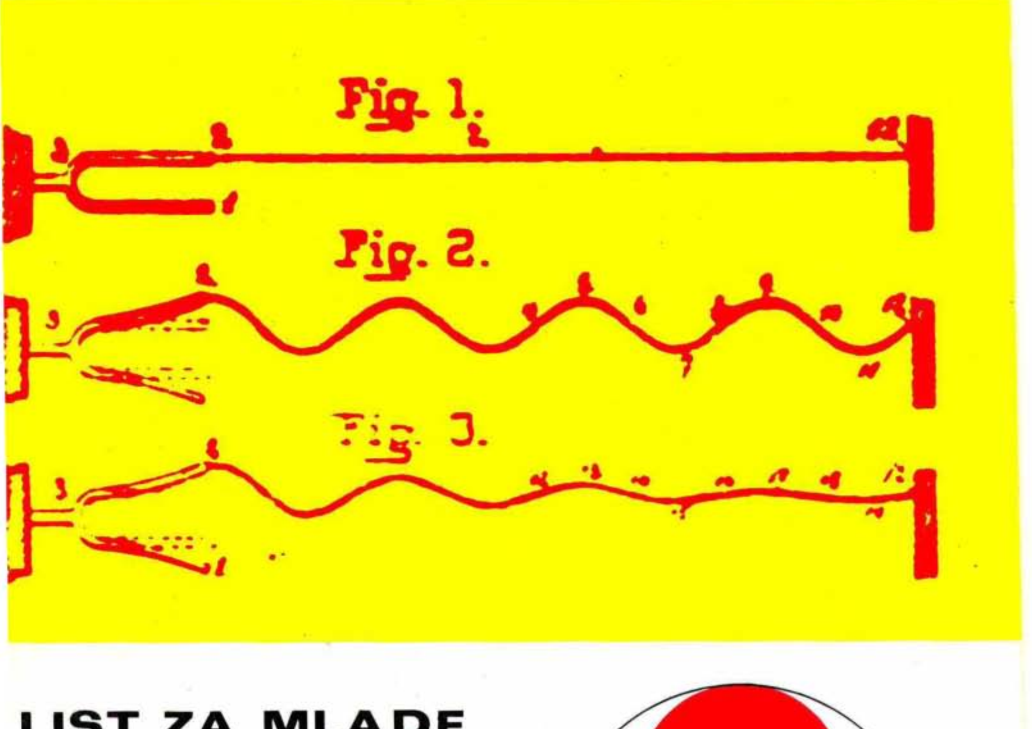
presek 3

VII
1979-80



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

7 (1979/80) ŠT. 3, STR. 129-144

V S E B I N A

FIZIKA

MIHAJLO PUPIN
(OB 125 LETNICI ROJSTVA)

Ali veste, kaj delate, ko vrtite gumb na radijskem aparatu in izbirate radijsko postajo? Odgovorite, potem šele berite naprej!

Mogoče ste se spomnili, da vsak radijski oddajnik niha in oddaja valove z določeno frekvenco, ljubljanski na primer z 918 tisoč nihaji na sekundo. Na to frekvenco moramo uglasiti nihajni krog v radijskem aparatu, da dobimo zaradi resonance največji odziv. Z vrtenjem gumba spreminjamo frekvenco sprejemnika. Na kakšen način pa? Povejte še to, preden berete naprej!

Prav je, če ste rekli, da z gumbom vrtimo polovico plošč kondenzatorja proti drugi polovici plošč. Tako spreminjamo kapaciteto kondenzatorja in s tem frekvenco nihajnega kroga. Ta ima poleg spremenljivega kondenzatorja še tuljavo z določeno induktivnostjo. Za boljšo predstavo si narišite shemo nihajnega kroga. Namesto, da spreminjamo kapaciteto kondenzatorja, lahko spreminjamo induktivnost tuljave.

Tako zlahka *uglasimo električni nihajni krog* na želeno frekvenco. Najbrž pa ne veste, da je prvi objavil to zamisel, ki jo sedaj na veliko uporabljamo, naš Mihajlo Pupin že leta 1893. Takrat je bil profesor za matematično fiziko na univerzi Columbia v New Yorku. Najbolj znana iznajdba, ki je dobila po njem ime, pa je *Pupinova tuljava*. S takimi tuljavami, ki imajo primerno induktivnost in so priključene po nekaj kilometrov narazen na telefonskih kablih ali daljinskih vodnikih, znatno počasneje oslabi signal, ki ga v obliki električne napetosti iz mikrofona pošiljamo po vodniku. Tako so postali mogoči telefonski pogovori na veliko večje razdalje kot prej.

Preglejmo najprej nekaj podatkov o življenju Mihajla Pupina. Ti so nanizani na časovni osi v priloženi tabeli. V tabelo so vnešena tudi nekatera nova fizikalna spoznanja, ki so močneje vplivala na Pupinovo delo in razmišljanje.

Pupin je bil rojen leta 1854 v vasi Idvor blizu Pančeva. Odraščal je na vasi ob kmečkih opravilih in običajih ter ob pastirskih skrbeh in igrah. Ko je končal vaško šolo, je nadaljeval šolanje na gimnaziji v Pančevu. Zaradi sodelovanja v študentskih demonstracijah je moral pred koncem gimnazije oditi s šole. šel je v Prago, kjer pa je tudi zašel v težave zaradi protinemških stališč. Prodal je vse, kar je imel - celo svoj kožuh - in si kupil najcenejšo vozno karto za ladjo v Ameriko. Tam je delal na kmetih, razkladal premog v mestu, delal v tovarni in v pekarskem obratu ter varčeval, da bi lahko študiral. Veliko je hodil v knjižnico, nazadnje pa se je odločil za večerni tečaj, da bi se pripravil za sprejemni izpit, ki ga je uspešno opravil in bil sprejet na univerzo Columbia v New Yorku. Med študijem se je vzdrževal z inštruiranjem. Leta 1878 je z odliko diplomiral iz matematike in naravoslovja na univerzi Columbia v New Yorku. Zato je dobil štipendijo za nadaljnji študij. Dve leti je študiral matematiko na univerzi v Cambridgeu, nato pa tri leta fiziko na univerzi v Berlinu pri uglednem fiziku in naravoslovcu H. Helmholtzu. Tam se je temeljito seznanil z eksperimentalnim delom in raziskovanjem in je leta 1889 doktoriral z zagovorom dela iz fizikalne kemije o osmotskem tlaku in prosti energiji.

Nato se je vrnil v Ameriko in postal docent, tri leta kasneje pa profesor za matematično fiziko na oddelku za elektrotehniko univerze Columbia v New Yorku. Tu je kot učitelj veliko predaval, veliko delal in ustvarjal in vodil mlade pri raziskovalnem delu. Skrbel je za materialno rast oddelka in napredek šole ter širil strokovne stike šole z industrijskimi podjetji.

MIHAJLO P U P I N

	1854	rojen v vasi Idvor pri Pančevu
		v vaški šoli
		v srednji šoli v Pančevu v srednji šoli v Pragi
Maxwell elektromagnetni pojavi	1874	odšel v Ameriko delavec
		študent inštruktor
	1883	diploma na univerzi Columbia v New Yorku 2 leti študija matematike v Cambridgeu 3 leta študija fizike na Univerzi v Berlinu pri Helmholtzu
	1889	doktorat
Hertz elmag. valovanje	1892	profesor za matematično fiziko na univerzi Columbia v New Yorku
Roentgen rentgenska svetloba		učitelj, raziskovalec, izumitelj
Planck energ. kvanti sevanja	1900	vrsta pomembnih odkritij (povečanje dosega telefonskih pogovorov s Pupinovimi tuljavami, večkratna telefonija, uglaševanje električnega nihajnega kroga, sekundarno rentgensko sevanje) uporaba fluorescence pri slikanju z rentgensko svetlobo
Einstein teorija relativnosti		radijska telefonija družbeno aktiven znanstveni delavec sodelavec državnega sveta za znanstveno raziskovanje
		član in občasno predsednik več strokovnih društev član ameriške in newyorške akademije znanosti dobitnik številnih priznanj, nagrad in častnih naslovov
	1929	zaslužni profesor
	1935	umrl

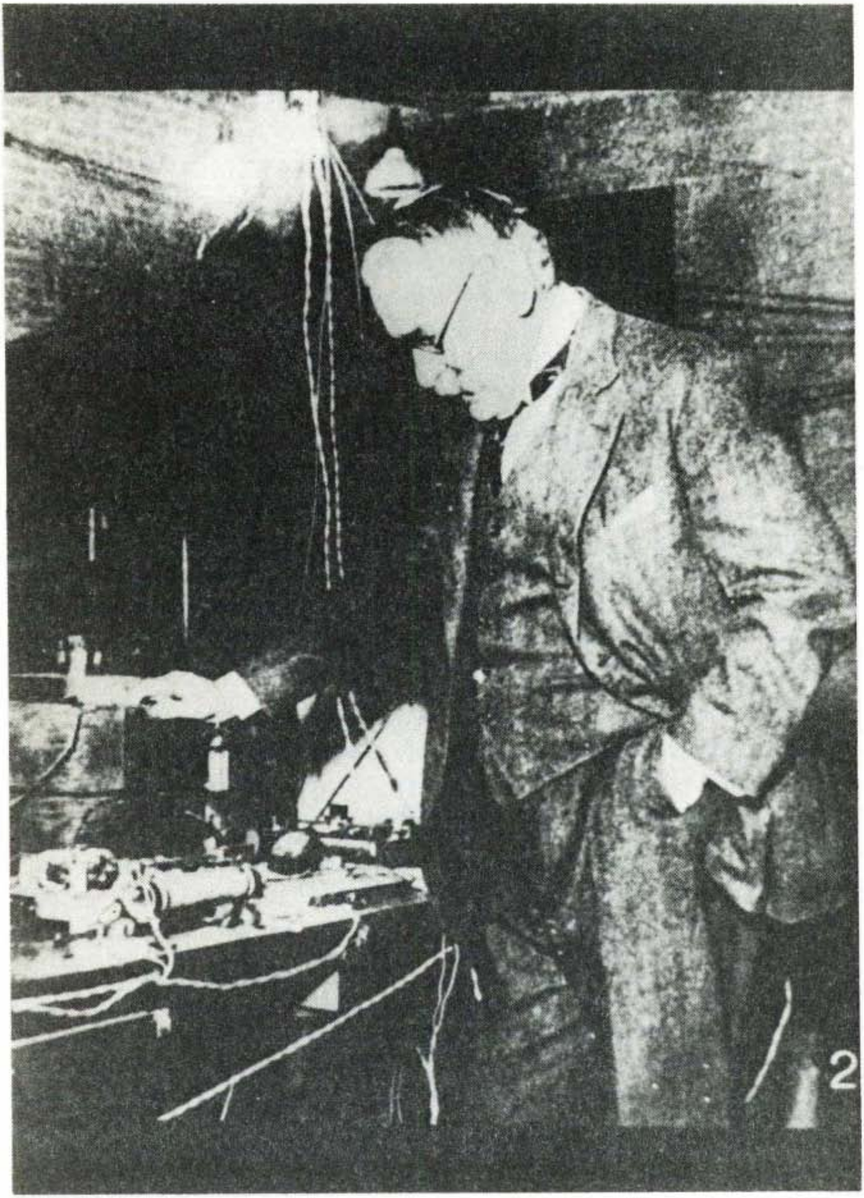
S predavanji je pojasnjeval aktualne probleme strokovni in širši javnosti in opravljal razne svetovalne funkcije. Napisal je številna znanstvena, strokovna in poljudno znanstvena dela in prijavil 24 patentov za razna uporabna odkritja.

Za svoje izredne dosežke je dobil Pupin veliko priznanj in nagrad, častne doktorate na 16 univerzah, med njimi tudi na beograjski in zagrebški. Bil je član ameriške in newyorške akademije znanosti in član ter občasno predsednik več strokovnih društev, med njimi tudi ameriškega fizikalnega društva.

Pa se vrnimo k največjemu Pupinovemu odkritju - k Pupinovim tuljavam. Po Bellovem odkritju telefona leta 1876 se je uporaba telefona po mestih hitro širila. Med hišami so se vse bolj na gosto razpredale telefonske žice in kabli. Na večje razdalje med mesti pa se po telefonu ni slišalo, ker se je električni signal zaradi izgub po žicah udušil. Zato so si mnogi prizadevali, da bi zmanjšali dušenje električnih signalov. Pupin je našel rešitev s teoretično obravnavo. Dobljene rezultate je tudi na izviren način eksperimentalno preveril v laboratoriju. V razmikih po nekaj kilometrov je priključil na vodnik tuljave s primerno induktivnostjo. Razmiki so odvisni od električnih lastnosti vodnika in od največje frekvence nihanja električnega toka, ki ga pošiljamo po vodniku. Predlagal je tudi primerno navitje tuljave v obliki svitka. S to rešitvijo se je telefonsko omrežje razširilo na nekaj desetkrat večje razdalje, kar je pomenilo izreden napredek. Ta rešitev je prinesla Pupinu velik ugled.

Nekoč je Pupin v pogovoru vprašal predsednika telefonske in telegrafske družbe, ali bi mu hotel prodati nazaj njegov izum. Predsednik pa je odvrnil: "Da, toda samo, če kupite obenem vso telefonsko družbo. Vse naše delovanje sloni na vašem izumu". Ob drugi priliki pa je Pupin takole razmišljal: "Moj izum je omogočil, da je telefon cenejši.... Vsak dober izum daje javnosti neizmerno več kakor izumitelju ali družbi, ki uporablja izum.... Imam se za javnega dobrotnika".

Na idejo za to rešitev, piše Pupin, je prišel med počitnicami



Sl. 1: Pupin v laboratoriju na univerzi Columbia

v Švici. Takrat se mu je posvetilo, da je prenašanje signala v obliki nihajoče električne napetosti po žici podobno prenašanju nihanja po vrvici ali struni. Te probleme pa je poznal. Z njimi se je seznanil pri H. Helmholtzu, ki je z resonatorji, uglašenimi na različne frekvence, raziskoval zvok. Študiral jih je po Lagrangejevi knjigi o analitični mehaniki. Doživljal pa jih je, kot pravi, že v otroških letih pri idvorskih pastirjih, ki so pri igranju na dude izkoriščali resonanco lesenih piščali. Zato je tudi naravnavanje frekvence električnega nihajnega kroga imenoval uglaševanje. Pupin je s to mislijo o podobnostih na videz različnih pojavov dobil predstavo o pojavih v vodniku.

Vzemite dve nekaj metrov dolgi nitki iz bombažne preje. Na eno pritrdite svinčene kroglice v enakih razmikih po okrog 10 cm. Nitki na enem krajišču privežite na steno ali na naslonjalo stola nekaj deset centimetrov narazen. Drugi krajišči nitk pa zvežite in vzemite v roko tako, da sta nitki za štiri prste narazen. Vrvica naj ne bo napeta. Roko pa nihajte sem in tja. Videli boste, da s kroglicami obtežena nitka močno valovi, medtem ko se po neobteženi nitki valovanje uduši.

Tako je Pupin prišel na misel, da je namesto kroglic vzel tuljave s primerno induktivnostjo, ki jo je teoretično izračunal. Pri tem poskusu se boste veliko naučili, če boste odgovorili na mnoga vprašanja, ki se bodo porajala ob opazovanju.

Med drugimi Pupinovimi izumi je treba navesti *večkratno telefonijo*, s katero lahko po enem telefonskem vodu pošiljamo več pogovorov hkrati. Rešitev morda poznate, če ne, pa poskusite uganiti, kako bi to šlo in narišite shemo, preden berete naprej.

Ideja je tale. Nihanje električne napetosti z mikrofona naložimo na nihanje električnega nihajnega kroga z določeno večjo frekvenco. Nihanje z drugega mikrofona, ki ustreza drugemu pogovoru, pa naložimo na nihanje drugega električnega nihajnega kroga z drugačno frekvenco in tako dalje. Na drugem koncu na sprejemni strani pa izločimo pogovore z ustreznimi nihajnimi krogi, ki delujejo kot filtri in prepuščajo samo valovanje v določenem frekvenčnem območju.

