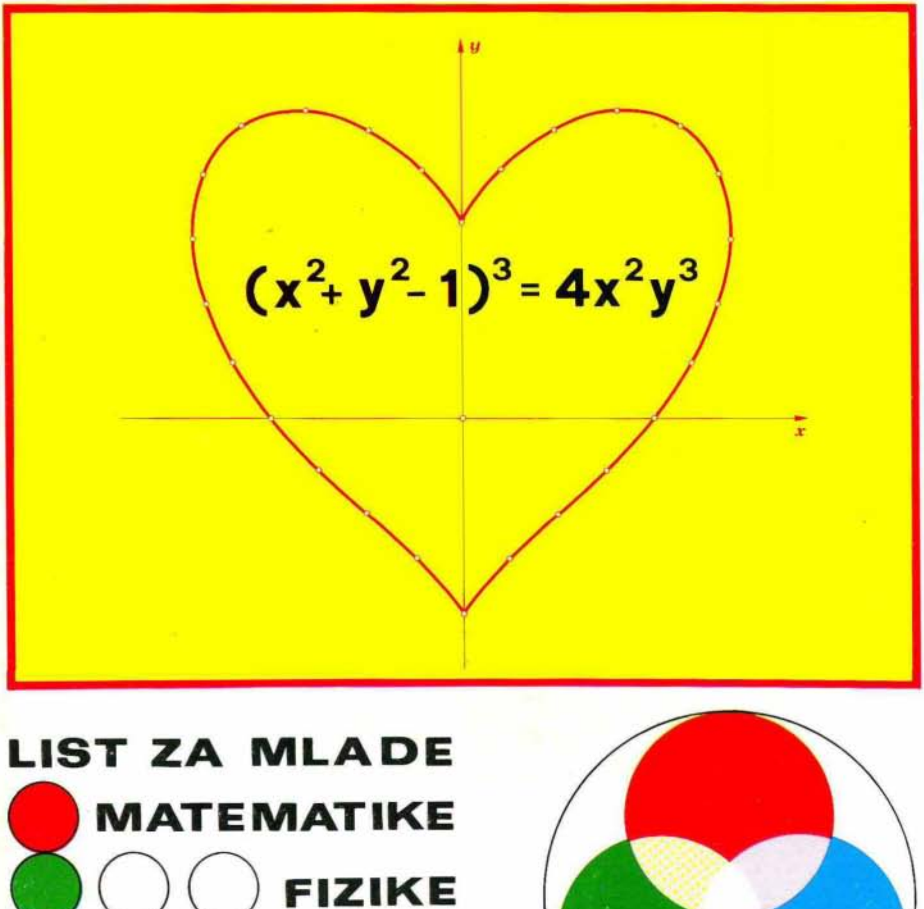
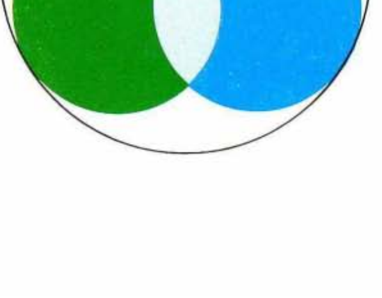
presek 1

VIII
1980-81



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME



IZDAJA DMFA SRS

Kot vse napredne sile na svetu se tudi mi zavzemamo samo za tako uporabo znanosti - tudi atomske, ki bo služila le humanim ciljem, družbenemu napredku in blagostanju.

Tito

UVODNIK

Presek izhaja osmo šolsko leto. V tem času je izšlo že 34 zvezkov zanimivega branja. Med listanjem po starih številkah Preseka mi je prišel v roke Prapresek, ki so ga pred uradnim začetkom izhajanja delili brezplačno učencem osnovnih šol, dijakom srednjih šol in članom Društva matematikov, fizikov in astronomov. Zelo mi je ugajal njegov uvodnik, ki pravi, da naj bi bil Presek list za mlade matematike, fizike in astronome - za mlade po srcu, ne po letih. V tem je Presek zagotovo uspel. Pisma bralcev in visoka naklada pričajo, da ga radi berejo mladi in starejši.

Presek naj bi obravnaval matematiko, fiziko in astronomijo na zanimiv in prijeten način. Iz pisem bralcev ni mogoče razbrati, ali je uspel v tem. Skoraj ni odmevov na daljše članke v Preseku. So pretežki in jih sploh ne berete? Se vam zdijo dolgočasni? Člani uredniškega odbora moramo to vedeti. Sicer se utegne kljub našemu prizadevanju primeriti, da bodo članki za vas prezahtevni in nezanimivi in boste naročali Presek le zaradi šal, ugank, nalog in drugega izrazito zabavnega pisanja. To se ne sme zgoditi. Vaš odziv na posamezne članke v Preseku naj nam pomaga, da to preprečimo. Zanima nas tudi mnenje vaših učiteljev in staršev. Pravilno slutite, da bi radi prevalili del uredniških skrbi na vaša ramena. Nič nas ni sram tega, saj smo za delo pri Preseku poplačani tako kot vi: veselimo se vsake nove številke in radi imamo matematiko, fiziko, astronomijo.

Po uvodniku v Prapreseku naj bi Presek izšel desetkrat v šolskem letu. Želje pripravljalnega uredniškega odbora so bile, kot vidite, podobne vašim: Presek naj izhaja čim pogosteje. Želje in možnosti pa se pogosto razhajajo. V tem šolskem letu lahko spet obljubimo štiri "debele" številke Preseka s po 64 stranmi in en zvezek Presekove knjižnice. Prispevke za še večji obseg bi le težko zbrali.

Naraščanja stroškov pri izdajanju Preseka ne moremo preprečiti. Naročnina bo letos 50 dinarjev za celo leto. Povejmo v opravičilo, da naročnino povišamo le tedaj, ko stara naročnina ne more kriti stroškov za izdajanje.

Andrej Likar

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
8. letnik, šolsko leto 1980/81, 1. številka, str. 1 - 66.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK , Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila je 62,50din, za skupinska pa 50.-din; za inozemstvo 5 $ = 100.-din, 4000Lit, 70.-Asch. Posamezna številka stane 15.-din.

List sofinancirata ISS in RSS.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

List izhaja petkrat letno. Naklada 25.000 izvodov.

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
8 (1980/81) ŠT. 1, STR. 1 - 64

V S E B I N A

MATEMATIKA

ZANIMIVA MATEMATIKA?

Rekreacijska matematika je del matematike, ki obsega veľikansko množico problemov, ugank, iger, prevar, protislovij, domislic, trikov in nalog, ki za razumevanje ne potrebujejo mnogo matematičnega znanja, a z duhovitostjo tako vznemirijo človekovo radovednost, da ga pritegnejo k reševanju in učenju.

Rekreacijska matematika nas ne mori s suhoparnimi definicijami in težkimi izreki. Na zanimiv način pod plaščem igre operira z matematičnimi pojmi in resnicami in nas takorekoč v šali približa tudi težjim področjem matematike. Kjub vsemu pa je tudi v rekreacijski matematiki potrebno obilo miselnih naporov in strogega, logičnega sklepanja. Še vedno velja, da ni kraljevske poti v matematiko, rekreacijska matematika pa je vendarle kraljevsko povabilo k njej.

Po eni strani je rekreacijska matematika čista matematika, po drugi strani pa je čudovito sredstvo za zadovoljevanje človekove potrebe po igranju. Mar ni ta potreba v resnici skrita za vso matematiko? Igra je važen element rekreacijske matematike, zato je pridevnik *rekreacijska* zares utemeljen. Igra je izredno pomembna tudi pri pedagoškem delu, zato je povsem razumljivo, da segajo po rekreacijski matematiki čedalje bolj učitelji matematike in tudi pisci matematičnih učbenikov.

Rekreacijska matematika je stara toliko kot matematika. Z njo so se vsaj postransko ukvarjali vsi veliki matematiki in seveda mnogi amaterji. Resnično pa se je rekreacijska matematika razbohotila šele po drugi svetovni vojni. Čar rekreacijske matematike je, da je spočela mnoge resne matematične veje, sama pa se spretno izmika vsem kalupom in teorijam. *Teorija števil, kombinatorika, topologija, teorija grafov, verjetnostni račun, teorija iger* in še marsikateri kos matematike ima svoje korenine v rekreacijski matematiki.

Seveda je danes rekreacijska matematika postala že zelo resna. Obstajajo posebne revije, namenjene originalnim dosežkom tega čudnega dela matematike. Omenimo le *Journal of Recreational Mathematics*, ki izhaja od leta 1968 dalje. Med velikimi imeni rekreacijske matematike omenimo le *Martina Gardnerja*, ki je napisal kopico zanimivih knjig, in ki že mnogo let ureja rubriko Matematične igre v ugledni reviji *Scientific American*. Pri nas je rekreacijska matematika prisotna v različnih ugankarskih kotičkih raznih (nematematičnih) revij - spomnimo se na *Proteus* pod vodstvom *Lava Čermelja*. Žal so taki kotički minljivi in precej odvisni od ljudi, ki jih urejajo.

Rekreacijski matematiki je bil posvečen tudi seminar *Zanimiva matematika*, ki ga je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS v sodelovanju z Odsekom za matematiko FNT, Oddelkom za matematiko IMFM, Inštitutom Jožef Stefan in Zavodom SR Slovenije za šolstvo. Namenjen je bil srednješolskim učiteljem matematike. Potekal je 25. in 26. januarja 1980. Vseh šest predavanj tega seminarja izide v obliki člankov. V Obzorniku za matematiko in fiziko izideta članka:

Ivan Vidav: O funkciji $[x]$ in komplementarnih zaporedjih naravnih števil, in

Tomaž Pisanski: Pellova enačba.

V Preseku pa izidejo štirje članki:

Vladimir Batagelj: Hamiltonova naloga za grafe,

Roman Rojko: Igra Nim,

Roman Rojko: Trikotna števila in

Tomaž Pisanski: Celi trikotniki.

Tomaž Pisanski in Roman Rojko

CELI TRIKOTNIKI

Trikotnike, ki imajo za dolžine stranic cela števila, imenujemo *celi trikotniki*. Trikotnik s stranicami x, y in z označimo s trojico števil (x,y,z) . Ta oznaka trikotnik popolnoma karakterizira, saj je vsak trikotnik določen s svojimi stranicami do skladnosti natančno. Ker se za vrstni red stranic ne menimo, določa vsaka od šestih permutacij (x,y,z), (x,z,y), (y,x,z), (y,z,x), (z,x,y), (z,y,x) isti trikotnik, zato lahko izberemo katerokoli med njimi. Odločili se bomo za tisto trojico, ki ima komponente urejene: (x,y,z); $x \leq y \leq z$.

Naloga 1: Dokaži, da trojica (x,y,z), $0 < x \leq y \leq z$ določa trikotnik, če in samo če je $x + y > z$.

Če imajo cela števila x, y in z skupni delitelj d, lahko zapišemo:

$$x = x_0 d \quad , \quad y = y_0 d \quad , \quad z = z_0 d$$

Trikotnika sta si podobna! Če števila x, y in z nimajo skupnega faktorja, pravimo, da je celi trikotnik (x,y,z) *primitiven*.

V naslednji razpredelnici so zbrani nekateri majhni celi trikotniki. Posebej so označeni enakostranični, enakokraki, pravokotni in neprimitivni. Število v oklepaju označuje največji skupni delitelj števil x, y in z pri neprimitivnih trikotnikih.

Celi trikotniki (x,y,z) , $0 < x \leq y \leq z \leq 5$ (Tabela 1)

n	x	y	z		n	x	y	z	
1.	1	1	1	enakostraničen	12.	3	4	4	enakokrak
2.	1	2	2	enakokrak	13.	4	4	4	enakostraničen (4)
3.	2	2	2	enakostraničen (2)	14.	3	3	5	enakokrak
4.	2	2	3	enakokrak	15.	2	4	5	
5.	1	3	3	enakokrak	16.	3	4	5	pravokoten
6.	2	3	3	enakokrak	17.	4	4	5	enakokrak
7.	3	3	3	enakostraničen (3)	18.	1	5	5	enakokrak
8.	2	3	4		19.	2	5	5	enakokrak
9.	3	3	4	enakokrak	20.	3	5	5	enakokrak
10.	1	4	4	enakokrak	21.	4	5	5	enakokrak
11.	2	4	4	enakokrak (2)	22.	5	5	5	enakostraničen (5)

Vnaprej si izberimo dolžino najdaljše stranice z celega trikotnika (x,y,z) ! Z $n(z)$ označimo število celih trikotnikov, ki imajo najdaljšo stranico z. Iz razpredelnice vidimo: $n(1) = 1$, $n(2) = 2$, $n(3) = 4$, $n(4) = 6$, $n(5) = 9$.

Naloga 2: Dokaži:

a) $n(2k) = n(2(k-1)) + 2k$
b) $n(2k-1) = n(2k) - k$
c) $n(2k) = k(k+1)$
d) $n(2k-1) = k^2$

To pomeni, da ima na primer 981090 celih trikotnikov najdaljšo stranico dolžine 1980. Naj $N(z)$ označuje število celih trikotnikov, pri katerih nobena stranica ne presega z.

Naloga 3: Dokaži:

a) $N(2k) = N(2(k-1)) + 2k^2 + k$
b) $N(2k-1) = N(2k) - k^2 - k$
c) $N(2k) = k(k+1)(4k+5)/6$
d) $N(2k-1) = k(k+1)(4k-1)/6$

Naj $e(z)$ označuje število celih enakokrakih trikotnikov z najdaljšo stranico z in naj $E(z)$ označuje število celih enakokrakih trikotnikov, ki nimajo nobene stranice daljše od z .

Naloga 4: Dokaži:

a) $e(2k) = 3k - 1$
b) $e(2k-1) = 3k - 2$
c) $E(2k) = E(2(k-1)) + 6k - 3$
d) $E(2k-1) = E(2k) - 3k + 1$
e) $E(2k) = 3k^2$
f) $E(2k-1) = 3k^2 - 3k + 1$

Seveda zdaj ni več težavno dobiti ustreznih obrazcev za število raznostraničnih trikotnikov: $n(z) - e(z)$ in $N(z) - E(z)$. Bralec jih zlahka izpelje sam. Mnogo težja je tale naloga:

Naloga 5: Naj bo $m(t)$ število celih trikotnikov z obsegom t in $M(t)$ število celih trikotnikov, katerih obseg ne preseže števila t. Izpelji obrazce za računanje $m(t)$ in $M(t)$!

Nekateri celi trikotniki so še posebej zanimivi. Imajo še kakšno dodatno lastnost. Gotovo so najbolj znani med njimi Pitagorovi trikotniki; to so *pravokotni celi trikotniki* . Običajno pravimo trojicam (x,y,z) Pitagorovih trikotnikov *Pitagorejske trojice*. Zanje je značilna enačba:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

Pitagorejske trojice so ravno vse pozitivne celoštevilske rešitve enačbe (1). Če iščemo rešitve kake enačbe v celih številih, rečemo, da je taka enačba *diofantska* . Znano je, da pri poljubnih celih m in n števila

$$x = 2mn \quad , \quad y = m^2 - n^2 \ , \quad z = m^2 + n^2 \quad (2)$$

rešijo diofantsko enačbo (1). Ker nas zanimajo le pozitivne rešitve, zahtevamo še: $m > n > 0$. S tem dobimo vse primitivne Pitagorove trikotnike in še nekatere neprimitivne.

Naloga 6: (a) Dokaži, da vsak m in n, $m > n > 0$, tako da je en sod, drugi pa lih in nimata skupnega faktorja, določa z obrazci (2) primitivni Pitagorov trikotnik.

(b) Poišči med vsemi Pitagorovimi trikotniki, ki se jih ne da izraziti z obrazci (2), tistega z najmanjšo hipotenuzo.

(c) Dokaži, da ima vsak Pitagorov trikotnik celoštevilsko ploščino.

Naslednja razpredelnica prikazuje nekaj najmanjših pitagorejskih primitivnih trojic.

Primitivni Pitagorovi trikotniki (x,y,z), $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 100$

	m	n	x	y	z		m	n	x	y	z
1.	2	1	3	4	5	9.	6	5	11	60	61
2.	3	2	5	12	13	10.	7	4	33	56	65
3.	4	1	8	15	17	11.	8	1	16	63	65
4.	4	3	7	24	25	12.	8	3	48	55	73
5.	5	2	20	21	29	13.	7	6	13	84	85
6.	6	1	12	35	37	14.	9	2	36	77	85
7.	5	4	9	40	41	15.	8	5	39	80	89
8.	7	2	28	45	53	16.	9	4	65	72	97

Tabela 2.

V tej razpredelnici opazimo precej zanimivih stvari. Strnimo jih v nalogo.

Naloga 7: (a) Dokaži, da je hipotenuza primitivnega Pitagorovega trikotnika liho število.

(b) Dokaži, da je v primitivnem Pitagorovem trikotniku ena kateta soda, druga pa liha.

