoge oddaljiti od vratnice za največ 10 cm na vsako stran. Interval, ki ga mora zadeti središče žoge, da zadene eno od vratnic, je potem velik 40 cm.

Če naj žoga zadene odprtino vrat, mora njeno središče iti vsaj 10cm mimo vratnice. Interval, ki ga mora zadeti središče žoge, da žoga zadene vrata, je potem velik 30 cm. V našem primeru je torej lažje zadeti eno od vratnic.

Prejeli smo še štiri pravilne rešitve naloge iz 3. številke Preseka. Ker smo žrebanje že opravili, objavljamo le imena reševalcev: KARMEN Kompara, gimn. Veno Pilon Ajdovščina, TOMINC LADA, gimn. Miloša Zidanška Maribor, HOVNIK PETER, Sl. Gradec in KOŠMRLJ JANEZ, Ribnica. Rešitev pa lahko najdete na str. 117.

Ljubomir Kostrevc

Nova naloga, ki jo vidite na 4. strani ovitka, pa ni težka zaradi matematike. Težka je "kar tako". Ker sodi v ugankarstvo, smo prepričani, da vam bo všeč. Rešitev naloge bo koristila predvsem tistim učencem, ki si težko zapomnijo številke. Ob tej nalogi bo marsikdo našel navdih za kakšen soroden problem.

Tomaž Pisanski

BISTROVIDEC VII/3 - rešitev

V Preseku VII/3 smo zastavili naslednje naloge:

- ali se lahko šahovski konjiček v 15 skokih sprehodi čez vsa polja šahovnice 4x4 na valju;
- ali lahko šahovski konjiček v 15 skokih obide (sprehod konča na začetnem polju) vsa polja šahovnice 4x4 na svitku (torusu).

Reševanje si nekoliko poenostavimo, če razgrnemo šahovnico na valju v ravnino (glej sliko 1).

S črtami označimo dovoljene skoke, ki niso razvidni iz same šahovnice. Pokazati je mogoče, toda o tem kdaj drugič, da konj ne more preskakati vseh polj šahovnice na valju v 16 skokih in končati skakanje na začetnem polju. Obstajajo zaporedja 15 sko kov, v katerih konj obide vsa polja šahovnice na valju. Taki sta zaporedji:

1, 10, 3, 12, 14, 5, 16, 7, 9, 2, 8, 15, 6, 13, 11, 4

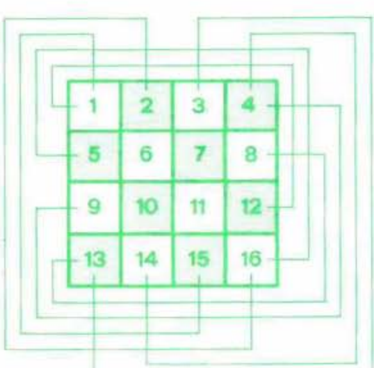
in

1, 12, 3, 5, 14, 7, 16, 10, 8, 13, 11, 4, 6, 15, 9, 2

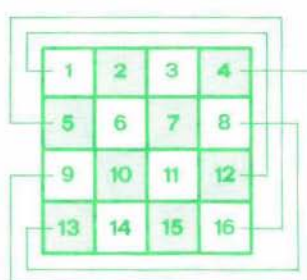
Ko valj zavijemo v svitek, postanejo mogoči štirje novi skoki (glej sliko 2). V tem primeru obstajajo tudi "sklenjena" skakanja; táko je na primer:

1, 10, 16, 7, 9, 2, 11, 4, 6, 15, 8, 13, 3, 5, 14, 12, 1

Vladimir Batagelj



sl. 1

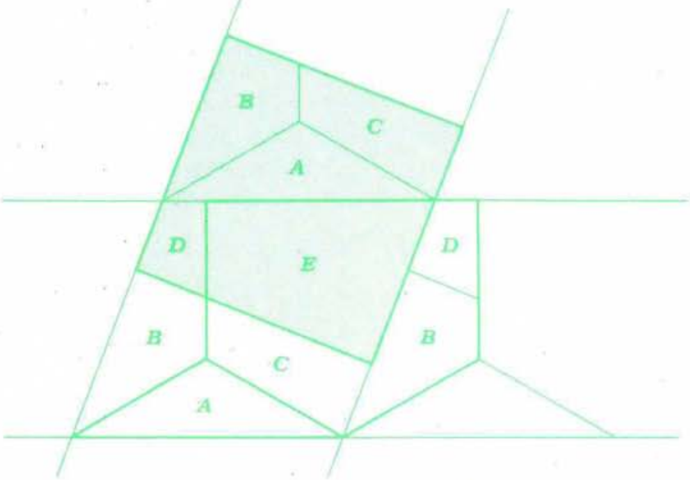


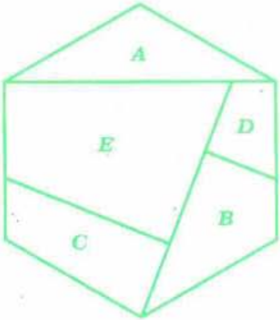
sl. 2

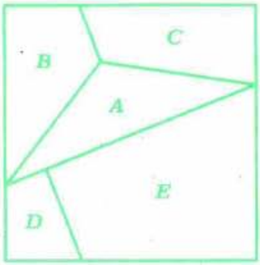
PRAVILNI ŠESTKOTNIK - rešitev

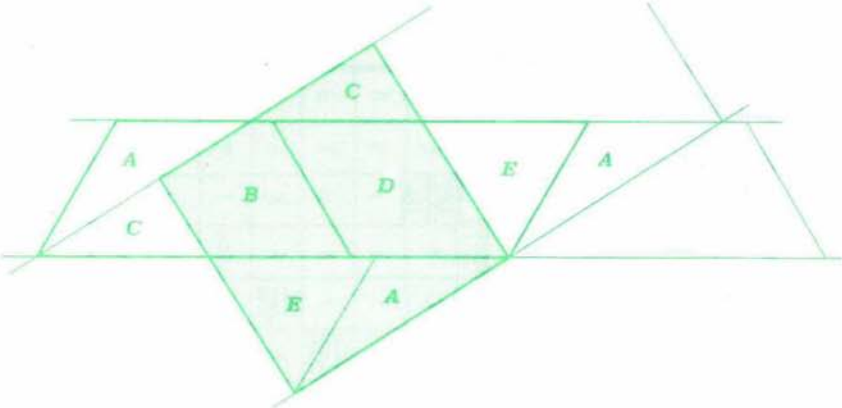
V Preseku 7(1980/81)št.2 smo vas povprašali, ali znate z ravnimi rezi razrezati pravilni šestkotnik tako, da lahko iz dobljenih koščkov sestavite kvadrat enake ploščine. Obstaja več načinov reševanja zastavljene naloge. Bralec se lahko seznani z njimi v knjigi:

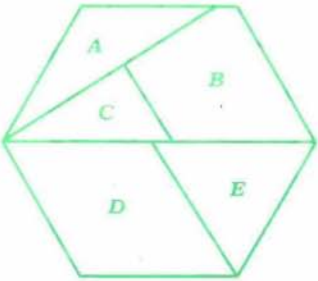
> H. Lindgren: *Recreational problems in geometric dissections and how to solve them*. Dover Inc., New York 1972 (ruski prevod: Mir, Moskva 1977)