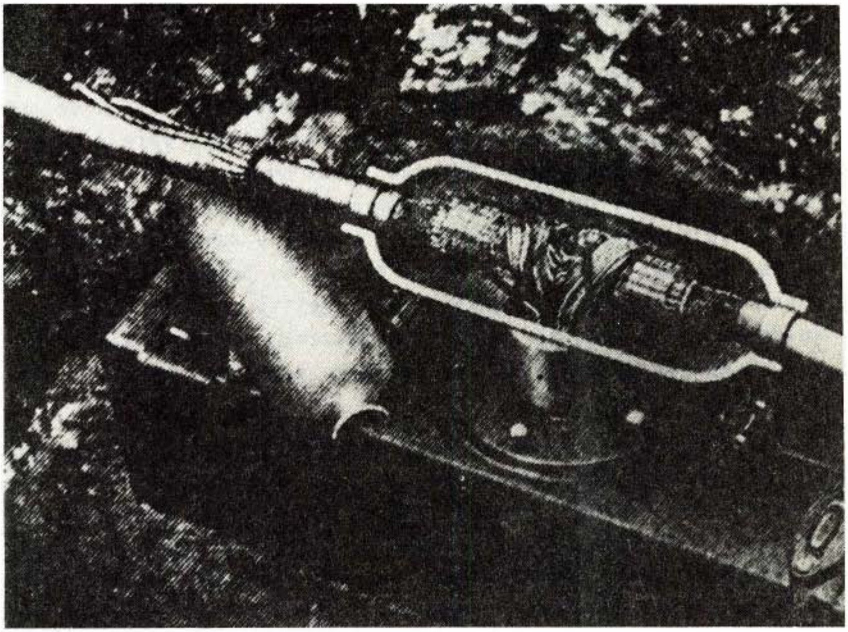
Drugo zanimivo odkritje se je posrečilo Pupinu pri poskusih z rentgensko svetlobo. Že štirinajst dni po tem, ko je Roentgen objavil svoje odkritje, je prvi v Ameriki ponovil ta poskus. Z rentgensko svetlobo je nato veliko pomagal kirurgom. Pri tem je prišel na misel, da je pred fotografski film dal fluorescenčni zaslon in izkoristil tudi nastalo fluorescenčno svetlobo. S tem je nekaj desetkrat skrajšal čas osvetlitve in omogočil hitro rentgensko fotografijo. Pri nadaljnjih poskusih je prišel do spoznanja, ki ga je prvi objavil, da vsaka snov, ki je izpostavljena sevanju rentgenske svetlobe, sama seva rentgensko svetlobo. Žal pa tega za fiziko pomembnega spoznanja ni utegnil dalje raziskovati.

Pupin je bil uspešen raziskovalec in iznajditelj. Bil je tudi dober učitelj, spreten govornik in prepričljiv predavatelj, ki je znal stvari jedrnato opisati, slikovito pojasniti in ponazoriti s prispodobami. Študenti so ga z veseljem poslušali in so ga imeli radi. To povedo mnogi v svojih spominih. Ko si je kupil hišo v Norfolku, se je za razvedrilo bavil z vzrejo konj. Po zmagi na neki družabni konjski tekmi mu je nekdo dejal: "Profesor Pupin, če znate tako dobro brzdati svoje študente, kakor svoja ponija, ste največji profesor v Ameriki". Pupin pa je odvrnil: "Tudi to bi znal, če naj bi brzdal samo dva študenta namesto dvesto". Pupin je imel veliko ur predavanj in šolskega dela. Zato se je pogosto zavzemal za učno razbremenitev učiteljev na univerzi, da bi lahko več časa posvetili raziskovanju.

Vedno je opozarjal na dober pouk fizike. Že ob disertaciji leta 1889 je vzel kot dodatno tezo, ki jo je moral braniti, trditev: "Pouk fizike v srednjih šolah naj poteka, kolikor je mogoče, na praktični podlagi". Poudarjal je: "Ni mogoče poučevati znanosti brez laboratorijev, ne samo v višjih, temveč tudi v nižjih šolah. Nevarno je mnenje, da je za višje šole treba samo nekaj več šolskih tabel, krede, gob in predavatelja, ki bi se za svoja predavanja pripravljal z branjem knjig".

Neprestano je opozarjal na potrebo po splošni znanstveni razgledanosti, rekoč: "Od vsakega kulturnega človeka pričakujemo, da ima pravilne in pametne nazore o književnosti, o umetnosti in o družbenih vedah. Toda kdo je kdaj mislil na to, da bi zahteval od kulturnega človeka, naj ima inteligentne nazore tudi o pojmih znanosti". Bil je mnenja, da bi se moral vsak otrok v osnovni šoli seznaniti s preprostimi poskusi, ki razlagajo osnovne pojme Newtonove mehanike.

Zavzemal se je tudi za večjo raziskovalno dejavnost, ki bi hitreje vodila k napredku. "Izberimo si za naše raziskovanje predvsem takšne probleme, ki bodo pospešili naše znanje o kakšni veliki stvari". Sodeloval je v državnem znanstvenem svetu, ki ga je ustanovil ameriški predsednik Wilson med prvo vojno, da bi pomagal gospodarski in vojaški moči z novimi odkritji in



Sl. 2: Pupinova tuljava, priključena na kabel

dosežki. Med drugim je v sekciji za aeronavtiko razvijal radijsko telegrafijo.

Pupin je ljubil in spoštoval svoje starše in cenil svoje rojake in domovino. Večkrat je prihajal na obisk domov in ob vsaki priliki poudarjal, odkod je doma. Rojakom je na vse načine pomagal z nasveti in z denarnimi prispevki.

Posebno pa je treba poudariti Pupinove zasluge pri določanju državnih meja na mirovnih pogovorih po prvi svetovni vojni v Parizu. Pupin si je s svojimi uspehi in s svojim delom pridobil velik ugled in številno poznanstvo. Ker ga je predsednik Wilson osebno poznal, je njegova beseda veliko zalegla. Tako ima zasluge, da ni bila Slovenija okrnjena za del Prekmurja in za Bohinjski kot. Zato ga je občina Bled izvolila leta 1922 za častnega občana.

Pupin je bil živahen, družaben in čustven človek. Govoril je: "Fizikalna dejstva nikakor niso hladna, če vaše srce ni hladno". Po Hertzovem eksperimentalnem dokazu, da je svetloba elektromagnetno valovanje, so mnoga vprašanja o svetlobi in o širjenju svetlobe še bolj razburila fizike. Pupin večkrat piše o teh vprašanjih, pa tudi o svetlobi, ki nam prinaša informacijo z zvezd: "Govor zvezd nam lahko odkrije mnogo velikih skrivnosti, danes je zame prav tako čudovit kakor pred petdesetimi leti na pašnikih domače vasi". Razmišljal je tudi o razvoju sveta ter verjel, da bo znanstveni napredek omogočil boljše sožitje ljudi.

Marsikaj bi bilo treba še povedati, da bi bila podoba Mihajla Pupina, ki je bil velik človek, popolna. Ne mislite, da je v današnjem hitrem razvoju ta podoba že zastarela in ni več zanimiva. Preberite njegovo knjigo, pa boste videli, koliko znanja in modrosti si boste pridobili.

Anton Moljk

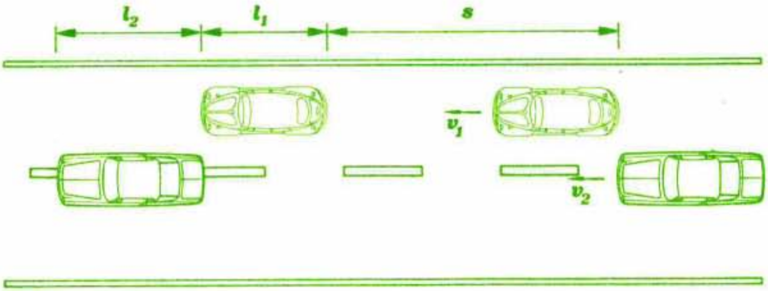
PREHITEVANJE

Prehitevanje je eno izmed najzahtevnejših in najnevarnejših prometnih opravil. Mislimo si ga razdeljenega na troje dejanj: na *dohitevanje*, *na vožnjo mimo prehitevanega vozila* in na *zavijanje vozila na desno* po končanem prehitevanju.

Mimo prehitevanega vozila vozimo največkrat pospešeno. Pogosti pa so tudi primeri, ko doseže vozilo že med dohitevanjem največjo hitrost in se nato giblje enakomerno. Poglejmo si najprej ta posebni primer.

Po avtocesti vozi pred nami 20 m dolg kamion s hitrostjo 80 kilometrov na uro. Naš avto je dolg 5 m in vozi po prehitevalnem pasu s hitrostjo 100 km/h. Koliko časa bomo vozili vštric s kamionom in kolikšno pot bomo pri tem prevozili? Vožnjo mimo prehitevanega vozila bomo šteli od trenutka, ko pridemo s svojim sprednjim odbijačem vštric z zadnjim odbijačem prehitevanega vozila pa do trenutka, ko bo naš zadnji odbijač vštric s sprednjim odbijačem prehitevanega vozila (slika). Označimo z l_1 dolžino prvega vozila in z v_1 njegovo hitrost ter z l_2 dolžino našega vozila in z v_2 našo hitrost. S slike razberemo, da moramo prevoziti med vožnjo mimo prvega vozila pot, ki je za skupno dolžino obeh vozil $l = l_1 + l_2$ daljša od poti prvega vozila. Čas t, ki ga potrebujemo za to pot, je tedaj

$$t = s/v_1 = (s + l)/v_2 \qquad (1)$$



če z s označimo pot prvega vozila. Iz enačbe najprej izračunamo pot prehitevanega vozila: $s = v_1/(v_2 - v_1) = 100$ m . Mi smo morali prevoziti za 25 m daljšo pot, torej 125 m. Na koncu izračunamo še čas: $t = s/v_1 = 4{,}5$ s .

Take in podobne račune morajo poznati kandidati, ko hočejo opraviti vozniški izpit. Poskusimo o stvari razmisliti še na drugačen način in se pri tem kaj naučiti.

Doslej smo govorili o naši vožnji mimo prvega avta s stališča opazovalca ob robu ceste. Kako pa vidi našo vožnjo opazovalec v prehitevanem avtu? Naše vozilo se giblje vzporedno z njim s hitrostjo $v_2 - v_1$ in se mora s to hitrostjo pomakniti naprej za skupno dolžino obeh vozil. Za to potreben čas bo torej $t = l/(v_2 - v_1) = 4{,}5$ s. Pot, ki jo v tem času opravita vozili po cesti, določimo na že znani način.

Poglejmo še primer, ko vozita avta v začetku z enako hitrostjo, nato pa naše vozilo vozi mimo prvega enakomerno pospešeno s pospeškom a. Kako vidi dogodek voznik v prehitevanem avtu? Naše vozilo se giblje enakomerno pospešeno, opravljena pot pa je, tako kot prej, enaka skupni dolžini vozil. Učili smo se, da je pot pri enakomerno pospešenem gibanju sorazmerna s kvadratom časa, zato zapišemo $l = at^2/2$. Iz tega izračunamo čas, ki ga porabi naše vozilo za vožnjo mimo prehitevanega vozila $t = \sqrt{2l/a}$. Glede na cesto se prehitevani avto premakne za pot $s = v_1 t$. Naš avto pa opravi za l daljšo pot.

Kolikšen bi moral biti pospešek, da bi trajal dogodek prav toliko časa kot v prvem primeru, ko sta vozila avta s konstantnima hitrostma? Sami boste izračunali, da je potrebni pospešek enak $a = 2(v_2 - v_1)^2/l$. Za naš primer bi bil pospešek $a = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$. Za tako pospeševanje potrebuje avtomobil dodatno moč: 1000 kilogramski avto, ki vozi spočetka s hitrostjo 80 km/h, npr. več kot 55 kW. Zato se ne čudimo, če si žele avtomobilisti močne avtomobile.

Pri prehitevanju po običajni cesti so največkrat hitrosti vozil manjše. Preden se odloči za prehitevanje, mora voznik presoditi ali bo po levi strani ceste varno dohitel vozilo, opravil vso pot mimo njega in še s povečano hitrostjo varno zavil predenj. Potreben čas in prevoženo razdaljo bi lahko na podoben način kot zgoraj le približno izračunali. Voznik pa si lahko le z vajo pridobi potrebne izkušnje.

Karel Šmigoc

TEHNIČNI NASVET

V reviji SAM (november 1979, str. 11 v prilogi Naši strokovnjaki svetujejo) je ob navodilu za izdelavo akumulatorskega spajkala za napetost 12 V in moč 30 W tudi tole opozorilo (prosto prevedeno):

Ko priključimo spajkalo na akumulator, moramo paziti, da napetost akumulatorja ni dosti manjša od 12 V. Pri tej napetosti bo tekel po spajkalu tok okoli 2,5 A. Če pa je napetost na akumulatorju manjša, bo "potegnil" grelec spajkala ustrezno večji tok, da bi ohranil svojo moč. Pri napetosti 10 V bo tok 3 A, pri napetosti 8,5 V pa celo 3,5 A. Grelcu, ki je zgrajen za nazivni tok 2,5 A, to škoduje, zato se zmanjša njegov življenjski čas.

Strokovnjak ne pove, kaj se zgodi, če priključimo spajkalo na izvir napetosti za več kot 12 V. Po njegovem bi bilo to za grelec ugodno, saj bi po njem tekel manjši tok. Pri napetosti 220 V npr. le 0,14 A.

Pa tega ni treba preskusiti in tudi v šoli se varujte tovrstne fizike - zaradi slabih ocen, saj veste!

Marjan Hribar

BISTROVIDEC

BISTROVIDEC VII/1 - REŠITEV

V prvi številki letošnjega *Preseka* je *Srečko Podlipnik** objavil nemški in angleški stavek z vsemi črkami ustrezne abecede in povpraševal po takem slovenskem stavku.

Slovenščina je konzonantno precej bolj gibljiv jezik, zato mi ni bilo težko najti naslednji (sicer bolj za lase privlečen) stavek:

ŠERIF BO ZA VAJO SPET KUHAL DOMAČE ŽGANCE

Stavek vsebuje vse črke slovenske abecede. Večkrat se v stavku pojavijo le vokali *a*, *e* in *o* . Sestavlja ga 34 črk.

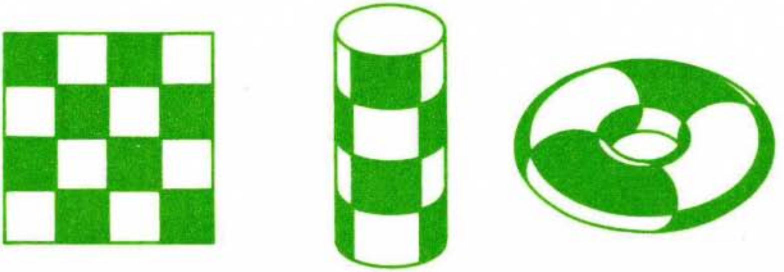
Najbrž ne bi bilo težko najti še kakšnega lepšega stavka!

Bojan Mohar

**Srečko* pravzaprav ni *Srečko* temveč *Sredko* - s tem imenom se je podpisala družba s seminarja za numerično in računalniško matematiko, ki vsako sredo nadaljuje seminar v restavraciji "Pod Lipo".

Za prijatelje BISTROVIDCA je tokrat šahovska naloga:

Šahovnico 4 x 4 zvijemo v valj - zlepimo dve nasprotni stranici. Ali lahko nanjo postavimo šahovskega konja tako, da bo nato preskakal vsa polja šahovnice, toda pri tem ne bo na nobeno polje skočil več kot enkrat?



