presek

4

VII
1979-80

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

PRESEK

DMFA SRS

PRESEK

DMFA SRS

PRESEK

DMFA SRS

PRESEK

DMFA SRS

UVODNIK

DRAGI BRALCI!

Danes bi vam radi povedali nekaj o pogovorih, ki smo jih imeli na eni od zadnjih sej uredniškega odbora Preseka in ob srečanju nekaterih članov uredniškega odbora z vašimi učitelji med semestralnimi počitnicami.

Beseda je tekla seveda o Preseku in poskusili smo ga čimbolj kritično presoditi. Zdelo se nam je, da postaja prezahteven, vendar iz vaših pisem nismo mogli točno zaključiti, ali tudi vi tako mislite. Kako širok krog bralcev meni, da Presek premalo upošteva mlajše bralce? Želimo si čimveč *kritičnih* pisem, tako od najmlajših bralcev kot tudi od mentorjev - učiteljev, ki posredujejo Presek najširšemu krogu mladih.

Tekmovalci sodijo, da bi bilo dobro objavljati v vsaki številki nekaj tekmovalnih nalog, rešitve pa naj bodo v naslednji številki. Nekateri so šli še korak dlje in so predlagali, da bi uvedli dopisno tekmovanje, ki ne bi bilo časovno tako omejeno, kot so dosedanja tekmovanja. Predlog je vsekakor zanimiv in velja pogledati, kako bi ga lahko uresničili.

Nazadnje omenimo še razširitev Preseka na več številk v letu. Naj vam zaupamo, da pripravljamo tudi to. Vendar je gotovo, da bo ta podvig zahteval širši krog sodelavcev in s tem tudi vaše aktivnejše sodelovanje. Samo tedaj smemo upati na uspeh. Na tem mestu vas uredniški odbor vabi, da pošljete Preseku čimveč svojih prispevkov. Obvestili vas bomo o uspehu. Nasvidenje.

Zvonko Trontelj

V S E B I N A

KLEPET MED JEDRSKIM REAKTORJEM IN PEČICO ZA ŽAR

Možje v belih haljah, ki dan za dnem skrbijo za pogon jedrskega reaktorja raziskovalnega inštituta, so sklenili, da bodo na trati pred zgradbo proslavili deseto obletnico uspešnega dela. Reaktor so zaradi vzdrževalnih del za nekaj časa ustavili.

Eden izmed mož, Janez Natančnik, je za to priliko že prejšnji dan prinesel od doma pečico za žar. Ker njegov šef ni trpel v bližini reaktorja ničesar, kar ne služi vsakdanjemu delu, je Janez potisnil pečico v kartonsko škatlo, na kateri je pisalo POZOR SEVANJE in jo pustil na odlagalni polici reaktorske dvorane.

Pečica, ki je na nedeljskih izletih rada prisluškovala pogovorom učenih profesorjev o jedrskih elektrarnah, si je zelo želela, da bi videla ta slavni reaktor. Zanimal jo je še posebej zato, ker se je kot potomka peči na oglje, ob katerih so nastajali prvi izdelki v bronasti in železni dobi, čutila odrinjeno. Je mar ta jedrski reaktor res kaj več? Ali morda ne govorijo ljudje o njem toliko zato, ker je nevaren in se ga boje? Ko so pozno zvečer delavci odšli in je v reaktorski dvorani gorela le še opozorilna luč, se je začela peč v škatli premikati proti špranji, skozi katero se je videlo naravnost k reaktorju.

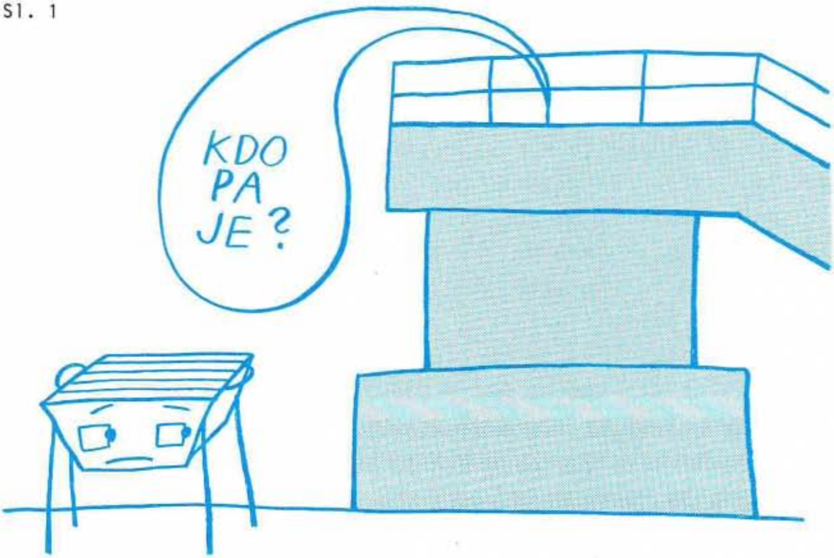
Reaktor je bil vajen lagodnega življenja. Možje v belih haljah so mu stregli leto za letom dan in noč. Ne da bi se posebej trudil, jim je za to dajal nevtrone. Da se pri tem ne bi segrel, so ga hladili s posebej očiščeno vodo. Sedaj pa, ko so se v njem nabrali radioaktivni odpadki, zaradi katerih zadnje čase ni bil tako uporaben kot pred leti, se je počutil osamljenega. Tolažil pa se je, da bodo dela trajala le kak teden. Vstavili mu bodo nove gorilne elemente in potem se bo zopet začelo.

Ko je v škatli zašumelo, je reaktor postal pozoren. Spreletelo ga je: da niso miši, ki se včasih lotijo njegovih električnih napeljav v podzemeljskih kanalih! Ravno pri kablih pa je najbolj ranljiv. Po njih mu možje v belih haljah merijo temperaturo, gostoto nevtronov, določajo hlajenje in uravnavajo delovanje. Ko je pečica zaslišala, da je v vodi reaktorja počil mehurček, se je oglasila:

"Zdi se mi, da ne dremljete, gospod reaktor",(naslovila ga je z gospodom, ker je vedela, da so ga pripeljali iz Amerike), "Ali vas lahko zmotim?"

"Kdo pa je?",se je oglasil reaktor, ki ni nikdar mogel pogledati izza debelega betonskega oklepa, v katerega so ga vgradili.

Sl. 1



"Pečica za žar sem."

Reaktorju je odleglo:

"Da le niso miši", je pomislil. Kaj pa je pečica za žar, ni vedel.

"Oprostite, še nikoli nisem slišal za tako pečico. Ker ne morem pogledati skozi beton in vas lahko le slišim, vas prosim, da mi poveste nekaj o sebi."

Pečica je bila zgovorna, zato je reaktorju rada razložila, da je v bistvu majhna posoda iz železa, da v njej razžarijo oglje, ki ga prekrijejo s kovinsko mrežico, na kateri pečejo slastno dišeče jedi. Povedala je še, da je zanjo vsaka peka posebno doživetje, saj jo spomni na slavno zgodovino oglja. Pritožila pa se je nad kruto usodo: "Smrdljivi sorodnik premog je pri ljudeh veliko bolj v časteh kot oglje, ki mu je ostala samo še nepomembna vloga, da spominja ljudi na prijetno toplino nekdanjega družinskega ognjišča. Prej je iz kovačnic prijetno dišalo, danes se iz tovarn širi vonj po premogu in nafti. Jutri pa boste svojo pot nastopili vi, reaktorji." Zajela je sapo, nato pa nadaljevala:

"Oprostite, ker sem klepetava, toda moram vam zaupati, da sem vsakokrat, ko v meni žari oglje, vesela, ker sodelujem pri veličastnem procesu, ko se drobni svetovi - ljudje jim pravijo atomi ogljika in kisika - odločajo za skupno pot v prihodnost. Njihov svatbeni ples občutim kot toploto, ki me vedno vso prevzame. Čeprav sem samo uboga pločevinasta posoda, tudi jaz pripevam k temu plesu. Oglje držim na kupu in skozi odprtine spuščam zrak. Veste, za gorenje je važno, da je oglje na kupu. Na ta način je površina, ki oddaja toploto okolici, manjša. Temperatura je višja in gorenje se samo vzdržuje. Če goreče oglje razmečejo po večji površini, se ohladi in neha goreti."

Še predno ji je mogel reaktor seči v besedo, je pečica nadaljevala:

"Nikoli nisem mogla razumeti, kakšnim procesom v gorilnih palicah ste priča vi, gospod reaktor. Slišala pa sem, da so bolj mogočni, kot je gorenje oglja. Predstavljam pa si, da morajo biti gorilne palice blizu druga drugi - tako kot koščki oglja v pečicah."

Reaktorju je bila sosedina radovednost všeč, zato mu ni bilo odveč povedati ji nekaj o sebi. Učeno je povzel:

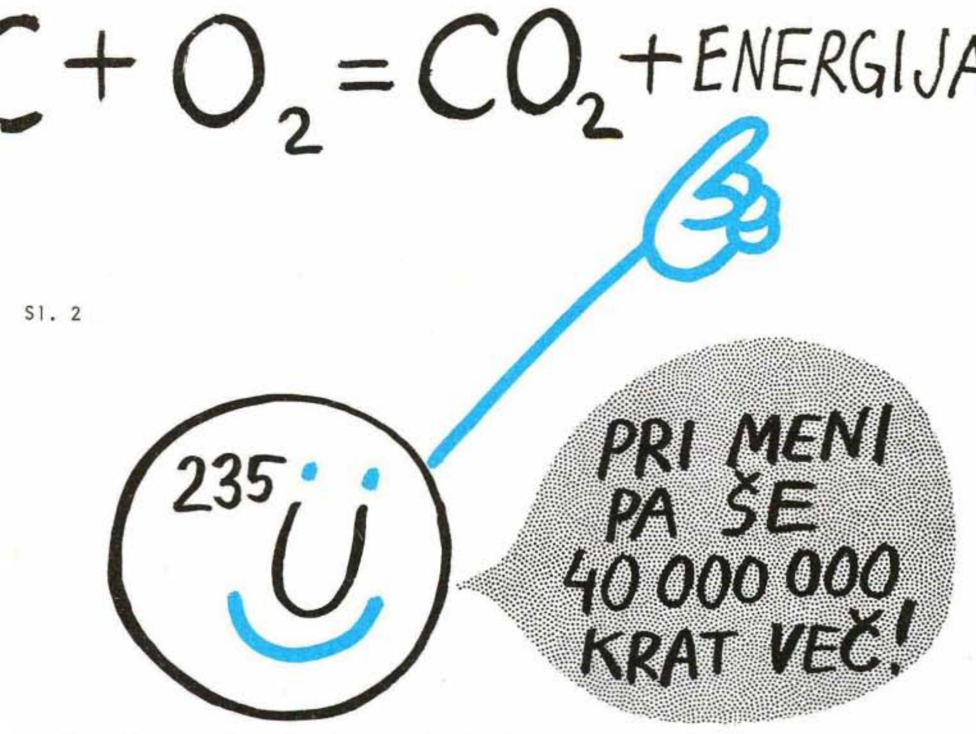
"Kot ste verjetno že slišali, v mojih gorilnih palicah razpadajo jedra urana. Pogoj, da jedro razpade, pa je, da si tik pred tem pripoji dodatni nevtron. Ob razpadu nastaneta dve novi jedri, sprostijo pa se dva do trije novi nevtroni in višek energije. Pri ognju je za vzdrževanje gorenja potrebna toplota, za cepitev urana pa moramo imeti nevtrone. Toploto pri gorenju dajejo molekule, ki so ravnokar nastale iz ogljika in kisika. Pri reaktorju morajo poskrbeti, da nove cepitve povzročajo nevtroni, ki so nastali pri prejšnjih cepitvah. Da čim manj nevtronov pobegne iz sredice v okolico, morajo biti gorilne palice dovolj blizu druga drugi, kot ste to pravilno sklepali.

Zanimivo je tudi, da voda pogasi ogenj, cepitve v reaktorju pa pospešuje. Zelo učinkovito namreč zmanjšuje hitrost nevtronov, ki nastanejo ob cepitvi. Proti pričakovanju pa so počasni nevtroni bolj uspešni za cepitev kot hitri.

Naj vam povem še, da se ob cepitvi enega uranovega jedra sprosti približno 40 milijonov več energije kot pri spajanju enega atoma ogljika z dvema atomoma kisika. Zaradi tega ljudje toliko govorijo o jedrskih reaktorjih in jedrskih bombah."

"Kakšna pa je sploh razlika med reaktorjem in bombo?" je hitro vskočila radovedna pečica.

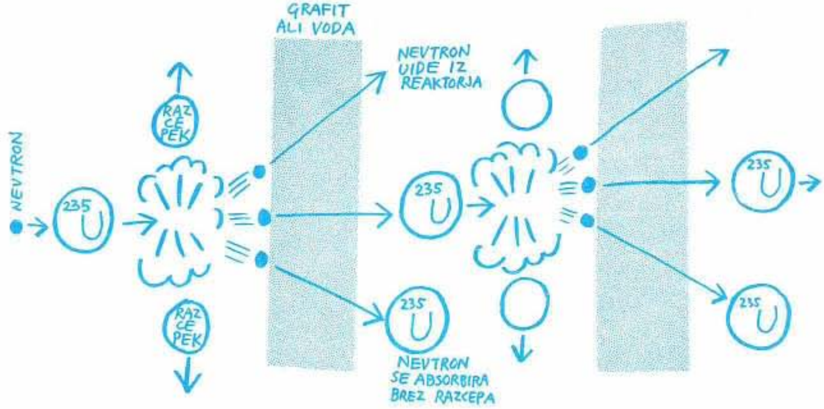
"No," je nadaljeval reaktor, "vsa razlika je v tem, da pri reaktorju večanje števila razcepov in s tem tudi večanje moči sproti kontrolirajo in ne dovolijo porasta čez določene meje. Pri bombi pa pogostost reakcij narašča nekontrolirano vse dokler zaradi visoke temperature in pritiska oklep ne popusti. Podobna primerjava velja tudi med gorenjem v peči in gorenjem smodnika v granati. V prvem primeru se oksidacija odvija počasi, kontrolirano, v drugem pa hitro in nekontrolirano."



Sl. 2

Pečica je zvesto sledila razlagi. Ko pa se je spomnila, da oglje prižigajo tako, da komaj vidno žerjavico razpihajo pa vsem kupu, je hotela vprašati, kako je s tem pri reaktorju. Toda reaktor jo je prehitel:

"Upam, da ste razumeli, da se proces cepitve v moji sredici prične, če se od nekod pojavi nevtron, ki po spojitvi z jedrom urana povzroči cepitev. Pri tem nastanejo dva ali trije nevtroni. Vsak od teh nevtronov lahko povzroči cepitev novega jedra. Vsi skupaj torej lahko sprostijo že štiri ali devet novih nevtronov itd. Tak proces imenujejo verižna reakcija. Če bi se večina nastalih nevtronov res spojila z jedri urana in povzročila cepitev, bi se število reakcij in število nevtronov s časom zelo hitro večalo. Tak primer imamo v jedrskih orožjih, pri katerih se ves proces eksplozije izvrši v nekaj milijoninkah sekunde."



Sl. 3

"Še vedno ne vem, od kod pride tisti prvi nevtron", si je mislila pečica, pa jo je spet prehitel reaktor.

"Čudno se sliši, pa vendar je tako! Za prižig reaktorja je lahko odločilen že en sam nevtron. Taki nevtroni, ki lahko prižgejo reaktor, nastanejo v vsemirju in nekaj jih prileti tudi na Zemljo. Včasih pa kako jedro urana razpade samo od sebe ter pri tem sprosti, kot sem že omenil, dva ali tri nevtrone. Vendar je takih nevtronov malo. Nekateri pobegnejo iz reaktorja, ne da bi povzročili cepitev. Ker poleg tega graditelji želijo, da začne reaktorju naraščati moč takoj, ko so za to izpolnjeni pogoji, v reaktorje vgrajujejo nevtronske izvire. Nevtronski izvir je na primer mešanica radija in berilija. Delci alfa iz radija zadevajo ob jedra berilija in pri tem sproščajo nevtrone."