(c) Dokaži, da je v vsakem Pitagorovem trikotniku vsaj ena kateta deljiva s 3.

(d) Dokaži, da dobimo pitagorejske trojice (x,y,z), pri katerih je hipotenuza z za 1 večja od katete y: $z = y + 1$, z obrazci: $x = 2n + 1$, $y = 2n(n+1)$, $z = 2n(n+1) + 1$.

Seveda pa lahko vprašamo še marsikaj! Vse kaže, da število 6 ne more biti stranica kakega primitivnega Pitagorovega trikotnika. Katera števila ne morejo biti stranice (ali katete) nobenega Pitagorovega trikotnika? Vidimo, da sta 65 in 85 dolžini hipotenuz dveh primitivnih Pitagorovih trikotnikov. Ali je lahko kako število kateta dveh različnih primitivnih Pitagorovih trikotnikov?

Kot smo že rekli, je diofantska enačba (1) karakteristična za cele trikotnike z enim kotom 90°. Edvard Kramar je v Preseku obravnaval cele trikotnike z notranjim kotom 60° (120°).

Naloga 8: (a) Dokaži, da je diofantska enačba

$$x^2 + y^2 - xy = z^2 \tag{3}$$

karakteristična za cele trikotnike, ki imajo kot nasproti stra̲nici z enak 60°.

(b) Dokaži, da je diofantska enačba

$$x^2 + y^2 + xy = z^2 \tag{4}$$

karakteristična za cele trikotnike, ki imajo kot nasproti stra̲nici z enak 120°.

Obstajajo pa še drugačni celi trikotniki. Za konec omenimo še *Heronove trikotnike*. Celi trikotnik (x,y,z) je Heronov, če ima celoštevilsko ploščino. Če označimo s P ploščino trikotnika (x,y,z), dobimo iz Heronovega obrazca diofantsko enačbo:

$$16P^2 = (x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \tag{5}$$

To je karakteristična enačba za Heronove trikotnike.

Naloga 9: Dokaži, da je obseg vsakega Heronovega trikotnika sodo število.

Na osnovi te naloge lahko obseg Heronovega trikotnika označimo z $2s$, kjer je s naravno število. V enačbo (5) lahko vpeljemo nove spremenljivke:

$$X = s - x\,, \quad Y = s - y\,, \quad Z = s - z \tag{6}$$

in enačba (5) se precej poenostavi:

$$P^2 = XYZ(X + Y + Z) \tag{7}$$

Vsaka celoštevilska rešitev enačbe (7) določa enolično celošte̲vilsko rešitev enačbe (5), saj je nasprotna transformacija k (6) preprosta:

$$x = Y + Z\,, \quad y = Z + X\,, \quad z = X + Y \tag{8}$$

Naloga 10: Če med števili x, y, z, X, Y in Z velja zveza (8), tedaj je skupni delitelj števil x, y, z skupni delitelj števil X, Y, Z in obratno.

Ta naloga zagotavlja, da vsaka rešitev enačbe (7), pri kateri X, Y in Z nimajo delitelja d, $d > 1$ določa primitiven Heronov trikotnik in da na ta način dobimo vse primitivne Heronove trikotnike.

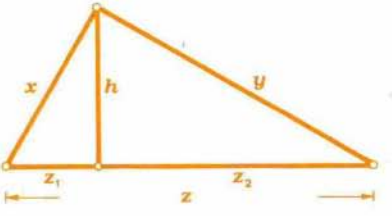
Enačbe (7) na tem mestu ne bomo reševali. Ogledali si bomo raje nekaj lastnosti Heronovih trikotnikov.

Naloga 11: Dolžine višin Heronovega trikotnika so racionalna števila.

Naloga 12: Naj bodo a, b in c racionalna števila in naj velja: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Dokaži, da sta tedaj tudi $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$ racionalni števili.

Naloga 13: Dokaži, da v vsakem trikotniku leži nožišče višine na najdaljšo stranico z v notranjosti stranice z.

Naloga 14: Naj bo h višina na z v Heronovem trikotniku (x,y,z); $x \leqq y \leqq z$. Naj bosta z_1 in z_2 odseka, na katera razdeli nožišče višine h stranico z: $z = z_1 + z_2$. Uporabi trditve nalog 11, 12 in 13 in dokaži, da sta z_1 in z_2 racionalni števili.



Očitna posledica naloge 14 pa je, da sta pravokotna trikotnika (z_1,h,x) in (z_2,h,y), iz katerih je sestavljen Heronov trikotnik (x,y,z), racionalna - števila z_1, z_2, h, x in y so racionalna. To pa pomeni, da sta podobna dvema Pitagorovima trikotnikoma. Obstaja torej tako naravno število C, da sta trikotnika (z_1C, hC, xC) in (z_2C, hC, yC) Pitagorova. Če zlepimo ta dva trikotnika vzdolž skupne katete hC, dobimo Heronov trikotnik (xC, yC, zC), ki je podoben prvotnemu trikotniku (x,y,z).

Zdaj pa imamo metodo, s katero lahko dobimo vse Heronove trikotnike. Recept je takle:

Izberi poljuben par Pitagorovih trikotnikov (x_1, y_1, z_1) in (x_2, y_2, z_2) in na vsakem od njiju po eno kateto (npr. x_1 in x_2). Vsakega posebej povečaj tako, da se ujemata v kateti. Prvega povečamo x_2-krat, drugega pa x_1-krat. Dobimo trikotnika (x_1x_2, y_1x_2, z_1x_2) in (x_1x_2, x_1y_2, x_1z_2), ki ju staknemo vzdolž skupne katete x_1x_2. Dobimo Heronov trikotnik $(z_1x_2, x_1z_2, y_1x_2 + x_1y_2)$, ki ga lahko morebiti še okrajšamo. Na ta način dobimo *vse* Heronove trikotnike.

Tomaž Pisanski

LITERATURA:

[1] Edvard Kramar, *Število celoštevilskih trikotnikov z danim obsegom* (bo izšlo v Preseku).
[2] Edvard Kramar, *Kako dobimo nekatere celoštevilske trikotnike*, Presek III/2, str. 82-85.
[3] Edvard Kramar, *Odlikovani trikotniki*, Presek IV/2, str. 113-115.
[4] Edvard Kramar, *Odlikovani trikotniki - 2.del*, Presek IV/4, str. 204-205.
[5] France Križanič, *Diofantske enačbe*, Presek V/3, str. 134-141.
[6] Janez Stare, *Nekaj o teoriji števil*, Presek V/2, str. 81-86.
[7] Danijel Bezek, *Heronovi trikotniki*, Presek VI/3, str. 132-133, 186.
[8] Tomaž Pisanski, *Presekov škrat*, Presek VII/2, str. 120.
[9] Ivan Pucelj, *Pravokotni trikotnik*, Presek V/4, str. 195-197.

NALOGA

PRAVOKOTNIK

Pravokotnik s stranicama $a = 2$ in $b = 1$ razrežite z dvema ravnima rezoma v tri like (dva trikotnika in en četverokotnik) tako, da z vzporednim premikom le-teh lahko spet sestavite pravokotnik iste oblike in velikosti, ki pa je proti prvemu zasukan za 30° !

Milan Hladnik

ŠTEVILO RAZDELITEV ENAKIH PREDMETOV NA SKUPINE

Dedek Mraz je pri pripravljanju daril za otroke imel še 10 pomaranč, ki jih je hotel dodati v tri vrečke, ki še niso bile zaprte. Ker je hotel biti čim bolj pravičen, je najprej poiskal vse možne porazdelitve teh pomaranč na tri kupčke. Dobil je 8 razdelitev: 8+1+1, 7+2+1, 6+3+1, 6+2+2, 5+3+2, 5+4+1, 4+4+2, 4+3+3. Nazadnje se je odločil za eno od teh možnosti in kupčke razdelil v najprimernejše vrečke. Zastavil pa si je vprašanje, ali se da že vnaprej ugotoviti, koliko je takih porazdelitev pri danem številu pomaranč, da pri grupiranju ne bi morda pozabil na kakšno razdelitev.

Poskusimo problem, na katerega je naletel Dedek Mraz, rešiti za splošnejše primere. Vprašajmo se, na koliko načinov lahko naredimo iz n enakih predmetov k skupin. Lahko bi tudi rekli, na koliko načinov lahko pišemo dano število n na k pozitivnih sumandov, pri čemer vrstni red sumandov ni važen (na primer razdelitvi $6 = 1+2+3$ in $6 = 2+3+1$ sta za nas isti).

Namesto zgornje naloge si najprej oglejmo nekoliko spremenjeno nalogo, vendar bomo lahko iz rešitve te naloge takoj izpeljali tudi rešitev za prvotno. Vprašanje je, na koliko načinov lahko razdelimo n enakih predmetov na kvečjemu k skupin. Označimo z $r_k(n)$ število teh možnosti. Čeprav je vprašanje zelo lahko razumljivo, ni lahko dobiti formulo za število $r_k(n)$ za poljubni naravni števili n in k. Pokazali bomo pot do take formule za najbolj preproste primere. Dogovorimo se še, da pri zapisu porazdelitev ničelnih členov ne bomo pisali, razen pri razdelitvi števila 0 ($0 = 0$). Torej bomo zapisali $6 = 4+2$ namesto $6 = 4+2+0+0$.

Najprej je očitno $r_1(n) = 1$ za vsako število predmetov. Tudi do števila $r_2(n)$ bomo hitro prišli. Naj bo najprej n sodo število, potem imamo naslednje razdelitve števila n:

$$n = n, \quad n = (n-1) + 1, \; \ldots, \; n = n/2 + n/2$$

torej $n/2 + 1 = (n+2)/2$ možnosti. Pri lihem n pa dobimo

$$n = n, \quad n = (n-1) + 1, \ \ldots, \ n = (n+1)/2 + (n-1)/2$$

se pravi $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$ možnosti. Oba rezultata lahko zapišemo z eno formulo na primer takole:

$$r_2(n) = (n+1+(1+(-1)^n)/2)/2$$

Pri tem smo morali pisati sumand $(1+(-1)^n)/2$, ki uravnava formulo za primer sodega in primer lihega števila n. Za praktično rabo lahko zgornji izraz še poenostavimo, če vpeljemo naslednji simbol: za dani števili m in n naj bo $D(m,n) = 1$, če je n deljiv z m in $D(m,n) = 0$, če ni deljiv ter $D(m,0) = 1$. Pri tem sta m in n poljubni naravni števili. S to oznako lahko zgornjo formulo pišemo v obliki

$$r_2(n) = (n+1+D(2,n))/2$$

To formulo smo izpeljali za $n = 2,3,\ldots$, velja pa tudi za $n = 0$ in $n = 1$, kajti tedaj dobimo $r_2(0)=r_2(1)=1$, kar je smiselno, saj imata ti števili le po eno razdelitev: $0 = 0$, $1 = 1$.

Oglejmo si še, do kakšnega obrazca pridemo za število razdelitev n predmetov na kvečjemu 3 skupine. Do števila $r_3(n)$ bomo prišli v več korakih, pri tem pa si bomo pomagali z že izpeljano formulo za $r_2(n)$. Mislimo si, da moramo n enakih krogel razdeliti na kvečjemu 3 kupčke. Vse možne načine lahko dobimo takole: Najprej poiščemo vse razdelitve na kvečjemu dva kupčka, teh razdelitev je $r_2(n)$ in jih lahko štejemo za razdelitve na kvečjemu 3 kupčke, pri čemer je en kupček prazen. V drugem koraku damo na vsakega od treh kupčkov po eno kroglo, preostalih $n-3$ krogel (če je $n > 3$) pa razdelimo tako, da jih damo kakorkoli na kvečjemu dva kupčka. Število razdelitev na tem koraku je enako $r_2(n-3)$ in vse te razdelitve so očitno drugačne od razdelitev v prvem koraku. V tretjem koraku damo najprej na vsak kupček po dve krogli, če jih je dovolj, preostale pa porazdelimo na kvečjemu prva dva kupčka. S tem dobimo še

$r_2(n-6)$ porazdelitev. Ta postopek ponavljamo tako dolgo, dokler nam ne zmanjka krogel. Očitno so razdelitve, ki jih dobimo, vse različne. Število razdelitev $r_3(n)$ torej lahko izrazimo z zvezo

$$r_3(n) = r_2(n) + r_2(n-3) + r_2(n-6) +\ldots+ r_2(n-3i) +\ldots$$

kjer člene prištevamo tako dolgo, dokler je število v oklepaju še večje ali enako nič. Pri tem še upoštevamo $r_2(0) = r_2(1) = 1$.

Za ilustracijo si oglejmo zgornji postopek pri $n = 8$. Najprej imamo $r_2(8) = 5$ razdelitev na kvečjemu dva dela: $8 = 8$, $8 = 7+1$, $8 = 6+2$, $8 = 5+3$, $8 = 4+4$. Te razdelitve lahko štejemo tudi za razdelitve na kvečjemu tri dele. V drugem koraku damo na vsak kupček po eno kroglo, ostalih 5 pa razdelimo na kvečjemu dva dela: $5 = 5$, $5 = 4+1$ in $5 = 3+2$. Če upoštevamo, da imamo na vsakem kupčku že po eno kroglo, dobimo: $8 = 6+1+1$, $8 = 5+2+1$ in $8 = 4+3+1$, torej še $r_2(8-3) = r_2(5) = 3$ razdelitve. Nazadnje damo na kupček po dve krogli, preostali dve pa na kvečjemu dva kupčka: $2 = 2$, $2 = 1+1$. Vidimo, da imamo nazadnje še $2 = r_2(8-6)$ možnosti: $8 = 4+2+1$ in $8 = 3+3+2$. Vseh razdelitev je torej $r_3(8) = 5 + 3 + 2 = 10$.

Če bi sedaj v zgornjo zvezo vstavili zaporedoma vse izraze, ki veljajo za $r_2(n)$, $r_2(n-3)$ itd, bi dobili končno formulo za število razdelitev $r_3(n)$. Ker pa je pot do končne oblike dokaj zamudna, jo raje kar zapišimo, spodaj pa bomo pokazali, kako to formulo lahko dokažemo s popolno indukcijo

$$r_3(n) = (n^2+6n+5+3D(2,n)+4D(3,n))/12$$

Če si ogledamo zvezo med številom porazdelitev na kvečjemu 3 dele in med števili porazdelitev na kvečjemu 2 dela, opazimo, da imamo 3 različne situacije glede na to, kakšen ostanek dobimo, če število n delimo s 3. Zato ločimo tri možnosti: $n = 3s$, $n = 3s+1$ in $n = 3s+2$. Formula za $r_3(n)$ ima tedaj tri oblike

$$r_3(3s) = (3s^2+6s+3+D(2,3s))/4$$
$$r_3(3s+1) = (3s^2+8s+4+D(2,3s+1))/4$$
$$r_3(3s+2) = (3s^2+10s+7+D(2,3s+2))/4$$

kjer smo izraze še okrajšali s 3. Vsako od teh formul bi bilo treba dokazati z indukcijo. Da veljajo vse tri pri $s=1$, se zlahka prepričamo: $r_3(3) = 3$, $r_3(4) = 4$ in $r_3(5) = 5$. Kot vemo (glej Presek V/2) pri popolni indukciji predpostavimo še, da formula velja pri številu s in od tod dokažemo veljavnost formule za $s+1$. Oglejmo si dokaz pri prvi formuli. Iz zveze med $r_3(3s+3)$ in $r_2(3s+3-3i)$ dobimo najprej

$$r_3(3s+3) = r_2(3s+3) + r_2(3s) + r_2(3s-3) + \ldots$$
$$\ldots + r_2(3) + r_2(0)$$

kar pomeni: $r_3(3s+3) = r_2(3s+3) + r_3(3s)$. Upoštevajmo formulo za $r_2(3s+3)$ in formulo za $r_3(3s)$, ki po predpostavki velja

$$r_3(3s+3) = (3s+4+D(2,3s+3))/2 +$$
$$+ (3s^2+6s+3+D(2,3s))/4$$

Ker je natanko eno od števil $3s$ in $3s+3$ deljivo z 2, je $D(2,3s+3) + D(2,3s) = 1$, od tod pa sledi zveza $2D(2,3s+3) + D(2,3s) = 1 + D(2,3s+3)$. Če to zvezo upoštevamo zgoraj in izraz malo uredimo, dobimo

$$r_3(3s+3) = (3(s+1)^2+6(s+1)+3+D(2,3s+3))/4$$

kar je ravno prva od zgornjih treh formul pri $s+1$. Na podoben način dokažemo tudi drugi dve formuli.