Nato valj zvijemo v svitek (torus) - zlepimo robova valja. Ali lahko na šahovnico (sedaj je narisana na svitku) postavimo šahovskega konja tako, da bo preskakal vsa polja in na vsako skočil samo enkrat ter svoj sprehod končal na začetnem polju?

Vladimir Batagelj

TEKMOVANJA - NALOGE

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK S PRAVOKOTNIMA TEŽIŠČNICAMA

Nariši pravokotni trikotnik *ABC* s hipotenuzo 12 cm, če veš, da se dve od težiščnic sekata pravokotno.

Peter Petek

NEKAJ NALOG MLADIM VEGOVCEM

Pred leti je nekdo rekel na občnem zboru društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, da do matematike ni bližnjice, je pa široka cesta. V tej misli je gotovo veliko resnice - torej vztrajno na delo!

Pred seboj imaš nekaj izbranih nalog, ki niso namenjene samo za bližnje tekmovanje, temveč za tvoje osebno izobraževanje.

Še tale nasvet: če si učenec višjega razreda, poskusi rešiti še druge naloge!

ZA UČENCE 5.r. DO 8.r.:

1. Kolikokrat se ponovijo cifre naravnih števil od 1 do 999 ?
2. Dvociferno število lahko zapišemo v obliki $\overline{ab}$. Določi $A \quad B$, če je $A = \{\overline{ab} \ ; \ a = 2 + b\}$ in $B = \{\overline{ab} \ ; \ a = 2.b\}$
3. V paralelki je 30 učencev, ki so reševali dve nalogi. Prvo nalogo je rešilo 22 učencev, drugo 19 učencev, dva učenca nista rešila nobene naloge. Koliko učencev je rešilo obe nalogi?
4. S katero cifro se končuje število 2^{100} ?
5. Na ribolovu je prvi ribič ujel 5 rib, drugi pa 3 ribe. Pojedini se je pridružil prijatelj, ki je bil pripravljen plačati svojo porcijo. Ribiča sta razdelila ribe na tri enake dele. Prijatelj je po jedi plačal 8 din. Kako sta si ribiča pravično razdelila denar?

ZA UČENCE 6.r.:

6. V enakokrakem trapezu je dan krak k in kot ob daljši osnovnici 75° . Kolika je ploščina trapeza, če sta osnovnici v razmerju $2 : 1$?
7. Deljenec zmanjšamo za 10%, delitelj pa povečamo za 10%. Za koliko procentov se je spremenil količnik?
8. S katerim najmanjšim naravnim številom moramo pomnožiti 2520, da dobimo kvadrat naravnega števila?
9. Dani sta premici p in q ter točka A, ki leži med premicama. Načrtaj pravilni 6-kotnik, tako da je točka A oglišče lika, očrtani krog 6-kotniku pa se dotika danih premic!
10. V enakokrakem trapezu meri kot ob osnovnici 50°, kot med diagonalama pa 78°. Ugotovi, ali je središče trapezu očrtanega kroga zunaj ali znotraj trapeza ?
11. Stranice trikotnika ABC označimo z a, b in c, polmer včrtanega kroga z r. Ploščina trikotnika je $p = (a + b + c).r/2$. Dokaži!

ZA UČENCE 7.r.:

12. Vsota nekega dvocifernega števila in števila, zapisanega z istimi ciframi v nasprotni smeri, je 66. Katero je to dvociferno število?

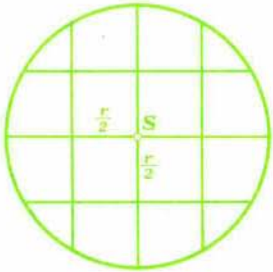
13. Dokaži, da količnik poljubnega troštevilčnega števila in njegove vsote cifer ne more biti večji od 100 !

14. Določi take elemente množice $M = \{(x,y);\ x \in N,\ x < 15\}$, za katere je vrednost izraza $((2/3)x - y - 3)^2 + 2$ najmanjša !

15. Izračunaj ploščino štirikotnika $ABCD$, če je $\overline{AB} = 27{,}36$ m, $\overline{DA} = 12{,}64$ m, $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = 90^\circ$. (Ne prenagli se; pazi na ekonomičnost računanja!)

16. V krog s polmerom 2 dm je včrtan trikotnik s kotoma 15° in 60°. Izračunaj ploščino tega trikotnika!

17. Koliko metrov žice potrebujemo za okroglo zamreženo okno s premerom 50 cm (slika)?



ZA UČENCE 8.r.:

18. Določi števila x, y in z za enačbo

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0$$

19. Če števcu in imenovalcu nekega ulomka prištejemo njegov imenovalec, dobimo ulomek, ki je za $1/9$ večji od prvotnega. Določi prvotni ulomek!

20. V množici celih pozitivnih števil reši enačbo $x^2 - y^2 = 105$!

21. a) Poenostavi izraz:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1 + x}$$

b) Pretvori v produkt dveh faktorjev izraz:

$$x^4 + 1$$

22. Dan je pravokotni trikotnik s katetama a in b. Pravi kot razdelimo z dvema poltrakoma na tri enake dele. Izračunaj dolžino odsekov p in q teh poltrakov, ki sta v notranjosti trikotnika!

Pavle Zajc

MATEMATIKA

O KONGRUENCAH

V tem sestavku bomo obravnavali neko vrsto relacij v množici celih števil Z, ki jim pravimo *kongruence*. Ker bomo ves čas govorili o celih številih, nam bo beseda *število* vedno pomenila *celo število*.

Vzemimo dve števili a in m in naj bo $m > 0$. Delimo a z m :

$$a = k.m + r$$

Število k lahko izberemo tako, da je r eno izmed števil 0, 1, 2, ... , m-1 . Tako izbranemu številu r pravimo *ostanek* pri deljenju a z m.

Povejmo zdaj definicijo kongruence. Števili a in b sta *kongruentni po modulu m* $(m > 0)$, če dasta pri deljenju z m isti ostanek. Z znaki zapišemo to takole:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

in preberemo *a je kongruentno b po modulu m* .

PRIMER 1. Naj bo $m = 3$. Števila 0, 3, -3, 6, -6, ... imajo pri deljenju s 3 vsa ostanek 0, zato so vsa med seboj kongruentna po modulu 3. Prav tako so med seboj kongruentna števila 1, 4, -2, 7, -5, ... , ki dajo ostanek 1.

Kongruenco dveh števil bomo karakterizirali še drugače. Naj bo $a = k.m + r$ in $b = q.m + s$. Odštejmo:

$$a - b = k.m + r - q.m - s = (k - q).m + (r - s)$$

Prvi člen na desni je deljiv z m. Drugi člen $r-s$ pa je po absolutni vrednosti manjši od m, zato je deljiv z m le, če je enak 0, torej $r = s$. Razlika $a - b$ je zato deljiva z m natanko tedaj, ko imata a in b pri deljenju z m isti ostanek. Spomnimo se definicije kongruence, pa lahko zapišemo

Izrek 1. Števili a in b sta kongruentni po modulu m natanko tedaj, ko je razlika $a - b$ deljiva z m.

Kongruenca je torej neka dvočlenska relacija v množici celih števil Z. S pomočjo izreka 1 lahko pokažemo, da ima naslednje tri lastnosti.

1) Vsako število je kongruentno samo sebi: $a \equiv a \pmod{m}$.
   Tej lastnosti pravimo *povratnost* (*refleksivnost*).
2) Iz $a \equiv b \pmod{m}$ sledi tudi $b \equiv a \pmod{m}$.
   To je *vzajemnost* (*simetričnost*) relacije.
3) Iz $a \equiv b \pmod{m}$ in $b \equiv c \pmod{m}$ sledi $a \equiv c \pmod{m}$.
   Relacija kongruence je torej tudi *prehodna* (*tranzitivna*).

Vsako relacijo, ki ima gornje tri lastnosti, imenujemo *ekvivalenčna relacija*. Kongruenca je torej primer ekvivalenčne relacije v množici celih števil Z.

Dokažimo le lastnost 3), saj sta prvi dve tako enostavni, da ju bo lahko dokazal vsak sam. Naj bo $a \equiv b$ in $b \equiv c \pmod{m}$. Po izreku 1 sta razliki $a - b$ in $b - c$ deljivi z m, zato je deljiva z m tudi njuna vsota $(a - b) + (b - c) = a - c$. To pa pomeni $a \equiv c \pmod{m}$.

Naj bo $0 \leqq r \leqq m-1$. Označimo množico vseh števil, ki so kongruentna r (torej imajo pri deljenju z m ostanek r), z Z_r^m . Vsako tako število lahko zapišemo v obliki $k.m + r$, k pa lahko preteče vsa cela števila. Torej je $Z_r^m = \{r, r+m, r-m, r+2m, r-2m, \ldots\}$. Vsako celo število ima natanko en ostanek r, ki leži med 0 in $m-1$. Vsako število je torej element natanko ene od množic $Z_0^m, Z_1^m, \ldots , Z_{m-1}^m$. Tako smo dokazali

Izrek 2. Množice $Z_0^m, \ldots , Z_{m-1}^m$ so paroma tuje (presek dveh različnih je prazen), njihova unija je množica vseh celih števil Z. Vsa števila iz iste množice so med seboj kongruentna, poljubni dve števili iz različnih množic pa nista kongruentni.

PRIMER 2. Zapišimo naše množice za $m = 5$!

$$Z_0^5 = \{0, 5, -5, 10, -10, 15, -15, \ldots\}$$

$$Z_1^5 = \{1, 6, -4, 11, -9, 16, -14, \ldots\}$$

$$Z_2^5 = \{2, 7, -3, 12, -8, 17, -13, \ldots\}$$

$$Z_3^5 = \{3, 8, -2, 13, -7, 18, -12, \ldots\}$$

$$Z_4^5 = \{4, 9, -1, 14, -6, 19, -11, \ldots\}$$

Prav lahko se prepričamo, da zanje res velja trditev izreka 2.

NALOGA. a) Zapiši Z_8^{13} !
b) Določi r tako, da bo $1979 \in Z_r^{15}$!
c) Določi r tako, da bo $-1979 \in Z_r^{15}$!

Do sedaj še nismo povedali, kaj lahko sploh pametnega počnemo s kongruencami. Zato bomo zdaj pokazali, da lahko z njimi računamo skoraj tako kot z navadnimi enačbami.

Izrek 3. Naj bo $a \equiv b \pmod{m}$ in $c \equiv d \pmod{m}$. Veljata naslednji osnovni pravili:

a) Kongruence lahko seštevamo:

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

b) lahko jih množimo:

$$a.c \equiv b.d \pmod{m}$$

Pokažimo, da je razlika med levo in desno stranjo obakrat deljiva z m, nato pa se sklicujemo na izrek 1. V točki a) je $a + c - (b + d) = (a - b) + (c - d)$. Oba člena na desni sta deljiva z m, zato je deljiva z m tudi njuna vsota. V točki b) razčlenimo takole:

$$a.c - b.d = (a - b).c + (c - d).b$$

nato pa sklepamo tako kot prej. Izrek 2 je dokazan.

Z njegovo pomočjo nam bo prav lahko dokazati tudi naslednje lastnosti kongruenc, ki nam bodo zelo pomagale pri računanju.

Naj bo spet $a \equiv b \pmod{m}$, k pa naj bo poljubno celo število.

1) $a + k \equiv b + k \pmod{m}$. Kongruenci lahko torej prištejemo poljubno konstanto.

2) Kongruenco lahko pomnožimo s konstanto:
$k.a \equiv k.b \pmod{m}$

3) Naj bo n naravno število $n > 0$. Kongruenco lahko potenciramo: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

4) Naj bosta leva in desna stran kongruence deljivi s številom d, d in m pa naj bosta medsebojno tuji (brez skupnih deliteljev). Tedaj lahko kongruenco krajšamo z d:
$a/d \equiv b/d \pmod{m}$

Dokažimo zapisane trditve! Če postavimo v izreku 3 v točki a) in b) $c = d = k$, dobimo trditvi 1) in 2). Izrek nam tudi pove, da lahko kongruenco množimo sámo s seboj. Tako dobimo $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$. Če to pomnožimo še enkrat z $a \equiv b \pmod{m}$, dobimo $a^3 \equiv b^3 \pmod{m}$. S tem lahko očitno nadaljujemo poljubno dolgo, torej velja tudi trditev 3). Dokažimo še 4). Razlika $a - b = d.(a/d - b/d)$ je deljiva z m, d in m pa sta tuji. Zato deli m drugi faktor. Po izreku 1 je torej $a/d \equiv b/d$ (mod m), kar trdi 4).

V zvezi s krajšanjem kongruenc si oglejmo naslednji enostavni primer. Kongruenco $8 \equiv 4 \pmod{2}$ bomo skušali krajšati kar z modulom 2. Pri prvem deljenju dobimo še vedno pravilno kongruenco $4 \equiv 2 \pmod{2}$. Pri drugem krajšanju pa dobimo $2 \equiv 1 \pmod{2}$, kar ni res. Primer nas opozori, da lahko včasih krajšamo tudi s številom d, ki ni tuje z modulom m, vedno pa to ne gre.

V nekaj enostavnih primerih bomo pokazali, kako si lahko s pomočjo računanja s kongruencami pomagamo pri reševanju problemov, v katerih imamo opraviti s celimi števili.

PRIMER 3. Izračunati je treba ostanek pri deljenju števila 5^{226} z 11. V ta namen si najprej ogledamo ostanke prvih nekaj potenc števila 5:

$$5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$$

Kvadrirajmo: $5^4 \equiv 3^2 \equiv -2 \pmod{11}$

in pomnožimo s 5: $5^5 \equiv -2.5 \equiv 1 \pmod{11}$

Dobljeno potenco lahko potenciramo na poljubno potenco :

$$5^{5 \cdot k} \equiv 1 \pmod{11}$$

Eksponent zapišimo v obliki $226 = 5.45 + 1$. Postavimo v zgornji kongruenci $k = 45$ in jo pomnožimo s 5. Tako dobimo: $5^{226} = 5^{5 \cdot 45}.5 \equiv 5 \pmod{11}$.

Dobili smo iskani ostanek, ki je enak 5.

PRIMER 4. Poiskati je treba zadnji dve cifri števila 7^{1979} v desetiškem sistemu. Število, ki ga sestavljata zadnji dve cifri, pomeni ostanek pri deljenju 7^{1979} s 100. Spet izračunamo potence:

$$7^2 = 49, \quad 7^3 = 343 \equiv 43 \pmod{100},$$
$$7^4 \equiv 43.7 = 301 \equiv 1 \pmod{100}$$

Delimo eksponent s 4: $1979 = 4.494 + 3$. Zmnožimo kongruenci $7^{4 \cdot 494} \equiv 1 \pmod{100}$ in $7^3 \equiv 43 \pmod{100}$, pa dobimo $7^{1979} = 7^{4 \cdot 494}.7^3 \equiv 43 \pmod{100}$. Iskani zadnji dve cifri sta 4 in 3.

PRIMER 5. Poiščimo kriterija deljivosti naravnega števila z 9 in 11. Naj bo v desetiškem sistemu $n = N_0 + N_1.10 + N_2.10^2 + \ldots + N_s.10^s$. Ker je $10 \equiv 1 \pmod 9$, je za vsako naravno število k $10^k \equiv 1 \pmod 9$. Pomnožimo še z N_k: $N_k.10^k \equiv N_k \pmod 9$, nato pa seštejmo vse dobljene kongruence za $k = 0,1, \ldots, s$. Na levi strani dobimo ravno število n, na desni pa vsoto njegovih cifer:

$$n \equiv N_0 + N_1 + \ldots + N_s \pmod 9$$

Povejmo to z besedami: *naravno število da pri deljenju z 9 isti ostanek kot vsota njegovih desetiških cifer. Število je deljivo z 9 natanko tedaj, ko je deljiva z 9 vsota cifer.*

Pri deljenju z 11 je $10 \equiv -1 \pmod{11}$ in zato $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$. Sode potence števila 10 imajo ostanek 1, lihe pa -1. Odtod dobimo podobno kot prej, da je

$$n \equiv N_0 - N_1 + N_2 - \ldots \pmod{11}$$

Številu na desni pravimo *alternirajoča vsota* cifer števila n. Kadar je ta deljiva z 11, je tudi število sámo deljivo z 11.