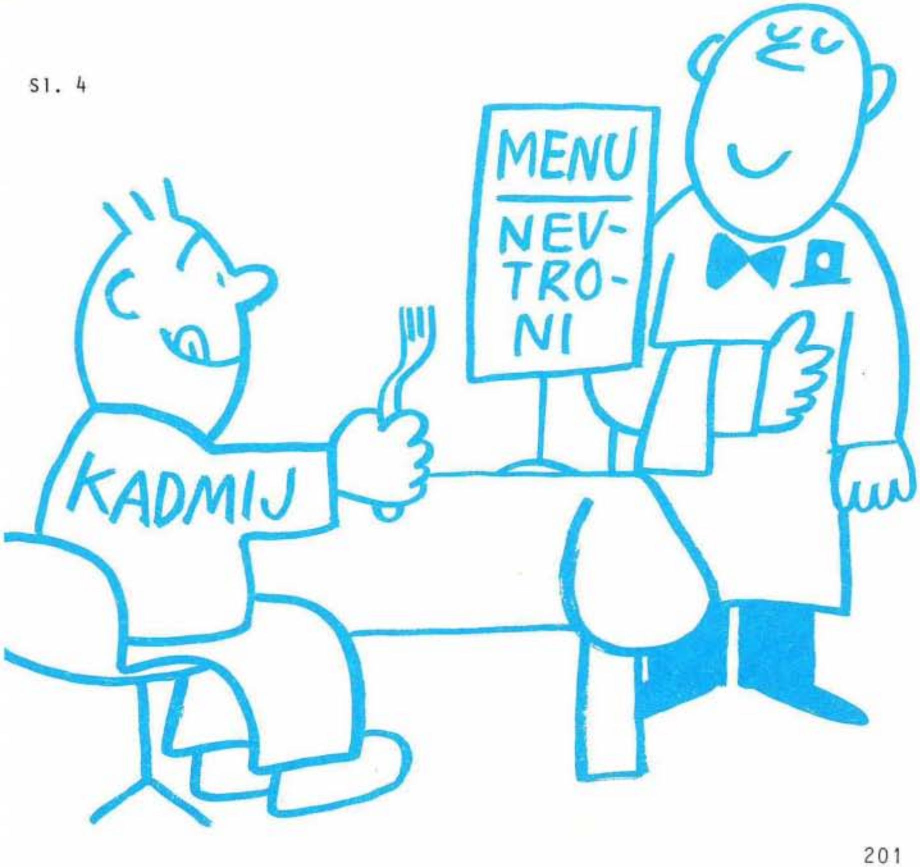
Pečici je bila razlaga všeč, saj ji je reaktor razložil marsikaj, kar ji že dolgo ni dalo miru. Vendar pa je ostalo še veliko vprašanj, na katera ni vedela odgovora. Predvsem si ni mogla predstavljati, kako je mogoče reaktor sploh ustaviti. Pri ognju preprečijo dostop zraka ali pa mu dodatno, na primer s peskom, znižajo temperaturo, da se pogasi. Toda kako naj ustavijo reaktor? Pečica se je opogumila:

"Kadar vaših strežnikov ni tukaj, v vaši sredici na nek način preprečijo cepitve, ali ne?"

"To pa je zgodba zase", je dejal reaktor in nadaljeval: "Nekatere snovi, na primer kadmij, hlastno vpijajo nevtrone. Če palice, narejene iz take snovi, porinejo med uranske palice, se število nevtronov zmanjša. Primanjkljaj je lahko tako velik, da se verižni proces ustavi. Podobno se v kovačnici oglje lahko pogasi, če porinejo vanj dovolj velik in hladen železni predmet."

Pečici se je vse bolj dozdevalo, da razume stvari, o katerih

Sl. 4



je slišala govoriti učene profesorje. Eno vprašanje pa jo je še vedno mučilo: kakšna je razlika med reaktorjem, ki ga ima pred seboj in jedrsko električno centralo. Vedela je, da pri reaktorju, s katerim se je pogovarjala, znanstvenike zanimajo samo nevtroni, s katerimi delajo razne poskuse. Sproščena toplota jim je celo odveč. Previdno je o tem vprašala reaktor.

Odgovor je bil sila enostaven: reaktorji pri jedrskih centralah so večji, proizvajajo več toplote in delajo pri temperaturah nekaj sto stopinj Celzija. Pri tej temperaturi se voda vpari in poganja turbine; te pa poganjajo električne generatorje. Zaradi visokih temperatur in visokih tlakov je izdelava takega reaktorja izredno zahteven podvig. Reaktorska posoda, cevi in ventili - vse mora biti popolnoma tesno. Razcepni produkti so namreč radioaktivni in treba je za vsako ceno preprečiti, da bi onesnažili okolico reaktorja. Zato ima reaktorska posoda več sten, ki zagotavljajo varnost jedrskih central.

Pečica je zvedela veliko novega. Razgovor jo je utrudil, poleg tega pa si je zaželela, da bi v miru vse skupaj še enkrat premislila. Ravno takrat pa je dežurni varnostnik prišel na ogled in je prižgal luč. Pečica se je stisnila v kot in se potopila v globoko premišljanje. V mislih je obnovila ves pogovor in nenadoma jo je prešinilo: "Saj je isto! Saj je gorenje tudi verižni proces. Ob prižigu se spoji najprej manjše število atomov ogljika in kisika v ogljikov dioksid, nato pa se toplota, ki pri tem nastane, porabi za dvig temperature okolnega oglja in tako se ogenj razširi. Če je ON nuklearni reaktor, sem JAZ kemijski reaktor. Pri njem se cepijo uranova jedra, pri meni pa se spajajo atomi ogljika in kisika." Misel jo je tako močno prevzela, da je pozabila na vse okrog sebe in ni opazila, da je med tem luč spet ugasnila in da ji je reaktor zamrmral: "Lahko noč". Zadremala je in sanjala, kako je naslednji dan šef vprašal Janeza Natančnika: "Ali si prinesel atomski reaktor za žar?"

Ilustr. *Božo Kos*

Franc Cvelbar

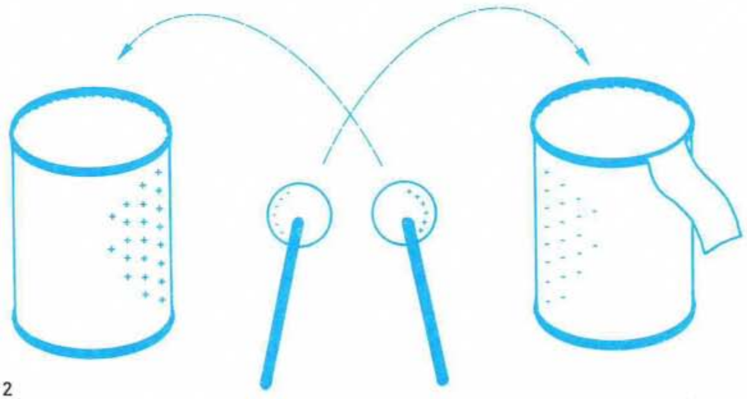
ELEKTRIKA IZ KONZERVE

V današnjem svetu umetnih snovi nam je statična elektrika dob-
ro znana, posebno v suhih in mrzlih zimskih dneh nam srajce in
puloverji iz umetnih vlaken prasketajo, ko jih vlečemo čez gla
vo; na podu iz umetne snovi se že po nekaj korakih navzamemo
toliko električnega naboja, da nas neprijetno strese iskra, ko
se dotaknemo kakega kovinskega predmeta. Umetne snovi so nam-
reč odlični izolatorji, zato se električni naboj na njih ne mo
re razlesti v okolico in odteči v zemljo, pač pa ostane na me-
stu, kjer se je rodil. Poskusi iz elektrostatike so nekdaj ter
jali prav nenavadno in težko dostopno opremo: jantar, kovinske
krogle na steklenih držalih, amalgamirano usnje, ebonit in bez
gov stržen. Danes pa najdemo primerne snovi v vsaki kuhinji -
in z njimi lahko napravimo tale presenetljivi poskus.

Oskrbimo si dve prazni in čisti pločevinki, 10 - 20 cm visoki
in široki, in ju slecimo iz papirnatega ovoja. Postavimo ju ka
kih 10 - 15 cm vsaksebi na ploščo iz umetne snovi, najbolje iz
stiropora. Potrebujemo še dve kovinski kroglici na izolirnem
držalu, zadoščalo bo, če glavi dveh plastičnih kuhalnic obleče
mo v aluminijevo folijo. Če bomo namesto kroglic napravili kar
loparčke, bo tudi dobro. Folijo dobro zgladimo, da iz površine
nikjer ne štrlijo prosti vogali ali robovi.

Kroglici zdaj staknjeni spustimo v prostor med konzervama, ta-
ko da si v ravni črti sledijo konzerva - kroglica - kroglica -

Sl. 1



Sl. 2

konzerva (sl. 1), nato pa ju malo razmaknemo in spet dvignemo ven. Tu ju zamenjamo (in pazimo, da se medtem ne bi ponovno do taknili, pa tudi konzerv ves čas ne smeta oplaziti) ter se z vsako kroglico dotaknemo notranjosti nasprotne pločevinke, tiste, ki ji prej ni bila soseda. Nato kroglici spet staknemo in ves postopek ponovimo.

V poskusu kopičimo na pločevinkah električni naboj in zvišujemo napetost med njima. Zato nam bo na vsem lepem - v trenutku, ko bosta kroglici med konzervama - čez zračne ožine med našimi pripravami preskočila močna iskra. Še preden se to zgodi, lahko eni od pločevink približamo prst. V tem primeru bomo iskre in rahlega zbodljaja deležni sami.

Poskusimo dogajanje zdaj tudi razumeti! Predstavljajmo si, da je na pločevinkah že nekaj naboja nasprotnih znakov. Ta naboj ustvarja v prostoru med pločevinkama električno polje. Staknjeni kroglici v tem prostoru predstavljata eno samo kovinsko telo, na katerem se pod vplivom polja električni naboj nekoliko razmakne. Pozitivno nabita pločevinka pritegne na svojo stran negativni naboj na kroglicah, negativno nabita pločevinka pa pozitivni naboj na svojo stran. Zato sta zunanji površini kroglic prevlečeni s plastjo nabojev, četudi je skupni naboj staknjenih kroglic še vedno nič. Ko bi kroglici staknjeni dvignili iz polja, bi se oblaka nabojev pomaknila na staro mesto in tako bi bil tudi vsak delec površine zase električno nevtralen. Skrivnost uspeha je v tem, da kroglici še v polju razmaknemo, preden ju dvignemo ven: s tem smo dosegli, da se premaknjena oblaka nabojev ne moreta več nevtralizirati in kroglici ostane ta naelektreni. Ko zdaj kroglici zamenjamo in se dotaknemo nasprotnih pločevink, smo naboja na njiju povečali, in v naslednjem koraku bo zaradi močnejšega polja pojav razdvojitve naboja ali električne influence še močnejši. In še druga skrivnost: zakaj je treba naboj prenašati v notranjost pločevink? Naboji istega znaka se med seboj odbijajo, zato se skušajo razlezti kolikor mogoče daleč vsaksebi. Na kovinskih predmetih bodo torej vedno skušali zasesti zunanjo površino in to raje na izboklih kot vboklih delih. Če bi staknili pločevinko in kroglico od zunaj, bi se naboj razlezel po skupni površini, torej bi ga nekaj ostalo tudi na kroglici. Če pa se s kroglico dotaknemo notranjosti pločevinke, odteče z nje ves naboj ven, na zunanjo površino.

Ostane še vprašanje, kako se to razdvajanje sploh začne, če v začetku na konzervah ni nobenega naboja. No, to skoraj nikoli ni res, v zraku vedno plava nekaj prostih nabojev zaradi učinkovanja kozmičnih žarkov in radioaktivnih snovi iz naše okolice, in ti poskrbijo za začetni naboj. Nekaj naboja pa med pripravljanjem najbrž nanesemo tudi sami. Če pa se nam poskus le noče posrečiti, se dotaknemo ene od pločevink s plastičnim glavnikom, s katerim smo potegnili skozi lase ali po obleki.

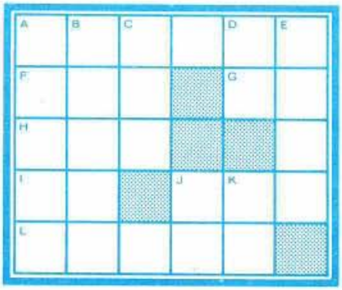
Ali se da pri poskusu tudi kaj zmeriti? Predvsem lahko ocenimo, do kakšne napetosti smo nabili konzerve. Vemo, da potrebuje v suhem zraku iskra za vsak centimeter poti okrog 30 000 voltov. Grob merilnik naboja dobimo tudi tako, da na zunanjo stran pločevink pritrdimo trak iz aluminijeve folije (sl. 2). Ker je trak zdaj del zunanje površine pločevink, bo tudi nanj odteklo nekaj naboja, ki se bo skušal odmakniti od nabojev na pločevinki: torej se bo trak odvrnil proč od pločevinke in to toliko bolj, kolikor več naboja se bo zbralo na njej. Po odmiku traku bomo potem lahko ves čas sledili napredovanju našega poskusa.

Alojz Kodre

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

V polja križanke namesto črk kot pri običajni križanki vpišemo številke od 0 do 9. Če je število decimalno, decimalne vejice ne napišemo, če je decimalk več kot je prostora zanje v križanki, napišemo samo toliko mest, kolikor jih dopušča prostor in ne zaokrožujemo. N.pr. število 12,3456789 vpišemo, če imamo na razpolago pet mest, kot 12345.



Vodoravno: A. razmerje med obsegom in premerom kroga. F. kub celega števila. G. 10^{-1}. H. praštevilo. I. produkt dveh praštevil. J. kvadrat celega števila. L. potenca dvojke.

Navpično: A. deset tretjin. B. razmerje med diagonalo in stranico kvadrata. C. ni praštevilo. D. toliko procentov je v polovici. E. $4pq$ (p in q sta različni praštevili). J. četrta potenca celega števila. K. dvakratnik kvadrata praštevila.

Peter Petek

Zaradi zamude 2. številke VII. letnika Preseka vam tokrat še ne moremo povedati, kateri ste prav ugotovili številko Tonetove osebne izkaznice. To bomo storili v prvi jesenski številki. Zastavljamo pa vam kratko "nogometno" nalogo. Rešitve nam pošljite do 30. V. 1980.

GOL ALI VRATNICA

Z razdalje nekaj metrov streljamo po tleh v vrata. Vratnici stojita v razdalji 50 cm, premer žoge pa je 20 cm. Kaj je lažje: zadeti vrata, ne da bi se žoga dotaknila vratnic ali zadeti katerokoli od vratnic?

Ljubomir Kostrevc

PISMA BRALCEV

MARINKA DRAGONJA, naša bralka iz Ljubljane, nam je ob poslanih rešitvah napisala takole: Ko prejmem Presek, začnem takoj reševati naloge. Veliko nalog ste že namenili osnovnošolcem. Lepo od vas, da skrbite za njih in za nas srednješolce. Kaj če bi v Preseku pisali tudi kaj o kemiji? Mislim, da je zanimiva (hodim namreč na kemijsko šolo) in upam, da bo tudi kemija postala spremljevalka Preseka.

Kaj naj ti, Marinka, odgovorimo? Čas bo izoblikoval vsebino Preseka skupaj z bralci in z nami. Lahko, da bo kdaj pisal Presek tudi več o kemiji. Kako si zamišljaš to rubriko? V upanju, da nam boš poslala še rešitve nalog in da boš odgovorila na vprašanje, ti želimo še zadosti veselja ob Preseku in te pozdravljamo.

KATARINA VIDALI, učenka osnovne šole Toneta Čufarja na Jesenicah, nam je v svojem prvem pismu zapisala takole: Rešila sem nalogo s sadjem v upanju, da je pravilno rešena. Letos sem prvič naročena na Presek in mi je zelo všeč. Težko pričakujem rezultate nalog. Najbolj pa mi je všeč rubrika Bolj za šalo kot za res. Lep pozdrav!