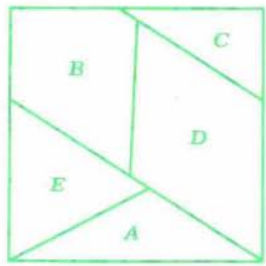












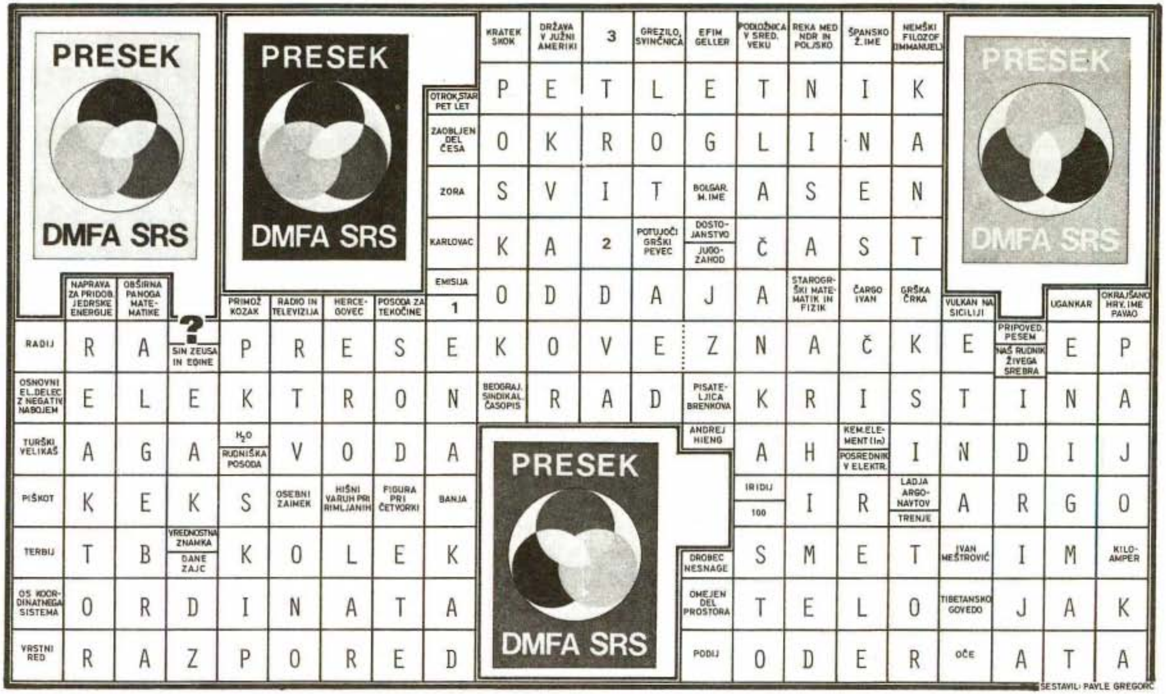
Na sliki sta dve rešitvi, ki najbrž ne potrebujeta posebne razlage. Morda le to: zvezo med dolžino stranice šestkotnika a in dolžino stranice kvadrata a' dobimo iz enakosti njunih ploščin

$$6.a^2\sqrt{3}/4 = (a')^2 \quad \text{oziroma} \quad a' = a\sqrt{(3\sqrt{3}/2)}$$

Za bralce s spretnimi rokami pa še to: nanesite posamezni kvadrat (ali šestkotnik) na vezano ploščo ali lepenko in ga zrežite, tako kot velevajo črte. Nastale koščke pomešajte in zastavite "žrtvi" (lahko tudi sebi) nalogo, naj jih zloži v kvadrat in nato še v šestkotnik. Obilo zabave!

Vladimir Batagelj

KRIŽANKA Z GESLOM - REŠITEV IZ P 8/1



SESTAVIL: PAVLE GREGORC

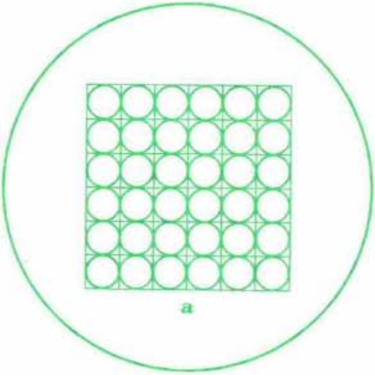
TEKMOVANJA - NALOGE

REŠITVE NEKATERIH NALOG Z 20. ZVEZNEGA SREDNJEŠOLSKEGA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE

Tekmovanje, o katerem govori naslov, je bilo aprila 1979 v Novem Sadu. O tekmovanju, nalogah in uspehu slovenske ekipe ste brali v Preseku VII (1979/80)2. Od nalog s tega tekmovanja sva izbrala tiste, ki so naju najbolj pritegnile in jih rešila. Želiva seveda, da poskusite tudi sami! Najine rešitve naj bodo le izhod v sili, če se vam kje ustavi. Marsikomu bo potrebna le prava ideja, pa bo znal tudi sam priti do rešitve. Želiva vam veliko uspeha!

1. razred, 3. naloga:

Ali lahko v krog s polmerom 1 postavimo nekaj krogov tako, da nobena dva izmed njih nimata skupne notranje točke, vsota polmerov teh krogov pa bo enaka 1979?



Rešitev: Odgovor je pritrdilen, dokaz pa konstrukcijski. V krogu narišimo kvadrat s stranico a in istim središčem, kot ga ima krog. Stranice kvadrata razdelimo na n enakih delov in z vzporednicami napravimo mrežo z n^2 polji. V vsakem kvadratku mreže vrišimo krogec (njegov polmer je enak $a/2n$). Takih krogcev je n^2 , torej je vsota polmerov enaka:

$n^2.a/2n = n.a/2$

Sedaj le še določimo tako majhen a, da bo cel kvadrat ležal v krogu, potem pa izračunamo n tako, da bo vsota polmerov enaka 1979. Op.: a mora biti tak, da bo n celo število! Za a lahko izberemo 1/2, še raje pa 1/5, da bo račun lažji:

$$na/2 = n/10 = 1979 \text{ , torej je } n = 19790$$

1. razred, 4. naloga:

Za katera naravna števila n je vsota cifer števila $N = 1.2.3...n$ enaka 9 ?

Rešitev: Zapišimo število N v desetiškem sistemu

$$N = N_0 + N_1.10 + ... + N_r.10^r$$

Naloga zahteva, da je

$$A = N_0 + N_1 + ... + N_r = 9$$

Število N je deljivo z vsemi naravnimi števili, ki niso večja od n. Najprej bomo dokazali, da naloga za $n \geqq 11$ nima rešitev.. Naj bo $n \geqq 11$, torej je število N deljivo z 11. Spomnimo se, da je tedaj tudi število

$$B = N_0 - N_1 + N_2 - ... + (-1)^r N_r$$

deljivo z 11. Prav gotovo velja neenačba

$$-A \leqq B \leqq A$$

Ker je $A = 9$, je torej B po absolutni vrednosti manjši ali enak 9. Edino število, ki je poleg tega deljivo z 11, je $B = 0$. Če seštejemo levi in desni strani obeh enačb, dobimo
$(N_0 + N_1 + ... + N_r) + (N_0 - N_1 + ... + (-1)^r N_r) = A + B = 9$
torej

$$2.(N_0 + N_2 + N_4 + ...) = 9$$

To pa je nemogoče , saj število 9 ni deljivo z 2.