Formulo za $r_3(n)$ tako dokažemo za $n=3,4,\ldots$, kaj hitro pa se lahko prepričamo, da velja tudi za $n=0,1$ in 2. Da pa se ta formula pisati v krajši obliki, če vpeljemo še en simbol. Najprej lahko pišemo $r_3(n) = ((n+3)^2+p)/12$, kjer je $p = 3D(2,n)+4D(3,n)-4$. Če si ogledamo vse tri situacije, ko je število n deljivo ali ne z 2 ali s 3, dobimo za p naslednje štiri možnosti $p=3$, $p=0$, $p=-1$ ali $p=-4$. Ker pa mora biti šte vilo $(n+3)^2+p$ deljivo z 12, lahko rečemo, da je treba k številu $(n+3)^2$ poiskati najbližji večkratnik števila 12 (prištejemo 0 ali 3, ali odštejemo 1 ali 4). Označimo z $\{s\}_{12}$ k številu s najbližji večkratnik števila 12, potem zgornjo formulo lahko pišemo v obliki

$$r_3(n) = \{(n+3)^2\}_{12}/12$$

Ker je vedno $p \neq 6$, je število $\{s\}_{12}$ vedno enolično določeno. Za zgled izračunajmo $r_3(8) = \{11^2\}_{12}/12 = 120/12 = 10$.

Na prav podoben način bi izpeljali formulo pri večjem k. Za $r_4(n)$ bi najprej dobili zvezo

$$r_4(n) = r_3(n)+r_3(n-4)+r_3(n-8)+\ldots+r_3(n-4i)+\ldots$$

kjer dodajamo člene tako dolgo, dokler so izrazi v oklepajih še nenegativni. Naj brez dokaza zapišemo končno formulo, ki jo dobimo iz zgornje in prejšnjih zvez

$$r_4(n) = (n^3+15n^2+63n+49+9(n+3)D(2,n)+32D(3,n)+ \\ +16D(3,n)+36D(4,n))/144$$

Še mnogo daljše so formule za $r_5(n)$, $r_6(n)$ itd.

Povrnimo se sedaj k številu razdelitev n enakih predmetov na k nepraznih kupčkov. Označimo število teh razdelitev z $r_k'(n)$. Ker sedaj nobeden od k kupčkov ne sme biti prazen, damo najprej na vsakega po en predmet, preostalih $n-k$ pa razdelimo na kvečjemu k kupčkov. Tako dobimo zvezo

$$r_k'(n) = r_k(n-k) \ ; \quad k=1,2,3,\ldots \ ; \quad n \geqq k$$

V posebnih primerih torej imamo formule

$$r_1'(n) = 1$$
$$r_2'(n) = r_2(n-2) = (n-1+D(2,n))/2$$
$$r_3'(n) = r_3(n-3) = \{n^2\}_{12}/12$$

Upoštevali smo zvezo $D(2,n-2) = D(2,n)$. Za pomaranče Dedka Mraza na primer dobimo: $r_3'(10) = \{10^2\}_{12}/12 = 96/12 = 8$.

Ker je računanje vrednosti za $r_k(n)$ po formulah za večje k čedalje bolj komplicirano, lahko za ne preveč velike n in k te vrednosti računamo postopoma kar iz zvez oblike: $r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + \dots + r_{k-1}(n-ik) + \dots$, $n-ik \geqq 0$, ki jih lahko dokažemo za $k=2,3,\dots$ Naredimo si tabelo, v katero najprej napišemo števila $n=0,1,2,\dots$, nato same enojke za $r_1(n)$, iz teh izračunamo in izpišemo vrednosti za $r_2(n)$, iz teh zopet podobno vrednosti za $r_3(n)$ itd. To tabelo nadaljujemo tako dolgo, da pridemo do iskane vrednosti za $r_k(n)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ..
$r_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 ..
$r_2(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6 ..
$r_3(n)$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14 ..
$r_4(n)$	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	...
$r_5(n)$	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	...
...	. . . .										

Za vajo izračunaj: $r_3(40)$, $r_3(60)$ in $r_9(9)$!

Edvard Kramar

ENAKOSTI

$$13 \times 93 = 31 \times 39$$

in

$$12 \times 63 = 21 \times 36$$

zadoščata enačbi

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$$

pri čemer je $a \neq b$ in $c \neq d$. Enačba ima še nekaj rešitev. Poišči jih čim več!

Vladimir Batagelj

ENAČBA SRCA

Dobro vemo, da imajo svojo enačbo premica, krog, parabola... Kaj pa srce? Tudi. S skupnimi močmi se poskusimo dokopati do krivulje, ki podaja v ravnini obliko srca. Naštejmo nekaj lastnosti, ki jo odlikujejo pred vsemi drugimi ravninskimi krivuljami.

Najprej: leva stran srca ustreza desni: *simetrija* v smeri *levo-desno*. Prav tako očitno je pomanjkanje simetrije v drugi smeri: *asimetrija* v smeri *gor-dol*.

Če srce presekamo s premico - ne tako, kot je običaj (Sl. 1), ampak z vodoravno premico v primerni višini (Sl. 2), se lahko zgodi, da ga *seče* kar *v štirih točkah*.

Slika 1

Slika 2

Dalje: srce je sklenjena *omejena krivulja*. To med drugim pomeni, da nobena njena točka ni neskončno daleč (kot npr. pri paraboli ali premici).

Glede oblike ali bolje razmerja med vodoravno in navpično razsežnostjo pa moremo trditi tole: če spojimo točki C in D (Sl. 3) in skozi središče O te spojnice potegnemo nanjo pravokotnico, sta - vsaj na oko - odseka CD in AB enaka. Skozi točke $ACBD$ torej lahko narišemo *krog*.

Nas lahko pripeljejo naštete lastnosti do enačbe srca? Poskusimo. Najprej izberimo koordinatni sistem s središčem v točki O, os x naj bo OA, os y pa OC. Skali na obeh oseh naj bosta izbrani tako, da ima A koordinati $(1,0)$ C pa $(0,1)$. Krog, o katerem smo govorili, je s tem že določen; njegova enačba je

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

V točki A se sečeta krog (1) in premica z enačbo $y = 0$. Zato je v tej točki gotovo res

$$x^2 + y^2 - 1 = y \tag{2}$$

Tudi srce gre skozi točko A. Ali je zato (2) že njegova enačba? Še zdaleč ne! (2) je enačba kroga s središčem v točki (0,1/2) in s polmerom $(5/4)^{1/2}$, kar lepo vidimo, če preuredimo (2) v enakovredno obliko

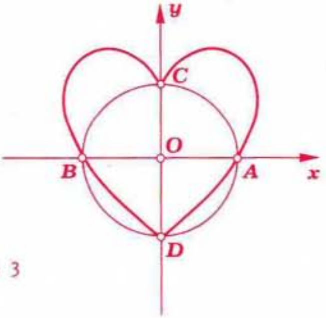
$$x^2 + (y - 1/2)^2 = 5/4 \tag{3}$$

Poleg tega nismo upoštevali, da poteka srce tudi skozi točki C in D na osi y (enačba katere je $x = 0$). Zato poskusimo posplošiti enačbo (2) na

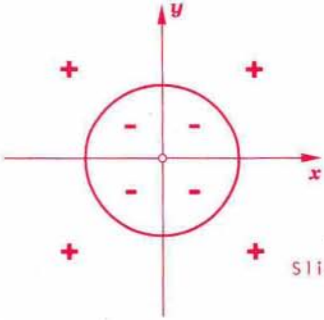
$$(x^2 + y^2 - 1)^a = Kx^b y^c \tag{4}$$

kjer naj bodo eksponenti a, b in c naravna števila, K pa številska konstanta. Izbira $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ in $K = 1$ je bila storjena že z enačbo (2). Vsaka krivulja z enačbo (4) poteka skozi točke A, B, C in D , če so eksponenti a, b in c večji od 0. Seveda je treba upoštevati še ostale lastnosti krivulje srca.

Levo-desna simetrija zahteva, da je eksponent b sodo število (2,4,6,...), sicer bi točki (x_0, y_0) in $(-x_0, y_0)$ ne mogli hkrati zadoščati enačbi (4).



Slika 3



Slika 4

Prav tako zahteva asimetrija gor-dol, da je c liho število (1, 3,5,...).

Kaj pa a? Če bi bil a sod, bi bila leva stran enačbe (4) vedno nenegativna. To pa ne gre, saj faktor y^c na desni strani povzroči, da je v zgornji polravnini (v prvem in drugem kvadrantu) predznak desne strani enačbe nasproten predznaku v spodnji polravnini (v tretjem in četrtem kvadrantu), srce pa se razteza tako zgoraj kot spodaj. Zato mora biti tudi a liho število (1,3,5,...).

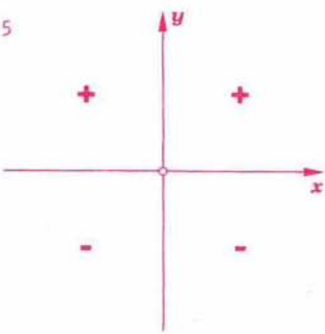
Kratek razmislek nas tudi prepriča, da mora biti konstanta K pozitivna. Leva stran enačbe (4) je namreč pozitivna oz. negativna tam, kjer kaže slika (4), desna (s pozitivnim K) pa, kjer kaže slika (5). Ker pa morata biti obe strani enačbe enakega predznaka, sta dovoljeno območje (belo) in prepovedano (senčeno) tam, kamor ju postavlja slika (6). V belo območje je mogoče vrisati srce. Če bi bil K negativen, bi se obe področji zamenjali in srca bi ne vedeli kam narisati (morali bi ga prezrcaliti čez os x).

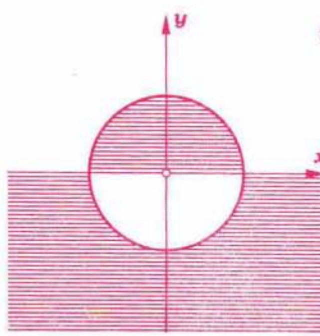
Najenostavnejša izbira konstant, ki zadošča navedenim zahtevam, nam da enačbo

$$(x^2 + y^2 - 1) = Kx^2y \qquad (5)$$

Temu pa se upre "puščica", ki prebada srce v štirih točkah (Sl. 2). Če namreč postavimo (5) v sistem s premico $y = m$, dobimo kvadratno enačbo za x in torej kvečjemu dva presečišči.

Slika 5





Slika 6

Očitno je, da mora vsaj eden od eksponentov biti višji kot v (5). Je to mogoče b:

$$(x^2 + y^2 - 1) = Kx^4y \qquad ? \tag{6}$$

Ne. Rekli smo, da je srce omejena krivulja. Če nam uspe dokazati, da ima (6) tudi točke v neskončnosti, je (6) kot kandidatka za enačbo srca že zavrnjena.

Presečimo krivuljo, ki jo določa enačba (6), z vzporednico osi y: $x = x_0$! Postavimo $x = x_0$ v enačbo (6), uredimo in dobimo kvadratno enačbo za y

$$y^2 - Kx_0^4y + x_0^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

z diskriminanto $D = K^2x_0^8 - 4x_0^2 + 4 = x_0^2(K^2x_0^6 - 4) + 4$

Odtod vidimo, da je za vsak dovolj velik x_0 diskriminanta pozitivna in enačba za y ima dve rešitvi.

Krivulja, podana z enačbo (6), ima točke poljubno daleč v smeri osi x. To pa pomeni, da (6) ni enačba srca.

Pa povečajmo eksponent a. Pri $a = 3$ si oglejmo enačbi:

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = Kx^2y \tag{8}$$

in

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = Kx^2y^3 \tag{9}$$

Čeprav bi marsikdo raje izbral (8), ker je pač enostavnejše oblike, bomo izbrali (9) in izbiro utemeljili takole. V točkah C in D, kjer se sečeta premica $x = 0$ in krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$, je krivulja srca "zlomljena". Zato ni nič posebnega, če sta eksponenta a in b različna ($a = 3$ in $b = 2$). Toda točki A in B sta na moč "normalni", kar se tiče premice $y = 0$, kroga in srca. Krivulja srca poteka skozi ti dve točki "gladko", kot pravimo temu. Zato je izbira $a = c = 3$ naravnejša, kot $a = 3$ in $c = 1$. Bralec se lahko sam prepriča, da (9) nima točk v neskončnosti.

Izberimo še K! Za $x = 1$ dobimo iz (9) za y enačbo

$$y^6 = Ky^3$$

odkoder poleg že znane rešitve $y = 0$ dobimo $y = K^{1/3}$. Odtod pa vidimo, da ne sme biti K premajhen (recimo $K = 1$). Izbira $K = 4$ (in torej $K^{1/3} \approx 1,59$) se izkaže za zelo ugodno.

Predlagana enačba srca je torej

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = 4x^2y^3 \qquad (10)$$

Nikar pa ne verjemite, da je to res iskana krivulja, preden je niste narisali in v njej ugledali srca!

Za risanje bi predlagal naslednji postopek. Najprej zapišemo enačbo (10) v obliki

$$y^2 - (4x^2)^{1/3}y + (x^2 - 1) = 0 \qquad (11)$$

kjer je y neznanka, za x pa bomo vstavljali znane vrednosti. Rešitev enačbe (11) je

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(4x^2)^{1/3} \pm ((16x^4)^{1/3} - 4x^2 + 4)^{1/2}\right]$$

kar praktično zahteva uporabo žepnega računalnika. Za $x = 0$, 1/4, 1/2, 3/4, 1 in 5/4 dobimo odtod za y_1 in y_2

x	y_1	y_2
0	-1	1
1/4	-0,70	1,33
1/2	-0,50	1,50
3/4	-0,28	1,59
1	0	1,59
5/4	0,39	1,46

Slika (7) prinaša dobljeno krivuljo. Je dovolj srčkana, da enačbo (10) lahko proglasimo za enačbo srca? Presodite sami!

Karel Bajc

Gl. sl. 7 na nasl. strani

MPEMBOV POJAV ALI ZMRZOVANJE VROČE IN HLADNE VODE

Najbrž se bo tudi bralcem *Preseka* zdel zanimiv pojav, o katerem razpravljajo v časopisih, posvečenih pouku fizike, že več kot deset let.

Anglež D.G. Osborne, ki je učil fiziko na univerzi v glavnem mestu Tanzanije Dar es Salaamu, je obiskal šolo v manjšem mestu Mkvavi. Po predavanju ga je študent Erasto Mpemba vprašal, zakaj vroča voda v posodi, ki jo damo v zmrzovalnik hladilnika, prej zmrzne kot hladna. Do tega da je prišel po lastnih poskusih, do katerih so ga privedle izkušnje izdelovalcev sladoleda. Ti so zatrjevali, da je sladoled prej gotov, če dajo v hladilnik vročo mešanico. E. Mpemba je vprašanje že prej postavil svojim učiteljem. Toda ti ga niso jemali resno in so ga celo dražili, da je v njegovi fiziki vse narobe. Tudi Osborne sprva ni verjel. Toda po vrnitvi v Dar es Salaam se je s poskusi prepričal, da je imel študent prav.

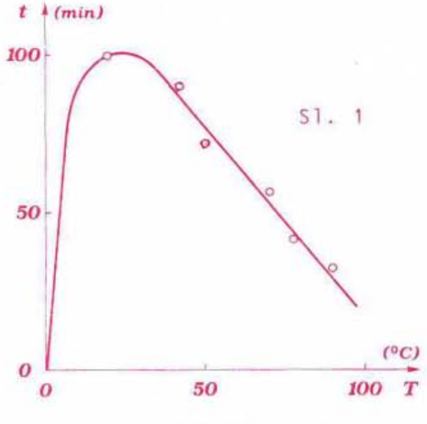
V steklene čaše za 100 cm^3 je nalil po 70 cm^3 vode in jih, podložene s plastjo stiropora za izolacijo, dal v zmrzovalnik gospodinjskega hladilnika. Meril je temperaturo vode in čas med postavitvijo čaše v zmrzovalnik in ohladitvijo vode na 0^oC. Ugotovil je, da je ta čas odvisen od začetne temperature vode. Največji je za vodo z začetno temperaturo nekaj nad 20^oC. Za vodo z nižjo in - presenetljivo - tudi za vodo z višjo začetno temperaturo je krajši (sl. 1).

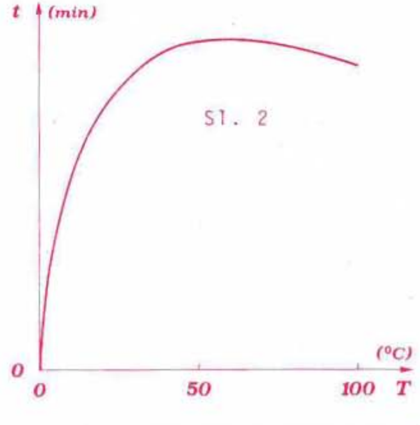
E.B. Mpemba in D.G. Osborne sta leta 1969 opisala zgodbo v angleški reviji *Physics Education*, ki je namenjena predvsem pouku fizike na srednji stopnji. Njuna zgodba je zbudila veliko zanimanja in od tedaj govorijo o *Mpembovem pojavu*. Uredništvo revije je dobilo precej pisem. Pokazalo se je, da so o pojavu pisali med drugimi že Aristotel (okoli leta -350), G. Marliani (1461), Francis Bacon (1620) in njegov sodobnik Albertus Magnus in Rene Descartes (1673).