Le še naprej rešuj naloge s takim veseljem, mi pa bomo poskrbeli, da boš dobila tudi rezultate za preverjanje svojega dela. Veseli bomo, če nam boš svoje rešitve tudi redno poslala. Srečno!

SABINA ŠKERBINC iz Maribora pa pravi: Na Presek sem naročena že tretje leto. Redno ga prebiram in mi je zelo všeč. Pomaga mi pri poglabljanju matematičnega znanja. Želim si le, da bi izhajal večkrat na leto. Pošiljam nalogo in vam želim veliko uspeha pri urejanju revije.

Hvala, Sabina. Tvoja želja po večjem številu Presekov je želja mnogih bralcev in mi si prizadevamo. Na naši seji smo pod posebno točko obravnavali, kako razširiti krog piscev Preseka. S tem imamo največ težav in mislimo, da nam bi bralci lahko tudi kako pomagali. Hvala ti za prizadevanje ob sestavljanju poslane naloge.

RUDOLF BREGAR, Sevno, Primskovo na Dolenjskem, je napisal: Na Presek sem naročen od prvega letnika gimnazije. Je zelo zanimiv, predvsem poglavja iz moderne fizike in astronomije. Preseku sledim že štiri leta in vsako četrtletje komaj čakam izida nove številke. Želim si, da bi Presek izhajal bolj pogosto.

Veseli smo tvojega sodelovanja z nami. Zastavil si tudi nekaj vprašanj, na katera boš dobil odgovor po pošti. Upamo pa, da se boš še kdaj oglasil.

Matilda Lenarčič

IGRA N I M

(Predavanje na 17. seminarju DMFA 1980 - Zanimiva matematika)

1. UVOD

Ime igre NIM verjetno izvira iz nemškega velelnika "nimm", kar pomeni "vzemi", Obrnimo za šalo besedo NIM na glavo, pa dobimo besedo WIN, kar v angleščini pomeni "zmagati".

NIM je v resnici skupno ime za igre, v katerih dva igralca izmenično pobirata kamne z enega ali več kupov. Kdor naredi zadnjo možno potezo, je zmagovalec. Med seboj se te igre ločijo po številu kupov in kamnov na začetku igre in po pravilu, ki predpisuje velikost vsakega vzetka. Vsaka poteza mora seveda spremeniti celotno število kamnov v igri in mora tako vzeti najmanj en kamen.

Za vse te igre velja, da je že na začetku igre znano, kateri od obeh igralcev lahko zanesljivo zmaga, ne da bi se mu mogel pri tem nasprotnik upirati. Posledica tega pa je, da igra ni več zanimiva. Tudi mi se bomo ukvarjali z njo z enim samim namenom, raziskati namreč želimo ta zanesljivi način (strategijo) zmagovanja v igri.

2. NIM Z ENIM KUPOM

Definirajmo zdaj igro z imenom $Nim(M)$.

> Igralca imata pred seboj kup z N kamni, vzetki pa so lahko najmanj en in največ M kamnov naenkrat. Dobitnik zadnjega kamna je seveda zmagovalec.

Ni težko uganiti, da traja najdaljša igra $N/2$ potez za vsake ga igralca. Kadar je $N \leq M$, pa igra sploh ni zanimiva, saj bo prvi zmagal v prvi potezi, s katero bo vzel vse kamne.

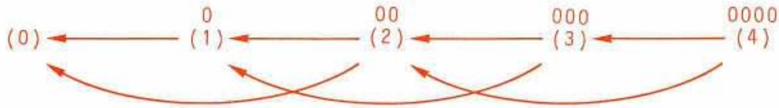
Naloga 1 : S prijateljem poskusi igrati igro $Nim(M)$. Pred tem se dogovorita, kolikšna naj bosta M in N (recimo $M = 4$, $N = 15$).

Označimo z (X) kup, v katerem je X kamnov. Za poljuben kup bomo definirali celoštevilčno vrednost $P(X)$, ki ji bomo rekli kar VREDNOST POZICIJE igre. Do nje pridemo takole:

a) Prazen kup ima vrednost nič, $P(0) = 0$
b) Naj bodo (X_1), (X_2), ... (X_r) vsi možni kupi, do katerih lahko pridemo s pravilnim jemanjem s kupa (X), tedaj je

$P(X)$ = najmanjše nenegativno celo število, ki je različno od vseh vrednosti $P(X_i)$, $i = 1,2,\ldots, r$

Primer
Vzemimo igro $Nim(2)$, ki ima na začetku 4 kamne. Vsak vzetek je torej lahko 1 ali 2 kamna. Da bomo lažje računali vrednosti pozicije, si najprej narišimo vse možne poteze v igri:



Očitno so vrednosti pozicije: $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 0$, $P(4) = 1$.

Naloga 2 : Izračunaj še nekatere vrednosti pozicij (za kupe s 5, 6, ... , 20 kamni).

Sedaj si oglejmo dvoje lastnosti vrednosti pozicije igre:

a) če je $P(X) > 0$, pomeni, da kup (X) ni prazen, igralec, ki je na vrsti, pa lahko med možnimi potezami izbere tako, da bo z njo dosegel $P(X\text{-vzetek}) = 0$. Če namreč taka poteza ne bi obstajala, bi bilo po definiciji $P(X) = 0$.

b) če je $P(X) = 0$, je lahko kup prazen in igra končana. Če kup ni prazen, pa katerakoli pravilna poteza povzroči, da je $P(X\text{-vzetek}) > 0$.

Pri $P(X) = 0$ je pozicija *IZGUBLJENA* , $P(X) > 0$ pa pomeni *DOBLJENO* pozicijo, kar se nanaša na igralca, ki je na vrsti. Torej zmeraj obstaja poteza, ki spremeni dobljeno pozicijo v izgubljeno, vsaka poteza pa spremeni izgubljeno pozicijo v dobljeno. Tako smo prišli do osnovne lastnosti igre *Nim*: Če je v začetku igre $P(N) > 0$, lahko prvi zmaga tako, da spreminja dobljeno pozicijo v izgubljeno. Drugi mu pri tem odgovarja tako, da izgubljeno pozicijo spreminja v dobljeno, dokler se kup ne izprazni.

Če je na začetku igre $P(N) = 0$, prvi nima možnosti za zmago, razen če se drugi zmoti. Zato bo prvi vzel samo en kamen, saj pomeni večji kup tudi večjo možnost za napako. Drugi seveda uporablja isto strategijo, kot bi jo prvi. Strategija ni odvisna od vrstnega reda igralcev, ampak samo od števila kamnov v kupu in pravila za poteze.

Primer

Oglejmo si potek že omenjene igre *Nim*(2) s štirimi kamni na začetku. Prvi mora vzeti en kamen, tako pusti tri kamne, ki jih drugi zmanjša na 2 ali 1, oboje pa prvi v naslednji potezi vzame in zmaga.

Naloga 3 : Ugotovi vse izgubljene pozicije iz naloge 2.

Oglejmo si še en način računanja vzetka pri *Nim*(M) :

Vsakokrat je najbolje pustiti v kupu mnogokratnik od M+1 kamnov, se pravi

$$\text{vzetek} = X \bmod (M+1)$$

kjer je X velikost kupa, cela desna stran pa ostanek pri deljenju X z $M+1$. Takoj vidimo, da daje ta formula največji vzetek M kamnov. Kadar je pozicija izgubljena, pa je rezultat formule enak nič, kar pa ni pravilen vzetek. V zadnjem primeru je najboljši vzetek en kamen, formulo pa bomo popravili:

$$\text{vzetek} = \max(1, X \bmod (M+1))$$

Zapišimo še enkrat vrednosti pozicije igre $Nim(M)$:

$0,1,2,...,M,0,1,2,..,M,0,1,2,...,M,0,1,2,...$

Vidimo, da je vrednost pozicije enaka velikosti vzetka pri poljubnem kupu, razen pri vrednosti 0. To velja nasploh samo za igro $Nim(M)$. Pri drugačnih pravilih se vzetki drugače računajo.

Naloga 4 : Kakšen je najboljši vzetek pri igrah:

a) $N = 100$, $M = 15$

b) $N = 20$, $M = 4$

c) $N = 21$, $M = 4$

Sedaj si bomo ogledali vrednosti pozicije iger z drugačnimi pravili za določanje vzetkov:

a) vzetek je liho število
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

b) vzetek je sodo število
0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...

c) vzetek je največ polovica kupa + 1
0, 1, 2, 0, 3, 1, 4, 2, 5, 0, ...

d) vzetek ni več kot polovica kupa
0, 0, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 4, 2, ...

e) vzetek je praštevilo
0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 0, 0, ...

Naloga 5 : Razišči vrednosti pozicij za pravilo "vzetek je kub" in velikosti kupov: 0, 1, 2, ... , 30 kamnov.

3. OBRNJENI NIM

Obrnjeni Nim ima ista pravila kot navadni, le zmagovalca določamo drugače:

zmagovalec je igralec, ki ne more narediti poteze.

V $Nim(M)$ to pomeni, da izgubi tisti igralec, ki mora vzeti zadnji kamen. Tako se seveda tudi zmagovalna strategija rahlo spremeni. Prvi se bo trudil, da bo na koncu pustil natančno en kamen, ki ga bo drugi tako moral vzeti.

Obrnjeni $Nim(M)$ igramo takole: začetni kup si mislimo zmanjšan za en kamen, nato pa igramo kot prej. Tako lahko pridemo do predzadnjega kamna. Kako je s pozicijami? Računanje poteka tako kot prej, le začetek je drugačen, namreč $P(0) = 1$. Vsak vzetek pa izračunamo takole:

$$\text{vzetek} = (N-1) \bmod (M+1)$$

Naloga 6: Kako lahko obrnjeni Nim s splošnejšimi pravili jemanja prevedemo na navadnega?

Roman Rojko

BISTROVIDEC

Enakosti

$$13 \times 93 = 31 \times 39$$

in

$$12 \times 63 = 21 \times 36$$

zadoščata enačbi

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$$

pri čemer je $a \neq b$ in $c \neq d$. Enačba ima še nekaj rešitev. Poišči jih čim več!

Vladimir Batagelj

TRIKOTNA ŠTEVILA

(Predavanje na 17. seminarju DMFA SRS 1980 - Zanimiva matematika)

1. MNOGOKOTNA ŠTEVILA

Vzemimo aritmetična zaporedja s prvim členom 1 in razlikami 1, 2, 3, ... :

	začetek zaporedja	splošni člen	razlika
(1)	1, 2, 3, 4, 5, 6,...	n	1
(2)	1, 3, 5, 7, 9,11,...	$2n-1$	2
(3)	1, 4, 7,10,13,16,...	$3n-2$	3
(4)	1, 5, 9,13,17,21,...	$4n-3$	4

in tako naprej.

Definicija:

n-to delno vsoto $p(n,r+2)$ r-tega zaporedja imenujemo $r+2$ -kotno število.

Tako smo dobili:

(1) *trikotna* števila

1, 3, 6, 10, 15, 21, ... $p(n,3) = t_n = n(n+1)/2$

(2) *štirikotna* (*kvadratna*) števila

1, 4, 9, 16, 25, 36, ... $p(n,4) = k_n = n^2$

(3) *petkotna* števila

1, 5, 12, 22, 35, 51,... $p(n,5) = n(3n-1)/2$

in tako naprej.

Spomnimo se obrazca $n(2a_1+r(n-1))/2$ za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja s splošnim členom $a_n = a_1+r(n-1)$.

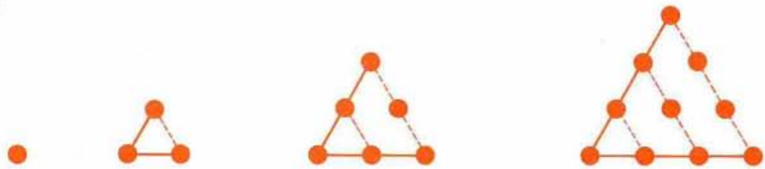
Uporabimo to na zgornjih zaporedjih in dobimo splošno formulo za mnogokotna števila:

$$p(n,r) = n(2 + (n-1)(r-2))/2$$

Tako so $p(n,3) = t_n$ trikotna števila, $p(n,4) = k_n$ so kvadratna (štirikotna) števila in tako naprej.

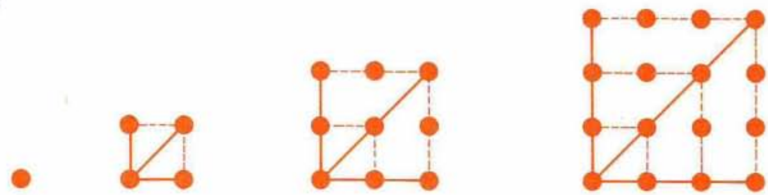
Pojasnimo še izvor imena mnogokotnih števil. Do njih lahko namreč pridemo tudi geometrijsko:

(1)



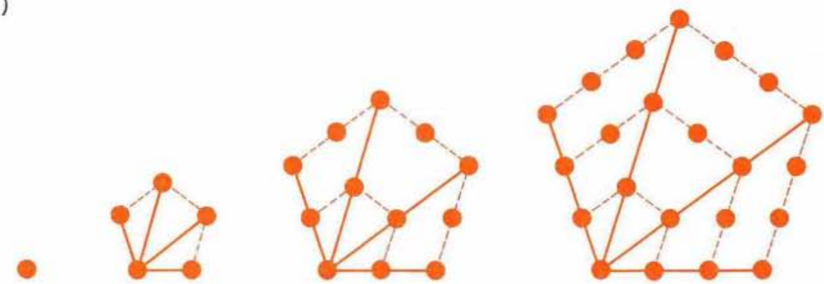
1 = 1   3 = 1+2   6 = 1+2+3   10 = 1+2+3+4

(2)



1 = 1   4 = 1+3   9 = 1+3+5   16 = 1+3+5+7

(3)



1 = 1   5 = 1+4   12 = 1+4+7   22 = 1+4+7+10

in tako naprej.

Naloga 1 : Preizkusi definicijo še na šestkotnih številih.

2. TRIKOTNA ŠTEVILA

Trikotna števila smo definirali s $t_n = \frac{1}{2} n (n+1)$.

Spomnimo se, kako je definiran Pascalov trikotnik: sestavljen je iz naravnih števil; na krakih ležijo enice, vse ostale vrednosti pa so enake vsoti dveh nad njo ležečih vrednosti.

Oglejmo si, kako ležijo trikotna števila v Pascalovem trikotniku:

enojke 1
naravna števila 1 1
trikotna števila 1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

in tako naprej.

Še na en način lahko definiramo trikotna števila, namreč z *rekurzivno enačbo:*

$$t_n = n + t_{n-1} \quad ; \quad t_1 = 1$$

Naloga 2 : Kako bi definirali tetraedrska in kubna števila?

Oglejmo si nekaj zanimivosti med trikotnimi števili:

$t_3 = 6, \quad t_{33} = 561, \quad t_{333} = 55611$

splošno: $t_{\underbrace{33333}_{n}} = \underbrace{5555}_{n-1}6\underbrace{1111}_{n-1}$

$t_6 = 21, \quad t_{66} = 2211, \quad t_{666} = 222111$

splošno: $t_{\underbrace{66666}_{n}} = \underbrace{22222}_{n}\underbrace{11111}_{n}$

$t_9 = 45, \quad t_{99} = 4950, \quad t_{999} = 499500$

splošno: $t_{\underbrace{99999}_{n}} = 4\underbrace{9999}_{n-1}5\underbrace{0000}_{n-1}$

$$t_{69} = 2415, \quad t_{669} = 224115$$

splošno: $$t_{\underbrace{66\ldots6}_{n}9} = \underbrace{22\ldots2}_{n}4\underbrace{11\ldots1}_{n}5$$

$$t_{10} = 55, \; t_{100} = 5050, \quad t_{1000} = 500500$$

splošno: $$t_{1\underbrace{00\ldots0}_{n}} = 5\underbrace{00\ldots0}_{n-1}5\underbrace{00\ldots0}_{n-1}$$

$$t_{101} = 5151, \quad t_{1001} = 501501$$

splošno: $$t_{1\underbrace{0\ldots0}_{n}1} = 5\underbrace{0\ldots0}_{n-1}15\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1$$

$$t_{12} = 78, \; t_{132} = 8778, \quad t_{1332} = 887778$$

splošno: $$t_{1\underbrace{33\ldots3}_{n}2} = \underbrace{88\ldots8}_{n}\underbrace{77\ldots7}_{n+1}8$$

če bi bili vztrajni, bi našli še kaj takega.