Rešitve naloge moramo torej iskati le pri $n \leqq 10$. Po vrsti izračunamo števila 1, 1.2, 1.2.3, ... , 1.2.3...10 in najdemo med njimi naslednje rešitve:

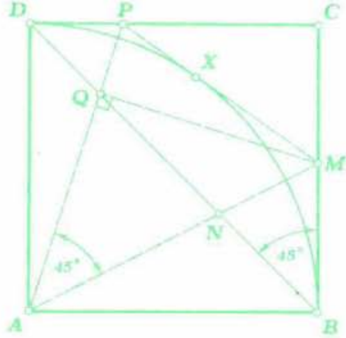
$n = 6$, $N = 720$
$n = 7$, $N = 5040$
$n = 8$, $N = 40320$

2. razred, 1. naloga:

P in M naj bosta točki na stranicah DC in BC kvadrata $ABCD$. Zanju naj velja, da je PM tangenta kroga s središčem v točki A in polmerom AB. Točki Q in N pa naj bosta točki presečišča daljic PA in MA z diagonalo BD. Dokaži, da točke P, Q, N, M in C ležijo na (isti) krožnici.

Rešitev: Dokazali bomo, da sta četverokotnika $PQMC$ in $PNMC$ tetivna. Ker imata oba četverokotnika tri skupna oglišča in ker tri različne točke določajo natanko eno krožnico, morajo ležati vsa oglišča (P, Q, M, C, N) na isti krožnici.

Da sta $PQMC$ in $PNMC$ tetivna, pa vidimo takole:



Zaradi enakosti tangentnih odsekov PD in PX sta kota $\sphericalangle DAP$ in $\sphericalangle PAX$ skladna. Prav tako ugotovimo skladnost kotov $\sphericalangle BAM$ in $\sphericalangle MAX$. Sledi, da je $\sphericalangle PAM = \sphericalangle QAM = 45^o$. Tudi kot $\sphericalangle MBQ$ je enak 45^o, zato mora biti $ABMQ$ tetiven četverokotnik. Od tod sledi, ker je $\sphericalangle ABM = 90^o$, je tudi $\sphericalangle AQM = 90^o$, torej je $\sphericalangle PQM = 90^o$. Tudi kot $\sphericalangle PCM$ je pravi, zato je $PQMC$ tetiven.

Analogno vidimo, da je četverokotnik $ANPD$ tetiven, zato je $\sphericalangle ANP = \sphericalangle MNP = 90^o$. Torej je tudi $PNMC$ tetiven.

2. razred, 4. naloga:

Naj si bosta m in n tuji števili in imejmo dano zaporedje $m+n$ kroglic. Prvih m kroglic tega zaporedja premestimo v istem vrstnem redu na konec zaporedja, nato storimo isto s tako dobljenim zaporedjem itd.

Dokaži, da lahko s tem postopkom prvo kroglico začetnega zaporedja privedemo na katerokoli vnaprej določeno mesto v zaporedju!

Rešitev: Opazujmo mesto prve kroglice v zaporedju in označimo njeno mesto s števili od 1 do $m+n$. Denimo, da je kroglica v nekem trenutku na mestu r in opazujmo, kako se njeno mesto spreminja s ponavljanjem postopka. Po enem koraku je na mestu $r+n$, če je $r \leqq m$, in na mestu $r-m$, če je $r > m$. Prav tako vidimo, da je po dveh korakih na mestu $r+2n$, $r+n-m$ ali $r-2m$, odvisno spet od tega, kakšna so števila r, n in m. Splošno velja tole: mesto kroglice po s korakih lahko zapišemo v obliki

$$r + \alpha n - \beta m \,, \quad \alpha + \beta = s$$

kjer sta α in β naravni števili (vključno z 0).

Vseh mest v zaporedju je $m+n$, torej končno mnogo, zato bo kroglica prej ali slej obiskala kakšno mesto dvakrat. Naj bo r tako mesto. Velja enačba

$$r + \alpha n - \beta m = r \,, \quad \alpha + \beta = s > 0$$

Odtod dobimo $\alpha n = \beta m$, torej je $\alpha > 0$ in $\beta > 0$. Ker je leva stran te enačbe deljiva z n, je deljiva tudi desna. Števili m in n sta po predpostavki tuji, zato število n deli β. Ker je $\beta > 0$, sledi od tod $\beta \geqq n$. Prav tako dokažemo tudi, da število m deli α in je zato $\alpha \geqq m$. Skupaj je

$$\alpha + \beta = s \geqq m + n$$

Dokazali smo: če je kroglica na nekem mestu r, ga lahko prvič obišče šele po $m+n$ korakih. Zdaj pa trdimo, da kroglica v katerihkoli zaporednih $m+n$ korakih obišče vsako mesto v zaporedju natanko po enkrat. Denimo, da to ni res. Potem obstaja neko mesto, na katerem kroglica v $m+n$ korakih ni bila, torej se je ves čas zadrževala na preostalih $m+n-1$ mestih v zaporedju. Zato je obiskala vsaj eno mesto dvakrat v manj kot $m+n$ zaporednih korakih. To pa ni mogoče, kot smo zgoraj dokazali, zato je naša trditev pravilna. S tem je naloga rešena. Povejmo le še to, da dokaz ni prav nič odvisen od tega, katero kroglico začetnega zaporedja opazujemo in velja torej za vsako kroglico.

3. razred, 3. naloga in 4. razred, 4. naloga:

$z_1, z_2, \dots , z_n$ naj bodo kompleksna števila. Dokaži, da lahko izberemo nekaj indeksov $i_1, i_2, \dots , i_k$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n)$, tako da velja

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k}| \geqq \frac{1}{4\sqrt{2}} (|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|)$$

Rešitev: Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da so vsa števila z_i različna od 0. Kompleksno ravnino razrežimo s premicama $y = x$ in $y = -x$ na 4 paroma tuje dele, kot kaže slika. V vsakem od njih poiščimo vsoto absolutnih vrednosti vseh števil, ki ležijo v njem, nato pa izberemo tisti del, v katerem je ta vsota največja. Predpostavimo, da je to kar šrafirani del na sliki, števila, ki ležijo v njem, pa označimo z z_{i_1}, $z_{i_2}, \dots , z_{i_k}$. Zaradi našega izbora prav gotovo velja

$$|z_{i_1}| + |z_{i_2}| + \dots + |z_{i_k}| \geqq (|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|)/4$$

Če dokažemo, da velja tudi

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k}| \geqq (|z_{i_1}| + |z_{i_2}| + \dots + |z_{i_k}|)/\sqrt{2}$$

je naloga rešena.