O pojavu je leta 1969 neodvisno od Mpemba in Osborna poročal Kanadčan G.S. Kell v reviji *American Journal of Physics*, ki je tudi posvečena pouku fizike, le da na višji ravni. Želel je pojasniti nekaj v Kanadi znanih, na videz neverjetnih trditev. Drsališče da je bolje napolniti z vročo vodo, če naj čim prej zmrzne in avto da je bolje oprati s hladno vodo, če naj se na njem ne naredi led. V hladnem vremenu vroča voda v čebru po mnenju kanadskih peric prej zmrzne kot hladna. (Po pričevanju profesorja I. Štalca so o tem prepričane tudi perice v Poljanski dolini.)

Voda oddaja med ohlajanjem do ledišča in zmrzovanjem toploto okolici. Vroča voda mora najprej oddati toploto, da postane hladna. Zato bi pričakovali, da začne zmrzovati pozneje kot hladna. Voda oddaja toploto s prevajanjem skozi stranske stene zraku, ki navadno ne miruje, in skozi dno podlagi, na kateri stoji posoda. Pojavi na gladini so zapleteni. Najučinkovitejše je oddajanje toplote ob izhlapevanju. Da se ohladi kilogram vode za eno stopinjo, je treba odvesti dobrih štiri tisoč joulov toplote. Da izhlapi kilogram vode, pa je treba odvesti dobra dva milijona joulov. To izkoriščajo ob toplotnih elektrarnah hladilni stolpi, v katerih voda ob izhlapevanju odvaja toploto.

G.S. Kell je proučil možnost, da v izbranih okoliščinah oddaja voda toploto pretežno z izhlapevanjem. Se masa vode zaradi izhlapevanja med ohlajanjem toliko zmanjša, da je treba oddati preostali vodi v celoti manjšo toploto kot hladni vodi z enako začetno maso, če je skoraj nič ne izhlapi? Poenostavljen račun je pokazal, da je to mogoče. V odvisnosti od časa, v katerem se na prosto postavljena voda ohladi od začetne temperature na $0^{o}C$, je pri začetni temperaturi nad $50^{o}C$ neizrazit maksimum (sl. 2).

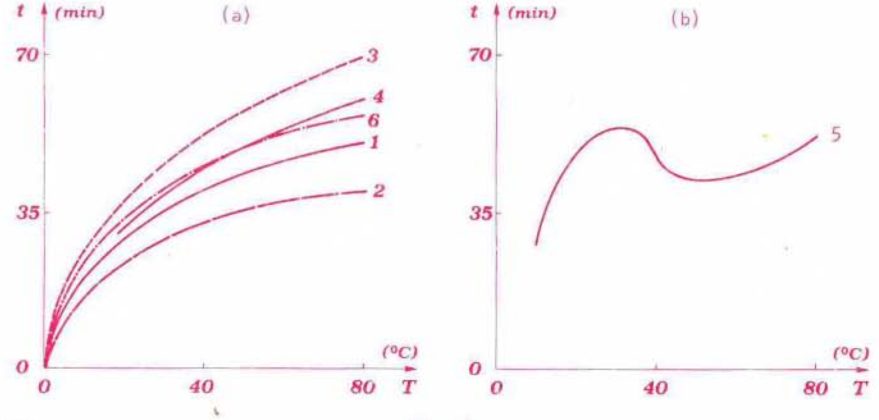




Sl. 1: Izmerjeni čas ohlajanja t od začetne temperature T do $0^{\circ}C$ v odvisnosti od začetne temperature (E.B. Mpemba, D.G. Osborne 1969).

Sl. 3: Izmerjeni čas ohlajanja t od začetne temperature T do $0^{\circ}C$ v odvisnosti od začetne temperature: 1 plastična čaša, 2 aluminijeva čaša, 3 plastična čaša, več vode, 4 plastična čaša, solna raztopina, 5 plastična čaša, v vodi raztopljen ogljikov dioksid, 6 plastična čaša, v vodi raztopljen kisik (M. Freeman 1979).

Sl. 2: Izračunani čas ohlajanja t od začetne temperature T do $0^{\circ}C$ v odvisnosti od začetne temperature pri zunanji temperaturi $-10^{\circ}C$, če izgublja voda toploto samo ob izhlapevanju (G.S. Kell 1969). Kell je računal, da je temperatura vode po vsej posodi enaka, kot da bi vodo neprestano mešali. Če bi upošteval, da je temperatura vode na gladini višja kot na dnu, bi dobil izrazitejše zmanjšanje časa ohlajanja pri višji začetni temperaturi.



Sl. 3

Merjenje pokaže, da voda v posodi z dvojno steno (termovki) in dovolj veliko gladino med ohlajanjem z izhlapevanjem od začetne temperature 100°C do 0°C zgubi kar 16% začetne mase.

Pozneje je poročalo o Mpembovem pojavu v *Physics Education* več učiteljev fizike, ki so ga raziskovali sami ali skupaj s študenti. Nekateri ga sploh niso opazili, drugi so ga opazili, a so dobili drugačne rezultate.

M. Ahtee s Finskega s čisto vodo ni zasledil Mpembovega pojava (1969). Poskuse je nadaljeval z vodno raztopino kuhinjske soli. Ugotovil je, da je masa ledu, ki nastane v danem času, odvisna od koncentracije soli. Z naraščajočo koncentracijo se najprej manjša in nato poveča. Po tem je sklepal, da je Mpembov pojav posledica primesi vodi.

I. Firth je iskal vzrok pojava drugje (1971). Čim višja je začetna temperatura vode v čaši, ki jo damo v zmrzovalnik, tem več ledu se tam stali okoli njenega dna. Nastala voda prepoji izolacijsko plast pod čašo in pozneje zopet zmrzne. Tako je čaša, v kateri je na začetku toplejša voda, v boljšem toplotnem stiku z zmrzovalnikom, hitreje oddaja toploto in hitreje zmrzne.

E. Deeson je delal poskuse istega leta in je ugovarjal Firthovi razlagi. Eden njegovih študentov je pomislil, da je morda vzrok za Mpembov pojav v vodi raztopljeni ogljikov dioksid (CO_2). O tem se je želel prepričati z merjenjem. Poskusi niso ovrgli domneve, vendar je tudi niso dovolj prepričljivo potrdili.

Lani se je lotil merjenj londonski srednješolec M. Freeman. Tako kot drugi pred njim je delal poskuse v zmrzovalniku gospodinjskega hladilnika pri temperaturi -10°C. Namenil se je dognati, katere so odločilne okoliščine. Napravil je več vrst poskusov in je pri vsaki vrsti spremenil po eno okoliščino. Pri prvi vrsti poskusov je dal po 50 cm^3 vode z različno temperaturo v čaše iz plastike, ki slabo prevaja toploto. V drugi vrsti poskusov je uporabil namesto plastičnih čaše iz aluminija, ki dobro prevaja toploto. Voda v plastični čaši se ohlaja pretežno ob izhlapevanju, v aluminijevi čaši pa je upoštevanja vredno tudi prevajanje. Zares se je voda v aluminijevi čaši ohladila do $0^{o}C$ znatno hitreje kot voda z enako začetno temperaturo v plastični čaši. V tretji vrsti poskusov je nalil v čaše več vode in tako spremenil razmerje med površino gladine in površino, v kateri se voda dotika čaše. V četrti vrsti poskusov je namesto čiste vode uporabil raztopino kuhinjske soli. V nobeni od teh vrst poskusov ni zasledil maksimuma v odvisnosti časa ohlajanja do $0^{o}C$ od začetne temperature (sl. 3a).

V peti vrsti poskusov je raziskal vpliv raztopljenega ogljikovega dioksida. Vodo je najprej prevrel in tako izgnal iz nje raztopljene pline, jo ohladil in nato uvajal skozi njo ogljikov dioksid. To vodo je tik pred poskusom segrel do izbrane začetne temperature, jo nalil v plastično čašo in jo dal v zmrzovalnik. V tem primeru se je voda z višjo začetno temperaturo prej ohladila do ledišča kot voda z nižjo (sl. 3b). V šesti vrsti poskusov je uporabil kisik namesto ogljikovega dioksida. Voda z raztopljenim kisikom se je sicer počasneje ohlajala kot prevreta voda brez kisika, a voda z višjo začetno temperaturo se ni ohladila prej.

Z raztopljenim ogljikovim dioksidom bi bilo mogoče pojasniti, zakaj so nekateri eksperimentatorji do tedaj opazili pojav, drugi pa ne. To bi bila lahko v zvezi s koncentracijo ogljikovega dioksida, ki je niso merili. Večinoma so uporabljali deionizirano vodo, iz katere so odstranili raztopljene soli, ne pa ogljikovega dioksida. Tisti, ki so uporabljali destilirano ali prekuhano vodo, niso opazili Mpembovega pojava.

Vendar vprašanje še ni rešeno, četudi ponuja ogljikov dioksid možnost za razlago. Manjka zveza med začetno koncentracijo ogljikovega dioksida v vodi in izrazitostjo Mpembovega pojava in gotovost, da zadostuje ogljikov dioksid, ki se ga voda navzame iz zraka. Tudi Freeman namreč ni meril te koncentracije pred vsakim poskusom. Pri različnih vrstah poskusov z ogljikovim dioksidom, pri katerih je bila koncentracija najbrž različna, je dobil različno odvisnost časa ohlajanja od začetne temperature.

Mpembov pojav bi lahko pojasnili takole: ogljikov dioksid preide iz zraka v vodo. (V vodi se pri 20°C topi 28-krat izdatneje kot kisik.) Masa ogljikovega dioksida, ki jo sprejme 1 kg vode, je tem manjša, čim višja je temperatura. V vodi, ki jo segrejemo in takoj damo v hladilnik, je tedaj tem manj ogljikovega dioksida, čim višja je začetna temperatura. Pojasnilo je sicer sprejemljivo, vendar ni popolno. Zakaj naj bi se voda, ki vsebuje malo več ogljikovega dioksida, ohlajala znatno počasneje? Voda z raztopljenim ogljikoveim dioksidom ima sicer drugačne lastnosti kot čista voda. Toda gostota, specifična toplota, viskoznost, toplotna prevodnost in druge količine se malo spremenijo in ni lahko uvideti, odkod izvira odločilni pomen ogljikovega dioksida. Morda se spremembe navedenih količin med seboj nekako podpirajo.

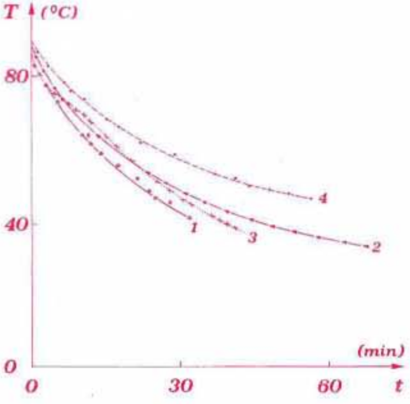
V tej zvezi pomislimo na konvekcijo, to je na tokove, ki nastanejo v vodi zaradi temperaturne razlike. Pri temperaturi nad 4°C ima voda z višjo temperaturo manjšo gostoto in se zaradi vzgona sredi posode dviga. Voda z nižjo temperaturo ima večjo gostoto in se ob plašču posode spušča. Da je temperatura vode na gladini za več stopinj višja kot na dnu, dokler ne doseže 4°C, so ugotovili z merjenji Mpemba in Osborne, Freeman in drugi. Morda je konvekcija v vodi z ogljikovim dioksidom drugačna kot v čisti vodi? Z odgovorom na to vprašanje moramo počakati do natančnejših merjenj.

Ne bi bilo prav, če bi zamolčali dvom, da je morda za pojavom manj, kot mislimo. Tisti, ki zagovarjajo tako stališče, se lahko sklicujejo na neenotne rezultate merjenj in ugovarjajo načinu opazovanj in merjenj. Gospodinjski hladilnik ni pripraven kot laboratorijska naprava. Vroče ali hladno telo v zmrzovalniku utegne vplivati na to, kako pogosto se vključi hlajenje in kako stalna je temperatura. Čas ohlajanja ni nedvoumno določen, ker ni navedeno, kateri del vode v posodi mora doseči 0°C; voda pa nima vsa enake temperature. Trditev o hitrejšem ohlajanju vroče vode bi bila lahko morda celo zabloda, kakršnih v izročilu ni malo. D.G. Osborne, ki je zdaj član ene od londonskih univerz, je od starejših kuharic že slišal, da se hladna voda hitreje segreje kot vroča. Znano je, da so tudi znani možje postavili kako zgrešeno trditev. Tudi glede ohlajanja segrete vode bi se lahko motili, saj v njihovem času eksperimentiranje ni bilo v navadi.

Teh vnaprejšnjih dvomov ne kaže kar tako sprejeti. Vendar spodbujajo k previdnosti in zadržanosti pri izoblikovanju sklepa.

Na koncu ne bo odveč splošna pripomba. Opisani pojav ni tak, da ga ne bi mogli obvladati; zakone, ki veljajo zanj, vse poznamo. Nerodno je to, da so razmere nepregledne in da je vpletenih več količin, ki jih ni lahko vseh izmeriti ali poskrbeti, da imajo predpisano vrednost. Odtod izvirajo težave s ponovljivostjo merjenj in različni rezultati v raznih laboratorijih. Kljub temu bodo pojav prej ali slej razvozljali. Morda se bo kateri od bralcev lotil poskusov. Naj o svojih ugotovitvah poroča. Dobrodošla so tudi poročila o trditvah iz domačega okolja, da vroča voda prej zmrzne kot hladna.

Ob tem se zavemo, da uporablja fizika pri raziskovanju narave posebne prijeme. Poenostavlja, zanemarja, odmišlja, da ostanejo samo bistvene poteze kakega pojava, katerih medsebojne zve-



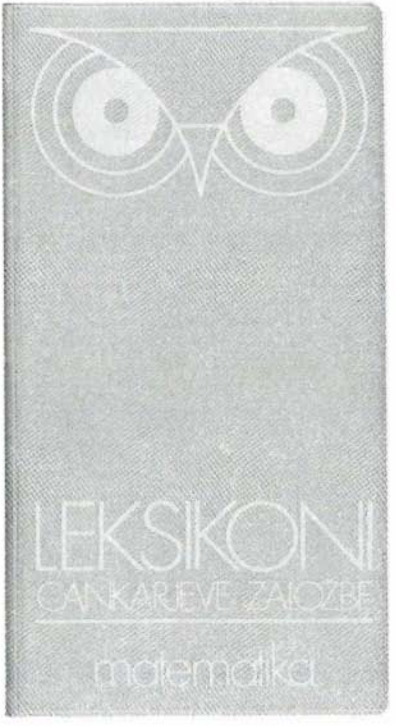
Sl. 4: Ohlajanje vode v skodelici: 1 voda, mešanje z žličko prvih petnajst minut, 2 voda, nič mešanja, 3 voda z umešano stepeno smetano (z žličko je bilo napravljenih samo nekaj krogov na začetku), 4 voda s smetano na gladini, nič mešanja. O merjenjih je poročal Jearl Walker v svoji rubriki Znanstvenik - amater v reviji *Scientific American* (1977). Iz narisanega diagrama je mogoče razbrati nekaj značilnosti pri ohlajanju kave ali čaja. J. Walker je avtor knjige *The Flying Circus of Physics* (Leteči cirkus fizike), v kateri je zbranih mnogo zanimivih nalog, med njimi so tudi vprašanja iz vsakdanjega življenja.

ze ni težko pregledati. Pri pojavih, pri katerih ne moremo na hitro ločiti bistvenih potez od nebistvenih, pa ni mogoče doseči preglednih razmer, v katerih bi lahko takoj uporabili znane zveze. Tedaj se znajde fizik v težavah. V vsakdanjem življenju je veliko takih pojavov. Pomislimo samo na sušenje perila, na ohlajanje čaja ali kave v skodelici (sl. 4), na vreme in druge pojave v ozračju in podobno.

Janez Strnad

NOVE KNJIGE

MATEMATIKA, LEKSIKON CANKARJEVE ZALOŽBE, LJUBLJANA 1980. CENA 190.-din (152.-din)

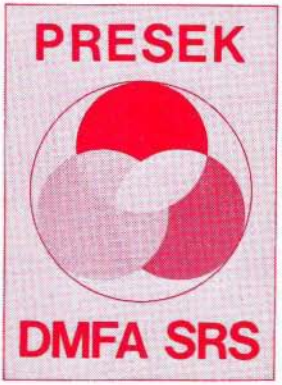


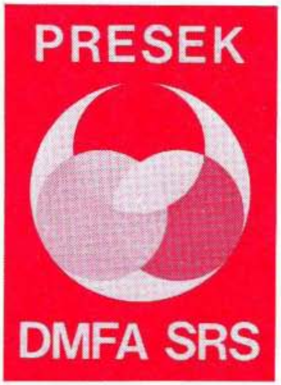
Cankarjeva založba je v svoji zbirki žepnih leksikonov do sedaj izdala sedem knjižic, med njimi tudi leksikon fizike. Zdaj je pred nami matematični leksikon. Knjiga je prirejena po leksikonu nemške založbe Herder. Prevod je delo profesorja Alojzija Vadnala, ki je tekst tudi prečistil in dodal gesla, zanimiva posebej za matematiko na Slovenskem.