3. KVADRATNA TRIKOTNA ŠTEVILA

Med trikotnimi števili so tudi taka, ki so hkrati kvadratna. Za taka števila seveda velja zveza $t_n = k_m$ oziroma enačba $n(n+1) = 2m^2$. Prvo kvadratno trikotno število dobimo takoj; za $m = n = 1$ namreč dobimo $t_1 = k_1 = 1$. Naštejmo jih še nekaj:

$$t_8 = 6^2, \quad t_{49} = 35^2, \quad t_{288} = 204^2, \quad t_{1681} = 1189^2, \; \ldots$$

Sedaj pa se bomo potrudili do splošne formule za računanje kvadratnih trikotnih števil.

Trditev 1.
Če za dvoje naravnih števil u in v velja $t_u = v^2$, tedaj velja tudi $t_{3u+4v+1} = (2u+3v+1)^2$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} t_{3u+4v+1} &= (3u+4v+1)(3u+4v+2)/2 \\ &= (9u^2+16v^2+24uv+9u+12v+2)/2 \\ &= 9u(u+1)/2 + 8v^2 + 6v(2u+1) + 1 \end{aligned}$$

upoštevamo: $u(u+1)/2 = t_u = v^2$, $9t_u = 9v^2 = v^2 + 8v^2 =$
$= v^2 + 8t_u = v^2 + 4u(u+1)$,

$$t_{3u+4v+1} = v^2 + 4u(u+1) + 8v^2 + 6v(2u+1) + 1$$
$$= 9v^2 + (2u+1)^2 + 6v(2u+1) = (2u + 3v + 1)^2$$

Če še enkrat pogledamo trditev 1, opazimo, da ta trditev določa neko zaporedje števil, ki so hkrati kvadratna in trikotna. Začnemo seveda z $u = 1$, kar pomeni $v = 1$, naprej imamo $t_{3u+4v+1} = t_8 = 36 = k_6$. Dobili smo nova u in v, namreč 8 in 6. Sedaj mirno nadaljujemo postopek, dokler se ne naveličamo.

Naloga 3 : Izračunaj prvih 8 parov u in v iz zaporedja v trditvi 1.

Dokažimo sedaj še eno trditev!

Trditev 2.
Zaporedje t_u, $t_{3u+4v+1}$, ... iz trditve 1 vsebuje vsa kvadratna trikotna števila.

Dokaz:
Recimo, da obstaja kvadratno število izven zgornjega zaporedja. Naj bo $t_u = v^2$ najmanjše tako število. Ker je t_1 že element zaporedja, mora biti $u > 1$. Dokazali bomo, da sta števili $x = 3u-4v+1$ in $y = 3v-2u-1$ pozitivni in velja $x < u$ in $t_x = y^2$.

$t_u = v^2$, $u(u+1) = 2v^2$, $u^2 < 2v^2$, $u < v\sqrt{2}$, $2u < 2\sqrt{2}\, v < 3v$
$v > 1$, $3v = 4v-v < 4v-1$, $2u < 4v-1$, $2u-(4v-1) < 0$, torej
$x = 3u-4v+1 = u+2u-(4v-1) < u$, dokazali smo $x < u$.

Vzemimo $x \leqq 0$, $v = \sqrt{u(u+1)/2}$, $x = 3u - 4\sqrt{u(u+1)/2} + 1$,
$x \leqq 0$, $3u+1 \leqq 4\sqrt{u(u+1)/2}$, $9u^2 + 6u + 1 \leqq 8u^2 + 8u$, poenostavimo, $u^2 - 2u + 1 \leqq 0$, $(u-1)^2 \leqq 0$, to da $u = 1$; to je v protislovju s predpostavko $u > 1$. Od tod sklep: $x > 0$.

Vzemimo $y \leqq 0$, $y = 3\sqrt{u(u+1)/2} - 2u - 1 \leqq 0$, podobno,
$9u(u+1) \leqq 2(2u+1)^2$, $u^2+u \leqq 2$; to je v protislovju z $u > 1$, zato velja $y > 0$.

$$t_x = t_{3u-4v+1} = (3u-4v+1)(3u-4v+2)/2$$
$$= 9(u^2+u)/2 - 12uv + 8v^2 - 6v + 1$$

upoštevamo: $t_u = v^2$, $9(u^2+u)/2 = 9t_u = v^2 + 4u(u+1)$,
pa dobimo $t_x = 9v^2 + 4u^2 + 4u - 12uv - 6v + 1$
$= (3v - 2u - 1)^2 = y^2$, dokaz je končan.

Lastnost $x < u$ zatrjuje, da t_u ni najmanjše trikotno kvadratno število izven zgornjega zaporedja. S tem protislovjem je trditev 2 dokazana.

Mislimo si kvadratna trikotna števila razvrščena v naraščajočem zaporedju. Naj bo n-to število v tem zaporedju hkrati x_n-to trikotno število t_{x_n} in y_n-to kvadratno število k_{y_n} :

$$t_{x_n} = x_n(x_n + 1)/2 = y_n^2 = k_{y_n}$$

Iz obeh trditev vidimo:

$$x_1 = 1 \qquad y_1 = 1$$
$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1 \; ; \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1$$

Obrazca za x_n in y_n nam dajeta naslednji izrek

Izrek.
Kvadratna trikotna števila so zbrana v zaporedju, ki ga določajo formule:

$$x_n = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n\right)^2 \qquad t_{x_n} = y_n^2$$
$$y_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right)$$

Dokaz:
Uporabili bomo *popolno indukcijo*. Za $n = 1$ izrek gotovo velja, saj imamo tedaj $t_1 = 1^2$. Dokazati moramo še, da velja izrek za $n+1$, če velja za n .

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1 \; , \quad 4x_{n+1} = 3\left((\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n\right)^2 +$$
$$+ 2\sqrt{2}\left((\sqrt{2} + 1)^{2n} - (\sqrt{2} - 1)^{2n}\right) + 4$$

upoštevali smo: $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$;

upoštevali pa bomo še: $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ (na poljubno potenco). Po krajšem računu dobimo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^{n+1} - (\sqrt{2} - 1)^{n+1}\right)^2;$$ nato izračunamo

$$x_{n+1} + 1 = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^{n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{n+1}\right)^2,$$ upoštevamo osnovno

enačbo: $y_{n+1}^2 = t_{x_{n+1}} = x_{n+1}(x_{n+1} + 1)/2 =$

$$= \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2})^{n+1}\right)^2 .$$

Tako smo izrek dokazali. Zanimivost teh formul je med drugim tudi v tem, da so števila x_n in y_n zmeraj naravna, čeprav nastopajo v izrazih ulomki in koreni.

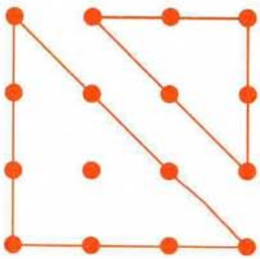
Naloga 4 : Izračunaj nekaj vrednosti x_n in y_n in jih primerjaj z vrednostmi iz naloge 3.

Naloga 5 : Dokaži, da sta števili 48024900 in 1631432881 trikotna kvadrata.

Omenimo še, da so pri sodem n števila $x_n/2$ in x_n+1 kvadrati, pri lihem n pa so x_n in $(x_n+1)/2$ kvadrati.

4. RELACIJE MED TRIKOTNIMI ŠTEVILI

1) *Nikomahova identiteta:*

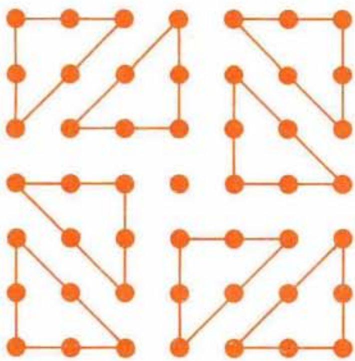


dve zaporedni trikotni števili sestavljata kvadrat:

$$t_n + t_{n+1} = (n + 1)^2$$

O tem se zlahka prepričamo tudi algebrajsko. Primer: $t_3 + t_4 = 4^2$

2) *Plutarhova identiteta*



$$8t_n + 1 = (2n + 1)^2$$

Primer:

$$8t_3 + 1 = 7^2$$

Naloga 6 : S pomočjo definicije za trikotna števila dokaži Nikomahovo in Plutarhovo identiteto.

3) *Posplošitve Nikomahove identitete:*

zahtevajo samo malo več dela. Pokažimo samo začetek:

vzamemo enačbi $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$ in $t_{n+1} + t_{n+2} = (n+2)^2$,

$t_n + 2t_{n+1} + t_{n+2} = n^2+2n+1+n^2+4n+4 = 2(n+1)(n+2)+1 = 4t_{n+1}+1$

$t_n + t_{n+2} = 4t_{n+1} - 2t_{n+1} + 1 = 2t_{n+1} + 1$

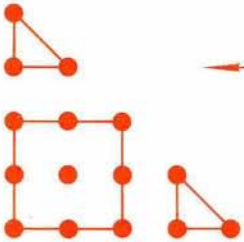
Naprej ne bomo računali. Zapišimo samo rezultat:

$$t_n + t_{n+2k-1} = (n + k)^2 + 2t_{k-1}$$
$$t_n + t_{n+2k} = 2t_{n+k} + k^2$$

Če v teh enačbah vstavimo $n = 0$, dobimo znano lastnost:

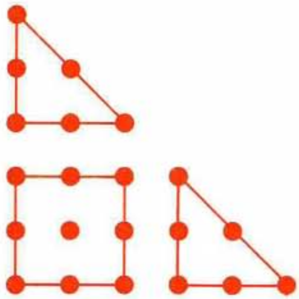
$$t_{2k-1} = k^2 + 2t_{k-1}$$
$$t_{2k} = k^2 + 2t_k$$

Vsako trikotno število se da torej izraziti kot vsota kvadrata in dvakratnika nekega trikotnega števila. Slika bo to še lepše pokazala:



$$t_5 = 3^2 + 2t_2$$

$$t_6 = 3^2 + 2t_3$$

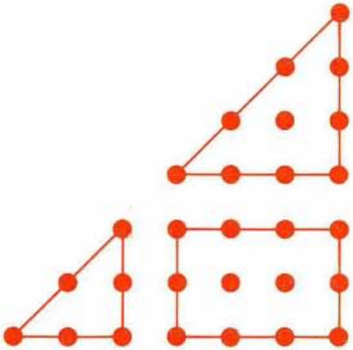


Če vzamemo v Nikomahovi identiteti bolj splošne člene, dobimo pravokotniško obliko teh enačb:

$$t_{n+k} = nk + t_n + t_k$$

Pokažimo to na sliki:

$$t_{3+4} = t_7 = 12 + t_3 + t_4$$



Leta 1836 je Casinelli izpeljal identiteti:

$$t_{n+k+1} = t_n + t_k + (n+1)(k+1)$$

$$t_{n-k} = t_n + t_k - k(n+1)$$

4) *Identitete z obliko* $t_a + t_b = t_c$

Sierpinski je pokazal, da obstaja neskončno mnogo parov trikotnih števil, ki imajo trikotno vsoto. Dokaz je prav preprost. V enačbo $t_k = k + t_{k-1}$ vstavimo t_n namesto indeksa k, pa dobimo:

$$t_{t_n-1} + t_n = t_{t_n}$$

5. PALINDROMNA TRIKOTNA ŠTEVILA

Palindromna števila so taka, da se naprej berejo enako kot nazaj. Med prvimi 151340 trikotnimi števili je 27 palindromnih. Leta 1973 jih je v reviji Journal of the Recreational Mathematics razkazal Trigg. Skoraj zanesljivo jih je dobil z računalnikovo pomočjo. Oglejmo si jih še mi!

n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	109	5995	3185	5073705
2	3	132	8778	3369	5676765
3	6	173	15051	3548	6295926
10	55	363	66066	8382	35133153
11	66	1111	617716	11088	61477416
18	171	1287	828828	18906	178727871
34	595	1593	1269621	57166	1634004361
36	666	1833	1680861	102849	5289009825
77	3003	2662	3544453	111111	6172882716

Števila t_{109}, t_{1111}, t_{2662} in t_{57166} imajo enako številsko vsoto, namreč 28. Trem številom pripada lastnost, da imajo enaka mesta: 55, 66, 666. Edini dvojni palindrom je 828828. Tri števila so palindromi z vrhom (mesta monotono naraščajo do nekega mesta, nato monotono padajo): 171, 595, 1269621. Tri števila so valovita (zaporedni mesti sta večji in manjši od sosednjih): 15051, 5073705, 6295926.

Števila t_1, t_2, t_{10}, t_{18}, t_{34}, t_{109}, t_{8382} imajo sama liha mesta. Števila t_3, t_{11}, t_{36}, t_{363}, t_{1287} imajo sama soda mesta. Pri številih t_{132}, t_{3369} in t_{2662} so različna sosednja mesta tudi sosednja naravna števila.

Roman Rojko

PLOŠČINA PRAVILNEGA OSEMKOTNIKA

Pokažimo, kako lahko izračunamo ploščino pravilnega osemkotnika, če poznamo njegovo stranico!

1. način

Na sliki 1 imamo pravilni osemkotnik s stranico a. Potegnemo daljice AF, BE, CH in DG in dobimo kvadrat $MNPQ$, katerega stranica je enaka stranici osemkotnika. Očitno so enakokraki pravokotni trikotniki AQH, BMC, DNE in FPG medsebojno skladni. Ker je njihova hipotenuza obenem tudi stranica osemkotnika, bo njih kateta po Pitagorovem izreku enaka $\sqrt{a^2/2} = a\sqrt{2}/2$. Torej je pravilni osemkotnik $ABCDEFGH$ sestavljen iz kvadrata stranice a in štirih pravokotnih trapezov z osnovnicama $a + a\sqrt{2}/2$ in a ter višino $a\sqrt{2}/2$. Zato je ploščina enaka

$$P = a^2 + 4 . \frac{1}{2} ((a + a\sqrt{2}/2) + a) . a\sqrt{2}/2$$

$$P = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

2. način

Pravilni osemkotnik je sestavljen iz osmih skladnih enakokrakih trikotnikov z osnovnico a in krakom R. (Glej sliko 2). Pri tem je a stranica pravilnega osemkotnika in R polmer temu osemkotniku očrtanega kroga. Trikotnik AOH je eden takih trikotnikov. Konstruiramo višino HP na krak AO. Ker je $\sphericalangle AOH = 360^\circ : 8 = 45^\circ$ in kot pri P pravi, je tudi $\sphericalangle PHO = 45^\circ$. Nasproti enakim kotom leže enake stranice, zato je $\overline{HP} = \overline{OP}$. Označimo dolžino daljice OP s črko x; potem je $\overline{AP} = R - x$. Po Pitagorovem izreku za trikotnik HPO je seveda

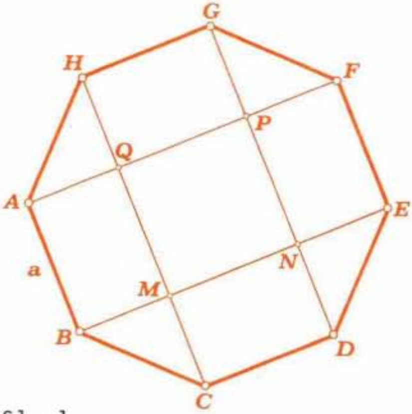
$$R^2 = x^2 + x^2$$

$$x = R\sqrt{2}/2$$

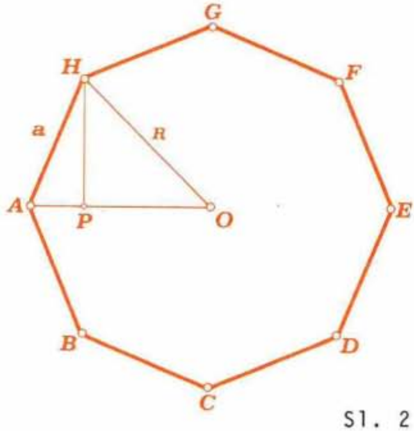
Nadalje je

$$\overline{AP} = R - R\sqrt{2}/2 = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})$$

Iz trikotnika APH pa po Pitagorovem izreku dobimo



Sl. 1



Sl. 2

$$\overline{AH}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PH}^2$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4}(2 - \sqrt{2})^2 + \frac{R^2}{2}$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4}(4 - 4\sqrt{2} + 1 + 2) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$R^2 = a^2/(2 - \sqrt{2}) = (a^2/2)(2 + \sqrt{2}) \qquad (1)$$

Ploščina trikotnika AOH je enaka $(1/2).\overline{AO}.\overline{PH} = (1/2).R.R\sqrt{2}/2 = R^2\ \overline{2}/4$, ploščina osemkotnika je osemkrat večja

$$P = 2R^2\sqrt{2} \qquad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi

$$P = 2.\frac{a^2}{2}(2 + \sqrt{2}).2 = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

Rezultat je seveda isti, kot smo ga dobili na prvi način.