NALOGA. Izpelji kriterij deljivosti števila n s 7 !

(*Rezultat*: $n \equiv N_0 + 3N_1 + 2N_2 - (N_3 + 3N_4 + 2N_5) +-\ldots \pmod 7$))

PRIMER 6. Dokazati je treba tole trditev: če je vsota kvadratov dveh naravnih števil $a^2 + b^2$ deljiva s 7, je deljiva tudi z 49. Napravimo tabelo ostankov kvadratov n^2 naravnih števil n pri deljenju s 7. V prvo vrstico zapišimo ostanek števila n, v drugo ostanek n^2 .

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Ostanek števila a^2 in ostanek b^2 pri deljenju s 7 je torej element množice $\{0, 1, 2, 4\}$. Vsota teh dveh ostankov je deljiva s 7, ker je $a^2 + b^2$ deljivo s 7. Očitno je to mogoče le tedaj, če sta oba ostanka enaka 0, števili a^2 in b^2 sta torej deljivi s 7. Če je kvadrat nekega števila deljiv s 7, je tudi število sámo deljivo s 7, saj je 7 praštevilo. Obe števili a in b sta torej deljivi s 7, njuna kvadrata zato s $7^2 = 49$, prav tako je deljiva z 49 vsota $a^2 + b^2$, kar smo dokazovali.

Napravimo zdaj majhen izlet v algebro. Ta bo posebno primeren za tiste, ki so že kdaj slišali za kolobar in obseg. Ponovimo pomen obeh besed. *Kolobar* pravimo vsaki množici, v kateri sta definirani dve računski operaciji, ki ju običajno označimo s + in . in za kateri veljajo običajna računska pravila (to so pravila, ki smo jih navajeni npr. v množici celih števil Z z navadnim seštevanjem in množenjem). *Obseg* pa pravimo takemu kolobarju, v katerem obstaja *enotski element* za množenje 1 ($a.1 = 1.a = a$ za vsak element a), vsak od 0 različen element a pa ima *inverzni element* b, da velja $a.b = b.a = 1$. Množica celih števil Z ni obseg, saj nobeno celo število razen 1 in -1 nima inverznega števila, ki bi bilo prav tako celo. Množica racionalnih števil (ulomkov) pa je obseg. Obe omenjeni množici imata neskončno število elementov. Zdaj pa bomo pokazali, da obstajajo tudi kolobarji in obsegi s končnim številom elementov.

Označimo z Z_m množico ostankov pri deljenju celih števil z m: $Z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. V tej množici bomo seštevali in množili. Vzemimo poljubni števili a in b iz Z_m in ju seštejmo. Če vsota $a + b$ ne leži v Z_m (kadar je $a + b \geqq m$), poiščimo njen ostanek v Z_m in tega proglasimo za vsoto $a + b$ v množici Z_m. Prav tako množimo: od produkta $a.b$ odštejemo, če je treba, primeren večkratnik števila m, da bo dobljeno število element množice Z_m. Ponazorimo povedano s primerom!

PRIMER 7. Vzemimo $m = 5$, $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pri seštevanju $1 + 2 = 3$ ni problema, saj je $3 \in Z_5$. Poiščimo še $3 + 4$! Ker $3 + 4 = 7$, ne leži v Z_5, odštejemo 5, da je $7 - 5 = 2 \in Z_5$. Torej je $3 + 4 = 2$ v množici Z_5. Podobno moramo od $3.4 = 12$ odšteti $2.5 = 10$, da bo dobljeno število $12 - 10 = 2$ element množice Z_5. Zato je $3.4 = 2$ v Z_5. Sestavimo tabelo za seštevanje in množenje v Z_5!

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

NALOGA. Sestavi tabeli za seštevanje in množenje v Z_3 in Z_4! Nato primerjaj med seboj tabele za množenje v Z_3, Z_4 in Z_5.

Ali opaziš kako bistveno razliko?

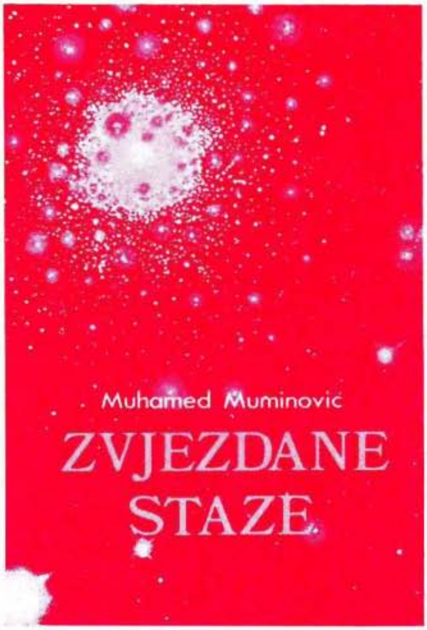
Ni težko videti, da veljajo za tako definirani operaciji + in . v množici Z_m vsi običajni zakoni, tako da je Z_m kolobar z m elementi. Ali je morda tudi obseg? Iz zgoraj zapisane tabele množenja za Z_5 preberemo $1.1 = 1$, $2.3 = 3.2 = 1$ in $4.4 = 1$. Števili 1 in 4 sta torej sami sebi inverzni, inverz števila 2 je 3, inverz števila 3 pa 2. Vsako od 0 različno število ima v Z_5 inverz, torej je Z_5 obseg. Kaj pa Z_4 ? Tu je 2.1 = 2, 2.2 = 0 in 2.3 = 2 . Število 2 torej nima inverznega števila in zato Z_4 ni obseg.

Splošno velja tole: *kolobar Z_m je obseg natanko tedaj, ko je m praštevilo.* Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, ... so torej obsegi. Tako smo za vsako praštevilo p našli obseg, ki ima p elementov. Obstajajo pa še drugi obsegi s končnim številom elementov.

France Forstnerič

NOVE KNJIGE

MUHAMED MUMINOVIĆ, ZVJEZDANE STAZE, SARAJEVO, AAD 1978, 97 str. Cena 73.-din



Sarajevski astronomi so izdali še eno knjigo, ki bo mladim ljubiteljem astronomije zvezdno nebo še bolj približala.

S preglednimi risbami so v njej predstavljena vsa pri nas vidna ozvezdja. Podroben opis nas seznani s podatki o posameznih imenitnejših zvezdah: o nazivu, sijaju, oddaljenosti in o njihovih posebnostih. Vrisane in opisane so tudi vse meglice, galaksije in zvezdne kopice, ki jih lahko vidimo že z manjšimi teleskopi. Knjigo dopolnjuje vrsta uspelih fotografij, ki so jih posneli na observatoriju Čolina Kapa v Sarajevu. Mogoče bo ravno zaradi teh fotografij knjiga našla svoje mesto na naši knjižni polici.

Miro Javornik

NOVI SERIJI PRESEKOVIH ZNAČK NA POT

Presekova značka "PRESEČKO" je pošla. Zato smo izdali serijo novih Presekovih značk. Ker so organizatorji tekmovanj mladih matematikov in fizikov že do sedaj podeljevali "PRESEČKE" na različnih tekmovanjih kot znak udeležbe, smo to serijo Presekovih značk izdali v soglasju s tekmovalnimi komisijami pri društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS. Tri značke: zeleno, modro in rdečo, naj bi dobili mladi tekmovalci kot priznanje za udeležbo na šolskem, občinskem in republiškem tekmovanju. Naročajo in kupujejo jih samo tekmovalne komisije. Ena značka - bela, pa bi bila v prodaji. Tako priporočamo organizatorjem tekmovanj, da si pravočasno zagotovijo značke, če se bodo odločili za njihovo podelitev kot priznanje za udeležbo na tekmovanju.

Pregled Presekovih značk:

	tekmovanje za Vegovo priznanje	tekmovanje mladih matematikov	tekmovanje mladih fizikov
šolsko tekmovanje	zelena značka	zelena zn.	zelena značka
občinsko tekmovanje	modra značka	-	-
republiško tekmovanje	rdeča značka	rdeča zn.	rdeča značka

Zeleno, modro in rdečo značko lahko naročijo tekmovalne komisije po ceni 10.-Din za komad pri Komisiji za tisk pri DMFA SRS, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227. Belo značko po ceni 15.-Din za komad lahko naročite prav tako pri Komisiji za tisk pri DMFA SRS. Opisani predlog podeljevanja značk naj bi še bolj populariziral tekmovanja mladih matematikov za Vegova priznanja in tekmovanja mladih matematikov in fizikov v srednjih šolah.

Tomaž Skulj

O HERONOVEM OBRAZCU IN ŠE MARSIČEM

Naj takoj poudarim, da mi bo tukaj slavni Heronov obrazec (kdo ga ne pozna?) samo pretveza, da spregovorim o nečem mnogo, mnogo važnejšem. Z njim bi vam rad približal nič manj kot pojma *poseben* in *splošen* (poljuben).

Heronov obrazec trdi:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

Tu je p ploščina trikotnika s stranicami a, b in c, s pa polovični obseg $s = (a + b + c)/2$ (sl. 1). Pripomba: črke a, b in c nastopajo v formuli (1) enakovredno. Pa saj drugače ni mogoče! S kakšno pravico bi a nastopala drugače kot b ali c, ko pa imam pri označevanju popolnoma prosto roko?

Ali velja formula (1) za enakokrak trikotnik? Seveda! Če velja za poljubnega, mora pač veljati tudi za enakokrakega. Poučno je pa vendarle, če se o tem prepričamo.

Enakokrak trikotnik se od poljubnega razlikuje po tem, da ima dve stranici enaki. Enako označimo z enakim in imamo stranice a, a in c (sl. 2). Polovični obseg postane $s = a + c/2$ in formula (1) po kratkem računu

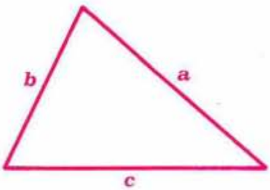
$$p = c/2\ \sqrt{a^2 - (c/2)^2} = cv/2$$

Pri zadnjem prehodu sem izkoristil zvezo $v = \sqrt{a^2 - (c/2)^2}$, veljavno za enakokrak trikotnik.

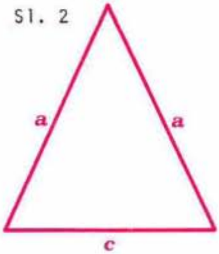
Ali velja formula (1) za enakostraničen trikotnik? Toliko bolj! Prepričajmo se! Stranice so tokrat a, a in a, polovični obseg pa $3a/2$ (sl. 3). Če to vstavimo v (1), dobimo $a^2\sqrt{3}/4$, torej starega znanca.

V obeh zadnjih primerih smo izhajali iz splošnega in šli k posebnemu. Ali je možna tudi obratna pot: iz posebnega k splošnemu - ali, kakor pravimo, *posplošitev*? Včasih je, a ne vedno, vsekakor pa je težja.

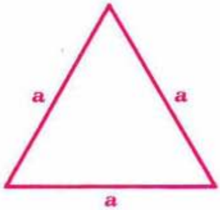
Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3



Kaj pa je splošnejše kot splošen trikotnik? Lahko je to četverokotnik. Ne verjamete? Če v četverokotniku ena stranica splahni, se njena dolžina skrči na nič, dobimo vendar trikotnik. Trikotnik je torej poseben primer četverokotnika, katerega ena stranica je nič.

Ali velja Heronov obrazec tudi za četverokotnike?

Tak, kot je zgoraj zapisan, prav gotovo ne, saj bi bila formula (1) krivična četrti črki d, ki bi v njej ne nastopala enako kot a, b in c. Torej: d je treba v formulo (1) nekako vriniti v upanju, da bo tako spremenjena formula veljala za četverokotnike. Vriniti, toda kako? Poskus $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ izpodleti, ker bi se ne ujemale enote: na levi bi bili cm^2, na desni $\mathrm{cm}^{5/2}$! Kaj pa

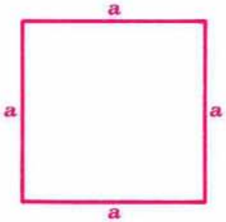
$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad (2)$$

Možno, ali pa tudi ne! Formulo (2) bi bilo treba dokazati, že brez dokaza pa jo lahko ovržemo, če najdemo poseben primer, ki mu ne ustreza. Če pa predlagano formulo (2) potrdi vrsta posebnih primerov, smo že bolj prepričani (čeprav brez dokaza ne stoodstotno).

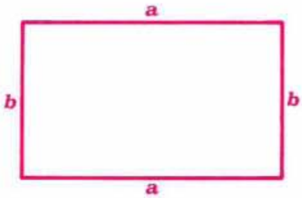
Pa poskusimo s posebnimi primeri:

1) Kvadrat. Stranice so a, a, a in a, polovični obseg je $2a$. Za ploščino nam da formula (2) a^2 in vse je v najlepšem redu (sl. 4).

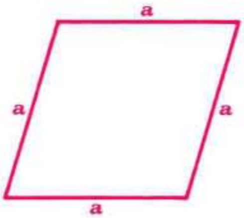
2) Pravokotnik. Stranice so a, a, b in b, polovični obseg $a + b$. Za ploščino izračunamo ab , kar spet drži (sl. 5).



Sl. 4



Sl. 5



Sl. 6

Drži torej formula (2) za poljuben četverokotnik? Ne prenaglimo se! Dosedanji posebni primeri so bili zelo, zelo posebni. Pojdimo dalje!

3) Romb. Stranice so a, a, a in a, $s = 2a$. Podatki so isti kot pri kvadratu, zato je tudi izračunana ploščina a^2 (sl. 6). To pa ni ploščina romba!

Polomili smo ga in sedaj že vidimo, zakaj. Formula (2) ne razlikuje med četverokotniki, ki imajo sicer enake stranice, a so zaradi različnih kotov vendarle različni. Pri trikotnikih tega ni: če imata dva trikotnika enake stranice, sta skladna.

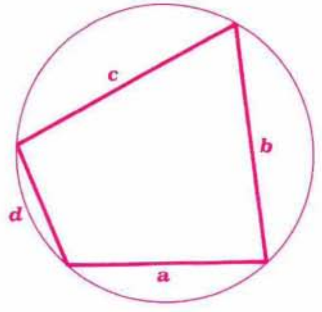
Je formula (2) samo polomija? Za kvadrat in pravokotnik je le veljala. Kaj pa imata kvadrat in pravokotnik, česar romb in romboid nimata? Dasta se včrtati krogu. Zato spremenimo našo posplošitev Heronovega obrazca tako, da trdimo: za vse tetivne četverokotnike (sl. 7) je formula (2) veljavna.

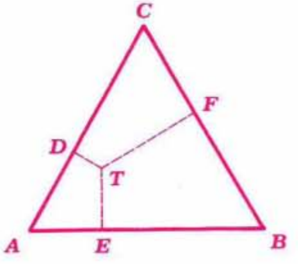
In res obstaja neposreden dokaz, da je tako! Predolg je, zato ga izpustimo.

Teh nekaj sprehodov iz splošnega v posebno in iz posebnega v splošno zaključimo z ugotovitvijo: splošno ima malo lastnosti, posebno jih ima dosti.

Primer. Kvadrat ima poleg drugih vse te lastnosti:

1) ima vse stranice enake;
2) ima vse kote enake;
3) ima enaki diagonali;
4) njegovi diagonali se sečeta pod pravim kotom;
5) njegovi diagonali se razpolavljata.





Sl. 7

Sl. 8

Splošnejšemu primeru, pravokotniku, ustrezajo 2), 3) in 5), ne pa 1) in 4). Še bolj splošnemu romboidu samo 5). Najbolj splošnemu četverokotniku, trapezoidu, pa ne ustreza nobena.

Vprašanja v premislek:

1) V kvadratu velja $d^2 = 2a^2$ (kjer je d diagonala, a stranica), kar smemo pisati kot $d^2 = a^2 + a^2$ ali celo $d^2 + d^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$.