Na 230 straneh je obdelanih 1800 gesel, ob robu teko besedilu v pojasnilo majhne, a zelo jasne slike. Leksikon seveda ni učbenik, matematike se po njem ne moremo učiti. Le neznane pojme iz matematike nam skuša kar se da na kratko pojasniti. Tako izvemo, kako rešimo enačbo tretje stopnje s *Cardanovimi obrazci*, da je *pantograf* risalno orodje za mehanično prenašanje slik v poljubnem merilu ali preberemo nekaj najosnovnejših podatkov o francoskem matematiku Poissonu.

Peter Petek

SLIKOVNA KRIŽANKA Z GESLOM





KRATEK SKOK

DRŽAVA V JUŽNI AMERIKI

OTROK, STAR PET LET

ZAOBLJEN DEL ČESA

ZORA

KARLOVAC

EMISIJA

NAPRAVA ZA PRIDOB. JEDRSKE ENERGIJE

OBŠIRNA PANOGA MATE-MATIKE

?

PRIMOŽ KOZAK

RADIO IN TELEVIZIJA

HERCE-GOVEC

POSODA ZA TEKOČINE

1

RADIJ

SIN ZEUSA IN EGINE

OSNOVNI EL. DELEC Z NEGATIV. NABOJEM

BEOGRAJ. SINDIKAL. ČASOPIS

TURŠKI VELIKAŠ

H_2O

RUDNIŠKA POSODA

PIŠKOT

OSEBNI ZAIMEK

HIŠNI VARUH PRI RIMLJANIH

FIGURA PRI ČETVORKI

BANJA

TERBIJ

VREDNOSTNA ZNAMKA

DANE ZAJC

OS KOOR-DINATNEGA SISTEMA

VRSTNI RED

3

GREZILO, SVINČNICA

EFIM GELLER

PODLOŽNICA V SRED. VEKU

REKA MED NDR IN POLJSKO

ŠPANSKO Ž. IME

NEMŠKI FILOZOF (IMMANUEL)

PRESEK

DMFA SRS

BOLGAR. M. IME

DOSTOJANSTVO

2

POTUJOČI GRŠKI PEVEC

JUGOZAHOD

STAROGRŠKI MATEMATIK IN FIZIK

ČARGO IVAN

GRŠKA ČRKA

VULKAN NA SICILIJI

UGANKAR

OKRAJŠANO HRV. IME PAVAO

PRIPOVED. PESEM

NAŠ RUDNIK ŽIVEGA SREBRA

PISATELJICA BRENKOVA

ANDREJ HIENG

KEM. ELEMENT (In)

POSREDNIK V ELEKTR.

EK

IRIDIJ

100

LADJA ARGONAVTOV

TRENJE

IVAN MEŠTROVIĆ

KILOAMPER

DROBEC NESNAGE

OMEJEN DEL PROSTORA

TIBETANSKO GOVEDO

SRS

PODIJ

OČE

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

ASTRONOMIJA

FOTOGRAFIJA ZVEZDNEGA NEBA

Le malokdo se spomni, da bi lahko poleg fotografiranja vseh mogočih objektov na naši Zemlji usmeril objektiv svojega fotoaparata navzgor, proti zvezdnemu nebu. In vendar fotografiranje zvezd ni prav nič zahtevno - dobre rezultate lahko dosežemo že s čisto preprostim fotoaparatom. Žal prevečkrat pomislimo, kako so zvezde le zelo oddaljene in zelo šibke svetlobne točke, tako da jih niti ne moremo fotografirati. In če že pomislimo na to, da bi svoja opazovanja zvezd, planetov, kometov ali utrinkov zabeležili s fotografijo, kako to storiti?

Kdor ni navajen svojega fotoaparata usmeriti navzgor, bo ob izrazu "zvezdna fotografija" pomislil na velike zvezdarne, teleskope in na vse vrste drugih naprav, ki naj bi sodile zraven. Pa temu ni tako! Prvi posnetki neba niso bili delo astronomov. Prvo fotografijo Lune je leta 1840 napravil newyorški splošni zdravnik Henry Draper.

Prav gotovo je najlepše imeti doma svoj lastni teleskop, toda le koliko mladih amaterjev si poleg izdatkov zanj, četudi ga lahko sami izdelajo, more privoščiti še nakup astrografa in ostalih pripomočkov. Dosežki amaterja, ki uporablja poceni fotoaparat, so lahko ne le uporabni, temveč morejo prispevati znanosti, kot npr. leta 1975 delo amaterja iz Los Angelesa, ki je posnel serijo fotografij izbruha zvezde Nova Cygni. Astronomija je tako znanstveno področje, kjer blestijo prav amaterji in obenem tako, kjer začetnik lahko najde že izkušene in poklicne astronome vedno pripravljene pomagati. Tako amaterji dajejo dragocene opazovalne podatke poklicnim astronomom. Ti se te

Sl. 1: Ozvezdje Velikega Voza (UMA), posneto s statično kamero 50mm/1.7 na visoko občutljiv film Ilford HP5 (29 DIN), osvetlitev 10 s. S prostim očesom ne moremo videti vseh zvezd, ki jih je film zaznal.

Sl. 2: Orionova meglica - velikanski oblak plinov in zvezdnega prahu. M42 je najsvetlejša plinska meglica neba, s prostim očesom jo vidimo kot zvezdo, obdano z medlim sojem. Posneto z astronomskim teleskopom Celestron 14, F = 3900mm, ekspozicija 10 minut na film Kodak 103a-F.

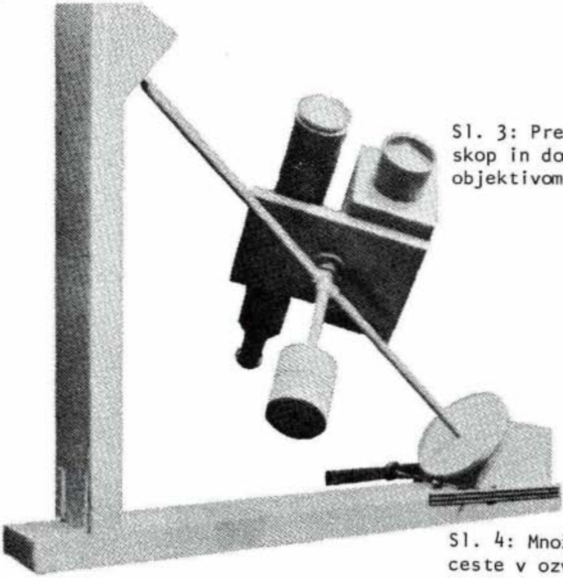
ga zavedajo in to amaterjem tudi priznavajo, zato se število amaterskih opazovalcev nenehno veča. Njihov trud je cenjen, njihovo delo sprejemljivo in dosežki uporabljeni.

Tudi v Sloveniji se je amaterska astronomija pričela zadnja leta hitreje razvijati in sicer v okviru Astronomske sekcije pri Zvezi ŠOLT ter Astronomskega društva Javornik.

Nebesna telesa, ki jih lahko fotografiramo, so Sonce, Luna, planeti, meteorji, kometi, severni sij, meglice, zvezdne kopice in galaksije ... - Zvezde navidezno vzhajajo in zahajajo. Fotografija pa nas o tem še posebej prepriča. Fotoaparat pritrdimo na stojalo in ga usmerimo navzgor. Pri daljši ekspoziciji pričakujemo, da bodo zvezde, ki so med ekspozicijo spremenile svoj položaj, pustile za seboj črte. Tako tudi je - te črte imenujemo zvezdne sledi. Če ekspozicijo skrajšamo, so tudi sledi krajše. Pri dovolj kratki ekspoziciji in občutljivem filmu drobne sledi zaznamo kot točke, ki realno ponazarjajo sliko zvezd. S polno odprto zaslonko objektiva, naravnanega na neskončnost in deset sekundno ekspozicijo lahko zaznamo na emulziji vse zvezde, ki jih vidimo v jasni temni noči s prostim očesom in celo več.

Vendar fotografija seže dlje v vesolje - zabeležimo lahko tudi 10 000-krat šibkejše zvezde. Pravzaprav moramo v ta namen zbrati le več svetlobe, to je, da pri enaki zaslonki - odprtini fotoaparata, podaljšamo čas osvetlitve. Zato pa moramo s fotoaparatom slediti navideznemu gibanju zvezd. Vodimo ga z daljnogledom, ki je s fotoaparatom pritrjen na vrtljivi osi, usmerjeni proti nebesnemu polu (sl. 3). Vse skupaj zasučemo tako, da se zvezde v vizirju daljnogleda ne premaknejo - tako lahko osvetlimo film tudi za več ur, vendar pa že 20 - 30 minutna osvetlitev popolnoma zadošča.

Pri predolgi ekspoziciji svetloba neba počrni film in prekrije šibke zvezde. Za vsako kamero (astrograf) in film lahko določimo najdaljši čas osvetlitve in magnitudo zvezd, ki jih na filmu ločimo od ozadja. Svetlobno jakost fotoaparata podamo s fotografskim razmerjem F/D (F = goriščna razdalja, D = premer



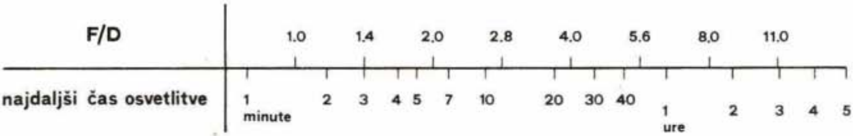
Sl. 3: Preprosto stojalo za teleskop in doma izdelana astrokamera z objektivom episkopa

Sl. 4: Množica zvezd iz pasu Mlečne ceste v ozvezdju Laboda (CYG). V sredini je plinska meglica NGC 7000, ki sveti v rdeči barvi. Svetla zvezda na desni je Deneb. Osvetlitev 30 min

Sl. 5: Ozvezdje Bika (TAU), posneto s kamero, ki je sledila gibanju zvezd, osvetlitev 15 min., ostali podatki so enaki kot pri sliki 1.

Na sliki lahko vidimo tudi zvezdno kopico M45, imenovano tudi Plejade, ki je ena najlepših zvezdnih kopic z bogato mitološko tradicijo pri vseh narodih sveta. Sestavljena je iz okoli 100 zvezd in obdana z oblakom medzvezdnega prahu.

zaslonke). Za film Kodak 103a-0 in objektive z različnim fotografskim razmerjem sestavimo npr. tabelo



Kako šibke zvezde še lahko zaznamo na filmu, je predvsem odvisno od goriščne razdalje objektiva in od občutljivosti filma. Čim daljša je goriščna razdalja, tem šibkejše zvezde še lahko posnamemo. Intenziteta svetlobe neba na emulziji se v tem primeru zmanjša. Z magnitudo - m označimo najšibkejše zvezde, ki jih lahko najdemo na filmu (o siju zvezd, ki ga izražamo v magnitudah, si bralec lahko kaj več prebere v članku "O siju", Presek 6(1978/79)2).

Odvisnost mejne magnitude od goriščne razdalje:

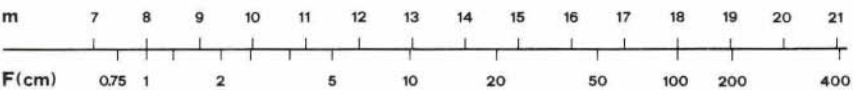


Tabela velja le za snemanje ob jasni temni noči daleč stran od močnih mestnih luči, ki razmere močno poslabšajo.

Z objektivom 2.8/135mm in visoko občutljivim filmom (npr. Ilford HP5, TRI-X Kodak, Kodak Recording ...) lahko fotografiramo zvezde do 13^m. V tem primeru fotografska emulzija zazna svetlobni tok 3×10^{-15}W.

Bojan Dintinjana

PREMISLI IN REŠI

Prejeli smo 11 rešitev naloge iz 2. številke Preseka, od tega je bilo 8 pravilnih.

Nalogo so pravilno rešili:
Boris Krpan, O.Š. Valentina Vodnika, Ljubljana; Božidar Casar, gimn. Juša Kramarja, M. Sobota; Milena Miklič, Novo mesto; Aleksander Purg, O.Š. Ivana Spolenjaka, Ptuj; Marko Oblak, O.Š. Edvarda Kardelja, Logatec; Saši Pucko, Cerklje ob Krki , Helena Klemenčič, Škofja Loka; Matej Bergant, gimn. Trbovlje in Bojan Debenjak, Nova Gorica.

Za knjižno nagrado je žreb izbral učenca Aleksandra Purga.

Objavljamo avtorjevo rešitev:

Ljubo Kostrevc

Naloga je bila takale:

Prijatelj Tone je opazil, da ima številka njegove osebne izkaznice zanimive lastnosti: sestoji iz devetih cifer in v njej nastopajo vse cifre od 1 do 9. Število, ki ga številka predstavlja, je deljivo z 9. Če odrežemo enice, je dobljeno število deljivo z 8. Če odrežemo enice in desetice, dobimo število, ki je deljivo s 7. Če odrežemo na koncu tri cifre, je preostalo število deljivo s 6 itd., do konca. Kakšna je številka Tonetove osebne izkaznice?

Najprej takoj vidimo, da stoje na sodih mestih številke Tonetove izkaznice cifre 2, 4, 6, 8. Če odrežemo zadnje štiri cifre, dobimo število, ki je deljivo s pet. Zato stoji na petem mestu cifra 5. Če odrežemo enice, dobimo število, deljivo z 8. Ker je sedma cifra liha, mora biti na osmem mestu 2 ali pa 6. Iz istega razloga prideta tudi na četrto mesto v poštev samo cifri 2 in 6. Torej imamo naslednji možnosti:

a) $xxx25xx6x$ in b) $xxx65xx2x$

Tu smo z "x" označili cifre, ki jih še ne poznamo. Oglejmo si podrobneje obe možnosti:

a) Vsota prvih treh cifer je deljiva s 3 in prav tako vsota četrte, pete in šeste cifre. Ker sta četrta in peta 2 in 5, je 8 edina možnost za šesto cifro, ki je soda. Preostala soda cifra 4 je potem na drugem mestu. Imamo torej $x4x258x6x$. Ker je število brez zadnje cifre deljivo z 8, stoji lahko na sedmem mestu 1 ali 9. Prva možnost odpade, ker ostalih lihih cifer 3, 7, 9 ne moremo postaviti na prvo in tretje mesto tako, da je vsota prvih treh cifer deljiva s 3. Če je na sedmem mestu 9, so prve tri cifre 147 ali 741; torej dobimo številki

147 258 963 in 741 285 963

Nobena od njih ni prava, ker ne dobimo s 7 deljivega števila, če odrežemo zadnji dve cifri.

b) Zdaj sta četrta in peta cifra 6 in 5. Na šestem mestu mora biti 4, da bo vsota teh cifer deljiva s 3. Torej imamo $x8x\,654x\,2x$. Podobno kakor v primeru a) ugotovimo, da mora na sedmem mestu stati 3 ali 7. V prvem primeru so za prve tri cifre tele možnosti: 189, 981, 789, 987, v drugem pa: 189, 981, 183, 381. Ustrezne številke so

189 654 327, 981 654 327, 789 654 321, 987 654 321
189 654 723, 981 654 723, 183 654 729, 381 654 729

Če odrežemo zadnji dve cifri, je samo v zadnjem primeru dobljeno število deljivo s 7. Zato ima Tonetova osebna izkaznica številko 381 654 729 .

Ivan Vidav

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

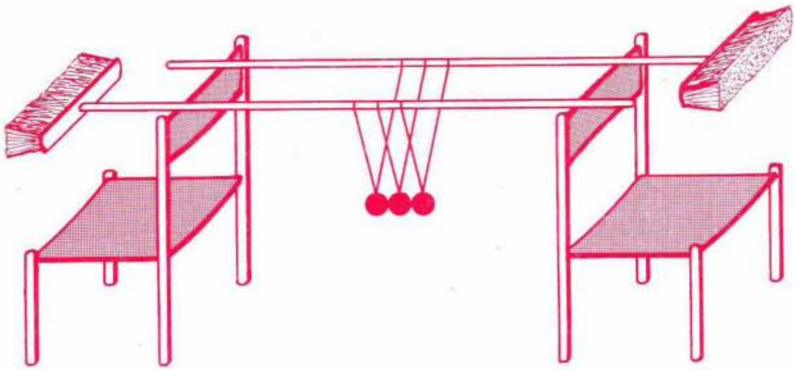
O poskusu, ki smo ga zastavili v 3. številki letošnjega Preseka, nam je pisalo petnajst bralcev. Dvanajst jih je pravilno opisalo poskus. Teže pa ga je bilo pojasniti. Čisto pravilno ga ni pojasnil nihče. Še najbolj smo bili zadovoljni z odgovorom Ervina Križaniča iz Kanala. Knjižno nagrado *Leksikon Cankarjeve založbe - Fizika* bo prejel po pošti.