Naj bo z poljubno kompleksno število iz izbranega dela ravnine. Zapišemo ga v polarni obliki

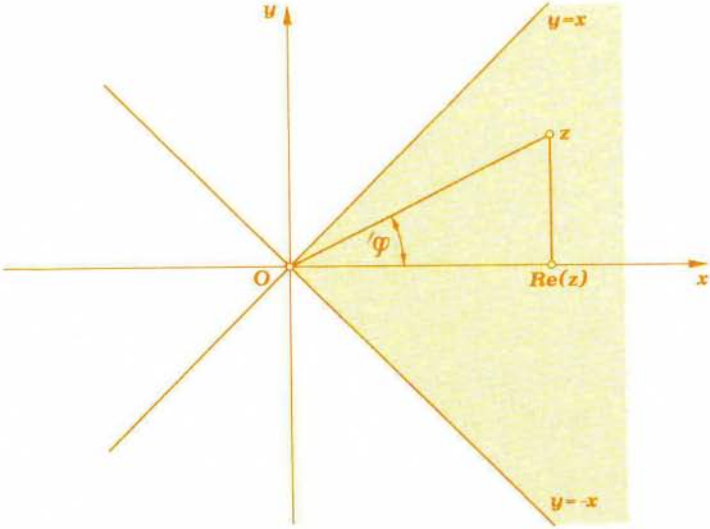
$$z = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

(glej sliko!). Ker je $-\pi/4 \leqq \varphi \leqq \pi/4$, je

$$\cos\varphi \geqq 1/\sqrt{2}$$

Označimo z $\mathrm{Re}(z)$ realno komponento števila z. Iz zgornje neenakosti dobimo

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos\varphi \geqq |z|/\sqrt{2}$$



Za vsako kompleksno število z velja tudi

$$|z| \geq \mathrm{Re}(z)$$

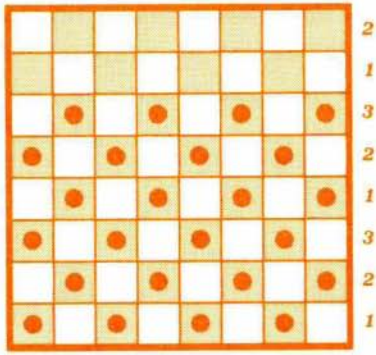
Vsa števila $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k}$, pa tudi njihova vsota $z = z_{i_1} + \ldots + z_{i_k}$ ležijo v prvem kvadrantu. Z upoštevanjem zgornjih dveh neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} |z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_k}| &\geq \mathrm{Re}(z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_k}) = \\ &= \mathrm{Re}(z_{i_1}) + \mathrm{Re}(z_{i_2}) + \ldots + \mathrm{Re}(z_{i_k}) \geq \\ &\geq |z_{i_1}|/\sqrt{2} + \ldots + |z_{i_k}|/\sqrt{2} = \\ &= (|z_{i_1}| + |z_{i_2}| + \ldots + |z_{i_k}|)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

in dokaz je končan.

3. razred, 4. naloga:

V prvih šestih vrstah šahovske table so na vseh črnih poljih postavljeni kmetje. V vsaki potezi kmet preskoči enega od kmetov, ki so mu neposredni sosedje po diagonali, in se s tem pomakne za dve mesti po diagonali. Pri tem seveda lahko skoči le na prosto polje,preskočenega kmeta pa odstranimo s table. Ali lahko igramo tako, da nam bo na koncu ostal le en kmet?



Rešitev: Polja šahovske table razdelimo na tri skupine: v prvi skupini so polja iz prve, 4. in 7. vrste, v drugi polja iz 2., 5. in 8. vrste, ostala so v tretji skupini. Hitro se prepričamo, da se ob vsaki potezi število kmetov v vsaki skupini spremeni za ena (natanko eden kmet več ali manj). Ob vsaki potezi se torej menja parnost števila kmetov v vseh treh skupinah. Na začetku je v vsaki od skupin sodo število kmetov (ista parnost), zato se ista parnost skupin ohranja skozi vso igro. če bi ostal na tabli le en kmet, parnost skupin ne bi bila več ista, kar nam pove, da je pravilen negativen odgovor na vprašanje, ki ga zastavlja naloga.

<u>4. razred, 1. naloga</u>:

Dokaži, da za noben par naravnih števil n in p ($p > 5$) ni izpolnjena naslednja enakost:

$$(p - 1)! + 1 = p^n$$

Rešitev: Recimo, da velja gornja enakost za nek n in nek $p > 5$. Iz enakosti vidimo, da si morata biti števili p in $(p-1)!$ tuji. Od tu sledi, da je p praštevilo, saj velja naslednja trditev:

Za vsako sestavljeno število $k > 4$ je število $(k-1)!$ deljivo s k.

Dokaz: $k = a.b$, $a \geqq b \geqq 2$.

če je $a > b$, potem gotovo $a.b$ deli $(k-1)!$, saj je $b < a < k$. Če pa je $a = b$, je gotovo $a > 2$, saj je $k > 4$. Potem pa je $2a < a.a = k$. Faktorja a in $2a$ torej nastopata v faktorielnem produktu $(k-1)!$, zato tudi $a \cdot a = k$ deli število $(k-1)!$.

Ker je p praštevilo, je $p-1$ sestavljeno in po zgornji trditvi (za $k = p-1$) lahko zaključimo, da $p-1$ deli $(p-2)!$. Iz enačbe sledi, da je $(p-1)! = p^n - 1$, torej je tudi

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1 = \frac{p^n-1}{p-1} = \frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$$

deljivo s $p-1$.

Z indukcijo se prepričamo, da je $p^k \equiv 1 (\text{mod } p-1)$, za vsako naravno število k (vključno z 0). Zato je po drugi strani

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1 \equiv n (\text{mod } p-1)$$

Torej $p-1$ deli število n. Zato je $p-1 \leqq n$. V tem primeru pa je:

$$(p-1)! + 1 < p^{p-2} + 1 < p^{p-1} \leqq p^n$$

kar nam pove, da enakost ne more biti izpolnjena. Prišli smo do protislovja.

4. razred, 2. naloga:

Za katere od trditev (i), (ii) in (iii) obstajata taki dve pozitivni števili $a,b > 0$, da velja:

(i) $a,b \notin Q$, $a^b \in Q$
(ii) $a \notin Q$, $b \notin Q$, $a^b \notin Q$
(iii) $a \in Q$, $b \notin Q$ in $a^b \notin Q$

Rešitev:

(i) Vzemimo $a = b = \sqrt{2}$. Če je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in Q$, smo iskani števili že našli. V nasprotnem primeru pa vzemimo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin Q$ in $b = \sqrt{2}$. Sedaj je $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in Q$. Iskani števili torej obstajata.

(ii) Vzemimo enako kot prej $a = b = \sqrt{2}$ in naredimo podoben sklep: bodisi $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin Q$, v nasprotnem primeru pa število $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin Q$, saj je produkt racionalnega in iracionalnega števila vedno iracionalno število. Iskani števili obstajata.