Posploši to, če se da, na a) pravokotnik, b) romb, c) poljuben paralelogram, d) poljuben četverokotnik !

2) Pitagorov izrek, veljaven za pravokotni trikotnik $c^2 = a^2 + b^2$, posploši in sicer v dve smeri: a) iz ravnine v prostor in b) od pravokotnega trikotnika na poljubnega !

3) Če iz točke T v enakostraničnem trikotniku potegnemo pravokotnice na vse tri stranice, velja $TD + TE + TF =$ konst. (točke D, E in F so nožišča teh pravokotnic), ne glede na izbiro točke T (sl. 8). Dokaži, da ta formula ni veljavna za poljubni trikotnik!

Namig: preizkusi formulo s posebnimi izbirami točke T!

ODGOVORI

1a) $d^2 = a^2 + b^2$;

1b) $e^2/4 + f^2/4 = a^2$, kar je krajše za $e^2 + f^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$ (e in f sta diagonali romba);

1c) $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$

Dokaz. Poljubni paralelogram je narisan na sliki 9, kjer smo pri označevanju izkoristili dve njegovi najvažnejši lastnosti: nasprotni stranici sta enako dolgi in diagonali se razpolavljata.

Polovici diagonal in stranice obravnavajmo kot vektorje, usmerjene, kot nakazujejo puščice. Med njimi veljata zvezi

$$-\vec{a} = \vec{e}/2 + \vec{f}/2$$
$$\vec{b} = \vec{e}/2 - \vec{f}/2$$

Kvadrirajmo ju! To pomeni: skalarno pomnožimo vsako enačbo samo s seboj! Pri tem dobimo

$$a^2 = e^2/4 + \vec{e}.\vec{f}/2 + f^2/4$$
$$b^2 = e^2/4 - \vec{e}.\vec{f}/2 + f^2/4$$

Zadnji dve enačbi seštejemo, pa dobimo

$$a^2 + b^2 = e^2/2 + f^2/2$$

kar je isto kot odgovor.

1d) $e^2 + f^2 + 4m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (2)

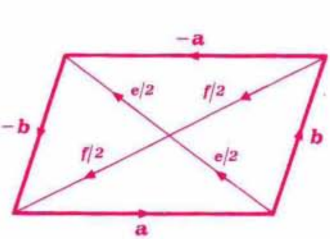
kjer je m spojnica središč obeh diagonal.

Dokaz. S slike 10 razberemo neposredno

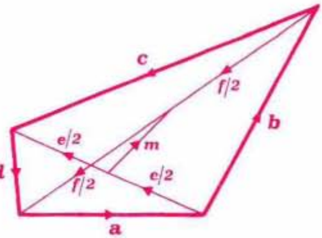
$$-\vec{a} = \vec{e}/2 + \vec{m} + \vec{f}/2$$
$$\vec{b} = \vec{e}/2 + \vec{m} - \vec{f}/2$$

To dvoje seštejemo in odštejemo, pa imamo

$$-\vec{a} + \vec{b} = \vec{e} + 2\vec{m}$$
$$-\vec{a} - \vec{b} = \vec{f}$$



Sl. 9



Sl. 10

Kvadrirajmo, pa dobimo

$$a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + b^2 = e^2 + 4\vec{m}.\vec{e} + 4m^2$$
$$a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2 = f^2$$

Vsota zadnjih dveh izrazov nam da

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 + 4\vec{m}.\vec{e} \qquad (3)$$

Bralca prosimo, da ponovi ves postopek še za stranici c in d. Dobiti mora

$$2c^2 + 2d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 - 4\vec{m}.\vec{e} \qquad (4)$$

Če enačbi (3) in (4) še seštejemo ter dobljeno vsoto delimo z dva, dobimo res (2). Dokaz je končan.

2d) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Dobili smo formulo za telesno diagonalo d kvadra z robovi a, b in c.

2b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. To pa je kosinusov izrek.

3) Če v poljubnem trikotniku postavimo T zdaj v oglišče A, zdaj v oglišče B in zdaj v oglišče C, postane vsota v predlagani formuli zapored višina iz A, višina iz B in višina iz C. V poljubnem trikotniku so višine različne in zato formula ne drži.

Za nameček pa izvemo, da je vrednost konstante v formuli za enakostranični trikotnik enaka $a\sqrt{3}/2$.

Karel Bajc

KRIŽANKA

ČEBULA

ROMAN TONETA SVETINE

DEL SMUČ. SKAKALNICE

LUKA V SLOV. PRIMORJU

OZVEZDJE NA SEVER. NEBU

POVELJE

ETIL-ALKOHOL

PREBIVALCI ZDA

CIGANI

ČVEKAČ

OKRAJŠANO IME ALEKSANDAR

ŽELEZOV OKSID

POTKA V SNEGU

GIBANJE PO ZRAKU

NEPRIJETNO POČUTJE

SKANDIN. M. IME

PUŠČAVA NA SEVER. ČILA

REKA V JV SIBIRIJI

ALKOHOLNA PIJAČA

ČIK

MAURICE RAVEL

SKUPNO IME NORDIJSKIH BOGOV

ČLOVEK ODGOVOREN ZA PRESKRBO

DERIVAT AMONIAKA

ZAŠČITNO SREDSTVO PROTI RJI

OSNOVNA ENOTA ZA MASO

NADA VIDMAR

NIKOLAJ OMERZA

PREDLOG

OSEBNI ZAIMEK

VRTNA SENČNICA

PODOBA GOLEGA TELESA

PREBIVALEC AONIJE

RAZVALINA

AKO

DEKAGRAM

JANEZ TRDINA

"ZNAMKE"

'OPEVKA-RICA SEPE

GLAVNO MESTO JORDANIJE

TELUR

NEMŠKI SLIKAR (MAX)

ANGL. NAGOVORNA BESEDA ZA MOŠKEGA

ANICA ČERNE

KRUTI HRVAŠKI FEVDALEC (FERENC)

VELIKO FINSKO JEZERO

USTANOVITELJ PERZIJE

FR. FIZIK IN ASTRONOM (DOMINIQUE)

NOVI SAD

ENAKA VOKALA

VELIKO GLASBILO S STRUNAMI

IRIDIJ

PRITLIKAV KONJ

IVAN ROB

LOVRO MATAČIĆ

OMLAČEN SNOP

TUJE Ž. IME

RASTLINOSLOVEC

RISBA: A. ŠMID-LEHNER

S ŠIVANJEM NAREJEN SPOJ

REKA V INDIJI

STIK DVEH PLOSKEV

MIGLJAJ

ŠIBENIK

UREJEN SKUPEK ROŽ

NASO OVID

TERCET

NASPROTJE IZVOZA

KOTOR

BEVKOVA POVEST

LIČILA

OTOČJE OB ZAHOD. IRSKI

HRIB JUŽNO OD BEOGRADA

VPAD

π

GUIDO RENI

BIVŠI PRAVNIŠKI POKLIC

7. IN 22. ČRKA

RDEČI KRIŽ

UČENJE

VOJAŠKA STOPNJA

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

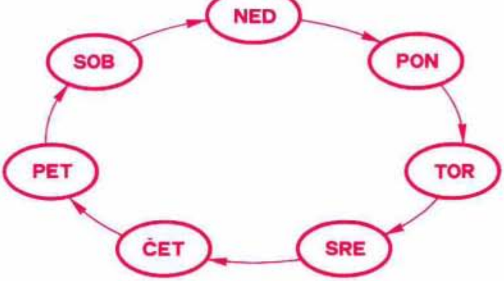
NA KATERI DAN V TEDNU ?

Ali veste, katerega dne v tednu (ponedeljek, torek,...):

- je bila rojena Nova Jugoslavija (29. 11. 1943)
- je v drugi svetovni vojni Nemčija napadla Sovjetsko zvezo (22. 6. 1941)
- je človek prvič stopil na Lunina tla (N. Armstrong in E. Aldrin, 21. 7. 1969)
- bomo praznovali Novo leto leta 1985
- ste bili sami rojeni

Na zastavljena vprašanja bi najbrž zaman iskali odgovore po enciklopedijah in zgodovinskih knjigah. Veliko bolj bi se razveselili koledarja za tisto leto, ki pripada določenemu datumu. Žal ti koledarji ponavadi niso več dostopni ali pa sploh še niso natisnjeni.

Koledarji so sestavljeni po natančno določenih pravilih; dnevi v tednu pa se periodično ponavljajo vsakih sedem dni. Če je danes sobota, je bila sobota tudi pred enim, dvema, tremi, ... tedni; in tudi čez en, dva, tri, ... tedne bo zopet sobota. Zato lahko danemu datumu pripadajoči dan v tednu izračunamo. Najprej določimo število dni, ki ločijo dani datum od današnjega dne (ali nekega drugega - *referenčnega* - datuma, za katerega poznamo pripadajoči dan v tednu). Določimo ostanek pri deljenju tega števila s 7 in se na shemi (sl. 1) pomaknemo od referenčnemu datumu pripadajočega dneva za toliko mest, kolikor je ostanek v smeri vrtenja urinega kazalca, če je referenčni datum pred danim datumom; sicer pa v nasprotni sme-



Sl. 1

ri; dan, kjer smo se na shemi ustavili, je danemu datumu pripadajoči dan v tednu.

Za to, da določimo, koliko dni loči dva datuma, moramo natančno vedeti, kako je koledar sestavljen. Osvežimo si spomin!

Danes se skoraj povsod na svetu uporablja koledar, ki ima za osnovo (navidezno) gibanje Sonca po nebesni krogli. Za to pot potrebuje Sonce 365 dni 5 ur 48 minut in 46 sekund.
Koledar je zbirka pravil, ki poskušajo vskladiti to neceloštevilsko količino dni z zaporedjem koledarskih let - t.j. razdobij s celim številom dni.

Dolgo časa je bil v rabi *julijanski koledar* (uvedel ga je Gaj Julij Cezar v prvem stoletju pred našim štetjem), ki je za *Sončevo leto* vzel približek 365 dni in 6 ur. Vsklajenost je bila zagotovljena z uvedbo *prestopnih let*: trem letom po 365 dni sledi prestopno leto s 366 dnevi. Leto je prestopno, če je deljivo s 4.

Kakor lahko izračunamo, je julijanski koledar vsakih 400 let zaostal za dobre 3 dni. V 16. stoletju je zaostajal že za celih 10 dni (za 3 dni so ga popravili že v 4. stoletju). Da bi odpravil zaostanek, je papež Gregor XIII. leta 1582 določil, da 4. oktobru sledi 15. oktober; zaostajanje pa je odpravil tako, da je iz prestopnih let izločil tista, ki se končujejo z dvema ničlama in niso deljiva s 400. Temu koledarju pravimo *gregorijanski koledar*. Gregorijanski koledar so takoj sprejele katoliške dežele (Italija, Španija, Poljska, Francija (20. 12. 1582), Avstrija (17. 1. 1584)). V protestantski Angliji in njenih kolonijah so ga sprejeli šele 14. septembra 1752. Še kasneje, po revoluciji, so 14. februarja 1918 gregorijanski koledar sprejeli v Rusiji (tako se obletnica Oktobrske revolucije sedaj praznuje 7. novembra) in v Srbiji 1. februarja 1919.*

Tudi gregorijanski koledar, kot pokaže račun, ni popolnoma natančen. V 400 letih prehiti za skoraj 3 ure (2 uri in 53 minut), oziroma v 3320 letih za cel dan. Vendar ta napaka nima praktičnega pomena.

Koledarsko leto se v gregorijanskem koledarju deli na 12 mesecev: januar, februar, marec, april, maj, junij, julij, avgust, september, oktober, november in december, ki imajo v navadnem letu zaporedoma po: 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31 dni. V prestopnih letih ima februar 29 dni. Pojem meseca se je razvil v procesu vsklajevanja Lunskih mesecev (29,5 dni) s Sončevim letom.

Po julijanskem koledarju je gregorijanski koledar prevzel tudi sedemdnevni teden, ki so si ga Rimljani sposodili od vzhodnih narodov. Pri Rimljanih so bili posamezni dnevi v tednu posvečeni Soncu in Luni ter petim, tedaj znanim planetom (Mars, Merkur, Jupiter, Venera in Saturn), kar se je ohranilo v imenih dni v tednu v večini romanskih jezikov. Več o tem, predvsem pa o zgodovini koledarja, najdemo v Slovenski stoletni pratiki in v učbenikih astronomije. Še več pa izvemo v knjigi: S.I. Seleš nikov, Istorija kalendarja in hronologija, Nauka, Moskva 1977.

Kar smo povedali, že zadostuje za naš izračun. Določimo npr. dan v tednu, ki pripada datumu 29. 11. 1943 !

Vemo, da je 19. 8. 1977 bil petek (t.j. referenčni datum). Izračunajmo koliko dni loči oba datuma! V izračunu mora vključno vstopati eden od obeh datumov, ker mora biti za naše namene med dvema zaporednima dnevoma razlika 1. Med letoma 1943 in 1977 je 33 polnih let. Od teh jih je 9 (!?) prestopnih, kar dá

* Navedeni so prvi gregorijanski datumi

365 x 33 + 9 = 12054 dni. Do konca leta 1943 manjka še en dan v novembru in 31 dni v decembru; skupaj 32 dni. Od začetka leta 1977 (ki ni prestopno) do (vključno) 19. 8. 1977 je 31 + + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 19 = 231 dni. Celotna razlika je 12054 + 32 + 231 = 12317 dni. Ostanek pri deljenju s 7 (12317 = 1759 x 7 + 4) je 4. Na shemi moramo šteti od petka 4 korake v smeri nasprotni gibanju urinega kazalca, ker je referenčni datum (19.8.1977) za danim datumom (29.11. 1943). Ustavili smo se na ponedeljku. Dne 29. 11. 1943 je bil ponedeljek.

Kot vidimo, je pot do željenega odgovora kar dolga. Dodaten premislek glede prestopnih let je potreben, če sta datuma iz različnih stoletij; natančneje, če je med njima 28. februar z letnico, ki se konča na dve ničli.

Poglejmo, ali pri določanju dneva morda le ne obstaja enostavnejša pot?

STOLETNI KOLEDAR

Leta 1801–1900				1901–2000				Mesci J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01	29	57	85		25	53	81	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
02	30	58	86		26	54	82	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
03	31	59	87		27	55	83	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
04	32	60	88		28	56	84	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
05	33	61	89	01	29	57	85	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
06	34	62	90	02	30	58	86	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
07	35	63	91	03	31	59	87	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
08	36	64	92	04	32	60	88	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
09	37	65	93	05	33	61	89	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
10	38	66	94	06	34	62	90	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
11	39	67	95	07	35	63	91	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
12	40	68	96	08	36	64	92	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
13	41	69	97	09	37	65	93	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
14	42	70	98	10	38	66	94	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
15	43	71	99	11	39	67	95	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
16	44	72		12	40	68	96	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
17	45	73		13	41	69	97	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
18	46	74		14	42	70	98	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
19	47	75		15	43	71	99	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
20	48	76		16	44	72	00	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
21	49	77	00	17	45	73		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
22	50	78		18	46	74		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
23	51	79		19	47	75		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
24	52	80		20	48	76		4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
25	53	81		21	49	77		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
26	54	82		22	50	78		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
27	55	83		23	51	79		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
28	56	84		24	52	80		2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

Dnevi

N	1	8	15	22	29	36
P	2	9	16	23	30	37
T	3	10	17	24	31	
S	4	11	18	25	32	
Č	5	12	19	26	33	
P	6	13	20	27	34	
S	7	14	21	28	35	

Uporaba: Na kateri dan pride n.pr. 29 november 1943! Najprej poiščemo leto 43. Najdemo ga v v drugem stolpcu tega stoletja. V isti vrsti poiščemo število, ki je v stolpcu N (november). Dobimo število 1. To število prištejemo k datumu, torej 29 + 1 = 30. V tabeli „Dnevi" poiščemo število 30 in vidimo, da je to ponedeljek.