NALOGI

1. Izrazi - brez uporabe trigonometrije - ploščino pravilnega osemkotnika s polmerom temu osemkotniku včrtanega kroga.

2. Dokaži, da je ploščina pravilnega osemkotnika enaka produktu njegove najkrajše in najdaljše diagonale!

Dragoljub M. Milošević

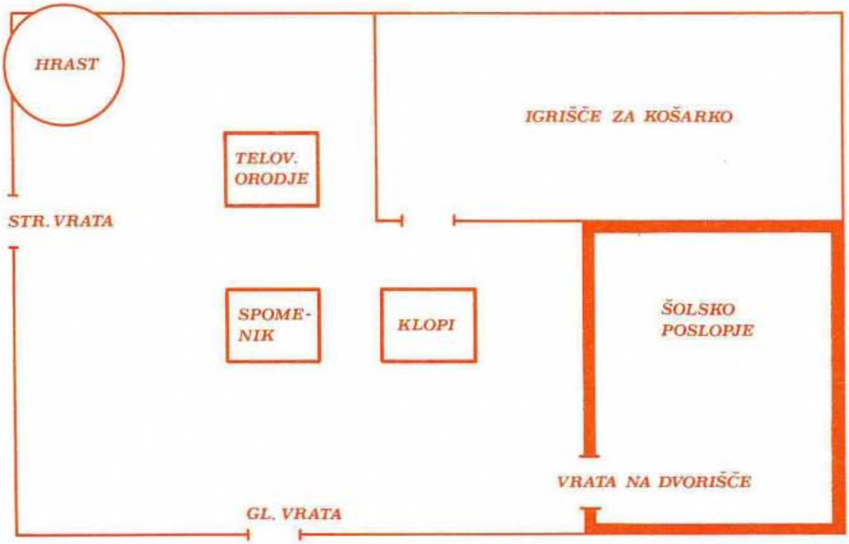
prevedel *Peter Petek*

NAJCENEJŠE DREVO

Pred kratkim so zgradili novo šolo. Lepo so jo opremili. Ko pa so postavili zadnjo klop v učilnico, je zmanjkalo denarja, okolica pa je bila še neurejena. Ravnatelj si je v obupu pulil redke lase na glavi, saj se je neusmiljeno bližal dan svečane otvoritve nove šole, okrog šole pa še kupi blata! Šoli pripada veliko dvorišče. Le kdo bi ga hitro in lepo uredil - pa še brez plačila?

Na pomoč so priskočili učenci! Na sestanku šolske skupnosti so se dogovorili, da bodo sami uredili dvorišče. Napravili so načrt (Slika 1).

Sklenili so, da bodo posejali travo. Postavili bodo *spomenik* - skulpturo, ki je na lanski občinski razstavi - še v stari šoli



Slika 1: Načrt šolskega dvorišča, ki so ga izdelali učenci na sestanku šolske skupnosti.

- dobila prvo nagrado. Kasneje bodo uredili *igrišče za košarko*. Stari *hrast* bo kot nalašč za plezanje. Postavili bodo tudi *telovadno orodje*: dva droga in kroge. V bližini zgradbe bo *skupina klopi*. Za dostop na dvorišče bodo uporabili že obstoječa *glavna* in *stranska* vrata in *vrata iz šolskega poslopja na dvorišče*.

Z delom so pohiteli in trava je že začela poganjati. Nenadoma so se učenci spomnili, da niso začrtali stezic. Stezice so nujno potrebne, saj bo drugače trava kmalu uničena. Ker je pesek drag, pa tudi delo je naporno, so se dogovorili, da bodo stezice napeljali, kar se da varčno. Nepotrebnim križiščem se bodo izognili, ker je ureditev križišč še posebej težavna.

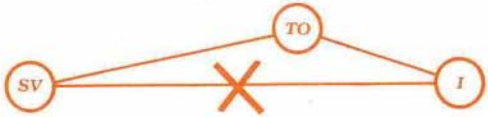
Povezati morajo spomenik, telovadno orodje, hrast, skupino klopi in košarkarsko igrišče z glavnimi in stranskimi vrati ter s šolskim poslopjem. Pri tem morajo seveda varčevati s peskom in svojimi močmi. Opazili so, da naloga ni lahka, zato so jo prepustili matematičnemu krožku, ki že vrsto let uspešno deluje na šoli.

Slika 2: Prvi načrt šolskega dvorišča, ki so ga izdelali krožkarji v sredo po pouku.

Matematiki so se sestali v sredo po pouku. Pred seboj so imeli jasno in uporabno nalogo. Dokončati morajo načrt. Naloga je bila zelo nenavadna in niso še srečali podobne. Zato so se je lotili z vso previdnostjo. Najprej so sliko poenostavili. Odmislili so si vse, kar je za reševanje nebistvenega. Narisali so nov načrt (Slika 2). Objekte na načrtu so takole označili:

zaporedna številka	oznaka	objekt
1	*H*	hrast
2	*I*	igrišče za košarko
3	*SV*	stranska vrata
4	*TO*	telovadno orodje
5	*S*	spomenik
6	*SK*	skupina klopi
7	*GV*	glavna vrata
8	*Š*	šola (vrata na dvorišče)

Tehle osem objektov je treba med seboj povezati. Povezali jih bodo seveda z ravnimi črtami, saj je ravna črta krajša od krive. Izbranim objektom so krožkarji rekli *točke*, stezicam, oziroma črtam med njimi pa *povezave*. Če bi povezali vsak par točk s stezico, bi potrebovali $8.7/2 = 28$ povezav. Eden od krožkarjev je rekel: "Seveda, če bi imeli n točk, bi potrebovali $n(n-1)/2$ povezav, toliko kot je v n-kotniku stranic in diagonal". Jasno je bilo, da vseh 28 stezic ne bodo potrebovali. Če bi namreč začrtali stezici od stranskih vrat do telovadnega orodja in od tam naprej do igrišča za košarko, tedaj ne potrebujejo stezice od stranskih vrat do košarkarskega igrišča! (Slika 3)



Slika 3: Nekatere od 28 možnih stezic so odveč.

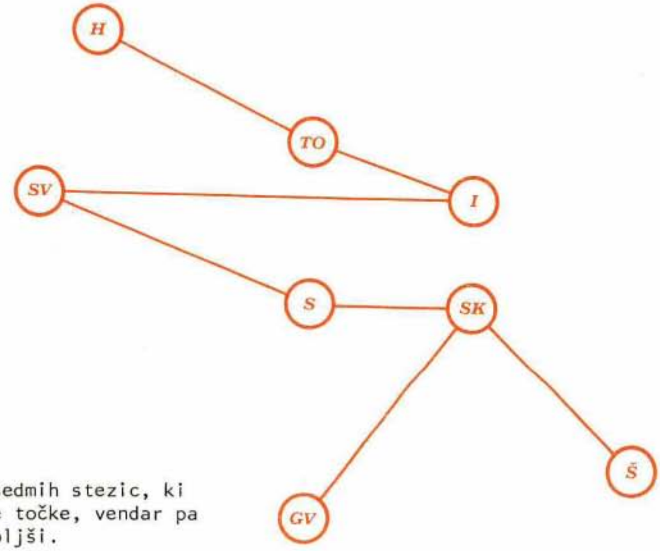
V dnevnik matematičnega krožka so zapisali: *Koliko (najmanj) povezav potrebujemo, da povežemo 8 točk v skupino? Koliko pove̲zav potrebujemo, da povežemo n točk?*

Po preizkušanju so se zedinili in svojo ugotovitev zabeležili:

Potrebujemo 7 povezav in v splošnem, če želimo povezati n točk, potrebujemo n-1 povezav. (Če bo čas, bomo to tudi dokazali.)

Obogateni z novim spoznanjem so se pogumno lotili načrtovanja "sistema stezic" na šolskem dvorišču. Načrt, ki so ga dobili, prikazuje slika 4.

Z načrtom pa niso bili zadovoljni. Opazili so, da ni najboljši. če bi stezico od stranskih vrat (SV) do košarkarskega igrišča (I) nadomestili s krajšo stezico od telovadnega orodja (TO) do spomenika (S), bi prihranili pesek in delo. Naloga, ki so jo reševali, je bila težja, kot so sprva menili. Zato so krožkarji poklicali na pomoč mentorja. Ko so ga seznanili s problemom, jim je povedal, da pravijo matematiki strukturam, sestavljenim iz točk in povezav *grafi*. če nosijo povezave *vrednosti* (npr. dolžine, cene, kapacitete), pa jih imenujejo *vrednostni*



Slika 4: Sistem sedmih stezic, ki povezuje točke, vendar pa ni najboljši.

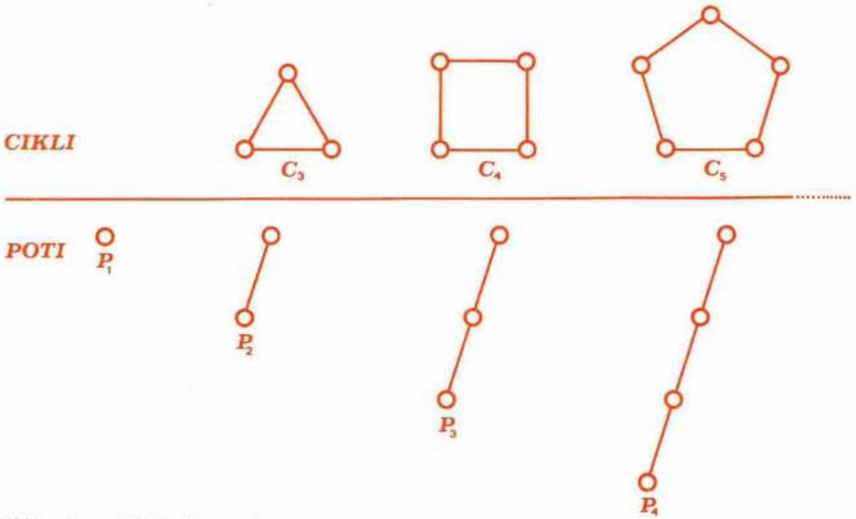
grafi ali *omrežja*. Krožkarje so začeli grafi zanimati. Mentor jim je naročil, naj si v šolski knjižnici ogledajo stare številke *Preseka* in naj poiščejo vse prispevke v zvezi z grafi. Sam pa je obljubil, da se bo pozanimal o rešitvi tega problema. Dogovorili so se za sestanek naslednji dan, saj je bilo le malo časa na razpolago.

Na četrtkov sestanek je predsednik krožka prinesel s seboj kopico Presekov. Našli so precej prispevkov, v katerih je mogoče zaslediti grafe.

Naslov članka	Letnik	Stran
SIM	P1/4	175
Problem iz igre SIM	P2/1	43
Labirint	P3/1 in	ovitek
	P3/3	ovitek
Uporovna vezja	P3/4	186
Naloge	P4/1 in	48
	P4/2	100
Problem o barvanju kart	P5/2	73
Nekaj o grafih in njihovi uporabi	P6/1	24
Matematika in šah	P6/2	71

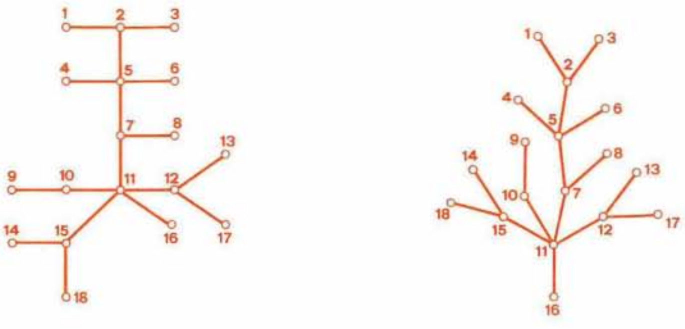
Mentor pa je v matematični knjižnici na Jadranski 19 v Ljubljani nabral nekaj knjig o grafih. Krožkarji so se takoj poglobili v študij grafov. Graf je *povezan*, če je mogoče iz poljubne točke v njem priti po povezavah v vsako drugo točko. Seveda so jih povezani grafi najbolj zanimali. Sošolci so jim zabičali, da ne marajo pohojene trave!

Kmalu so spoznali kup novih izrazov. Seznanili so se s *cikli*. Cikel dobimo, če vzamemo oglišča mnogokotnika za točke, stranice mnogokotnika pa za povezave grafa. Če izhajamo iz m-kotnika, dobimo C_m, *cikel na m točkah*. Če ciklu odstranimo povezavo, dobimo graf, ki mu rečejo *pot*. Iz C_m dobimo tako P_m, *pot na m točkah*. Cikel C_m ima m točk in m povezav, pot P_m pa ima m točk



Slika 5: Cikli in poti

Slika 6: Primer drevesa na 18 točkah. Narisali smo ga na dva načina.



in m-1 povezav. C_m in P_m sta povezana grafa. Pot P_m je le poseben primer drevesa. *Drevo* na m točkah je vsak povezan graf z m točkami in m-1 povezavami. Drevo ima zanimive lastnosti:

- če mu odvzamemo katerokoli povezavo, dobimo graf, ki ni povezan
- drevo ne vsebuje nobenega cikla
- če drevesu dodamo še kakšno povezavo, dobimo graf, ki vsebuje cikel.

če si drevesa narišemo, opazimo, da spominjajo na prava drevesa, od tod tudi "čudno" ime, ki ga nosijo (Slika 6).

Krožkarji so zdaj dokončno razumeli, kaj pravzaprav iščejo. Na izbranih osem točk morajo napeti drevo, tako da bo *cena*, to je vsota dolžin vseh sedmih povezav, najmanjša. Mentor je v neki knjigi našel ta problem z imenom: *problem najcenejšega drevesa*. Zraven je bila tudi splošna rešitev tega problema, ki jo je leta 1957 našel R. Prim in se po njem imenuje *Primov postopek (algoritem)* za konstrukcijo najcenejšega drevesa. Primov postopek gradi najcenejše drevo po korakih. Začne s poljubno točko, potem pa vsakič doda točko in povezavo, dokler ne poveže vseh točk med seboj.

PRIMOV POSTOPEK: Na začetku imamo n točk v ravnini. Noben par točk ni med seboj povezan. Na koncu dobimo najcenejše drevo.

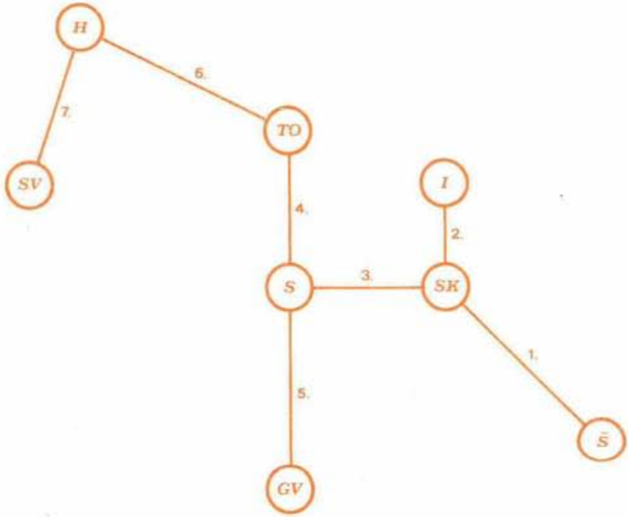
1. korak: Izberi poljubno točko. Imenuj jo *povezani del*. Preostale točke imenuj *nepovezani del*.
2. korak: Dokler je nepovezani del neprazen, ponavljaj:
   - 2.1: V povezanem delu izberi točko x, v nepovezanem delu pa točko y tako, da bo razdalja med njima najmanjša.
   - 2.2: Poveži x in y s povezavo in prenesi y iz nepovezanega dela v povezani del.