(iii) Naj bo $a = 2$, $b = \sqrt{2}$. Če $2^{\sqrt{2}} \notin Q$, je naloga rešena, sicer vzamemo $a = 2$, $b = \sqrt{2} + 1/2$ in $a^b = 2^{\sqrt{2}+1/2} = \sqrt{2}.2^{\sqrt{2}} \notin Q$. Število $\sqrt{2} + 1/2$ je seveda iracionalno in naloga je rešena. Iskani števili tudi v tem primeru obstajata.

Poudarimo, da v nobenem od primerov nismo dokazali, da je neko število oblike a^b racionalno ali iracionalno in da v splošnem tega tudi ne znamo dokazati. Niti za število $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ se ne ve, kakšno je.

Mala olimpiada, 3. naloga:

Dani sta dve krožnici z obsegom 1979. Na prvi je označenih 1979 točk, na drugi pa nekaj lokov, katerih skupna dolžina je manjša od 1. Dokaži, da lahko prvo krožnico položimo na drugo tako, da nobena od označenih točk ne bo ležala na kakšnem od začrtanih lokov!

Rešitev: Najenostavnejši je dokaz, oprt na fizikalno predstavo. Postavimo drugo krožnico na prvo in jo obračajmo s stalno hitrostjo, tako da napravi poln obrat v 1979 minutah. Ker je skupna dolžina vseh lokov manjša od 1, obseg kroga pa ravno enak 1979, bo pri rotiranju vsaka izmed označenih točk prekrita s katerim od lokov manj kot eno minuto. Če označene točke oštevilčimo z 1, 2, ..., 1979, lahko povemo: prva točka (strogo) več kot 1978 minut ni bila pokrita z nobenim izmed lokov, nobena izmed prvih dveh točk ni bila pokrita z nobenim izmed lokov več kot 1977 minut, ..., več kot nič minut (pozitiven čas) nobena izmed 1979 točk ni bila pokrita z nobenim izmed lokov. Obstaja torej iskani trenutek, ko so bile vse označene točke nepokrite. To pa je tudi iskana lega.

Franci Forstnerič
in *Bojan Mohar*

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V NOVI GORICI

Letos so mladi fiziki merili svoje znanje v javnem tekmovanju skupin o laserjih, laserski svetlobi in laserstvu in v tradicionalnem republiškem tekmovanju v reševanju nalog. Za obe tekmovanji so se srednješolci zelo zanimali; o tem priča veliko število prijavljenih skupin za javno tekmovanje (25 skupin iz 14 srednjih šol) in veliko število dijakov, ki so se udeležili izbirnega tekmovanja v reševanju nalog (prek 900 dijakov iz 25 šol), kar je več kot prejšnja leta.

Javno tekmovanje skupin je poteklo na predvečer republiškega tekmovanja v petek, 16. maja 1980, v Komorni dvorani v Novi Gorici. Tekmovanje skupin ni nova oblika merjenja znanja srednješolcev, saj je bilo podobno tekmovanje, tedaj o sončni energiji, lani v Kopru. Letos je pokroviteljstvo nad to prireditvijo prevzela Iskra-Center za elektrooptiko, ki je tekmovanje podprla tako po finančni kot po strokovni plati. Posebno vzpodbudno za mlade tekmovalce je bilo predavanje o laserjih in holografiji, ki so ga v marcu pripravili strokovnjaki iz Iskre.

Prijavljene skupine so se v petek popoldne pomerile v izločilnem tekmovanju in le 6 najboljših se je udeležilo javne prireditve. Pri izbirnem tekmovanju so skupine reševale pismene teste, tako da so obkrožale pravilne odgovore. Vsak pravilni odgovor je prinesel eno točko, obkroženi napačni odgovor pa negativno točko. Med vprašanji so bila tudi prav zlobna vprašanja kot na primer, kaj je interferon. To je neko novo zdravilo; poleg tega odgovora pa je bilo pripravljenih več napačnih, ki so zveneli zelo "fizikalno", npr. kvant interference, in so površnega reševalca lahko prav hitro zmedli. Kljub mnogim pastem in vprašanjem, ki so segala daleč prek okvira srednješolske fizike, so se vse skupine dobro odrezale, saj ni nobena zbrala negativnega števila točk. V finale so se uvrstile skupine z naslednjih gimnazij: Koper, Maribor (M. Zidanšek), Šentvid (2 skupini), Tolmin in Nova Gorica.

Komorna dvorana je bila premajhna za vse, ki bi si radi ogledali javno prireditev. Veliko dijakov je stoje vztrajalo do konca dve in pol urne prireditve, kar še posebej priča o njeni zanimivosti. Prireditev so popestrili nastopi dijakov iz domače gimnazije, projekcija filma o razvoju laserstva v Iskri, še posebej zanimiva pa so bila vprašanja, zastavljena prisotnim v dvorani. Prvi pravilni odgovor je bil takoj nagrajen. Vprašanja so bila včasih prav nenavadna kot na primer: primerjaj ceno molekule Rubinovega vina in ceno fotona iz rubinskega laserja. Obilo smeha in aplavza je požel dijak iz Kranja, ki je duhovito primerjal delovanje laserja s potekom same javne prireditve.

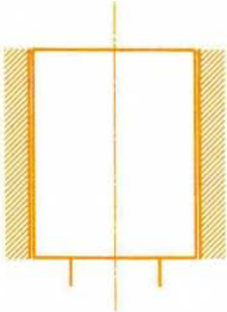
V boju za zmagovalca sta se posebej izkazali dve skupini, skupina dijakov iz Šentvida: Janez Zupan, Boštjan Paradiž in Uroš Ahtik ter skupina dijakov iz gimnazije M. Zidanška: Jana Padežnik, Samo Lazar in Matjaž Kaluža. Na koncu je le ena sama točka odločila zmagovalca: skupino dijakov iz Šentvida.

Naslednji dan se je 110 dijakov iz 23 srednjih šol pomerilo v reševanju računskih nalog. Tekmovalci so imeli na voljo dve uri in pol. O težavnosti nalog se lahko prepričajo bralci sami. Letos so nekoliko trši oreh predstavljale naloge za 3. razred; v tej skupini tudi nihče ni rešil vseh nalog. Prvo nagrado sta prejela Tomaž Writzl iz 2. razreda (gimn. Lj.-Bežigrad) in Boris Majaron iz 4. razreda (1. gimn. Maribor), ki sta tudi rešila vse naloge. Drugo nagrado sta prejela dijaka 3. razreda Matjaž Kaluža (gimn. M. Zidanška Maribor) in Igor Poberaj (gimn. V. Janežič Ljubljana), tretjo nagrado pa so prejeli: v 2. razredu Lucijan Markocič (gimn. N. Gorica) in Dean Mozetič (gimn. Koper), v 3. razredu Maja Ferle (gimn. M.Zidanšek Maribor), Vasja Jurkas (gimn. N. Gorica) in Gorazd Planinšič (gimn. Lj.-Bežigrad) in v 4. razredu Leon Matoh (gimn. Novo mesto), Maks Romih in Tone Verbovšek (gimn. Lj.-Bežigrad).