Sl. 2

V nekaterih koledarskih izdajah (npr. Statistični koledar Jugoslavije, Slovenska stoletna pratika, ...) najdemo posebne tabele, tako imenovane *stoletne koledarje* (sl. 2), ki nam iskanje precej olajšajo. Čeprav je stoletni koledar dober pripomoček pri običajnem računanju, pa bi ga le redko kateri programer z veseljem vgradil v svoj program. Poleg tega dobimo odgovore le za eno ali dve stoletji.

Zato je toliko bolj zanimivo, da je mogoče pravila gregorijanskega koledarja in njegovo zvezo z dnevi v tednu strniti v razmeroma enostaven (Zellerjev) obrazec. Preden napišemo obrazec, določimo iz danega gregorijanskega datuma dan.mesec.leto

nekaj količin, ki nastopajo v obrazcu

k = dan

$m = \begin{cases} \text{mesec} - 2 & \text{, če je mesec} \geqq 3 \text{ (t.j. po februarju)} \\ \text{mesec} + 10 & \text{, če je mesec 1 ali 2 (t.j. januar, februar). V tem primeru leto za 1 zmanjšamo} \end{cases}$

c = zadnji dve cifri števila, ki označuje leto

d = število, ki označuje leto brez zadnjih dveh cifer

Tako je na primer za:

29. 11. 1943 ... $k = 29$, $m = 9$, $c = 19$, $d = 43$

1. 1. 1800 ... $k = 1$, $m = 11$, $c = 17$, $d = 99$

Po *Zellerjevem obrazcu*

$$t = k + [(13 \times m - 1)/5] + [5 \times d/4] + [21 \times c/4]$$

je iskani dan v tednu, določen z ostankom, ki ga dobimo, če t delimo s 7:

0 ... nedelja, 1 ... ponedeljek, ... , 6 - sobota

Oglati oklepaji v Zellerjevem obrazcu pomenijo *operacijo "celi del"*. Tako je npr. $[3,14] = 3$ in $[5] = 5$

Po Zellerjevem obrazcu dobimo na v sestavku zastavljena vprašanja naslednje odgovore:

```
DATUMU 29. 11. 1943  PRIPADA PONEDELJEK
DATUMU 22.  6. 1941  PRIPADA NEDELJA
DATUMU 21.  7. 1969  PRIPADA PONEDELJEK
DATUMU  1.  1. 1985  PRIPADA TOREK
DATUMU  1.  1. 1800  PRIPADA SREDA
DATUMU 19.  8. 1977  PRIPADA PETEK
```

"Izračun" teh odgovorov sem prepustil naslednjemu programu, napisanem v *programskem jeziku Pascal.*

```
program Zeller( input, output );
var
   dan, mesec, leto, m, l, t : integer;
begin
   page( output );
   while not eof do begin
      readln( dan, mesec, leto );
      m := (9 + mesec) mod 12 + 1;
      l := leto - m div 11;
      t := dan + (13*m - 1) div 5 + 5*(l mod 100) div 4 +
           21*(l div 100) div 4;
      write( "0", " ":10, "DATUMU", dan:4, ".", mesec:3,
             ".", leto:5, "  PRIPADA " );
      case t mod 7 of
       0 : writeln( "NEDELJA" );
       1 : writeln( "PONEDELJEK" );
       2 : writeln( "TOREK" );
       3 : writeln( "SREDA" );
       4 : writeln( "ČETRTEK" );
       5 : writeln( "PETEK" );
       6 : writeln( "SOBOTA" )
      end
   end
end.
```

Vladimir Batagelj

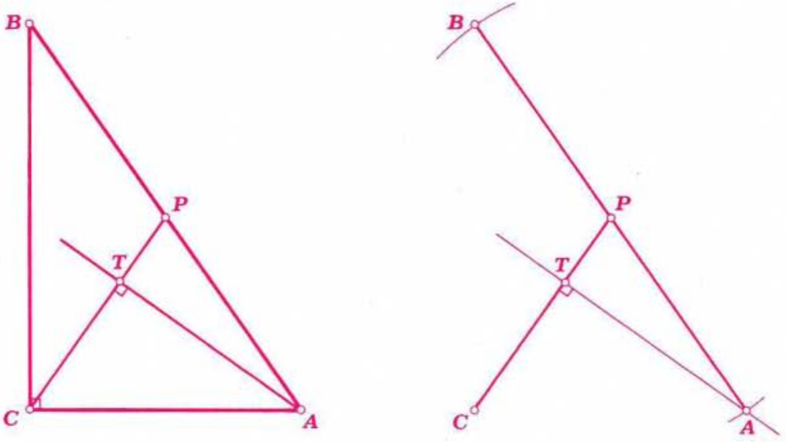
PETA ŠTEVILKA PRESEKA

Morda ste bili malo začudeni, ker številke letošnjega letnika Preseka niso izšle po vrsti. Peta številka z zaokroženo vsebino, na katero smo se že navadili, je izšla pred drugo številko. Delo L.D. Landau-J.B. Rumer, "Kaj je teorija relativnosti" smo namreč namenili kot naš prispevek ob 100 letnici Einsteinovega rojstva, ki smo jo praznovali v letu 1979. Hkrati smo izdali v Presekovi knjižnici še en prispevek, posvečen teoriji relativnosti: Janez Strnad, "Relativnost za začetnike - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce", ki jo lahko posebej naročite pri Komisiji za tisk, 61001 Ljubljana, p.p. 227. Cena je 48.-din

Zvonko Trontelj

REŠITVE NALOG

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK S PRAVOKOTNIMA TEŽIŠČNICAMA - rešitev s strani 142



Na skici (slika 1) smo vzeli, da se sekata pravokotno težiščni ci t_a in t_c. Očitno se ne moreta sekati pravokotno t_a in t_b, ker je kot ATB gotovo večji od pravega. Težiščnica $CP = t_c$ je v pravokotnem trikotniku enaka polovični hipotenuzi 6 cm. Težišče jo razdeli v razmerju 2:1 , zato je $\overline{CT} = 4$ cm in $\overline{TP} = 2$ cm.

Narišemo težiščnico CP in na njej težišče T ter v težišču pravokotnico nanjo. V točki P, ki je razpolovišče hipotenuze, zabodemo šestilo, odmerimo polovico hipotenuze, t.j. $\overline{PC} = t_c = 6$ cm in nanesemo na pravokotnico. Dobimo točko A, ki jo zvežemo preko P, da dobimo na drugi strani še točko B.

Peter Petek

NEKAJ NALOG MLADIM VEGOVCEM - rešitev s strani 143

1. Ničla se pojavi 189 krat, vsako drugo število pa 300 krat.

2. $A \quad B = \{42\}$

3. Obe nalogi je rešilo 13 učencev.

4. Velja $2^{100} = 16^{25}$, vsaka potenca z osnovo 16 pa se končuje s številom 6.

5. Prvi ribič dobi 7 din, drugi pa 1 dinar.

6. Dani enakokraki trapez sestavljajo trije enaki enakokraki trikotniki. Zato $p = (3/4)k^2$

7. Količnik se zmanjša za približno 18%.

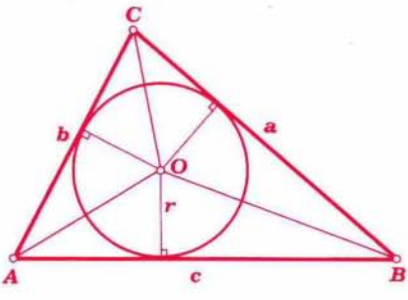
8. Pomagaj si z razcepom na prafaktorje!

9. Reši sam!

10. Središče očrtanega kroga leži zunaj trapeza, ker je središčni kot večji od 180°.

11. $p = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} =$

$= \frac{(a + b + c)}{2} \cdot r$



12. $(10a + b) + (10b + a) =$
$= 66$, dobimo $a + b = 6$
Sam zapiši vsa dvoštevilčna števila, ki imajo vsoto cifer 6 !

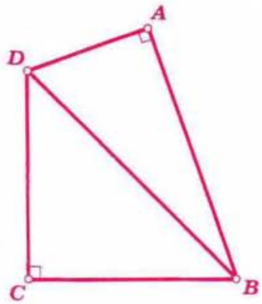
13. Naj bodo a, b in c, $(a \neq 0)$ cifre trištevilčnega števila $\overline{abc}$. Zagotovo je $\overline{abc} < (a + 1).100$

(1) če je $b \neq 0$ ali $c \neq 0$, je tudi $a + b + c \geq a + 1$.

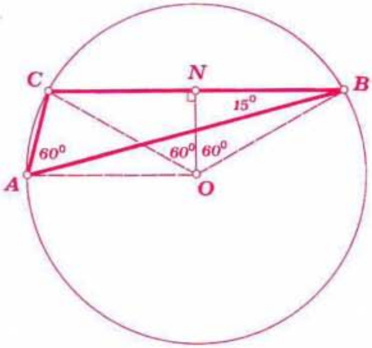
$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} < \frac{(a+1).100}{a + 1} = 100$$

(2) če je $b = c = 0$, potem je $\overline{abc} = a.100$ in $a + b + c = a$; tako dobimo $\overline{abc}/(a + b + c) = 100$

14. Izraz ima najmanjšo vrednost, če je $(2/3)x - y - 3 = 0$. Sledi $y = (2/3)x - 3$. Iz pogojev $y \in N$ in $x < 15$ dobimo vrednosti za x: 3, 9, 12, vrednosti za y pa so: -1, 1, 3, 5. Sam zapiši množico urejenih parov (x,y)!



15. $p_{ABCD} = p_{ABD} + p_{BCD} =$
$= \frac{\overline{AB}.\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}.\overline{CD}}{2} =$
$= \frac{(\overline{AB} + \overline{AD})^2}{4}$, ker je
$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 +$
$+ \overline{CD}^2 = 2\overline{BC}^2$ in
$\overline{BC}.\overline{CD} = \overline{BC}^2 =$
$(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2)/2$. Dobimo
$p_{ABCD} = 400\ m^2$



16. Pri tej nalogi upoštevaj odnos med središčnim in obodnim kotom. Sledi (glej sliko): $\sphericalangle BOC = 120^0$, $\overline{ON} =$ $= r/2$, $\overline{BN} = r\sqrt{3}/2$; ker je $BC \| AO$, je $p_{ABC} =$ $= (1/2).\overline{BC}.\overline{ON} = r^2\sqrt{3}/4$.
$p_{ABC} = \sqrt{3}\ dm^2$.

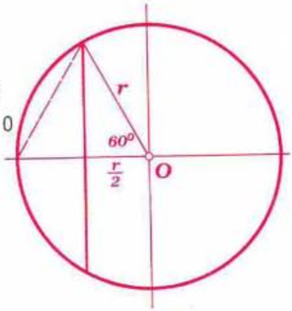
17. $d = 4r(1 + \sqrt{3}) = 2(1 + \sqrt{3})m$

(glej sliko desno spodaj)

18. Enačbo lahko pišemo v obliki:

$$(4x^2 - 4x + 1) + (9y^2 - 6y + 1) + $$
$$+ (16z^2 - 8z + 1) = 0$$
$$(2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 + (4z - 1)^2 = 0$$

Od tod dobimo:



$2x - 1 = 0 \quad , \quad x = 1/2$
$3y - 1 = 0 \quad , \quad y = 1/3$
$4z - 1 = 0 \quad , \quad z = 1/4$

19. Naj bo prvotni ulomek a/b ; $(a + b)/2b = a/b + 1/9$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} + \frac{1}{9} \quad , \quad \frac{a}{b} = x$$

$x = 7/9$

20. $(x + y)(x - y) = 1.3.5.7$

Če sta x in y naravni števili, potem sta tudi $x-y$ in $x+y$ celi števili in $x+y > x-y$. Tako dobimo naslednje možnosti:

(1) $x - y = 1$ in $x + y = 105$
(2) $x - y = 3$ in $x + y = 35$
(3) $x - y = 5$ in $x + y = 21$
(4) $x - y = 7$ in $x + y = 15$

Iz (1) dobimo:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 105 \\ \hline 2x &= 106 \\ x &= 53 \\ y &= 52 \end{aligned}$$

Podobno imamo še rešitve:
iz (2): $x = 19$, $y = 16$
iz (3): $x = 13$, $y = 8$
iz (4): $x = 11$, $y = 4$

21. a) $1/(1 + x)$

b) $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = \ldots$
$= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

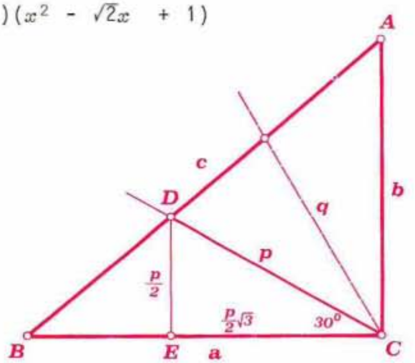
22. Iz podobnosti trikotnikov ABC in DBE dobimo:

$\frac{p}{2} : b = (a - \frac{p\sqrt{3}}{2}) : a$ sledi

$$p = \frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}$$

S podobnim postopkom dobimo:

$$q = \frac{2ab}{b+a\sqrt{3}}$$



Pavle Zajc

NALOGE O URI - rešitev s str. 192

a) $2^h\ 48' \to 204^\circ$, $11^h\ 9' \to 280{,}5^\circ$, $10^h\ 34' \to 113^\circ$

Kot med kazalcema označimo s φ in ga izračunamo kot razliko kotov, ki ju oklepata kazalca z 12. uro v smeri, ki je nasprot na vrtenju urinih kazalcev. Čas, ki ga kazalca kažeta, je h-ur in m-minut.

Takrat je kot, ki ga oklepa z 12. uro

mali kazalec	$h.30^\circ + m.0{,}5^\circ$
veliki kazalec	$m.6^\circ$

razlika $(\varphi) = |h.30^\circ - m.5{,}5^\circ|$

Tako dobimo seveda lahko tudi kote, ki so večji od iztegnjenega. Če želimo v takem primeru upoštevati manjši kot, vzamemo rajši $360^\circ - \varphi$. Tako bi npr. ugotovili, da ob $2^h\ 48'$ kazalca oklepata kot $360^\circ - 204^\circ = 156^\circ$.

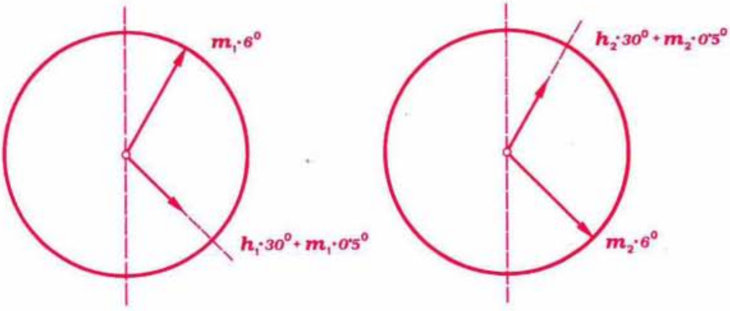
b) Kot med kazalcema je 0° , zato za ure $h = 1,2,3,\dots,11$ dobimo število minut iz enačbe:

$$30h + 0{,}5m = 6m \Rightarrow m = 60h/11$$

c) $\varphi = 90^\circ$

h - ur	enačba, iz katere se dá izračunati število minut
0, 1, 2	$6m-30h-0{,}5m = 270 \Rightarrow m = (540+30h)/11$
3 do 11	$30h+0{,}5m-6m = 90 \Rightarrow m = (60h-180)/11$
0 do 8	$6m-30h-0{,}5m = 90 \Rightarrow m = (180+60h)/11$
9,10,11	$30h+0{,}5m-6m = 270 \Rightarrow m = (60\ -540)/11$
$\varphi = 180^\circ$	
0 do 6	$6m-30h-0{,}5m = 180 \Rightarrow m = (60h+360)/11$
7 do 11	$30h+0{,}5m-6m = 180 \Rightarrow m = (60h-360)/11$

d)



Na sliki 1a in 1b so zapisani koti, ki jih oklepajo kazalci z 12. uro.