Učenci so temeljito premislili delovanje tega postopka in so se lotili dela. Natančno so izmerili razdalje med posameznimi točkami. Izmerjene razdalje so vnesli v razpredelnico:

	H	*I*	*SV*	*TO*	*S*	*SK*	*GV*	*Š*
H	-	7,62	3,16	4,47	6,40	8,60	9,85	12,81
I	7,62	-	8,00	3,16	3,61	2,00	6,71	5,83
SV	3,16	8,00	-	5,10	5,39	8,25	7,81	12,08
TO	4,47	3,16	5,10	-	3,00	4,24	7,00	8,49
S	6,40	3,16	5,39	3,00	-	3,00	4,00	6,71
SK	8,60	2,00	8,25	4,24	3,00	-	5,00	4,24
GV	9,85	6,71	7,81	7,00	4,00	5,00	-	6,08
Š	12,81	5,83	12,08	8,49	6,71	4,24	6,08	-

Za začetno točko (glej 1. korak Primovega postopka!) so si izbrali šolo (*Š*). V povezanem delu je sedaj samo šola. Iz zadnje vrstice razpredelnice se lepo vidi, da je *SK* najbližje *Š*, zato so dodali povezavo med šolo in skupino klopi. V novem povezanem delu sta sedaj šola in skupina klopi (2. korak postopka). Najbližje šoli ali skupini klopi je igrišče... Celotni potek postopka prikazuje naslednja razpredelnica:

Zaporedna številka	Povezani del	Nepovezani del	Točka x		Točka y	Razdalja
1.	*Š*	*SK,I,S,GV,TO,H,SV*	*Š*	-	*K*	4,24
2.	*Š,SK*	*I,S,GV,TO,H,SV*	*SK*	-	*I*	2,00
3.	*Š,SK,I*	*S,GV,TO,H,SV*	*SK*	-	*S*	3,00
4.	*Š,SK,I,S,*	*GV,TO,H,SV*	*S*	-	*TO*	3,00
5.	*Š,SK,I,S,TO,*	*GV,H,SV*	*S*	-	*GV*	4,00
6.	*Š,SK,I,S,TO,GV*	*H,SV*	*TO*	-	*H*	4,47
7.	*Š,SK,I,S,TO,GV,H*	*SV*	*H*	-	*SV*	3,16
-	*Š,SK,I,S,TO,GV,H,SV*		-	-	-	---



Slika 7: Dokončni načrt šolskega dvorišča. Skupna dolžina stezic je 23,87. To je najboljša rešitev.

Vsota dolžin vseh stezic v drevesu je:

4,24 + 2,00 + 3,00 + 3,00 + 4,00 + 4,47 + 3,16 = 23,87 enot.

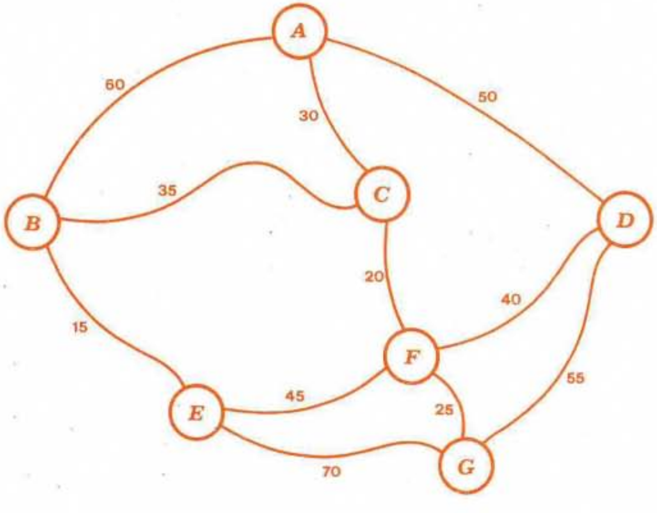
To je cena najcenejšega drevesa. Učenci so se prepričali, da bi dobili isto drevo, če bi začeli s kakšno drugo točko, le povezave bi vstopale vanj v drugačnem vrstnem redu.

Krožkarji so napravili dokončni načrt (slika 7). Številke pri povezavah povedo, po kakšnem vrstnem redu so se odločali zanje.

Mladi matematiki so bili z rešitvijo zadovoljni, saj so opravili koristno delo: sebi in sošolcem so prihranili napor, šoli pa denar. Tu je naše zgodbe konec. Ni pa še konec uporabe Primovega postopka.

Oglejmo si soroden problem. Na sliki 8 je narisano cestno omrežje, ki povezuje kraje A, B, C, D, E, F in G.

Telefonsko podjetje se je namenilo povezati mesta v telefonsko omrežje. Zaradi lažjega vzdrževanja so se odločili, da bodo te

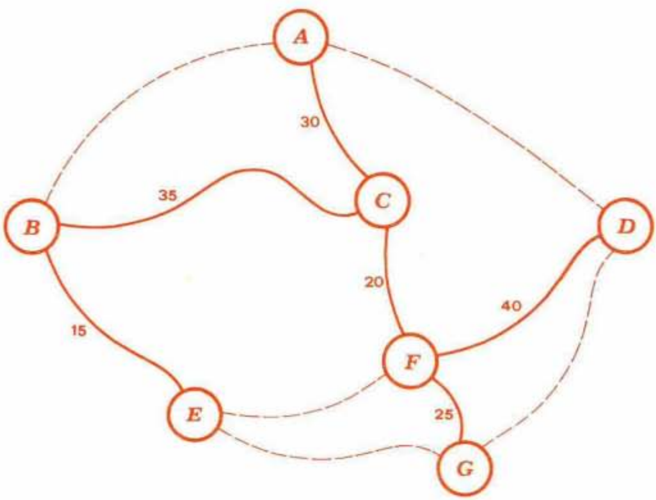


Slika 8: Cestno omrežje. Številke ob cestah pomenijo razdalje.

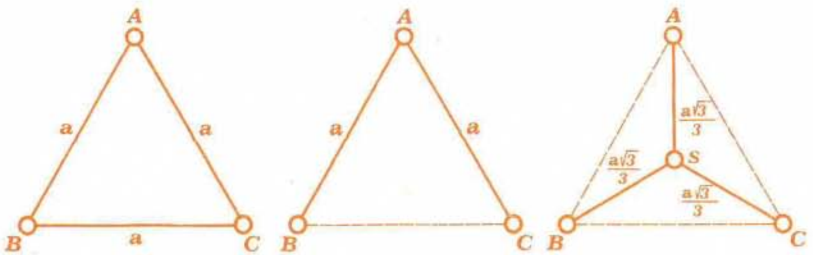
lefonski kabli potekali ob obstoječih cestah. Spet je treba poiskati najcenejše omrežje, spet je tu problem najcenejšega drevesa. Naloga je le malo drugačna od prve. Zdaj moramo namreč poiskati najcenejše drevo na že *obstoječem* vrednostnem grafu. V drevo smemo vključiti le obstoječe povezave. Tako npr. ne smemo napeljati kabla neposredno od mesta A do mesta G. Primov postopek pa deluje pravilno tudi v tem primeru. Slika 9 nam kaže najcenejše drevo. Telefonsko podjetje bo potrebovalo 165 km kabla.

Primov postopek nam v povezanem grafu v vsakem primeru poišče najcenejše drevo. Če ima več povezav v grafu isto ceno (vrednost), se lahko zgodi, da obstaja več najcenejših dreves. Postopek nam v tem primeru izbere eno od njih.

V resnici je prva naloga le poseben primer druge. Če imamo namreč n točk v ravnini in poljubni dve med njimi povežemo z daljico, dobimo *polni graf* K_n na n točkah. Povezave (skupaj jih je $n(n-1)/2$) nosijo vrednosti, ki so v tem primeru kar dolži-



Slika 9: Načrt za napeljavo telefonskih kablov. Skupna dolžina kabla je 165 km.



Slika 10: Primov postopek najde v grafu (1) najcenejše drevo (2) dolžine $2a$, medtem ko je mogoče dodati točko S v središču trikotnika ABC in dobiti cenejše, Steinerjevo drevo z dolžino $1{,}73a$ (3).

ne daljic. V drugi nalogi imamo opravka s splošnim grafom, v katerem vrednosti povezav niso nujno dolžine daljic.

Če pazljivo preberete začetek tega prispevka, boste opazili, da smo rekli, da v omrežju stezic na šolskem dvorišču ne želimo *nepotrebnih križišč* . S tem smo križišča omejili na že obstoječe točke. Brez tega pogoja dobimo namreč drugo nalogo, nalogo o *Steinerjevem drevesu*. Razliko med obema nalogama si bomo ogledali na posebnem primeru. Za točke vzemimo oglišča enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice a. S Primovim postopkom dobimo enega od treh minimalnih dreves z dolžino $2a$. Če pa dopustimo dodatne točke, dobimo lahko cenejše, Steinerjevo drevo s ceno (dolžino) $\sqrt{3}a = 1{,}73a$ (glej sliko 10).

Za konec povejmo le tole žalostno dejstvo. Doslej matematikom še ni uspelo najti učinkovitega postopka za iskanje Steinerjevega drevesa v splošnem primeru. Vse kar je do slej znanega o tem problemu, daje celo slutiti, da učinkovitega postopka za ta problem sploh *ni* !

Tomaž Pisanski

KAJ MANJKA V LEIBNIZOVEM* DOKAZU ?

Naslednji odstavek je vzet iz dela Frege**, Die Grundlagen der Arithmetik, 1884:

Drugi filozofi in matematiki pa so trdili, da so numerične formule dejansko dokazljive. Tako Leibniz pravi:

"Ni neposredna resnica, da je 2 in 2 enako 4; ob pogoju, da 4 označuje 3 in 1. To lahko dokažemo takole:

Definicije: (1) 2 je 1 in 1
(2) 3 je 2 in 1
(3) 4 je 3 in 1

Aksiom: če nekaj zamenjamo z enakim, enakost ostane.

Dokaz: $2 + 2 = 2 + 1 + 1$ (po def 1) $= 3 + 1$ (po def 2)
$= 4$ (po def. 3).
$2 + 2 = 4$ (po aksiomu)."

Tale dokaz se zdi na prvi pogled sestavljen le iz zgornjih definicij in aksioma. Aksiom pa se da spremeniti v definicijo, kar Leibniz pokaže v drugem oddelku. Toda če bolje pogledamo, najdemo luknjo v dokazu, ki je nastala zaradi opustitve oklepajev. če bi hoteli biti strogi, moramo pisati:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Kar je zgoraj izpuščeno, je

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

to pa je poseben primer zakona

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Tega asociativnega zakona pa Leibniz ne navaja.

Izidor Hafner

* G.W. Leibniz (1646-1716), nemški filozof in matematik
** G. Frege (1848-1925), nemški logik

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

MNOŽENJE - TOKRAT NEKOLIKO DRUGAČE

Minili so časi, ko so se morali učenci pri matematiki naučiti brezhibno kvadrirati, kubirati, koreniti. Posebno težavno je bilo računanje kubičnega korena. Menda bi malokdo od tistih, ki so obiskovali šolo pred dvema, tremi desetletji, pa se pozneje niso več posebej ukvarjali z matematiko, danes še znal izračunati kvadratni, kaj šele kubični koren poljubnega naravnega števila. Danes se v šoli poslužujemo pripomočkov: tabel, računalnikov. Učenci osnovnih in srednjih šol največ uporabljajo "Logaritme in druge tabele" (uredil S. Uršič). Tabela 2 navedenega priročnika vsebuje na straneh 2-7 za vsako naravno število $n < 1000$ vrednost kvadrata, kuba, kvadratnega korena, kubičnega korena, ter obseg in ploščino kroga, katerega premer meri n. Za praktičnega računarja vsekakor zelo koristno! Posebno dobro nam služita funkciji kvadratni in kubični koren, ker se prvega v šoli le malo, drugega se pa sploh ne učimo.

Pokazati bi hotel, kako se da iz stolpca n^2 posredno odčitati oziroma izračunati produkt naravnih števil a in b, če je le $a + b < 2000$. Preprost račun namreč pokaže, da je

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = a.b$$

Produkt $a.b$ dobimo torej tudi tako, da izračunamo najprej polovično vsoto in polovično razliko obeh števil, v tabeli odčitamo kvadrate le-teh in poiščemo razliko kvadratov.

PRIMER: $1276 \cdot 538 = x$ $(1276 + 538 < 2000)$

$$x = \left(\frac{1276 + 538}{2}\right)^2 - \left(\frac{1276 - 538}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1814}{2}\right)^2 - \left(\frac{738}{2}\right)^2$$
$$= 907^2 - 369^2 \quad \text{(odčitamo iz tabele)}$$
$$= 822649 - 136161$$
$$= 686488$$

Nič nas ne moti, če je morda razlika $a - b$ negativna, saj je kvadrat vselej pozitivno število, pa tudi pravilo o zamenljivosti faktorjev poznamo.

Polovična vsota ali polovična razlika števil a in b je naravno število le, če sta obe števili hkrati sodi ali lihi. Kaj pa, če je eno število sodo, drugo pa liho?

Ker je $a.b = (a - 1).b + b$, računamo

$$a.b = \left(\frac{a - 1 + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - 1 - b}{2}\right)^2 + b$$

PRIMER: $643 \cdot 1184 = x$

$$x = \left(\frac{643 - 1 + 1184}{2}\right)^2 - \left(\frac{643 - 1 - 1184}{2}\right)^2 + 1184$$
$$= \left(\frac{1826}{2}\right)^2 - \left(\frac{-542}{2}\right)^2 + 1184$$
$$= 913^2 - (-271)^2 + 1184 \quad \text{odčitamo iz tabele}$$
$$= 833569 - 73441 + 1184$$
$$= 761312$$

Namesto *množenja* imamo torej opraviti s *seštevanjem, odštevanjem*, *deljenjem z 2* in s *kvadriranjem* (ki ga odčitamo iz tabele). Poglejmo še, kako bi se dalo shajati brez deljenja. Produkt naravnih števil $a.b$ moremo vselej zapisati kot vsoto kvadratov naravnih števil.

Vzemimo, da je v produktu naravnih števil $a.b$ število a manjše od števila b. V tem primeru zapišemo $b = a + (b - a)$, pa imamo:

$$a \cdot b = a \cdot (a + (b - a))$$
$$= a^2 + a \cdot (b - a)$$

Produkt $a \cdot (b - a)$ razčlenimo kot prej in tako delamo vse dotlej, dokler ne postane eden od faktorjev enak 1 ali 0.

PRIMER:
$$\begin{aligned}
257 \cdot 413 &= 257 \cdot (257 + (413 - 257)) \\
&= 257^2 + 257 \cdot 156 \\
257 \cdot 156 &= 156^2 + 101 \cdot 156 \\
101 \cdot 156 &= 101^2 + 55 \cdot 101 \\
55 \cdot 101 &= 55^2 + 46 \cdot 55 \\
46 \cdot 55 &= 46^2 + 9 \cdot 46 \\
9 \cdot 46 &= 9^2 + 37 \cdot 9 \\
37 \cdot 9 &= 9^2 + 28 \cdot 9 \\
28 \cdot 9 &= 9^2 + 19 \cdot 9 \\
19 \cdot 9 &= 9^2 + 10 \cdot 9 \\
10 \cdot 9 &= 9^2 + 1 \cdot 9 \\
1 \cdot 9 &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
257 \cdot 413 &= 257^2 + 156^2 + 101^2 + 55^2 + 46^2 + 9^2 + 9^2 + \\
&+ 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9 \qquad \text{(vrednosti kvadratov odčitamo iz tabele)} \\
&= 66049 + 24336 + 10201 + 3025 + 2116 + \\
&+ 81 + 81 + 81 + 81 + 81 + 9 \\
&= 106141
\end{aligned}$$

PRIMER:
$$\begin{aligned}
8 \cdot 6 &= 6^2 + 6 \cdot 2 \\
6 \cdot 2 &= 2^2 + 4 \cdot 2 \\
4 \cdot 2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \\
2 \cdot 2 &= 2^2 + 0 \cdot 2 = 2
\end{aligned}$$

$$8 \cdot 6 = 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 36 + 4 + 4 + 4 = 48$$

Tabela kvadratov do 1000 služi pri tem postopku vselej, kadar vsaj en faktor ne presega števila 999.