Naloge za 2. razred

1. Telo drsi po ravnih tleh brez trenja in na svoji poti naleti na hribček z višino 50 cm, ki se lahko brez trenja giblje po podlagi. Kolikšna mora biti najmanj hitrost telesa, da bo zavozilo čez hribček, če ta sprva miruje? Masa hribčka je šestkrat večja od mase telesa. Med hribčkom in telesom ni trenja.

Sl. k nal. 2/1



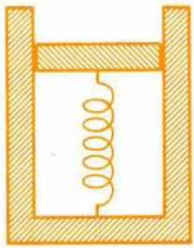
2. Predal z dolžino 70 cm ima na sprednji strani dva ročaja v razdalji 25 cm, ki sta nameščena simetrično. Kolik sme biti največ koeficient trenja med predalom in vodili, po katerih predal drsi, da lahko predal iz vlečemo le za en ročaj? Glej skico!
3. Po klancu z naklonom 30° se kotalita drug za drugim dva valja, katerih središči sta povezani z lahko togo prečko. Valja imata enaki masi in polmera, le da je masa spodnjega valja enakomerno porazdeljena po prostornini, zgornji valj pa je votel (lahko vzameš, da je vsa masa zbrana na obodu valja). Kolikšno hitrost doseže tak sistem potem, ko prepotuje na klancu pot 70 m? Valja na začetku mirujeta.
4. Tovore premikajo po vrsti valjev s polmerom 2 cm in maso 10 kg, katerih osi so pritrjene v vodoravni ravnini v razmiku 5 cm. Kolikšna povprečna moč je potrebna za potiskanje tovora s hitrostjo $1\ ms^{-1}$, če valji pred tovorom mirujejo? Vzemi, da tovor po valjih ne drsi, pri vrtenju valjev pa da ni trenja.
5. Kako bi naredil merilnik trenutne porabe goriva v avtomobilu?

Naloge za 3. razred

1. Na kitari sta vpeti struni iz medenine in jekla. Dolgi sta 0,9 m. Struni uglasimo na enako frekvenco 440 Hz pri sobni temperaturi $20^{\circ}C$. Potem nesemo kitaro na prosto, kjer je temperatura $-5^{\circ}C$. Kolikšno frekvenco utripanja slišimo na prostem, če zabrenkamo po obeh strunah? Predpostavi, da se kitara ne deformira. Elastična modula jekla oziroma medenine sta $E_j = 2{,}06.10^{11} N/m^2$ oziroma $E_m = 1{,}27.10^{11} N/m^2$, linearna razteznostna koeficienta $\alpha_j = 1{,}1.10^{-5} K^{-1}$, $\alpha_m = 1{,}9.10^{-5} K^{-1}$, gostoti pa $\rho_j = 7{,}8.10^3 kg/m^3$, $\rho_m = 8{,}5.10^3 kg/m^3$.
2. S preprostim plinskim termometrom, ki je prikazan na sliki, lahko merimo maksimalno temperaturo v prostoru. Steklena buča s prostornino 5 l je s tenko cevko povezana s kozarcem, ki je poln vode in poveznjen na glavo v veliko posodo z vodo. Ko se temperatura v sobi dvigne, kozarec

ulovi zrak, ki je ušel iz buče. Če se temperatura zniža, gre voda v bučo, zrak v kozarcu pa ostane ujet. Kolikšna je bila maksimalna temperatura v sobi, če smo začeli pri temperaturi 15°C, višino vodnega stolpca pa odčitali pri temperaturi 20°C in sicer 7,3 cm. Presek kozarca je 50 cm^2, višina od vodne gladine do dna kozarca pa 11 cm. Zunanji zračni tlak je bil ves čas 1 bar.

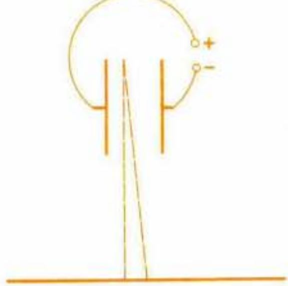
3. Jeklen trak s pravokotnim profilom in dimenzijami 2mm x 0,5mm položimo na led in pritisnemo tako močno, da je tlak pod trakom 10^6 N/m^2. Nastane pojav regelacije - trak se začne pogrezati v led, ker se voda pod njim tali, nad trakom pa spet zmrzne. Oceni, s kolikšno hitrostjo leze trak v led! Toplotna prevodnost jekla je 45,4 W/mK, tališče vode pri tlaku 10^6 N/m^2 pa je -0,1°C.



4. Toplotno izolirana valjasta posoda s prostornino 1,5 l je zaprta z batom s presekom 10 cm^2. V posodi je zrak z maso 1 g pri temperaturi 20°C ter vijačna vzmet iz jekla z maso 2 g, specifično toploto 460 J/kgK in koeficientom 10^3 N/m . Zunaj je konstanten tlak 1 bar. Kolikšno toploto smo dovedli sistemu zrak-vzmet, če se je sistem segrel za 5 K ? Skica!
5. Kako bi naredil merilnik trenutne porabe goriva v avtomobilu?

Naloge za 4. razred

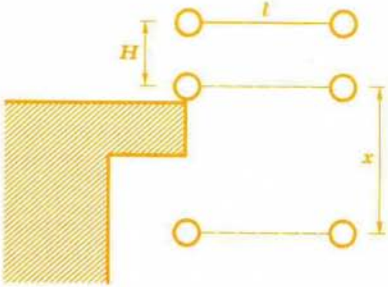
1. Tri enaka telesa z nabojem 10^{-8} As in maso 0,1 g sestavljajo enakostraničen trikotnik s stranico 1 cm. Vzemimo, da sile, ki vežejo naboje v trikotnik, nenadoma popuste. Kolikšna je največja hitrost, ki jo dosežejo naboji?
2. Ploščat kondenzator sestavljata dve navpični plošči z višino 10 cm. Razdalja med ploščama je 2 cm. V višini zgornjega dela plošč spustimo mednju kapljico z maso 0,1 g in z nabojem 10^{-8} As . Razdalja med spodnjim delom plošč in tlemi je 20 cm. Kako daleč od mesta, ki je navpično pod mestom, s katerega smo spustili kapljico, pade kapljica na tla? Napetost med ploščama kondenzatorja je 100 V.



3. Wheatstonov most je priključen na izvir z napetostjo 10 V. V začetku je most uravnovešen tako, da kaže voltmeter, ki ga priključimo na most, napetost nič. Nato enega izmed upornikov segrejemo tako, da se mu spremeni upor za 1%. Kolikšna je največja napetost, ki jo pri tem lahko pokaže voltmeter?
4. Merilnik premikov sestoji iz kovinske ploščice s ploščino 10 cm^2, ki je 1 mm oddaljena od kovinske površine, katere premike želimo meriti. Ta kondenzator zvežemo skupaj s tuljavo z induktivnostjo 10^{-6} H v nihajni krog. Vzemimo, da lahko merimo lastno frekvenco nihajnega kroga na 1 kHz natančno. Kolikšne najmanjše premike kovinske površine lahko še zaznamo?
5. Kako bi naredil merilnik trenutne porabe goriva v avtomobilu?

palke na prosto pa skozi ventil B, Kolikokrat mora črpalka vsrkati in izsrkati zrak, da doseže končni tlak? Nariši graf odvisnosti tlaka v posodi od števila ciklov! Prostornina posode je desetkrat večja od prostornine črpalke. Zanemari temperaturne spremembe.