Zapišemo dve enačbi

$$6m_1 = 30h_2 + 0{,}5m_2 \qquad (1)$$
$$30h_1 + 0{,}5m_1 = 6m_2 \qquad (2)$$

Pri reševanju sistema enačb ne smemo pozabiti, da mora biti število ur (h_1, h_2) vedno celo, število minut pa je lahko tudi necelo. Preuredimo enačbi (1) in (2)

$$6m_1 - 0{,}5m_2 = 30h_2$$
$$-0{,}5m_1 + 6m_2 = 30h_1$$

in izrazimo število minut m_1 in m_2 s številom ur h_1 in h_2

$$m_1 = (720h_2 + 60h_1)/143$$
$$m_2 = (720h_1 + 60h_2)/143$$

Za h_1 in h_2 lahko izberemo katerikoli celi števili od 0 do 11. Primer $h_1 = 5$, $h_2 = 1$. Izračunamo $m_1 = 7{,}13$, $m_2 = 25{,}59$. Kazalca kažeta v prvem položaju čas $5^h\ 7{,}13'$, če zamenjata vlogi pa čas $1^h\ 25{,}59'$.

Danijel Bezek

ASTRONOMIJA

DRUGI TABOR ASTRONOMOV NAVDUŠIL VSE UDELEŽENCE

Tudi letos je astronomsko društvo Javornik, podobno kot lani, organiziralo tabor za vse tiste radovedneže, ki radi opazujejo nebo. Tabor je potekal v okviru gibanja "Znanost mladini" od 20. do 27. julija na planini Javornik nad Črnim vrhom. Kar precejšnje število navdušencev se nas je zbralo! Tako nas je bilo 18 iz Slovenije, poleg nas pa še dva udeleženca iz Nemčije in po eden iz Trsta, Zagreba in Sarajeva. Vendar pa še tako idealen tabor ne more brez vodstva in tako so nas na Javorniku vodili Jure Šoba, Marijan Prosen, Herman Mikuž in drugi.

Delo smo si razdelili na tri dele. Podnevi smo pod vodstvom Katarine Brčan, študentke astronomije, opazovali aktivnost Sonca. To smo razbrali iz števila sončnih peg. Letos jih je bilo zelo veliko, saj se je redno pojavljalo devet skupin peg, v katerih so nekatere pege rasle, druge so se manjšale, nekatere so izginjale, pojavljale pa so se tudi nove. Tako je bila aktivnost Sonca iz dneva v dan različna, vendar pa se je Wolfovo število gibalo med 110 in 130. To Sončevo aktivnost smo opazovali na ruskem teleskopu s štiridesetkratno povečavo. Zapiski, ki smo jih proti koncu tabora uredili, so pokazali, da je letos Sončeva aktivnost verjetno maksimalna in bo drugo leto začela upadati. Ponoven maksimum naj bi bil čez enajst let.

Poleg Sonca smo tri noči opazovali tudi meteorje. Prva skupina je pod vodstvom Andreja opazovala meteorje v znanih radiantih, druga skupina, ki jo je vodil Hagen iz ZR Nemčije, pa je poskušala določiti radiante za opazovane meteorje. Tudi ta opazovanja so lepo uspela, saj smo videli okrog tristo meteorjev, ki so sodili večinoma v štiri skupine: akvaride, kaprikornide, alfa akvaride in delta akvaride. Te štiri skupine so bile v tem času tudi najbolj aktivne.

Kot glavni cilj tega tabora smo si zastavili opazovanje spremenljivk. To so zvezde, ki zaradi različnih vzrokov spreminjajo svoj sij*. Opazovali smo po Pickeringovi in Argelanderjevi metodi, vodila pa sta nas Katarina Brčan in Boris Kham. Pomagal nam je tudi kolega iz Sarajeva, ki je pokazal, kako računati spremembo sija.

Spremenljivke smo nameravali opazovati trikrat v eni noči in sicer ob desetih, dvanajstih in dveh, vendar nam niti enkrat ni uspelo izvršiti vseh treh opazovanj, ker je nebo prekrila megla.

Sij spremenljivke smo določali tako, da smo jo primerjali s sosednjimi zvezdami ozvezdja, katerih sij smo prečitali iz kataloga. Rezultati, ki smo jih uredili na koncu opazovanj, so kar dobri, saj se le malo razlikujejo od podatkov v astronomskih efemeridah. O spremenljivkah nam je profesor Fran Dominko pripravil zanimivo predavanje, ki smo ga z veseljem poslušali.

Naše delo na Javorniku je bilo zares plodno in vsi smo se dosti naučili.

"Delo ne sme biti samo umsko!" smo si prigovarjali, ko smo se po kosilu odpravljali na delovno akcijo. Urejevali smo cesto, ki pelje do lokacije bodočega observatorija, ki bo zgrajen v nekaj letih.

Mislim, da je tabor navdušil vse udeležence in da nam je pokazal nove smernice za naše delo. Čeprav je bilo vsem ob koncu tabora žal, da je teden že minil, smo bili vseeno veseli, saj smo odnesli iz tabora spoznanje, da so v svetu zvezd nenehne spremembe in obljubili smo si, da se bomo v ta svet tišine še velikokrat vrnili.

Duša Elesini

* Glej še članek Marijana Prosena: O siju v Preseku 6 (1978/79) št. 2, stran 76.

PREMISLI IN REŠI

Rešitev naloge iz prve številke Preseka nam je poslalo sedem bralcev. Pravilno je nalogo rešil le Matjaž Mihac, učenec prvega razreda gimnazije v Celju. Za nagrado prejme knjigo *Kratka zgodovina matematike*. Ker Matjaž svoje rešitve na žalost ni opisal, objavljamo avtorjevo rešitev.

CILJ	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432

TRDNJAVA

CILJ	1	4	12	55	235	1157	5015
1	3	8	43	180	922	3858	10030
4	8	10	70	452	1544	10522	47074
12	43	70	159	681	4198	22664	127843
55	180	452	681	1521	6400	47583	266394
235	922	1544	4198	6400	14321	68304	533210
1157	3858	10522	22664	47583	68304	150929	752443
5015	10030	47074	127843	266394	533210	752443	1655815

KRALJ

Množico poti, ki jih lahko naredi trdnjava pri potovanju iz vogala šahovnice v nasprotni vogal, bomo najlaže pošteli, če začnemo v ciljnem polju. Število možnosti vstopov v ciljno polje vpišimo kar v šahovska polja. Na koliko načinov lahko iz nekega polja pridemo do cilja izračunamo nadalje tako, da seštejemo števila iz polj, v katera lahko vstopimo. Na slikah vidite rešitev za trdnjavo in kralja. Zdaj, ko poznate princip, pa lahko poskusite še s skakačem. Bo šlo?

Rešitve naslednje naloge pa pričakujemo do 20. aprila.

Ljubomir Kostrevc

Katero naravno število med 1 in 1000 ima največ deliteljev?

Vladimir Batagelj

TEKMOVANJA - NALOGE

9. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Najboljši osmošolci iz občinskih tekmovanj so se 27. maja 1979 pomerili na republiškem tekmovanju.

Od 173 udeležencev je zlato Vegovo priznanje prejelo 38 najuspešnejših.

Ti so:

Prvonagrajenci: TURNŠEK Aleksej, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana,
ČUFER Simona, o.š. A.T. Linhart, Radovljica,
RODOŠEK Robi, o.š. P. Voranc, Maribor.

Drugonagrajenci: PRIBAKOVIĆ Ana, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana,
MEDICA Boris, o.š. R. Jakopič, Ljubljana,
BLAZNIK Polona, o.š. M. Jarc, Ljubljana.

Zlato Vegovo priznanje pa so prejeli učenci: PEPELJNJAK Ivek, o.š. Radomlje, MOZETIČ Dean, o.š. P. Tomažič, Koper, HARTMAN Niko, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, HORVAT Andrej, o.š. Kočevje, BENSA Mitja, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, KOBE Boštjan, o.š. Ledina, Ljubljana, ŠPAN Tomaž, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, ZALAR Borut, o.š. J. Slak-Silvo, Trebnje, ALASBEGOVIĆ Aleš, o.š. Lucija, Piran, BAKULA Robert, o.š. P. Voranc, Ljubljana, KRSTOV Tanja, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, PUST Tadeja, o.š. Trebnje, STRAUS Matjaž, o.š. B. Ziherl, Ljubljana, TEKAVEC Tomaž, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, VARŠEK Alen, o.š. Bičevje, Ljubljana,PELKO Stojan, o.š. K. Rupena, Novo mesto, TAVČAR Tone, o.š. Padlih borcev. Žiri, ČOPIČ Nina, o.š. V. Vodnik, Ljubljana, NOVAK Pavle, o.š. L. Seljak, Kranj, RANT Živa, o.š. F. Prešeren, Kranj, UDIR Milan, o.š. F. Prešeren, Kranj, KARDELJ Janez, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, KROŠELJ Peter, o.š. F. Albreht, Kamnik, DOLINŠEK Jana, o.š. Lackov odred, Maribor, NEKREP Matjaž, o.š. Pohorski odred, Sl. Bistrica, LANDEKER Marjan, o.š. Pohorski odred, Oplotnica, KLEVA Alfred, o.š. V. Šmuc, Izola, DERNOVŠEK Igor, o.š. T. Čufar, Ljubljana, KOZINA Zoran, o.š. S. Žagar, Kranj, ROŽIČ Mateja, o.š. M. Jarc, Črnomelj, SUHAČ Helena, o.š. P. Voranc, Ljubljana, GVOZDANOVIĆ Tomaž, o.š. P. Voranc, Ljubljana.

Republiška komisija je pod vodstvom prof. Franceta Galiča pripravila tele naloge:

1. Poenostavi izraz:

$$1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{98} - a^{99} + \frac{a^{100}}{1 + a}$$

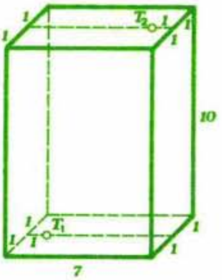
in izračunaj njegovo vrednost, če je $a = 5$!

2. Če seštejemo neko dvomestno naravno število in število, ki ima isti cifri v obratnem vrstnem redu, dobimo kvadrat naravnega števila. Poišči vsa taka naravna števila !

3. Za pravokotnik $ABCD$ vemo: $\overline{AB} = \frac{3}{4}\,\overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{BC} + 7$, (v centimetrih)

   a) Izračunaj stranici pravokotnika!
   b) Nariši pravokotnik v merilu 1 : 5 in poišči točko T, iz katere vidimo stranici $\overline{AB}$ in $\overline{BC}$ pod kotoma 30° !

4. Izračunaj dolžino najkrajše poti, ki gre po površju kvadra od točke T_1 do T_2 ! (Podatki so na skici)



5. Osnovna ploskev piramide je romb s stranico a in kotom 120°. Presek skozi vrh piramide in daljšo diagonalo romba je pravokoten na osnovno ploskev piramide in je enakostranični trikotnik. Izračunaj prostornino in površino piramide!

Rešitve:

1. $$\frac{(1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{98} - a^{99})(1 + a)}{1 + a} + \frac{a^{100}}{1 + a} =$$
$$= \frac{1 + a - a - a^2 + a^2 + a^3 - a^3 - a^4 + \dots + a^{99} - a^{99} - a^{100} + a^{100}}{1 + a} =$$
$$= \frac{1}{1 + a}$$; Vrednost izraza, če je $a = 5$, je $\frac{1}{6}$.

2. Naj bo število oblike: $10a + b$, število z obrnjenima ciframa pa je $10b + a$. Pri tem velja: $c^2 = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$, iz česar sledi, da je $a + b = 11$.
Dobimo možnosti:

a	b	število
2	9	29
3	8	38
4	7	47
5	6	56

3. a) Naj bo $\overline{BC} = x$

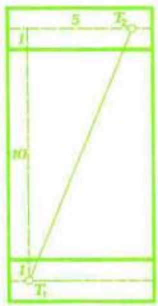
$$(\frac{3}{4}x)^2 + x^2 = (x + 7)^2$$
$$(\frac{5}{4}x)^2 = (x + 7)^2$$
$$\frac{5}{4}x = x + 7 \qquad x = 28$$

$\overline{BC} = 28$ cm , $\overline{AB} = 21$ cm

b) Narišemo pravokotnik s stranicama 4,2 cm; 5,6 cm in nad stranicama AB, BC enakostranična trikotnika ABS_1, BCS_2 . Iskana točka T je presek krožnic $k_1(S_1, \overline{AB})$, $k_2(S_2, \overline{BC})$, ki je zunaj pravokotnika $ABCD$.

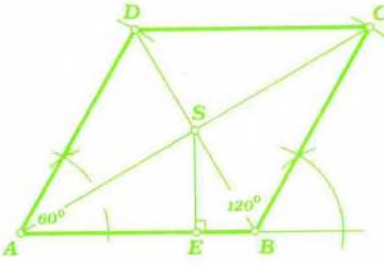
4. $\overline{T_1T_2}^2 = 12^2 + 5^2$

$\overline{T_1T_2} = 13$



5. a) Višina piramide je
$v = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a$
in prostornino lahko brž izraču-
namo:
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}a$
$V = \frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$

b) Površina piramide je
$P = O + pl$
Izračunajmo najprej stransko vi-
šino v_1 :
$v_1^2 = (\frac{3}{2}a)^2 + (\frac{a}{4}\sqrt{3})^2$
$v_1 = \frac{a}{4}\sqrt{39}$
$P = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{39}$
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{13})$



KOLEDAR TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE ZA VEGOVA PRIZNANJA V L. 1980

- DO 1. MAJA 1980 ŠOLSKA TEKMOVANJA ZA UČENCE 5.,6.,7., 8. R.
- 10. MAJA 1980 OBČINSKA TEKMOVANJA ZA UČ. 5.,6.,7.,8. R.
- 17. MAJA 1980 REPUBLIŠKO TEKMOVANJE ZA UČENCE 8. RAZREDA

Pavle Zajc

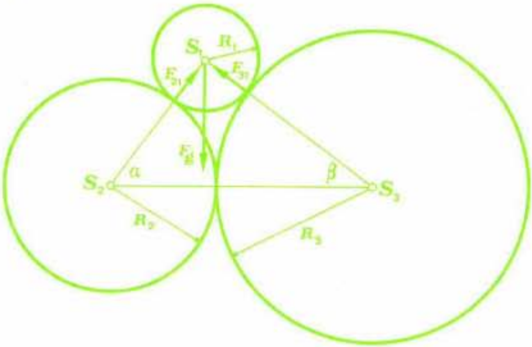
REŠITVE NALOG Z REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA MLADIH FIZIKOV V KOPRU LETA 1979

Oglejmo si rešitve nalog iz fizike, ki so bile objavljene v prejšnji številki Preseka.

2. razred:

1. naloga:

R_1 = 1 dm
R_2 = 2 dm
R_3 = 3 dm
m_1 = 1 kg
F_{21} =
F_{31} =



Ravnotežna pogoja:

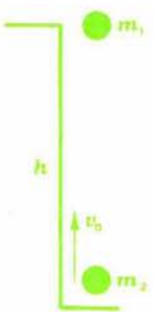
$F_{21} \cdot \cos\alpha = F_{31} \cdot \cos\beta$

$F_{21} \cdot \sin\alpha + F_{31} \cdot \sin\beta = m_1 g$

Po krajšem računu dobimo za sile: F_{21} = 8 N, F_{31} = 6 N .

2. naloga:

h = 10 m
v_0 = 10 m/s
$m_2 = 2\ m_1$
t_0 =



Če hočemo, da bosta kepi ob trku obmirovali, mora biti vsota gibalnih količin v trenutku trka enaka nič (prva enačba). Drugo enačbo dobimo, če upoštevamo poti, ki jih krogli preletita.