Ne mislim, da bomo odslej množili na ta način; zanimivo pa vse kakor je! Poskusite!

Stanislav Horvat

SPOPAD Z VELIKANOM

Če je neko število tako veliko, da si ga na noben način ni mogoče predstavljati, to še ne pomeni, da mu nikakor in v ničemer nismo kos. Izračunajmo na primer število:

$$N = 1 + 20 + 20^2 + \ldots + 20^{35} \qquad (1)$$

Nič lažjega - porečete - vsak boljši žepni računalnik računa potence do 10^{100}. Delo si lahko olajšamo z znano zvijačo: pomnožimo (1) z 20 in dobimo

$$20\,N = 20 + 20^2 + 20^3 + \ldots + 20^{36} \qquad (2)$$

nakar odštejemo (1) od (2): $20N - N = 20^{36} - 1$, odkoder dobimo

$$N = (20^{36} - 1)/19$$

Nekajkrat pritisnemo na tipke žepnega računalnika in naloga je rešena. "Bojim se, da se nismo prav razumeli. Ko sem namreč rekel *izračunajmo N*, sem imel v mislih: *izračunajmo prav vse števke števila N*." Žepni računalnik mi da v najboljšem primeru 10 števk, in sicer

$$N \approx 3{,}616814565 . 10^{45} \qquad (3)$$

število samo pa, kot priča 10^{45}, sestoji iz 46 števk. Le odkod mi bo ostalih 36 števk?

Na pomoč bom poklical zaveznika: ulomek 1/19. Spremenil ga bom v decimalno število, ki je, kot je bralcu dobro znano, periodično. Skupina števk - *perioda* - se bo v njem ponavljala v neskončnost. Enostavno deljenje mi da

$$1/19 = 0{,}052631578947368421052631578947368421\ldots$$

Perioda P = 052631578947368421 sestoji iz 18 števk.

Takoj za prvim korakom bomo naredili drugega. Koliko je $10^{18}/19$? Decimalno vejico moramo pomakniti za 18 mest proti desni, tako pa dobimo prav celo periodo, zato:

$$10^{18}/19 = P,P \ldots \text{ in prav tako } 10^{36}/19 = PP,P \ldots$$

ter končno

$$M = 10^{36}/19 - 1/19 = PP$$

Izračunajmo sedaj $N - M$!

$$N - M = (20^{36} - 1)/19 - (10^{36}/19 - 1/19) =$$
$$= 2^{36}.10^{36}/19 - 1/19 - 10^{36}/19 + 1/19 =$$
$$= (2^{36} - 1).10^{36}/19$$

$N - M$ pa je celo število, zato se 19 v imenovalcu *mora* krajšati. Z 10^{36} se očitno ne, zato pa se krajša z $2^{36} - 1$. Toda to pomeni, da se $N - M$ končuje na 36 ničel $|10^{36}|$. Nadalje to pomeni, da ima N zadnjih 36 številk popolnoma enakih zadnjim 36 številkam števila M, torej PP.

Preostane samo še, da tako dobljeni zadnji konec "zvarimo" z začetnim koncem iz (3), pa dobimo

$$N = 3616814565\underset{\uparrow}{0}52631578947368421\underset{\uparrow}{0}52631578947368421$$

To pa je vseh 46 števil iskanega števila.

Karel Bajc

V A S   L A R E

Vaščani Lar se delijo na *resnicoljube*, ki vedno govore resnico in *lažnivce*, ki zmeraj lažejo. Razen tega se nekaterim resnicoljubom reče *preverjeni resnicoljub*, nekaterim lažnivcem pa *preverjeni lažnivec*. Vaščani so ustanovili različna društva. Vsak vaščan je lahko član v več društvih. Znano je še, da veljajo naslednji pogoji:

P1: Množica vseh preverjenih resnicoljubov je društvo.

P2: Množica vseh preverjenih lažnivcev je društvo.

C : če je *D* katerokoli društvo, potem je množica vaščanov, ki niso člani društva *D*, tudi društvo. (To društvo je komplement društva *D* in ga označujemo z $\overline{D}$).

G : Za vsako društvo lahko najdemo vsaj enega vaščana, ki trdi, da je član tega društva. (Seveda je njegova trditev lahko napačna, lahko je namreč lažnivec.)

Problemi:

1. Dokaži, da je med vaščani vsaj en nepreverjeni resnicoljub.
2. Dokaži, da je med vaščani vsaj en nepreverjeni lažnivec.
3. Ali je množica vseh lažnivcev društvo?
4. Ali je množica vseh resnicoljubov društvo?

Po Smullyanu priredil *Izidor Hafner*

SE PONAVLJA, SE PONAVLJA, SE PONAVLJA ...

Izračunaj

1 : 11

1 : 101

1 : 1001

1 : 10001

. . .

Skratka, za vsak *m* zapiši $1 : (10^m + 1)$ z decimalkami! Določi *periodo*, t.j. skupino decimalk, ki se ponavlja. Kaj opaziš?

Peter Petek

KAKO DOKAZATI KARKOLI

(1) $1 = 2$

(2) OBE TRDITVI V TEM OKVIRU STA NAPAČNI

Če je trditev (2) resnična, potem sta obe trditvi v okviru napačni, torej tudi stavek (2), kar pa je protislovje. Stavek (2) je torej napačen, kar pomeni, da je vsaj ena izmed zgornjih trditev pravilna. Ker pa je trditev (2) napačna, mora biti trditev (1) pravilna, to je $1 = 2$.

Izidor Hafner

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
7. letnik, šolsko leto 1979/80, 4. številka, str. 193 - 256

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupinska pa 32.-din; za inozemstvo 3 \$ = 60.-din, 2500Lit, 45.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost Slovenije in raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja petkrat letno v nakladi 23.000 izvodov.

NALOGE-TEKMOVANJA

10. ZVEZNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA UČENCE OSNOVNIH ŠOL

Na 10. zveznem tekmovanju iz matematike, ki ga je organiziral "Matematički list" iz Beograda, se je 3. junija 1979 zbralo v Ohridu 74 mladih iz vseh jugoslovanskih republik in AP Vojvodine; od tega jih je bilo 30 iz 7., 44 pa iz 8. razredov. Slovenijo je zastopalo 9 mladincev, in sicer: iz 7. razreda naš edini zastopnik Stanko Gruden, OŠ Spomenik NOV, Cerkno, iz 8. razredov pa naslednji učenci: Mitja Bensa, OŠ M. Štrukelj, N. Gorica, Robert Bakula, OŠ Prežihov Voranc, Ljubljana, Ana Pribaković, OŠ M. Vrhovnik, Ljubljana, Polona Blaznik, OŠ M. Jarc, Ljubljana, Robi Rodošek, OŠ Prežihov Voranc, Maribor, Boris Medica, OŠ R. Jakopič, Ljubljana, Aleksej Turnšek, OŠ M. Vrhovnik, Ljubljana, Simona Čufer, OŠ A. Linhart, Radovljica.

Naša ekipa je med 7 ekipami dosegla 49,33% vseh možnih točk in tako zasedla 2. mesto. Med posamezniki pa so se najbolje odrezali:
v 7. razredu Vesna Milošević iz Trstenika, SR Srbija in Mirna Džamonja iz Sarajeva, ki sta prejeli prvo nagrado. Naš najmlajši in menda tudi najmanjši tekmovalec Stanko Gruden se je uvrstil na 9.-11. mesto in prejel tretjo nagrado. V 8. razredu je bil najboljši Nikola Miljković iz Beograda. Naša tekmovalca Mitja Bensa in Robert Bakula sta se uvrstila na 5. oz. 7. mesto in dobila drugo nagrado, Ana Pribaković in Polona Blaznik sta se uvrstili na 12. oz. 13 mesto in prejeli tretjo nagrado. Vsi tekmovalci so razen tega dobili še ustrezno knjižno darilo in posebno priznanje za sodelovanje. Pa so si ga tudi zaslužili, saj so šli pred tem skozi več rešet: šolsko, občinsko in

republiško tekmovanje, in vsako naslednje rešeto je bilo gostejše! Po 2 do 4 najboljše tekmovalce iz vsake republike je povabil organizator v štirinajstdnevno letno matematično šolo, kjer je bilo koristno združeno s prijetnim. Mladim tekmovalcem bo ostalo potovanje v Ohrid in dvodnevno bivanje v tem mestecu v prijetnem spominu. Naši so poleteli v Ohrid z letalom naravnost z Brnikov in se po isti poti tudi vrnili, kar je bilo za marsikaterega posebno doživetje. Gostitelji so jim prvi dan razkazali kulturne in zgodovinske spomenike Ohrida, po tekmovanju pa so jih popeljali z ladjo po jezeru prav do Sv. Nauma. Mladi vseh jugoslovanskih narodov so med seboj navezali nove prijateljske stike.

Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

7. razred

1. Strelec strelja v meto in dobi za vsak uspešen zadetek 5 točk, a za vsak zgrešen strel se mu odbijejo 3 točke. Ker je imel strelec očitno slab dan, je dosegel po seriji strelov, ki jih je bilo več kot 10 in manj kot 20, natanko 0 (nič) točk. Koliko strelov je bilo v seriji in koliko je bilo uspešnih?
2. Naravno število a ni deljivo s številom 5. Določi ostanek, ki ga dobimo pri deljenju števila a^4 s številom 5 (pet)!
3. Izračunaj vrednost izraza:

$$A = \frac{1.2.4 + 2.4.8 + 3.6.12 + \ldots + 100.200.400}{1.3.9 + 2.6.18 + 3.9.27 + \ldots + 100.300.900}$$

4. V raznostraničnem štirikotniku $ABCD$ se sekata diagonali AC in BD v točki O. Ploščini trikotnikov ΔADO in ΔBCO sta enaki. Dokaži, da je dani štirikotnik trapez!
5. Nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika je načrtan kvadrat, ki ne vsebuje vrha pravega kota danega trikotnika. Dokaži, da poteka simetrala pravega kota danega trikotnika skozi središče kvadrata!

8. razred

1. Na svečani večerji je bilo naročeno gostitelju, da razporedi ob okrogli mizi 4 moške in določeno število žensk tako, da nobena ženska ne sedi poleg druge ženske in da je nasproti (diametralno) vsake osebe oseba nasprotnega spola. Ali je mogel gostitelj napraviti tak razpored? Utemelji odgovor!

2. Na kolesarski dirki vozita vzporedno na čelu kolone Matjaž in Primož, ki sta se toliko odmaknila od ostalih tekmovalcev, da ju nihče več ne more dohiteti. 20 km pred ciljem poči Matjažu zračnica, a Primož nadaljuje vožnjo do cilja s poprečno hitrostjo 40 km/h. Matjaž je zaradi popravila zračnice izgubil 3 minute časa in je potem do cilja vozil s poprečno hitrostjo 45 km/h. Kdo je zmagal na dirki in s koliko metri prednosti?

3. Dan je izraz

$$\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$$

če je $x = 361979$, $z = 561980$, določi vse vrednosti za y, za katere ima dani izraz najmanjšo možno vrednost!

4. Premice: $x - y = -1$; $x + y = 8$; $x - 2y = 2$ in obe koordinatni osi oklepajo petkotnik. Določi prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem tega petkotnika okrog abscisne osi!

5. Trapezova ploščina meri 80 cm^2, dolžina višine pa 8 cm. Razpolovišče srednjice je oddaljeno od enega kraka 3 cm in od drugega 4 cm. Izračunaj dolžino osnovnic tega trapeza!

Stanislav Horvat

PRESEKOV ŠKRAT

V 6. številki presekove knjižnice π je prišlo na predzadnji strani ovitka do pomote. Recenzent knjižice je Janez Strnad in ne Branko Borštnik, kot je bilo pomotoma zapisano. Uredništvo se obema iskreno opravičuje.

Ciril Velkovrh

POLETNA ŠOLA ZA MLADE MATEMATIKE

Že nekaj let zapored organizira Društvo matematikov in fizikov SR Hrvatske poletno šolo za mlade matematike - srednješolce iz vse Jugoslavije. Mladi nadebudneži se teden dni seznanjajo z zahtevnejšimi poglavji srednješolske matematike kot tudi s tistimi, o katerih pri rednem pouku ne slišijo nič ali pa le malo. Dijake, ki se udeležijo te šole, predlagajo tekmovalne komisije republiških društev. Šola je namenjena predvsem tistim učencem iz nižjih razredov, ki so se izkazali na republiških tekmovanjih. V Sloveniji smo tako upoštevali pri izboru tiste najboljše dijake, ki jih nismo mogli uvrstiti v ekipo za zvezno tekmovanje. Letos je bila poletna šola v Primoštenu od 22. do 30. julija. O svojih vtisih nam naši predstavniki pišejo takole:

Gorazd Lešnjak

Lep pozdrav iz Primoštena! V tem lepem turističnem mestu ob morju med Šibenikom in Splitom Društvo matematikov vsako leto organizira letno matematično šolo. Letos smo se je iz Slovenije udeležili: Nataša Bizjak iz Nove Gorice, Samo Lazar iz Maribora, Goran Turk iz Kopra in Darko Černe iz Ljubljane.

Predavanja imamo vsak dan (o logiki, geometrijskih neenačbah in transformacijah). Marsikdo bo pomislil, da matematika in morje sploh ne gre skupaj. Dejansko pa ni tako hudo. Navsezadnje lahko tudi matematiko malo potopiš v morje.

Organizacija je dobra, samo na začetku, kot povsod, je bilo nekaj težav. Spimo v kampu Esperanto v šotorih, ki bi jih že malo močnejši veter odnesel. Sicer pa pregovor pravi: konec dober, vse dobro.

Za zaključek pa še nekaj za najbolj zagrizene matematike. Dan je trikotnik ΔABC, včrtaj in očrtaj krog. Dokaži neenakost $R \geq 2r$, kjer je r polmer včrtanega kroga, R pa polmer očrtanega kroga!

Darko Černe

O XXI. MEDNARODNI MATEMATIČNI OLIMPIADI

Letos je bila Mednarodna matematična olimpiada (MMO) v Veliki Britaniji. Kot že vrsto let je na njej sodelovala tudi Jugoslavija.

Naša ekipa je bila sestavljena na podlagi rezultatov 20. zveznega tekmovanja matematikov srednješolcev in nato še izbirnega tekmovanja v Novem Sadu. Vanjo so bili izbrani: iz 2. razreda Nina Ležaić iz Beograda, iz 3. razreda Boban Veličković in Predrag Tanović, oba iz Beograda, Gordan Savin iz Zagreba, Marjan Gušev iz Skopja in Leon Matoh iz Novega mesta, iz 4. razreda pa Romeo Meštrović iz Mostarja in Danko Jocić iz Foče. Ker je na pripravah zbolel Marjan Gušev, ga je zamenjal Dražen Borković iz Beograda.

Olimpiada se je odvijala v času od 1. do 10. julija 1979. Dva tedna pred začetkom olimpiade smo se člani ekipe zbrali v Beogradu, kjer smo imeli običajne priprave, ki so jih vodili profesorji z Matematične gimnazije v Beogradu.

31. junija smo odpotovali iz Beograda v London, kjer se je odvijal tekmovalni del olimpiade. Z nami sta odpotovala Vladimir Janković in Dragoslav Ljubić, vodji naše ekipe.