Kaj se zgodi s kosom ledu, preko katerega obesimo zanko iz tanke jeklene žice, obtežene s kilogramsko utežjo? Žica čez čas preide skozi led in z utežjo vred pade na tla. Pri tem pa se kos ledu ne prelomi, ampak ostane cel.

Opazujmo žico, ki se zelo počasi giblje skozi led. Pri razlagi poskusa moramo upoštevati dvoje: znižanje tališča ledu zaradi zvečanja tlaka in izmenjavanje toplote med ledom pod žico in vodo nad njo. Pod žico, ki je obtežena z utežjo, je tlak večji od navadnega zračnega tlaka, zato je tališče ledu pod žico niž je od tališča pri navadnem zračnem tlaku. Led tik pod žico, ki je torej pri višji temperaturi od tališča, se tali. Žica iztiska vodo izpod sebe. Ta voda je nad žico pri navadnem zračnem tlaku in torej pri temperaturi, ki se ujema s tališčem, zato se zopet strdi. Toplota, ki jo odda voda nad žico pri strjevanju, se porabi za taljenje ledu pod žico. Tako se žica ugreza vedno globlje v led, dokler ne preide skozenj, a kos ledu ostane cel. Hitrost ugrezanja žice je odvisna tudi od njene toplotne prevodnosti. Skozi žico se namreč prevaja večina toplote, ki jo odda voda pri strjevanju. Toploto bolje prevaja žica iz snovi z večjo toplotno prevodnostjo, ki se tudi hitreje ugreza.

In kaj smo vam pripravili tokrat?

Večina od vas se je že igrala s frnikulami. Poiščite po predalih tri enake večje frnikule in naredite z njimi poskus. Na vsako od frnikul prilepite z lepilnim trakom dve pol metra dolgi niti. Uporaben je kar sukanec. Krajišči naj bosta prilepljeni skupaj. Vsak par niti s frnikulo obesite na dva med seboj vzporedna ročaja metel, ki ju položite čez naslonjali stolov (slika). Vse niti naj bodo enako dolge, razmaknjene pa toliko, da se frnikule dotikajo in so ravnine, v katerih ležijo pari niti, med seboj vzporedne in pravokotne na ročaja metel. Odmaknite krajno frnikulo od preostalih dveh, tako da ostaneta niti napeti, in jo spustite. Dobro opazujte, kaj se dogaja. Poskusite razložiti pojav. Izvedite poskus tudi samo z dvema frnikulama.



Rezultate nam pošljite do 1. oktobra 1980. Najboljše odgovore bomo nagradili s knjigami.

Metka Luzar-Vlachy

NEEUKLIDSKA GEOMETRIJA LOBAČEVSKOG / S. MINTAKOVIĆ. - ZAGREB : ŠKOLSKA KNJIGA, 1972. - 113 STR., 20 cm

Zadnji od aksiomov evklidične geometrije se imenuje aksiom o vzporednici in trdi tole: Skozi poljubno točko, ki ne leži na dani premici, gre natanko ena vzporednica k tej premici. - Matematiki prejšnjih časov so menili, da to ni pravi aksiom, ampak izrek; poskušali so ga izpeljati iz preostalih geometrijskih aksiomov, vendar brez uspeha. Izkazalo se je le, da gre skozi točko zunaj premice vsaj ena vzporednica k njej. Ostalo je vprašanje, ali gre lahko skozi isto točko več vzporednic k isti premici. Ta domneva pa ni vodila v protislovje, kakor so pričakovali. Nasprotno, z njo je ruski matematik Lobačevski leta 1826 dobil novo, neevklidično geometrijo. Ta se precej loči od evklidične geometrije, vendar je z logičnega vidika prav tako neoporečna. Prostor, ravnine in premice si moramo tu seveda predstavljati nekoliko drugačne, kakor smo vajeni.

S. Mintaković v svoji knjigi izpelje mnogo zanimivih ugotovitev ravninske in prostorske geometrije Lobačevskega. K večji razumljivosti prispevajo številne slike, pojasnila in primerjave z običajno, evklidično geometrijo. Izčrpno je tudi opisana zgodovina aksioma o vzporednicah tja do odkritja neevklidične geometrije, ki je zelo pretreslo tedanja matematična pojmovanja. Avtor posebej obravnava s tem povezani razvoj aksiomatične metode v matematiki. Poleg tega pokaže zvezo med neevklidično geometrijo in realnim, fizikalnim svetom.

Knjiga je namenjena srednješolcem in drugim, ki se srečujejo z matematiko. Naš bralec si bo tu pridobljeno, nadvse koristno znanje lahko še izpopolnil s knjigo I. Puclja *Neevklidične geometrije*, iz zbirke Sigma.

Janez Rakovec

Bralce Preseka vabimo, da ugotovijo, na koliko različnih načinov je mogoče prebrati v ornamentu na naslednji strani naslov našega lista:

PRESEK LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE IN ASTRONOME

Začetek napisa (črka *P*) je vsakokrat na sredini, konča pa se v enem od štirih oglišč. Tri možnosti so na sliki 1 označene. Reševalce opozarjamo, da morajo presledke med besedami upoštevati enako kot katerokoli črko.

Stanislav Zorko

EMONORTSA NI EKIZIF EKITAMATIKE FIZIKE IN ASTRONOME
MONORTSA NI EKIZIF EKITAMEMATIKE FIZIKE IN ASTRONOM
ONORTSA NI EKIZIF EKITAMETEMATIKE FIZIKE IN ASTRONO
NORTSA NI EKIZIF EKITAMETATEMATIKE FIZIKE IN ASTRON
ORTSA NI EKIZIF EKITAMETAMATEMATIKE FIZIKE IN ASTRO
RTSA NI EKIZIF EKITAMETAM MATEMATIKE FIZIKE IN ASTR
TSA NI EKIZIF EKITAMETAM E MATEMATIKE FIZIKE IN AST
SA NI EKIZIF EKITAMETAM EDE MATEMATIKE FIZIKE IN AS
A NI EKIZIF EKITAMETAM EDADE MATEMATIKE FIZIKE IN A
NI EKIZIF EKITAMETAM EDALADE MATEMATIKE FIZIKE IN
NI EKIZIF EKITAMETAM EDALMLADE MATEMATIKE FIZIKE IN
I EKIZIF EKITAMETAM EDALM MLADE MATEMATIKE FIZIKE I
EKIZIF EKITAMETAM EDALM A MLADE MATEMATIKE FIZIKE
EKIZIF EKITAMETAM EDALM AZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE
KIZIF EKITAMETAM EDALM AZ ZA MLADE MATEMATIKE FIZIK
IZIF EKITAMETAM EDALM AZ T ZA MLADE MATEMATIKE FIZI
ZIF EKITAMETAM EDALM AZ TST ZA MLADE MATEMATIKE FIZ
IF EKITAMETAM EDALM AZ TSIST ZA MLADE MATEMATIKE FI
F EKITAMETAM EDALM AZ TSILIST ZA MLADE MATEMATIKE F
EKITAMETAM EDALM AZ TSIL LIST ZA MLADE MATEMATIKE
EKITAMETAM EDALM AZ TSIL K LIST ZA MLADE MATEMATIKE
KITAMETAM EDALM AZ TSIL KEK LIST ZA MLADE MATEMATIK
ITAMETAM EDALM AZ TSIL KESEK LIST ZA MLADE MATEMATI
TAMETAM EDALM AZ TSIL KESESEK LIST ZA MLADE MATEMAT
AMETAM EDALM AZ TSIL KESERESEK LIST ZA MLADE MATEMA
METAM EDALM AZ TSIL KESERPRESEK LIST ZA MLADE MATEM
AMETAM EDALM AZ TSIL KESERESEK LIST ZA MLADE MATEMA
TAMETAM EDALM AZ TSIL KESESEK LIST ZA MLADE MATEMAT
ITAMETAM EDALM AZ TSIL KESEK LIST ZA MLADE MATEMATI
KITAMETAM EDALM AZ TSIL KEK LIST ZA MLADE MATEMATIK
EKITAMETAM EDALM AZ TSIL K LIST ZA MLADE MATEMATIKE
EKITAMETAM EDALM AZ TSIL LIST ZA MLADE MATEMATIKE
F EKITAMETAM EDALM AZ TSILIST ZA MLADE MATEMATIKE F
IF EKITAMETAM EDALM AZ TSIST ZA MLADE MATEMATIKE FI
ZIF EKITAMETAM EDALM AZ TST ZA MLADE MATEMATIKE FIZ
IZIF EKITAMETAM EDALM AZ T ZA MLADE MATEMATIKE FIZI
KIZIF EKITAMETAM EDALM AZ ZA MLADE MATEMATIKE FIZIK
EKIZIF EKITAMETAM EDALM AZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE
EKIZIF EKITAMETAM EDALM A MLADE MATEMATIKE FIZIKE
I EKIZIF EKITAMETAM EDALM MLADE MATEMATIKE FIZIKE I
NI EKIZIF EKITAMETAM EDALMLADE MATEMATIKE FIZIKE IN
NI EKIZIF EKITAMETAM EDALADE MATEMATIKE FIZIKE IN
A NI EKIZIF EKITAMETAM EDADE MATEMATIKE FIZIKE IN A
SA NI EKIZIF EKITAMETAM EDE MATEMATIKE FIZIKE IN AS
TSA NI EKIZIF EKITAMETAM E MATEMATIKE FIZIKE IN AST
RTSA NI EKIZIF EKITAMETAM MATEMATIKE FIZIKE IN ASTR
ORTSA NI EKIZIF EKITAMETAMATEMATIKE FIZIKE IN ASTRO
NORTSA NI EKIZIF EKITAMETATEMATIKE FIZIKE IN ASTRON
ONORTSA NI EKIZIF EKITAMETEMATIKE FIZIKE IN ASTRONO
MONORTSA NI EKIZIF EKITAMEMATIKE FIZIKE IN ASTRONOM
EMONORTSA NI EKIZIF EKITAMATIKE FIZIKE IN ASTRONOME

KOLIKO JE KOMBINACIJ?

Saši Pucko, dijak prvega letnika gimnazije nam je pred kratkim poslal sorodno nalogo. Sprašuje, na koliko načinov lahko v drugem ornamentu (Slika 2) preberemo vprašanje:

KOLIKO JE KOMBINACIJ?

```
                  ?
                K J ?
              K O I J ?
            K O L C I J ?
          K O L I A C I J ?
        K O L I K N A C I J ?
      K O L I K O I N A C I J ?
    K O L I K O J B I N A C I J ?
  K O L I K O J E M B I N A C I J ?
K O L I K O J E K O M B I N A C I J ?
  K O L I K O J E K B I N A C I J ?
    K O L I K O J E I N A C I J ?
      K O L I K O J N A C I J ?
        K O L I K O A C I J ?
          K O L I K C I J ?
            K O L I I J ?
              K O L J ?
                K O ?
                  K
```

V njegovi nalogi presledkov ni. Brati začnemo na levem robu, končamo pa na desnem robu ornamenta. Vedno pa moramo skozi središče (črka O)! Upamo, da bomo tudi za to nalogo prejeli kmalu vaše rešitve!

Tomaž Pisanski

PISMA BRALCEV

BORUT VOLK, Boštjanovci pri Lescah, piše:

Dragi Presek! Na Presek sem naročen prvo leto in prav gotovo ne zadnje. Revija mi je zelo všeč. Zdi se mi le, da je nekoliko premalo napisanega za nas petošolce. Redno prebiram tudi rubriko Pisma bralcev in sem jo pogrešil v 3. številki. Vsem urednikom želim mnogo sreče in uspehov pri nadaljnjem urejanju. Lepo pozdravljeni!

Hvala, Borut, da si nam pisal že prvo leto. Tvoja razmišljanja o igri v dvanajstkotniku so tudi vredna pohvale in zelo si se potrudil, da si pripravil predlog za igro dveh igralcev. Resnično si postal član Presekove družine, ker z veseljem slediš dogodkom v rubriki Pisma bralcev, v katerih mnogi izražajo svoj odnos in občutja do tako velikih znanosti kot so matematika, fizika in astronomija.

JOŽE TAVČAR iz Žirovnice je zapisal:

Spoštovano uredništvo Preseka! Naj vam še jaz napišem nekaj pohvalnih vrstic k vaši reviji, ki me že nekaj let razveseljuje. Z vsebino Preseka sem zelo zadovoljen, najbolj pa me zanimajo članki s področja astronomije.

Upamo, da si sedaj že prejel želene številke prejšnjih letnikov Preseka in nam je žal, da si moral toliko časa čakati. Tvoji želji po znanstveni literaturi pa naslednje: Pojdi v najbližnjo knjižnico, kjer boš gotovo našel naslove za Tim, Proteus in Obzornik DMFA. Presekova knjižnica pa izhaja vsako leto kot dodatna številka Preseka. Srečno!

SAŠI PUCKO iz Cerkelj ob Krki piše takole:

Zdravo Presek! Nate sem naročen že tretje leto in ni mi žal. Vsebina je odlična. Takoj, ko te sprejmem, poiščem "Premisli in reši", ter kaj kmalu uženem nalogo. Žal pa mi rešitve večinoma obležijo v mapi, saj dobim Presek z nekaj tedensko zamudo. Vkljub tridesetdnevni zamudi pa ti rešitev pošiljam sedaj. Imam pa tudi predlog glede vsebine. Lahko bi v prihodnje odmeril nekaj prostora za računalništvo.

Zdravo, dragi bralec! Vse pošiljke odpošljemo hkrati in nam je žal, da je prav pri vas tak zastoj. Svetujemo ti, da vprašaš na vaši pošti, kdaj je prispela pošiljka. Sicer bo najboljše, če nam pošlješ svoj naslov, da bi osebno prejemal Presek. Prav imaš, da mnoge zanima računalništvo. O tem smo že razmišljali in želimo tudi uresničiti. Hvala ti tudi za poslane rešitve in sestavljeno nalogo. Srečno pri sestavljanju novih nalog!

Tokrat moramo z veseljem odgovoriti tudi našemu bralcu iz ČSSR, dr Ivu Volfu, Hradec Králové. Srečni smo, da vam je prišla v roke naša revija. Posebno veselje pa nam daje vaše navdušenje za sodelovanje v Preseku. Torej pričakujemo vaš članek in vas vabimo k stalnemu sodelovanju. Takoj vam bomo poslali vse številke, ki jih še imamo na zalogi. Za leto 1980/81 vas bomo vključili med naše redne naročnike. Predlagamo, da bi naročnino poravnali z avtorskim honorarjem, če bi bili vaši članki objavljeni. Lepo vas pozdravljamo tudi v imenu vseh naših bralcev!

Matilda Lenarčič

TEKMOVANJA - NALOGE

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V ZADRU

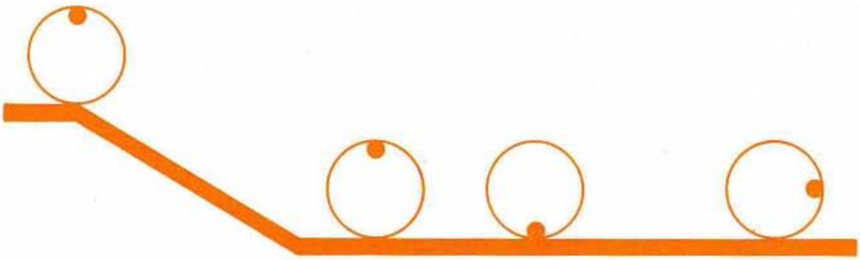
Zvezno tekmovanje mladih fizikov, 16. po vrsti, je bilo od 25. do 27. maja 1979 v Zadru. Slovensko zastopstvo je sestavljalo 12 dijakov iz tretjih in četrtih razredov, ki so bili izbrani na podlagi rezultatov republiškega tekmovanja mladih fizikov. Štirje so tekmovali v skupini Mehanika in toplota, šest v skupini Elektrika in magnetizem in dva v skupini Optika in atomika. Kot že nekaj let zapovrstjo se je slovensko zastopstvo dobro odrezalo; Kazimir Gomilšek je v skupini Elektrika in magnetizem dosegel prvo nagrado, Ludvik Medvešek in Tone Verbovšek v isti skupini tretjo nagrado, Boris Majaron pa v skupini Mehanika in toplota prav tako tretjo nagrado.