4. Z višine H spustimo zelo lahko togo palico z dolžino L, ki ima na obeh koncih pritrjeni enaki kroglici. Ena kroglica prožno trči ob rob mize, zato se sistem ob prostem padu še vrti. Na kateri razdalji od nivoja mize bo palica prvič zopet v vodoravnem položaju?

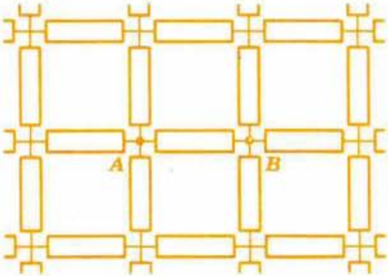


5. Reflektor porabi v eni uri 3 kWh električne energije, 5% je spremeni v svetlobno. Ohišje reflektorja se hladi z vodo, ki ima začetno temperaturo 15^{0}C. Na kateri višini mora biti postavljen rezervoar z vodo, če naj bo delovna temperatura reflektorja 30^{0}C? Premer dovodne cevi je 1,5 cm. Trenje vode v ceveh zanemari.

SKUPINA B:

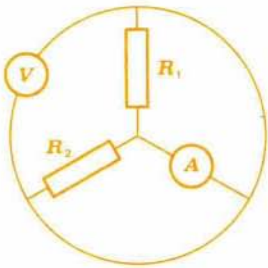
1. Na kondenzator s kapaciteto 100 μF pritisnemo napetost 100V. Kondenzator praznimo z drugim kondenzatorjem s kapaciteto 1 μF takole: najprej zvežemo priključke obeh kondenzatorjev, nato pa priključke zamenjamo. Kolikokrat je treba ta postopek ponoviti, da pade napetost prvega kondenzatorja na 50 V ? Koliko toplote se pri tem sprosti?

2. Neskončna mreža enakih upornikov je prikazana na sliki. V točko A prihaja, iz točke B pa izhaja tok I. Kolik tok teče skozi upornik med točkama A in B ?



124

3. Dva upornika po 3 ohm in 2 ohm, ampermeter z notranjim uporom 1 ohm in voltmeter z zelo velikim notranjim uporom so vezani tako, kot je prikazano na sliki. Radij kroga, ki povezuje elemente, je 5 cm, kot med ravnimi sigmenti pa je



$2\pi/3$. Magnetno polje z gostoto 1 T je pravokotno na ravnino električnega kroga. Kakšno napetost in tok kažeta voltmeter oziroma ampermeter v času enakomernega zmanjševanja magnetnega polja, ki v eni sekundi pade od začetne vrednosti na nič? Upor žic zanemari.

4. V električnem nihajnem krogu z lastno frekvenco 50 Hz sta zaporedno vezana kondenzator s kapaciteto 100 μF in tuljava s premerom 10 cm. Tuljava je navita s tisoč navoji iz bakrene žice s presekom 1 mm^2 in s specifično upornostjo $1{,}7.10^{-8}$ m. Kolikšna toplota se sprosti v vseh navojih tuljave v enem nihaju, če je amplituda napetosti v električnem krogu 120 V?

5. Med dvema velikima kovinskima vodoravnima ploščama je napetost 500 V. V prostor med ploščama, ki sta v razdalji 10 cm, je postavljena kovinska kroglica z maso 1 g, ki je nabita z nabojem $+10^{-6}$ As in prosto visi na koncu vrvice z dolžino 8 cm. Kolikšen je nihajni čas kroglice, če
   a) je zgornja plošča na višjem oziroma
   b) nižjem potencialu?

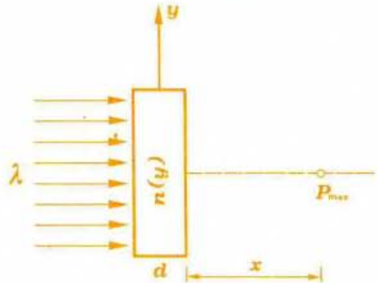
   Pri kateri napetosti na ploščah postane nihajni čas kroglice neskončen?

SKUPINA C:

1. Na optični osi sferičnega zrcala (radij zrcala je 100 cm) leži zelo majhen predmet, ki je za 102 cm oddaljen od temena zrcala. Med predmet in zrcalo postavimo planparalelno ploščo z lomnim količnikom 1,5. Kolikšna je debelina te plo

šče, če legi predmeta in njegove slike sovpadata? Zakrivljenost zrcala je tako majhna, da lahko tangense vpadnega in lomljenega kota na planparalelni plošči zamenjamo s sinusi.

2. Snop radijskih valov z valovno dolžino 1 cm pada pravokotno na tanko krožno ploščo z debelino 0,25 m in polmerom 1 m. Lomni količnik te plošče se linearno spreminja od središča proti robu, po preseku plošče pa je enak. Na katerih točkah na osi plošče bo jakost mikrovalov največja, če je lomni količnik na sredi plošče 1,5 , na robu pa le 1,1 ?



3. Na 10^{-6} m široko režo pada pravokotno vzporeden curek elektronov, ki imajo hitrost $3{,}65.10^{6}$ m/s. Upoštevaje valovno lastnost elektronov izračunaj razmik med prvima dvema maksimuma interferenčne slike, ki se dobi na 0,1 m oddaljenem zaslonu; (masa elektrona je $9{,}1.10^{-31}$ kg, $h = 6{,}62.10^{-34}$ Js).

4. V fotoefektu izbije γ žarek z energijo 0,7 MeV K-elektron (n=1) iz atoma svinca (Z=82). Izračunaj:

   a) energijo tega elektrona in energijo K_α X-žarka, ki ga izseva atom svinca, ko odda elektron (K_α X-žarek ustreza prehodu $n=2 \rightarrow n=1$);

   b) vrstno število najtežjega atoma, iz katerega bi ta X-žarek lahko izbil še en K-elektron.

5. Prostornino vode v bazenu lahko izmerimo z merjenjem aktivnosti radioaktivnega natrija Na^{24} . V ta namen vržemo v bazen natrij z aktivnostjo 3.10^{12} razpadov/s. Ko se natrij enakomerno porazdeli v vodi, izmerimo aktivnost 1 cm^3 vode po 10 urah, ki znaša 500 razpadov/s. Kolikšna je prostornina bazena, če je razpolovni čas Na^{24} 15 ur?

Mark Pleško

FIZIKA

VELIKA KNJIGA O FOTOGRAFIJI / prevedla Oskar Dolenc in Marko Aljančič. - Ljubljana : Cankarjeva založba, 1979. - 400 str. ; 26 cm. - Cena 790.-din

Cankarjeva založba je že pred časom izdala še eno veliko in lepo slikanico, kakršne so v zadnjih letih pogoste pri naših založbah. To pot je imela založba res srečno roko. Velika knjiga o fotografiji zasluži oba pridevnika: na štiristo straneh prinaša skoraj vse o fotografiji, pa tudi zaradi svoje kvalitete zasluži ime velika. Knjiga je zbornik del in vtisov najboljših fotografov, ki so se dolga leta zbirali okrog revije Life na Nizozemskem. V knjigi je dosti napisano o tehniki fotografiranja, kjer avtorji trdijo, da je znanje pomembnejše kot dobri pripomočki. Ne nazadnje pa je koristno tudi poznavanje fizikalne optike.