Na olimpiadi je sodelovalo 22 držav. Tu so bili najboljši matematiki iz Avstrije, Belgije, Bolgarije, Brazilije, Češkoslovaške, DR Nemčije, DR Vietnama, Finske, Francije, Grčije, Izraela, Kube, Madžarske, Nizozemske, Poljske, Romunije, ZR Nemčije, SSSR, Švedske, Velike Britanije in ZDA.

Naloge smo reševali 2. in 3. julija in to vsak dan tri naloge, za kar smo imeli na razpolago časa po štiri ure. Po vsakodnevnem tekmovanju smo vedno diskutirali o nalogah, igrali šah, nogomet, go ali pa si kako drugače krajšali čas.

Po končanem tekmovanju so za nas pripravili zelo pisan program izletov. Tako smo si ogledali razne znamenitosti Londona in bližnje okolice. Poleg vsega pa nam je ostalo obilo prostega časa, ki smo ga porabili za nakupovanje in ogledovanje mesta. Najbolj nas je pritegnil Hyde park, kjer smo tudi poslušali govornike, ki so tedaj v njem govorili čez vse in proti vsemu, kar se je le dalo.

V petek, 6. julija so razglasili rezultate. Najbolje so se odrezali Vietnam, SSSR, ZR Nemčija in Romunija. Vendar je vse to neuradno, kajti tekmovanje je mišljeno posamično in ne ekipno. Jugoslavija je bila deseta s solidnimi 172 točkami. Med našimi so bili najboljši Boban Veličković, ki je dobil drugo nagrado in Danko Jocić, Gordan Savin, Predrag Tanović in Romeo Meštrović, ki so dobili tretjo nagrado.

Po končani podelitvi smo vsi skupaj odšli v Oxford in si ogledali še znamenitosti tega mesta. Na izlet pa smo odšli še v Strattford, rojstno mesto Williama Shakespeara. V Oxfordu je bila tudi poslovilna večerja, ki jo je priredil organizator.

S tekmovalci iz drugih držav smo se zelo dobro razumeli. Pogovarjali smo se največ v angleščini, pa tudi v drugih jezikih smo se kar dobro znašli. Prepričan sem, da bo olimpiada vsem ostala v zelo prijetnem spominu, saj smo videli toliko čudovitih stvari in smo živeli v kar najbolj prijetnem okolju.

Na olimpiadi so bile naslednje naloge:

1. Naj bosta p in q naravni števili, takšni da je

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

   Dokaži, da je število p deljivo s 1979.

2. Dana je petstrana prizma z oglišči $A_1A_2A_3A_4A_5$ in $B_1B_2B_3B_4B_5$. Vse stranice osnovnih ploskev in vse daljice A_iB_j $(i,j = 1,2,3,4,5)$ so obarvane z rdečo ali zeleno barvo, tako da v vsakem trikotniku, katerega stranice so obarvane, obstajata dve, ki sta obarvani z različnima barvama. Dokaži, da je vseh deset osnovnih stranic obarvanih z isto barvo.

3. V ravnini sta dana dva kroga l_1 in l_2, ki se sekata. Naj bo A ena od presečnih točk. Po krogih l_1 in l_2 se iz točke A naenkrat začneta gibati točki M_1 in M_2. Točki se gibljeta po svojih krožnicah s stalnima hitrostma, ne da bi menjali smer. Gibljeta se v isti smeri. Točki M_1 in M_2 naenkrat prepotujeta vsaka svoj krog in se znova srečata v točki A. Dokaži, da v ravnini obstaja negibna točka P, ki je v vsakem trenutku enako oddaljena od točk M_1 in M_2.

4. Dana je ravnina Π, točka P v tej ravnini in točka Q izven nje. Poišči vse točke R v ravnini Π, za katere je količnik $(\overline{QP} + \overline{PR})/\overline{QR}$ največji.

5. Poišči vsa realna števila a, za katera obstajajo nenegativna števila x_1, x_2, x_3, x_4 in x_5, ki zadoščajo relacijam:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2$$
$$x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3$$

6. Naj bosta A in E dve nasprotni oglišči pravilnega osmerokotnika. V oglišču A se nahaja žaba. Z vsakega oglišča osmerokotnika lahko žaba skoči na sosednje oglišče. Izjema je oglišče E, na katerem žaba po skoku obstane. Naj bo a_n število načinov, v katerih žaba z oglišča A pride na oglišče E po natančno n skokih. Dokaži:

   a) $a_{2n-1} = 0$

   b) $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$; $n = 1,2,3,\ldots$,

   kjer je $x = 2 + \sqrt{2}$ in $y = 2 - \sqrt{2}$

(Način, na kateri žaba pride z oglišča A na oglišče E, v natančno n skokih, je zaporedje oglišč $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, ki zadoščajo pogojem:

   i) $P_0 = A$; $P_n = E$

   ii) za vsak i; $0 \leqq i \leqq n - 1$ je $P_i \neq E$

   iii) za vsak i ; $0 \leqq i \leqq n - 1$ sta oglišči P_i in P_{i+1} dve sosednji oglišči osmerokotnika).

Leon Matoh

REŠITVE NALOG

TRIKOTNA ŠTEVILA - rešitve nalog s str. 214

1) Aritmetično zaporedje, iz katerega dobimo šestkotna števila, je že napisano v točki (4) v uvodu članka. Števila $p(n,6)$ so definirana takole:

$$p(n,6) = n(4n - 2)/2$$

zaporedje šestkotnih števil pa se začne z

$$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66,\ 91,\ 120,\ \dots$$

2) Tetraedrsko število dobimo tako, da seštejemo prvih nekaj trikotnih števil. Predstavljajmo si srednjeveške topovske krogle zložene v tristrano piramido. V njej je ravno za tetraedrsko število krogel. Oglejmo si nekaj teh števil:

$$1,\quad 4 = 1 + 3,\quad 10 = 1 + 3 + 6$$
$$20 = 1 + 3 + 6 + 10,\quad 35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

n-to kubno število pa dobimo tako, da n-to kvadratno število n-krat seštejemo. Tako je n^3 splošen obrazec za kubna števila.

3), 4) in 5)

u	1	8	49	288	1681	9800	57121	332928	x_n
v	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416	y_n

6) $t_n = n(n+1)/2\ ,\quad t_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$

$$t_n + t_{n+1} = (n^2 + n + n^2 + 3n + 2)/2 = (2n^2 + 4n + 2)/2 = $$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$$8t_n + 1 = 4n(n+1) + 1$$
$$= 4n^2 + 4n + 1$$
$$= (2n + 1)^2$$

Roman Rojko

VAS LARE - rešitev s str. 242

1. Zaradi pogoja *P1* je množica *P* vseh preverjenih resnicoljubov društvo. Potem pa je tudi $\overline{P}$ društvo (pogoj *C*), to je društvo vseh tistih, ki niso preverjeni resnicoljubi. Pogoj *G* pa nam zagotavlja, da vsaj en vaščan trdi, da je član društva $\overline{P}$, to je, da ni preverjeni resnicoljub. Toda lažnivec ne bo nikoli trdil, da ni preverjeni resnicoljub. Prav tako tega ne bo trdil preverjeni resnicoljub, pač pa to lahko reče samo nepreverjeni resnicoljub.

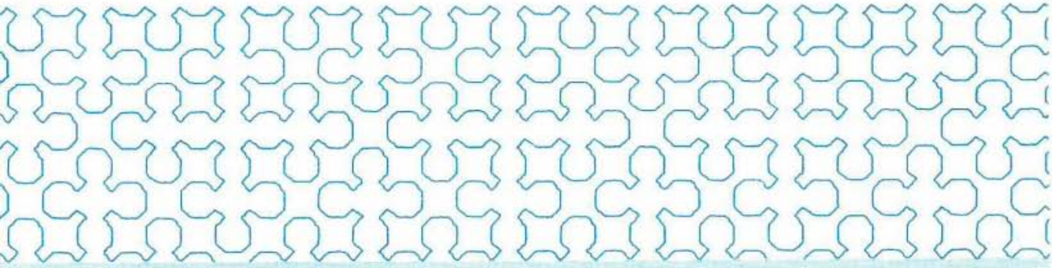
2. Pogoj *P2* zagotavlja, da je množica preverjenih lažnivcev društvo, pogoj *G* pa, da vsaj en vaščan trdi, da je član tega društva, to je, da je preverjeni lažnivec. Seveda niti resnicoljub niti preverjeni lažnivec ne bo trdil tega, to trdi le nepreverjeni lažnivec.

3. Vzemimo, da je množica lažnivcev društvo. Potem vsaj en vaščan trdi, da je lažnivec. Tega pa ne bo trdil ne lažnivec ne resnicoljub. Množica lažnivcev torej ni društvo.

4. Tudi množica resnicoljubov ni društvo, saj bi v nasprotnem morala tudi množica lažnivcev (komplement množice resnicoljubov) biti društvo.

Po *Smullyanu* priredil
Izidor Hafner

ORNAMENT, ki ga je narisal elektronski računalnik



IGRA NIM - rešitve nalog s str. 209

2)

velikost kupa:	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
vrednost pozicije:	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

velikost kupa:	16	17	18	19	20
vrednost pozicije:	1	2	0	1	2

3) Izgubljene pozicije imajo kupi z 0, 3, 6, 9, 12, 15 in 18 kamni.

4) a) vzetek = 4 kamne
   b) vzetek je tak, da čimbolj zmedemo nasprotnika
   c) vzetek = 1 kamen

5) V poštev pridejo samo kubi: 1, 8 in 27. Vrednosti pozicij so:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	2	2	2

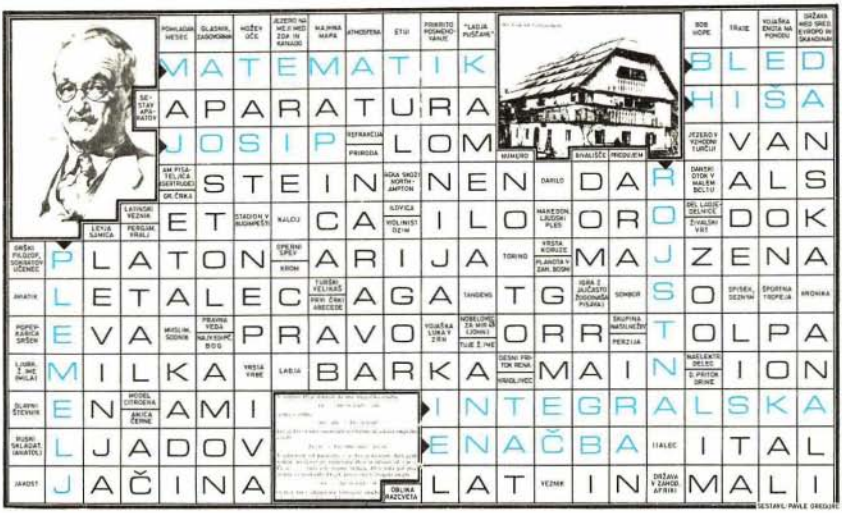
6) Kup si mislimo zmanjšan za toliko, kot znaša najmanjši možni vzetek.

Roman Rojko

ŠTEVILSKA KRIŽANKA - rešitev
s str. 206
(Peter Petek)

A 3	B 1	C 4	1	D 5	E 9
F 3	4	3	■	G 0	1
H 3	1	7	■	■	1
I 3	4	■	J 1	K 9	6
L 3	2	7	6	8	■

SLIKOVNA KRIŽANKA Josip Plemelj



KRIŽANKA "ZNAMKE"

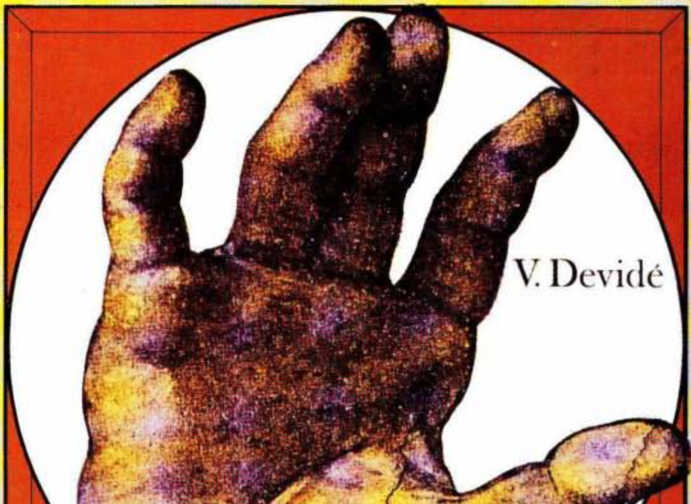
NOVE KNJIGE

MATEMATIKA KROZ KULTURE I EPOHE / Vladimir Devidé. - Zagreb : Školska knjiga, 1979. - 177 str. ; 29 cm (Cena 400.-din)

Pred kratkim je na jugoslovansko knjižno tržišče prišla še ena knjiga o matematiki. Po uvajanju "novematematike" v osnovnih in srednjih šolah se je zanimanje za matematiko močno povečalo. Prav v tem je velik, če ne edini uspeh "novematematike". Društva matematikov po vsem svetu, prav tako pa tudi posamezniki, se že nekaj desetletij trudijo s predavanji, krožki in tekmovanji, da bi med mladino povečali zanimanje za matematiko. Pri tem so bili dokaj uspešni. "Nova matematika", povečano število raznih lepih knjih o matematiki in matematičnih revij pa so tudi prinesli svoje.

Od mnogih podobnih knjig je delo profesorja V. Devideja nekaj posebnega. Namenjena je "matematikom, ki ne znajo razumeti matematike in matematikom, ki lahko tudi ne razumejo". Zgodovinskemu pregledu razvoja matematike je avtor dodal mnogo svojih misli in različnih povezav z drugimi strokami, kjer je matematika bila in je še potrebna. Iz kazala je razvidno, da je bilo knjigo, če ne lahko pa vsaj zelo prijetno opremljati z mnogimi lepimi štiribarvnimi ilustracijami. Med njimi je veliko portretov slavnih matematikov, veliko je reprodukcij prvih in drugih zapisov števil in pisav, mnogo slik ponazarja simetrijo v naravi živega in neživega sveta ter nekatere podobe najslavnejših dogodkov tega stoletja, pri katerih je matematika prispevala svoj delež. Naj omenimo elektronske računske stroje, pomembne gradnje v stavbarstvu, letalstvu in drugod ter prvi človekov korak na Luni.

Ciril Velkovrh



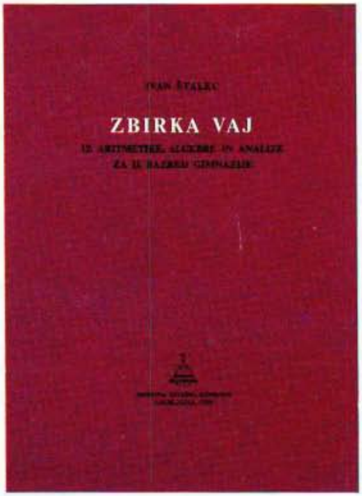
V. Devidé

Matematika kroz kulture i epohe

NOVE KNJIGE

OBVESTILO OB KONCU ŠOLSKEGA LETA UČENCEM IN DIJAKOM OSNOVNIH IN SREDNJIH ŠOL

Pri komisiji za tisk DMFA SRS lahko kupite pri skupinskem naročilu s popustom poleg knjig SIGMA tudi nekatere priročnike in pomožne učbenike. Našteti učbeniki bodo v prihodnjem letu še v uporabi, ker se je učni načrt le malo spremenil in ne bodo izšli novi. Zaloga prvih dveh knjig je majhna in ponatisa verjetno v tem koledarskem letu ne bo.



Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele		40.-din (5o.-din)
Zažkar J., Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov,...		11.-din(12,50din)
Štalec I., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za gimnazije:	1. razr.	44.-din (49.-din)
	2. razr.	42.-din (47.-din)
	3. razr.	41.-din (45.-din)
	4. razr.	42.-din (47.-din)

Priporočamo vam, da si jih preskrbite že pred počitnicami. Poleg cene s popustom so v oklepajih navedene cene v knjigarnah.

Ciril Velkovrh