Po mnenju večine udeležencev je bilo tekmovanje v Zadru eno najbolje organiziranih zveznih tekmovanj doslej. Dijaki so bili nastanjeni v simpatičnem hotelskem naselju Borik blizu Zadra, tekmovanje samo je potekalo v prostorih Centra srednjih šol v neposredni bližini. Organizator je pripravil vrsto družabnih prireditev: organiziral je družabni večer s plesom, izlet z ladjo po okoliških otokih in ogled razstave Zlato in srebro Zadra in drugih kulturno-zgodovinskih znamenitosti; veliko dijakov se je tudi odločilo za predsezonsko kopanje v morju. Dijaki so imeli tako dovolj priložnosti za medsebojno spoznavanje tudi na "medrepubliškem nivoju", kar je precej pripomoglo k ustvarjanju sproščenega vzdušja in odpravljanju tekmovalne napetosti.

Objavljamo naloge iz vseh treh skupin. Pri vsaki skupini je v oklepaju navedeno v odstotkih, koliko nalog so tekmovalci povprečno pravilno rešili.

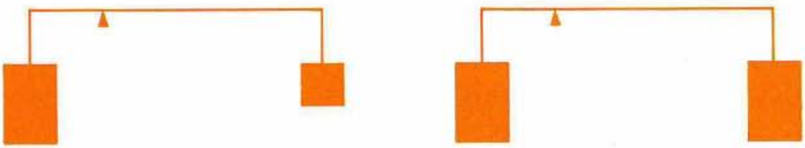
Skupina Mehanika in toplota (35%)

1. Na gladki mizi leži veriga, tako da polovica gleda čez rob mize. V trenutku $t = 0$ verigo spustimo, da se prosto giblje. Izrazi pospešek in hitrost verige kot funkcijo dolžine tistega dela verige, ki visi čez rob mize. Na oba konca verige nato pričvrstimo dve enaki uteži in ponovimo poskus. Se bo čas, potreben, da veriga zdrsne z mize, povečal ali zmanjšal? Masa verige je m, dolžina l in masa uteži M.
2. Na vrhu klanca (sl. 1), na višini 1 m nad ravnino, je lesen valj z radijem 20 cm, višino 40 cm in gostoto 400 kg/m^3 . Na obodu valja je vdelana v les vzporedno z osjo svinčena palica z maso 2 kg. Na začetku je valj obrnjen tako, da je svinčena palica na vrhu valja. Valj spustimo, da se odkotali v ravnino. Poišči hitrost središča valja v ravnini v trenutku, ko je svinčena palica:
   a) na vrhu valja
   b) pod valjem
   c) 20 cm nad ravnino



Valj se kotali brez spodrsavanja. Vztrajnostni moment valja je $mr^2/2$.

3. Dva vzvoda sta v ravnovesnem položaju (sl. 2). Na prvem sta



uravnoteženi dve uteži z različnima masama iz enake snovi, na drugem dve uteži z različnima masama in iz različnih snovi, a enakih volumnov. Se bo ravnotežje na enem ali drugem vzvodu porušilo, če uteži potopimo v vodo?

4. Kolo nekega vozila ima polmer 1 m pri temperaturi $0^{o}C$. Koeficient raztezanja kovine, iz katere je kolo, je $1{,}2.10^{-5}K^{-1}$. Kolikšna je razlika števila obratov kolesa poleti pri temperaturi $25^{o}C$ in pozimi pri temperaturi $-25^{o}C$ na 100 km dolgi poti?

5. Popolnoma čisto vodo ohladimo do $-10^{o}C$, tako da pri tem ne zmrzne. Če tedaj v vodo vržemo kristal ledu, bo voda začela zmrzovati. Kakšen je sestav sistema vode in ledu, ko se vzpostavi ravnovesno stanje? Sistem je toplotno izoliran. ($c_{p\ ledu}$ = 2093 J/kgK, $c_{p\ vode}$ = 4186 J/kgK, q = $3{,}85.10^{5}$ J/kg)

Skupina Elektrika in magnetizem (44,4%)

1. Iz prostora med dvema navpično postavljenima kondenzatorskima ploščama enakomerno izteka petrolej z dielektričnostjo 2. Kondenzator je vezan na baterijo z gonilno napetostjo 100 V, pri čemer v električnem krogu teče tok 2.10^{-11} A. S kolikšno hitrostjo se niža gladina petroleja med ploščama? Plošči kondenzatorja sta kvadrata s stranico 0,1 m, razmik med ploščama je 1 mm.

2. Akumulator, katerega gonilna napetost je 12 V, se polni pod napetostjo 12.5 V in tokom 3 A. Notranji upornosti pri polnjenju in praznjenju sta enaki. Akumulator daje pri praznjenju 70% količine elektrike, ki je stekla skozenj pri polnjenju. Izračunaj izkoristek akumulatorja:

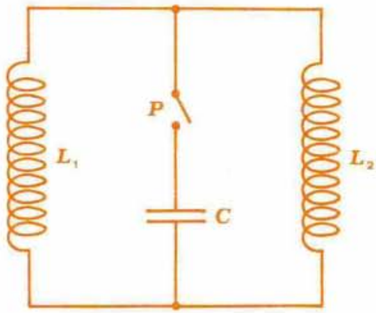
   a) pri praznjenju s tokom 3 A

   b) pri praznjenju s tokom 0,3 A

3. V magnetnem polju z gostoto 0,5 T je kovinski obroč z radijem 0,6 m, tako da je polje pravokotno na ravnino obroča. Središče obroča je povezano z obodom s pomočjo dveh kovinskih prečk. Ena prečka rotira okoli središča obroča s kotno hitrostjo 10 s^{-1}, druga miruje. V nepremično prečko je ve-

zan ampermeter z notranjo upornostjo 0,05 ohm. Izračunaj in nariši časovno odvisnost toka, ki ga kaže ampermeter. Obroč in prečki so narejeni iz železne žice s presekom 1 mm^2 in specifično upornostjo 10^{-7} ohm m.

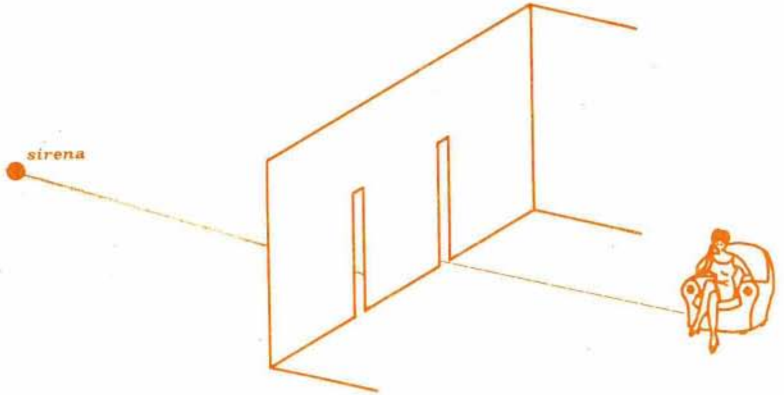
4. Na kondenzatorju s kapaciteto C je naboj q. S pomočjo preklopnika P ga vežemo v vezje, ki je prikazano na sliki 3. Tuljavi imata induktivnost L_1 in L_2. Poišči maksimalna tokova v tuljavah. Omski upor zanemarimo.



5. Elektron prileti s hitrostjo v v homogeno magnetno polje z gostoto B pod kotom ϑ glede na silnice. Pokaži, da bo elektron ponovno sekal isto magnetno silnico šele, ko bo prepotoval razdaljo $l = 2mv\pi\cos\vartheta/Be$. Kako se spremeni ta razdalja, če v smeri magnetnega polja vključimo homogeno električno polje z jakostjo E?

<u>Skupina Optika in atomika</u> (43,8%)

1. Normalno človeško oko more videti predmet jasno, če se ta nahaja v intervalu od 25 cm do neskončnosti od očesa. Kako se spremeni ta interval, če tik pred oko postavimo lečo z goriščno razdaljo f? Nariši funkcijo, ki prikazuje odvisnost iskanega intervala od goriščne razdalje.
2. Akustično dobro izolirana soba ima dve ozki okni, ki sta med seboj oddaljeni 1 m (glej sliko 4). Na veliki oddaljenosti zunaj oken se na simetrali spojnice obeh oken nahaja sirena, ki oddaja zvočne valove s frekvenco 1000 Hz. Izraču-



naj, kje v sobi vzdolž črtkane linije mora sedeti človek, da bo slišal najmanjšo jakost zvoka sirene. Hitrost zvoka je 340 m/s.

3. Atomi dvakrat ioniziranega ^{3}Li (jedro litija z enim samim elektronom) prehajajo z vzbujenih stanj $n_1 = 7$ in $n_1 = 3$ v stanje $n = 2$. Izsevani fotoni se absorbirajo v volframovi kroglici z radijem 1 mm in povzročajo fotoefekt. Zaporna napetost (napetost, ki zaustavi tok elektronov, nastalih pri fotoefektu) je za prvi prehod (7 → 2) enaka 23,6 V. S pomočjo tega podatka izračunaj časovni interval, v katerem bodo še izhajali izbiti elektroni iz izolirane volframske kroglice, če nanjo pade vsako sekundo 10^4 fotonov vsake vrste.
4. V človekovo kri vnesemo 1 cm^3 raztopine, ki vsebuje umetni radioaktivni izotop ^{24}Na, katerega aktivnost je 2000 razpadov na sekundo. Aktivnost 1 cm^3 krvi, ki smo jo vzeli po 5 urah, je znašala 16 razpadov na minuto. Izračunaj volumen človekove krvi. Razpolovni čas ^{24}Na je 15 ur.
5. Dva "relativistična" vlaka se gibljeta po vzporednih tirih z enako hitrostjo glede na tire, eden nasproti drugemu. Opazovalec v prvem vlaku meri časovni interval med trenutkom, ko sovpada začetek prvega vlaka s koncem drugega vlaka in trenutkom, ko sovpadata konca obeh vlakov. Vlaka imata enaki lastni dolžini. Izračunaj časovni interval.

Bojan Golli

24. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IN PREDTEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV SREDNJEŠOLCEV

Uvod v tekmovanje mladih matematikov predstavlja že vrsto let predtekmovanje, ki ga izvedejo šolski aktivi profesorjev matematike in fizike, naloge zanj pa enotno določi republiška tekmovalna komisija pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Letos je bilo predtekmovanje že prvega marca, udeležilo se ga je približno devetsto dijakov z devetindvajsetih srednjih šol, predvsem gimnazij. Naloge so bile skrbno izbrane in temu primeren je bil izid: število predlaganih dijakov je bilo dokaj izenačeno po vseh razredih in je povsod presegalo predvideno velikost tekmovalne skupine.

Naloge s predtekmovanja

NALOGE ZA PRVI RAZRED:

1. Poišči najmanjše naravno število, ki daje pri deljenju s 3 ostanek 2, pri deljenju s 5 ostanek 3 in pri deljenju s 7 ostanek 5 !
2. Enakokrak trapez $ABCD$ ima lastnost, da središče njemu očrtanega kroga razpolavlja osnovnico AB. Kakšna je dolžina stranice CD, če vemo, da je premer kroga enak a, dolžina kraka BC pa enaka b?
3. Vsota okrajšanih ulomkov a/b in c/d je celo število. Dokaži, da je $b = \pm d$!
4. Na ravna tla postavimo štiri krogle polmera r tako, da se dotikajo, njihova središča pa oblikujejo kvadrat. Na sredo postavimo peto kroglo polmera R tako, da se dotika štirih spodnjih krogel. Kako visoko nad tlemi je središče pete krogle? Pri katerih pogojih je naloga sploh rešljiva?

NALOGE ZA DRUGI RAZRED:

1. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$z^x = y^{2x} \quad , \quad 2^z = 2.4^x \quad , \quad x + y + z = 16$$

2. Koliki del ploščine pravokotnega trikotnika zavzema četverokotnik, ki ima dve oglišči v krajiščih višine na hipotenuzo, drugi dve pa v razpoloviščih katet?
3. Kakšnim pogojem zadošča konveksni četverokotnik, ki ga obe diagonali ploščinsko razpolavljata?
4. Poišči vse polinome oblike $x^3 + px + q$, kjer sta p in q celi praštevili in ki jih lahko razcepimo na same faktorje oblike $(x + a_i)$ $(a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,2,3)$! (Celo število a je celo praštevilo, če je $|a|$ praštevilo v običajnem smislu.)

NALOGE ZA TRETJI RAZRED

1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\sqrt[3]{9+x} + \sqrt[3]{9-x} = 3$$

2. Na ravnini stoji stolp. V neki točki ravnine oklepa daljica, ki veže vrh stolpa s to točko, z ravnino kot α. Če točko približamo stolpu za razdaljo a, pa je ustrezni kot trikrat večji. Kako visok je stolp?
3. V trikotniku ABC leži na stranici AC točka E, na nosilki stranice AB pa točka D tako, da je B med A in D ter velja

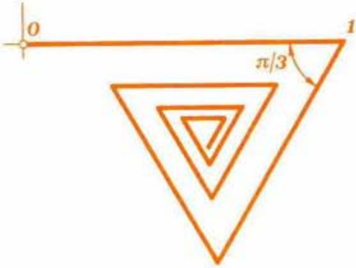
$$\overline{EC} = \overline{BD}$$

Daljici BC in ED se sekata v točki M. Dokaži, da velja enakost

$$\overline{EM} : \overline{MD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

4. Za kompleksna števila z_1, z_2, z_3 velja: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$
Pokaži, da je tedaj tudi

$$\left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = r$$



NALOGE ZA ČETRTI RAZRED

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$$

2. Kam nas vodi pot na sliki, če vemo, da je razmerje zaporednih odsekov enako a $(0 < a < 1)$, koti med zaporednimi odseki pa so enaki $\pi/3$?
3. V kvadrat včrtaj enakostranični trikotnik z najmanjšo in takega z največjo ploščino. (Oglišča trikotnika so na stranicah kvadrata.) Kolikšno je razmerje ploščin teh dveh trikotnikov?
4. Namiznoteniški klub ima $2n$ članov. Za tekmovanje v dvojicah sestavi n parov. Na koliko načinov je to mogoče storiti?

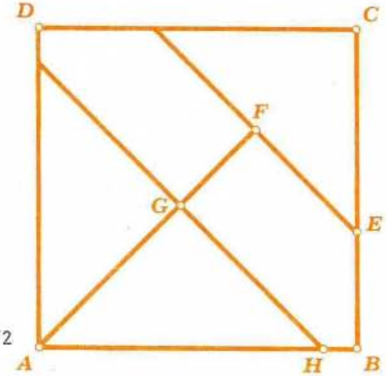
Kar stoenaintrideset najuspešnejših dijakov s predtekmovanja je tekmovalna komisija povabila v Kočevje, kjer so petega aprila v prostorih novega Centra usmerjenega izobraževanja pomerili svoje znanje in sposobnosti. Skupina profesorjev iz Kočevja je pod vodstvom dipl.ing. Toneta Krkoviča poskrbela, da je bilo bivanje dijakov in tekmovalne komisije v njihovem kraju čim bolj prijetno. Pri tem so jih podprle tudi delovne organizacije.

Večina tekmovalcev je prispela v mestece ob Rinži neposredno pred tekmovanjem, tisti, ki pa so prišli že v petek, so prenoči li v Domu Dušana Remiha. V soboto ob desetih so se dijaki in njihovi spremljevalci zbrali v avli šolskega centra, tam so jih pozdravili in vsem skupaj zaželeli čimveč uspehov: profesorja Kovačič Srečko in Merhar Dušan kot predstavnika gostiteljev; predsednik Izvršnega sveta občine Kočevje Alojz Petek; generalni direktor ZKGP Kočevje ing. Zdravko Šaubah kot predstavnik pokrovitelja in predsednik republiške tekmovalne komisije dr. Egon Zakrajšek.

Tekmovalci so imeli za reševanje nalog dve uri in pol časa.

Naloge s tekmovanja

NALOGE ZA PRVI RAZRED



1. Kvadrat s stranico dolžine a razrežemo na pet ploščinsko enakih delov kot kaže slika (vsi rezi so vzporedni diagonalama). Izračunaj obseg petkotnika $BEFGH$!

2. Konveksen četverokotnik z dolžinami stranic a, b, c in d ima ploščino P. Dokaži neenakosti

   $P \leqq (ab + cd)/2$ in $P \leqq (ac + bd)/2$

3. V ravnini izberemo nekaj točk tako, da so njihove medsebojne razdalje paroma različne. Iz vsake točke potegnemo daljico do njej najbližje točke. Dokaži, da se tako dobljene daljice ne morejo sekati (lahko pa imajo skupna krajišča ali popolnoma sovpadajo)!