Iz kazala spoznamo vsebino knjige: 1. Zgodovina fotografije, 2. Kamera, 3. Objektiv, 4. Svetloba in film, 5. Osvetlitev, 6. Negativno razvijanje, 7. Pozitivni postopek, 8. Barve, 9. Razsvetljava, 10. Ateljejska kamera, 11. Conski sistem, 12. Posebne tehnike, 13. Končna obdelava, 14. Težnja k popolnosti.

V prvem poglavju zvemo veliko o zgodovini fotografije. Prvi Daguerrov postopek je bil znan že leta 1839. Že leta 1888 (danes bi rekli šele) pa je Eastman poslal na tržišče prvo box kamero. Le-ta se je kasneje razvila v mnogo različnih tipov z za takrat neslutenimi tehničnimi izboljšavami. S takimi kamerami ob dobrih zunanjih pogojih ni težko narediti dobre slike. (Sl. 1. Pod Golico - maja, čas 1/250 s, zaslonka 8; Sl. 2. Pogled na Ratitovec izpod prtovškega zvonika, čas 1/125 s, zaslonka 8)

V drugem poglavju govori knjiga o mirnem držanju kamere. Tako se lahko tudi v težjih razmerah naredi tudi dobra slika. (Sl. 3. Kitajska restavracija v Amsterdamu, zvečer ob barski svetlobi, fotografiranje z roke, čas 1 s, zaslonka 2.8)

Tretje poglavje govori o teleobjektivu, ki omogoča čudovite po snetke. Z njim približamo oddaljene predmete (Sl. 4. Bohinjsko jezero s Komne), ali pa lahko slikamo majhne žive predmete, ki bi nam sicer zbežali, če bi se jim preveč približali z navadnim objektivom. (Sl. 5. Kobilica na metuljnici)

S fotografiranjem ob slabi svetlobi lahko dobimo romantične oz. nežne posnetke, ki imajo prav tako svoje posebne prijetne strani (Sl. 6. Križišče na gozdni poti Zaplana - Stolp, jeseni pozno popoldan, čas 1/30 s, zaslonka 2.8). Mnogo več lahko naredimo pri močni svetlobi (Sl. 7. Kapljice v močnem vodnem cur ku so se ustavile, čas 1/1000, zaslonka 22).

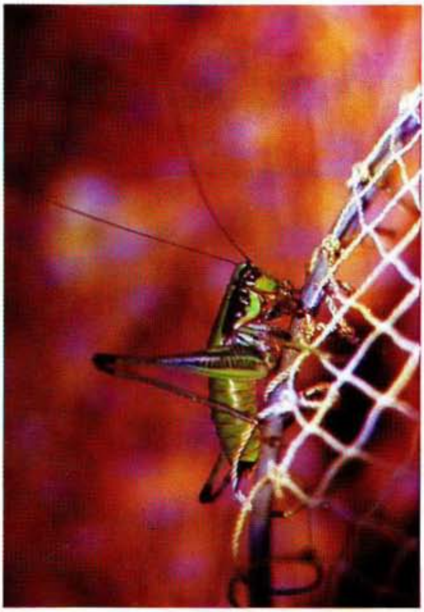
V želji po popolni fotografiji pa lahko naredimo hote ali nehote tudi marsikatero "napako", ki jo izkoristimo v posebne na mene. V popolnoma jasnem popoldnevu z napačno nastavitvijo zaslonke in časa dobimo sliko, ki prej spominja na mračne in romantične čase Ivanhoeja, kot pa na današnji čas (Sl. 8. Velenj ski grad).

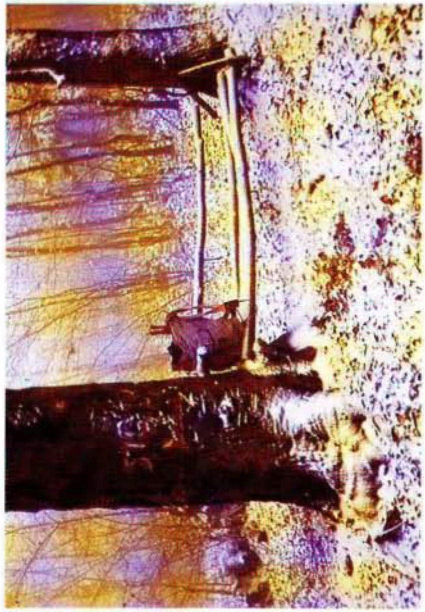
Mladim fotografom priporočamo, da si ogledajo to knjigo in upo rabijo nova spoznanja pri svoji zabavi.

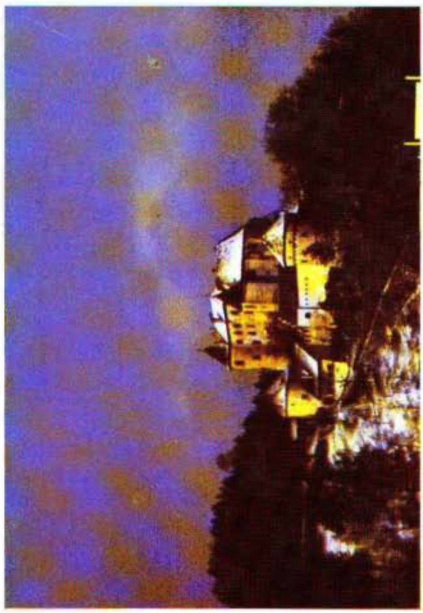
Vse slike so na 2. in 3. strani ovitka.

Ciril Velkovrh

1	2	5	6
3	4	7	8







PREMISLI IN REŠI

ZAPOMNITE SI ŠTEVILO π

Angleži poznajo kar nekaj spominčic, ki jim pomagajo, da si laže zapomnijo čimveč decimalk števila π.

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288 \ldots$$

Kako? Oglejmo si angleški stavek v verzih, ki ga je prof. Janko Moder prepesnil v slovenščino (brez spominčice!)

Now I, even I would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan,
rivaled nevermore,
Who in his wondrous lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

Zdaj jaz, še jaz naj počastim
s tem venčkom revnih rim
nesmrtnika iz Sirakuz, brez
tekmeca,
ki s čudežnim številom
iz roda v rod
podaja navodilo,
kako izračunaš krog.

Prva beseda ima tri črke, druga eno, tretja štiri, četrta spet eno, peta pet in tako dalje, kakor si sledijo decimalke števila π.

Premisli in reši tole nalogo:
Sestavi v slovenščini spominčico za π, ki bo imela vsaj deset besed. Najboljše sestavke bomo objavili. Pošljite jih do 5. januarja 1981.

Peter Petek

prev. *Janko Moder*