4. Na premici izberemo 1980 točk. Vsako točko pobarvamo bodisi rdeče bodisi modro. Daljice med zaporednimi točkami pobarvamo po naslednjem pravilu:
   - če sta krajišči rdeči, naj bo daljica rdeča,
   - če sta krajišči modri, naj bo daljica modra,
   - če sta krajišči različno pobarvani, naj bo daljica bela.

   Kakšne barve je zadnja točka, če smo pri takem barvanju dobili natanko sto belih daljic in je prva točka rdeča? Odgovor utemelji!

NALOGE ZA DRUGI RAZRED

1. Dana so tri realna števila a, b in c. Velja:

   $a \geqq b \geqq 0$

   Dokaži neenakost

   $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2} \leqq a - b$

   V katerih primerih velja enačaj?

2. Šestmestno število je deljivo s sedem. Če zadnjo cifro prestavimo na prvo mesto, dobimo novo šestmestno število. Dokaži, da je tudi to število deljivo s sedem!
3. Različni premici p in q se sekata v točki T pod nepravim kotom. Izberemo na premici p točko P, $P \neq T$ in na premici q točko Q, $Q \neq T$. Pravokotnica na premico q skozi točko P seka premico q v točki R. Pravokotnica na premico p skozi točko Q seka premico p v točki S. Dokaži, da sta kota TPQ in TRS skladna!
4. Dokaži, da v krogu ne moremo izbrati šestih točk tako, da bi bile druga od druge oddaljene za več, kot je polmer kroga!

NALOGE ZA TRETJI RAZRED

1. Dokaži, da je za vsa realna števila a, b, c in x izpolnjena neenakost

$$|a-x| + |b-x| + |c-x| \geq \max(a,b,c) - \min(a,b,c)$$

Kdaj velja enakost?
2. Poišči vse take polinome P, da za vsak x velja

$$x.P(x-1) = (x-3).P(x)$$

3. Pri kakšnih realnih a in b so absolutne vrednosti vseh korenov enačbe

$$z^3 + a.z^2 + b.z - 1 = 0$$

enake 1?
4. Pravilno štiristrano piramido $ABCDE$ z vrhom E presekamo z dvema ravninama. Na prvi ravnini, ki je pravokotna na stransko ploskev ADE, leži rob BC, na drugi ravnini, ki je pravokotna na stransko ploskev BCE, pa leži rob AD. Del premice, v kateri se ti dve ravnini sekata, in ki leži v piramidi, je polovica osnovnice. Kolikšen je naklonski kot stranske ploskve?

NALOGE ZA ČETRTI RAZRED

1. Poišči vse realne rešitve enačbe

$$|1 - |1 - \ldots |1 - x|\underbrace{||\ \ldots\ |}_{n} = 1$$

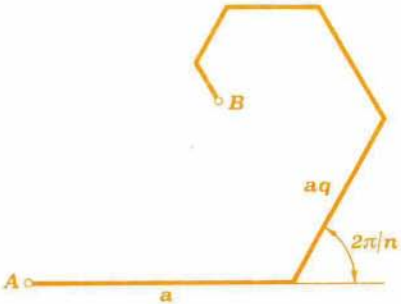
2. Števila 1, 2, ... , n razmečemo po ogliščih n-kotnika. Oglišče pobarvamo:
   - rdeče, če sta števili v obeh sosednih ogliščih večji od števila v tem oglišču;
   - modro, če sta števili v obeh sosednih ogliščih manjši od števila v tem oglišču;
   - belo v ostalih primerih.

   Dokaži, da je rdečih oglišč toliko kot modrih!
3. Pri kakšnih realnih a in b so absolutne vrednosti vseh korenov enačbe

$$z^3 + az^2 + bz - 1 = 0$$

enake 1?

4. Iz točke A v ravnini se odpravimo na pot in naredimo n korakov, $n \geq 3$. Dolžina prvega koraka je a, dolžina vsakega naslednjega pa q-kratnik prejšnjega, $0 < q < 1$. Po vsakem koraku se obrnemo v levo za kot $2\pi/n$. Na koncu pridemo v točko B. Izračunaj razdaljo med točkama A in B !



Po naporni bitki z nalogami in s časom so dijaki odšli na kosilo v restavracijo podjetja ITAS, potem pa so si ogledali še obrat pokrovitelja tekmovanja, Združenega kmetijskega gozdarskega podjetja Kočevje. Medtem so člani tekmovalne komisije ob pomoči nekaterih spremljevalcev šolskih ekip pregledali izdelke tekmovalcev, določili nagrajence in izbrali predstavnike Slovenije za zvezno tekmovanje mladih matematikov v Kumrovcu. Kot običajno je bila popoldne še svečana podelitev nagrad in pohval najuspešnejšim dijakom. Letošnja bera odličij je bila nadvse obilna: kar petdeset dijakov je prejelo priznanja za dosežene uspehe.

Vsi sodelujoči srednješolci so dobili že tradicionalen Bilten o tekmovanju, ki so ga pripravili prireditelji, Presekove rdeče značke, ki so namenjene samo udeležencem republiških tekmovanj, in knjižice iz zbirke Sigma.

Seznam nagrajenih in pohvaljenih dijakov

1. razred

I: Pepelnjak Ivan, I. gimn. Lj.-Bežigrad; II: Bakula Robert, I. gimn. Lj.-Bežigrad; III: Bensa Mitja, Gimn. Nova Gorica; Udir Milan, Gimn. Kranj; Medica Boris, Gimn. I. Cankar, Lj.; P: Mozetič Dean, Gimn. Koper; Čufer Simona, Gimn. Kranj; Gulin Rafael, Gimn. Ptuj; Turnšek Aleksej, Gimn. I. Cankar, Lj.; Kastelec Jože, Gimn. Lj.-Šentvid; Zalar Borut, Gimn. Novo mesto; Babič Stelio, Gimn. Koper; Hartman Niko, Gimn. I. Cankar, Lj.; Ilc Stanko, Gimn. Brežice.

2. razred

I: Kukavica Igor, I. gimn. Lj.-Bežigrad; III: Jamnik Janez, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Jurišić Aleksandar, Gimn. V. Janežič Lj.-Poljane; Tavčar Mojca, I. gimn. Lj.-Bežigrad; P: Močnik Igor, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Erzar Tomaž, Gimn. V. Janežič Lj.-Poljane; Černe Miran, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Brilej Roman, Gimn. Velenje; Ambrožič Vojko, Gimn. Nova Gorica; Čuček Mark, Gimn. V. Janežič Lj.-Poljane; Lagudin Peter, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Škerjanc Igor, I. gimn. Lj.-Bežigrad.

3. razred

II: Cokan Tomaž, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Kaluža Matjaž, Gimn. M. Zidanšek Maribor; III: Boltin Uroš, Gimn. I. Cankar Lj.; Ambrožič Milan Gimn. Nova Gorica; Kunaver Uroš, I. gimn. Lj.-Bežigrad; P: Koželj Janez, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Muhič Niko, Gimn. Lj.-Šentvid; Planinšič Gorazd, I. gimn. Lj.-Bežigrad; Opresnik Marko, Gimn. I. Cankar Lj.; Turk Goran, Gimn. Koper; Štrucl Damjan, Gimn. Lj.-Šentvid; Mlinar Monika, Gimn. Trbovlje; Senica Tomaž, Gimn. I. Cankar Lj.

4. razred

II: Matoh Leon, Gimn. Novo mesto; Romih Maks, I. gimn. Lj.-Bežigrad; III: Zupan Janez, Gimn. Lj.-Šentvid; Brinšek Branko, Gimn. Jesenice; Dolenc Tomi, I. gimn. Lj.-Bežigrad; P: Hvala Bojan, Gimn. J. Vega Idrija; Verbovšek Tone, I.gimn. Lj.-Bežigrad; Simonič Alex, I.gimn. Lj.-Bežigrad; Krajnik Primož, Gimn. Škofja Loka; Bizant Peter, Gimn. Lj.-Šentvid; Pavišič Smiljan, Gimn. Novo mesto.

Naslovna stran biltena, ki so ga izdali organizatorji tekmovanja.

Pregled rezultatov po šolah

Poleg imena šole je najprej število prijavljenih dijakov, potem število udeležencev predtekmovanja, v tretjem stolpcu pa število dijakov na tekmovanju. V naslednjih stolpcih so števila tekmovalcev po razredih, nadalje število nagrajencev (prve, druge in tretje nagrade ter pohvale) in skupno število nagrajenih in pohvaljenih dijakov. V zadnji koloni je število dijakov, ki so povabljeni na zvezno tekmovanje. Vprašaj pomeni, da ni znano natančno število dijakov.

Šola	predt.		tekm.	razred				nagrade					
	prij.	udel.		1	2	3	4	I	II	III	P	Sk	Zv
Gimn. Ajdovščina	21	11	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Brežice	25	18	4	3	-	-	1	-	-	-	1	1	-
TŠ Celje	70	37	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Celje	57	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Črnomelj	28	25	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Idrija	20	?	2	-	1	-	1	-	-	-	1	1	-
Gimn. Jesenice	71	44	4	-	-	1	3	-	-	1	-	1	-
Gimn. Kočevje	60	?	11	2	3	3	3	-	-	-	-	-	-
Gimn. Koper	160	67	5	2	2	1	-	-	-	-	3	3	-
Gimn. Kranj	-	6	2	2	-	-	-	-	-	1	1	2	-
Gimn. Lj.-Bežigrad	170	70	24	4	8	7	5	2	3	4	8	17	7
Gimn. I. C. Lj.	78	33	9	5	1	3	-	-	-	2	4	6	1
Gimn. V. J. Lj.	65	39	4	1	3	-	-	-	-	1	2	3	1
Gimn. Lj.-Moste	25	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Lj.-Vič	60	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Lj.-Šentvid	77	49	12	2	1	5	4	-	-	1	4	5	-
ETŠ Ljubljana	56	33	7	1	4	-	2	-	-	-	-	-	-
Gimn. I. Maribor	45	20	2	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-
Gimn. M. Zidanšek Mb.	76	59	5	2	1	1	1	-	1	-	-	1	1
Gimn. M. Sobota	47	21	3	-	-	1	2	-	-	-	-	-	-
Gimn. Nova Gorica	75	51	12	3	4	2	3	-	-	2	1	3	1
Gimn. Novo mesto	60	18	4	2	-	-	2	-	1	-	2	3	1
Gimn. Postojna	23	7	2	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-
Gimn. Ptuj	46	26	1	1	-	-	-	-	-	-	1	1	-
Gimn. Škofja Loka	100	72	4	-	1	2	1	-	-	-	1	1	-
Gimn. Tolmin	40	9	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-
Gimn. Trbovlje	33	28	4	-	-	4	-	-	-	-	1	1	-
Gimn. Velenje	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1	1	-
RŠC Velenje	40	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		~ 900	131	33	35	33	30	2	5	12	31	50	12

Razveseljivo je, da med mladimi zanimanje za matematiko ne upada. Nedvomno gre del zasluge za to in pa za lep uspeh na tekmovanjih tudi prizadevnim učiteljem, ki nemalokdaj tudi svoj prosti čas namenijo delu z mladino.

Na koncu moramo izreči še pohvalo organizatorjem iz Kočevja, saj je tekmovanje potekalo gladko in v kar najboljšem razpoloženju vseh prisotnih.

Gorazd Lešnjak

STVARNO KAZALO

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

7 (1979/80) ŠT. 1-5, 256 + 64 +(64) STR.

ČLANI AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV

šola . . . .

točen naslov . . . .

NAROČANO:

.... izvodov lista za mlade matematike, fizike in astronome PRESEK - VIII. letnik, za šolsko leto 1980/81 po 50.-din (posamezna naročila 62,50din). Naročnino bomo nakazali skupaj ali v ..... obrokih najkasneje do ..... 198..

Istočasno naročamo še:

.....kom. Presekovih značk - Presečko	10.-
.....kom. Presekovih značk - bela (nova serija)	15.-
.....kom. Plemljevih značk - srebrnih	10.-
.....kom. Plemljevih značk - bronastih	10.-
.....izv. Uršič: Štirimestni logaritmi in druge tabele, 1980	40.-
.....izv. Žabkar: Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov, 1979	11.-

PRESEKOVA KNJIŽNICA

.....izv. Vidav: Josip Plemelj - Ob stoletnici rojstva	10.-
.....izv. Prosen: Astronomska opazovanja	24.-
.....izv. Strnad: Začetki sodobne fizike	32.-
.....izv. Strnad: Relativnost za začetnike	48.-
.....izv. Landau, Rumer: Kaj je teorija relativnosti	48.-

Priimek in ime (tiskano): Podpis:

S to številko Preseka smo poslali na vse šole tudi komplet brošur Presekove knjižnice v skupni vrednosti 162.-din. V kolikor se zanje ne bodo odločili učenci oz. učitelji, ali pa šolska knjižnica, vas prosimo, da nam jih vrnete do 1.oktobra 1980. V nasprotnem primeru vam bomo poslali račun. Do istega datuma vas prosimo, da nam vrnete zgornjo naročilnico z dodatnimi željami.

Marija Hrovath

PRESEKOVA KNJIŽNICA

Presek - list za mlade matematike, fizike in astronome izhaja že osmo leto. Vsakokrat izidejo vsaj štiri številke s pisano vsebino. Na željo bralcev, ki so se oglašali v rubriki PISMA BRALCEV, pa smo že nekajkrat izdali tudi peto številko Preseka. Te so imele enotno vsebino. Tekst je prispeval en sam avtor. Publikacija ni izšla samo kot revija, pač pa tudi kot drobna knjižica za "domače branje". Do danes so izšla v tej družini knjižic, ki jih imenujemo PRESEKOVA KNJIŽICA, naslednja dela:

0. Žabkar Jože, Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil od 1 do 999 ter obsegov in ploščin kroga za merska števila premera od 1 do 299, 13. natis, 1979
1. Vidav Ivan, JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva, Presek 3 (1975)5
2. Zajc Pavle, TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, Presek 4 (1977)5
3. Prosen Marijan, ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi napravami opazujemo in merimo, Presek 5 (1978)5
4. Strnad Janez, ZAČETKI SODOBNE FIZIKE - Od elektrona do jedrske cepitve, Presek 6 (1979)5
5. Strnad Janez, RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce 1979
6. Landau L.D., J.B. Rumer, KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI - Nobelovec predstavlja spremenjen pogled na prostor, čas in maso, Presek 7 (1979)5

Publikacijo pod zaporedno številko "0" nismo uvrstili v Presekovo knjižnico. Že nekaj časa kolektiv mladih sodelavcev Preseka pripravlja nov rokopis za Matematični priročnik za učence v osnovni šoli. Le-ta naj bi se približal metodam pouka in upošteval napredek znanosti, predvsem na področju računalništva. Ko bo priročnik zares izšel, bo dobil drugo, višjo zaporedno številko.

O brošuri, ki govori o življenju in delu prof. dr. Josipa Plemlja, smo v našem Preseku že večkrat pisali. Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev osnovnih šol pa je že dalj časa razprodana. Avtor pripravlja nov rokopis, v katerem bodo tudi naloge iz zadnjih let, nekatere stare bodo izpuščene ali prirejene.

Zato vam danes priporočamo predvsem zadnje štiri knjižice, njihove naslovne strani so objavljene na tretji strani ovitka. Predstavljanje je namenjeno predvsem mlajšim naročnikom, ki so šele od letos ali lani naročeni na Presek. Teh publikacij še niso mogli prejeti z rednimi številkami. Tiskali smo jih v večji nakladi, tako da jih danes lahko dobijo tudi tisti, ki se še posebej zanimajo za astronomijo (3.) in fiziko (5.,6.). Prav vse so primerne za učence osnovnih šol, posebno za tiste, ki se udeležujejo šolskih krožkov. Knjižica z zaporedno številko 5. Janez Strnad, Relativnost za začetnike, pa je primerna le za dijake srednjih šol, zato je izšla le v Presekovi knjižnici. Interesenti lahko naročijo zgornje brošure skupaj z novim letnikom Preseka. Naročilnica, ki jo lahko prepišete na dopisnico ali vložite v pismo, je objavljena v tej številki Preseka na prejšnji strani.

Ciril Velkovrh


presek
V
1977-78
Marijan Prosen
ASTRONOMSKA OPAZOVANJA
Kako v astronomiji s preprostimi napravami opazujemo in merimo
LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME
IZDAJA DMFA SRS


presek
VI
1978-79
Janez Strnad
ZAČETKI SODOBNE FIZIKE
Od elektrona do jedrske cepitve
LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME
IZDAJA DMFA SRS


presek
VII
1979-80
60
KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI
LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME
100 LETNICA ROJSTVA ALBERTA EINSTEINA
IZDAJA DMFA SRS


presek
VII
1979-80
Janez Strnad
RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE
odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce
LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME
100 LETNICA ROJSTVA ALBERTA EINSTEINA
IZDAJA DMFA SRS

REŠITVE NALOG

PRAVOKOTNIK - REŠITEV S STR. 12

Milan Hladnik