Prva enačba:

$$m_2(v_0 - g(t_x - t_0)) = m_1 g t_x$$

Druga enačba:

$$g t_x^2/2 + v_0(t_x - t_0) - g(t_x - t_0)^2/2 = h$$

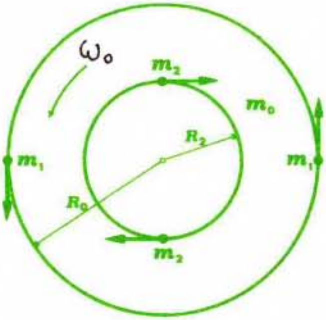
t_x....čas, ki preteče od trenutka, ko spustimo prvo kroglo, do trenutka trka obeh krogel

t_0....čas, ki preteče od trenutka, ko spustimo prvo kroglo, do trenutka, ko spustimo drugo kroglo

Z rešitvijo tega sistema enačb dobimo za t_0 = 0,75 s (upoštevamo samo pozitivno rešitev).

3. naloga:

$m_0 = m_1 = m_2 = 50$ kg
$R_0 = R_1 = 4$ m
$R_2 = 2$ m
$v_r = 2$ m/s
$\omega_0 =$



Vrtilna količina sistema, ki ga sestavljajo plošča in 4 možje, se ohranja. Ker na začetku ni nobenega vrtenja, mora biti vsota vrtilnih količin v vsakem trenutku enaka nič:

$$J_0\omega_0 + J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = 0$$
$$J_0 = M_0R_0^2/2\ ,\quad J_1 = 2m_1R_1^2\ ,\quad J_2 = 2m_2R_2^2\ ,$$
$$\omega_1R_1 = v_r + \omega_0R_1\ ,\quad \omega_2R_2 = v_r - \omega_0R_2$$

Plošča se vrti v nasprotni smeri od predpostavljene.

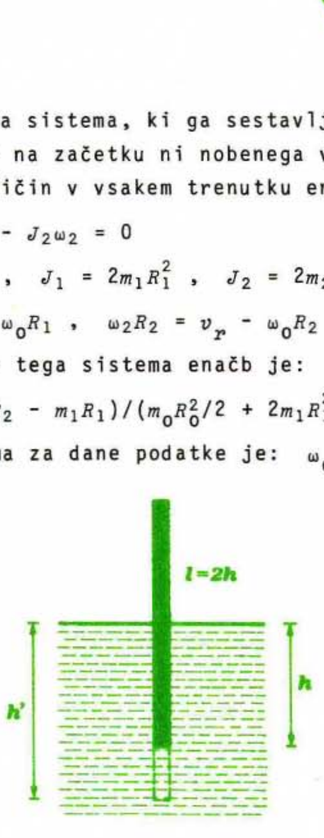
Splošna rešitev tega sistema enačb je:

$$\omega_0 = 2v_r(m_2R_2 - m_1R_1)/(m_0R_0^2/2 + 2m_1R_1^2 + 2m_2R_2^2)$$

Rešitev problema za dane podatke je: $\omega_0 = -0{,}166\ s^{-1} < 0$

4. naloga:

$l = 2$ m
$\rho_0 = 600$ kg/m^3
$\rho = 1000$ kg/m^3
$h = 1$ m
$h' =$



Pri tem poskusu se potencialna energija palice porabi za opravljanje mehanskega dela proti sili tlaka.

Če se konec palice, ki je v vodi, premakne z globine h na globino h' , pri tem opravi mehansko delo, ki je enako:

$$A = -\rho_0 gS(h^2 - h'^2)/2$$

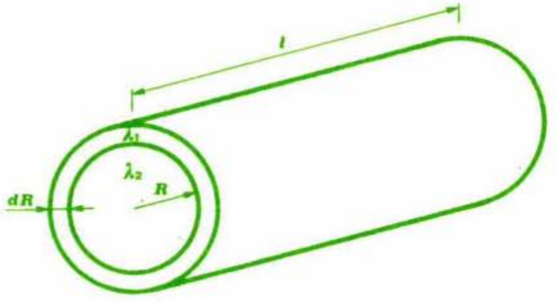
V trenutku, ko palica obmiruje, je spodnji konec h' metrov pod vodno gladino in v tem trenutku je sprememba potencialne energije

$$Sl\rho g(h' - h) = \rho_0 Sg(h' - h)(h' + h)/2$$

Iz te enačbe izračunamo splošno rešitev:

$$h' = 2l\rho/\rho_0 - h$$

Za dane podatke dobimo rešitev: $h' = 1{,}4$ m .



3. razred:
1. naloga:

$l = 0{,}4$ m
$P = 200$ W
$R = 2$ cm
$dl = 5$ mm
$\lambda_1 = 0{,}5$ W/mK
$\lambda_2 = 390$ W/mK
$T_0 = 20^0$C

$T_1 =$
$T_2 =$

T_0....temperatura okolice
T_1....temperatura pod plastjo izolatorja
T_2....temperatura v središču valja

Za valj lahko zapišemo enačbo za prevajanje toplote:

$$P/S = -\lambda dT/dR \; , \qquad -dT = P\, dR/2\lambda\pi lR$$

Iz te enačbe lahko z integriranjem izračunamo razliko temperature. Ker pa so razlike temperatur majhne, lahko računamo z diferenciali. Razlika temperatur med okolico in plastjo pod izolacijo je $35{,}5^0$C. Če ocenimo, da je radij grelca okoli 1 mm, dobimo, da je razlika temperature med sredino plasti in plastjo pod izolacijo okoli $0{,}6^0$C.

Temperatura pod izolacijo je $55{,}5^0$C.
Temperatura v središču valja je okoli $56{,}1^0$C.

2. naloga:

b_1 = 45 cm
b_2 = 72 cm
n = 1,33

a =
R =

b_1....slika nastane iz žarkov, ki gredo skozi tisti del zrcala, kjer se nahaja voda

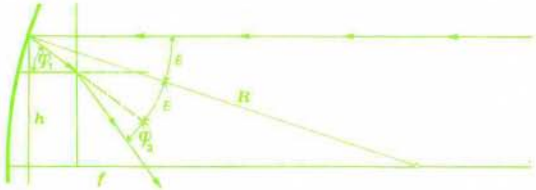
b_2....slika nastane iz žarkov, ki se odbijajo od tistega dela zrcala, kjer ni vode

a ....oddaljenost predmeta od temena

R ....krivinski radij zrcala

Najprej izpeljemo goriščno razdaljo zrcala prekritega z vodno plastjo:

$\varphi_1 = 2\varepsilon$
$\varphi_2 = h/f$
$\varepsilon = h/R$
$n\varphi_1 = \varphi_2$



Iz teh enačb takoj dobimo goriščno razdaljo zrcala prekritega z vodo:

$$f = R/2n$$

Na podlagi tega lahko zapišemo obe enačbi za oba dela zrcala:

$$1/a + 1/b_1 = 2/R$$
$$1/a + 1/b_2 = 2n/R$$

Splošni rešitvi tega sistema enačb se glasita:

$$R = 2(n-1)b_1b_2/(b_2 - b_1) \qquad a = (n-1)b_1b_2/(b_2 - nb_1)$$

Za dane podatke dobimo R = 79,2 cm in a = 88 cm.

3. naloga:

$T_0 = 293^0$K
S = 1 dm^2
l = 1 m
m = 10 kg

h_1 =
h_2 =

Takoj ko položimo utež na bat, se zgodi adiabatna sprememba. Potem ko se temperatura izenači, obravnavamo sistem, kot da bi se zgodila izotermna sprememba.

Potem ko damo utež na bat, je pritisk na plin enak:

$p = p_0 + mg/S$

Za adiabatno spremembo velja enačba:

$p_0(l_0S_0)^{\kappa} = p(h_1S)^{\kappa}$

Za izotermno spremembo velja enačba:

$p_0Sl = pSh_2$

Iz teh enačb dobimo za $h_1 = 0{,}93$ m in za $h_2 = 0{,}91$ m. Najprej se bat pomakne za 7 cm, če pa dolgo počakamo, se še premakne za 2 cm.

4. naloga:

$l_1 = 1$ dm
$R_1 = 1$ dm
$m_1 = 2$ kg
$R_2 = 5$ cm
$m_2 = 2$ kg
$l_2 =$

Če sta oba nihajna časa enaka, potem sta tudi kvadrata krožnih frekvenc enaka.

$J_1/m_1gd_1 = J_2/m_2gd_2$

Iz tega takoj dobimo enačbo:

$J_1d_2 = J_2d_1 \qquad (m_1 = m_2)$

Nadalje upoštevamo enačbe:

$d_1 = l_1 + R_1$
$d_2 = l_2 + R_2$
$J_1 = m_1(l_1 + R_1)^2 + 2m_1R_1^2/5$
$J_2 = m_2(l_2 + R_2)^2 + 2m_2R_2^2/5$

Z rešitvijo tega sistema enačb dobimo za $l_2 = 1{,}5$ cm. Vrvico moramo skrajšati za 8,5 cm.

4. razred:

1. naloga:

$R = 1$ cm
$T_0 = 2045\,^0$K
$dT = 100\,^0$K
$\rho = 2{,}146 . 10^4$ kg/m^3
$c = 1{,}33 . 10^2$ J/kgK
$dt =$

Ker je sprememba temperature razmeroma majhna, lahko računamo z diferenciali. Ker ni podan albedo tega telesa, vzemimo, da je enak 0, torej seva telo kot črno. Tudi posoda naj seva kot črno telo.

T ....temperatura kroglice, ko jo damo v pečico

Računamo s pomočjo Stefanovega zakona:

$\sigma S(T_0^4 - T^4) = mcdT/dt$

Če to enačbo preoblikujemo, dobimo (zanemarimo tudi T^4):

$3\sigma T_0^4 dt = R\rho c dT$

Splošna rešitev problema se glasi:

$dt = R\rho c dT/ 3\sigma T_0^4$

Za konkreten primer je rezultat: $dt = 1$ s.

2. naloga:

Da je temperatura konstantna, mora telo oddajati s sevanjem prav toliko energije, kot jo sprejema s sevanjem.

Ravna plošča (vzemimo, da je zelo tanka):

$jS' = S\sigma T^4$ $\qquad$ S .... celotna površina telesa

$S' = ab$ $\qquad$ $S = 2ab$ $\qquad$ S'.... površina, na katero pada sevanje

$j = 2\sigma T_1^4$ $\qquad$ T_1.... temperatura ravne plošče

Preganjena ravna plošča (vzemimo, da je zelo tanka):

V reži med zgornjo in spodnjo ploskvijo se ne zgublja nič energije, ker kolikor prva ploskev izseva, toliko tudi druga absorbira in obratno. Zato upoštevajmo samo tisto sevanje, ki ga seva plošči z zunanje strani:

$jS' = S\sigma T_2^4$ $\qquad$ T_2....temperatura ravne preganjene plošče

$S' = ab/2$ $\qquad$ $S = ab$

$j = 2\sigma T_2^4$

Krogla:

$jS' = S\sigma T_3^4$ $\qquad$ T_3....temperatura krogle

$S' = \pi R^2$ $\qquad$ $S = 4\pi R^2$

$j = 4\sigma T_3^4$

Razmerje med končnimi temperaturami teles je enako:

$T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 1 : (1/2)^{1/4}$

3. naloga:

$S = 1\ m^2$

$\underline{j = 1.10^3\ W/m^2}$

$\eta(T) =$

Izkoristek sončnega kolektorja med oddano koristno močjo in prejeto močjo.

Prejeta moč je enaka:

$P_p = Sj$

Oddana moč uporabniku je enaka razliki, ki jo kolektor sprejme in ki jo odda s sevanjem okolici:

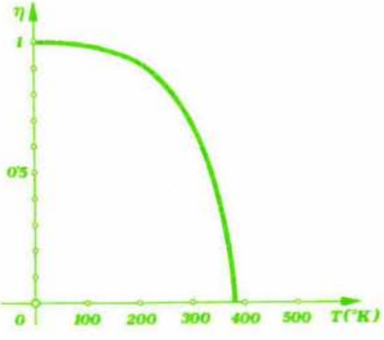
$P_0 = Sj - S\sigma T^4$

Izkoristek sončnega kolektorja je torej enak:

$\eta = P_0/P_p = (Sj - S\sigma T^4)/Sj =$

$= 1 - \sigma T^4/j$

Graf:



4. naloga:

$\nu = 2{,}5\ GHz$

$\eta = 0{,}1$

$\underline{\overline{\lambda} = 5555^0 A^0}$

$=$

$W_1 = h\nu$ energija fotona

$\nu = c/\overline{\lambda}$

$W_2 = \eta hc/\overline{\lambda}$ energija, ki je na voljo za nastanek mikrovalovnega fotona

Število fotonov izračunamo iz W_2 in W_1 :

$N = W_2/W_1 = \eta c/\nu\overline{\lambda}$

Za dane podatke dobimo rezultat: $N = 2{,}16.10^4$

V danem primeru nastane iz enega svetlobnega fotona okoli $2{,}16.10^4$ mikrovalovnih fotonov.

5. naloga:

$S = 10^4\ m^2$

$m = 10^2\ kg$

$a = 0$

$j = 1{,}4.10^3\ W/m^2$

$dv = 10^3\ m/s$

$dt =$

$p = j/c_0$ svetlobni tlak, če je $a = 0$

Razlika časa je torej enaka:

$dt = dvmc_0/Sj$

Za naš konkreten primer je:

$dt = 2{,}14.10^6\ s$

Hitrost jadrnice na sončni tlak naraste za 1 km/h v času $2{,}14.10^6$ sekund.

Tone Verbovšek

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
7. letnik, šolsko leto 1979/80, 3. številka, str. 129-192

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupinska pa 32.-din; za inozemstvo 3 $ = 60.-din, 2500Lit, 45.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost Slovenije in raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja petkrat letno v nakladi 23.000 izvodov.

MERJENJE EKIP V ZNANJU IN RAZUMEVANJU FIZIKE LASERJEV

Društvo matematikov, fizikov in astronomov bo v sodelovanju z Iskro - TOZD Elektrooptika organiziralo merjenje znanja srednješolskih ekip o laserjih. Ta družabna prireditev bo na predvečer republiškega tekmovanja mladih fizikov v Novi Gorici. Vprašanja bodo obsegala:

1. fizikalne osnove delovanja laserjev: inverzija zasedenosti vzbujenih nivojev, trinivojski in štirinivojski laserji, optični resonatorji, značilnosti laserske svetlobe, zgodovinski razvoj laserjev;
2. opis in razlaga rubinskega laserja in plinskega laserja He-Ne;
3. šolski poskusi z laserjem, merilna uporaba laserjev, proizvajanje svetlobe z dvojno frekvenco kot primer nelinearne optike, holografija;
4. naravoslovne, kulturne in gospodarske značilnosti Nove Gorice in okolice.

Osnovna literatura: poleg srednješolskih učbenikov fizike še

1. S. Lugomer, M. Stipančić, *Laser*, Svijetlost, Sarajevo 1977
2. *Poglavja iz fizikalne optike*, Seminar za srednješolske profesorje fizike in matematike, uredil F. Cvelbar, DMFA in Oddelek za fiziko, Ljubljana 1971.

Urnik priprav in prireditve;

Sobota 29. marec 1980 ob 11^h . Predavanje o laserjih in laserski svetlobi ob poskusih v predavalnici Oddelka za fiziko, Jadranska 26, Ljubljana.

Petek 4. april 1980. Rok za prijavo ekip. Ekipe so tričlanske. Naslov: B. Golli, VTO Fizika, pp 543, Jadranska 19, 61001 Lj.

Petek 16. maj 1980 do 15^h. Prihod ekip na gimnazijo v Novi Gorici, Delpinova 24.

Ob 16^h. Pismeni test za izbiro 6 ekip, ki bodo nastopile na javni prireditvi.

Ob 19^{30}. Javno merjenje znanja ekip.

Sobota 17. maja 1980 ob 10^h. Republiško tekmovanje mladih fizikov.

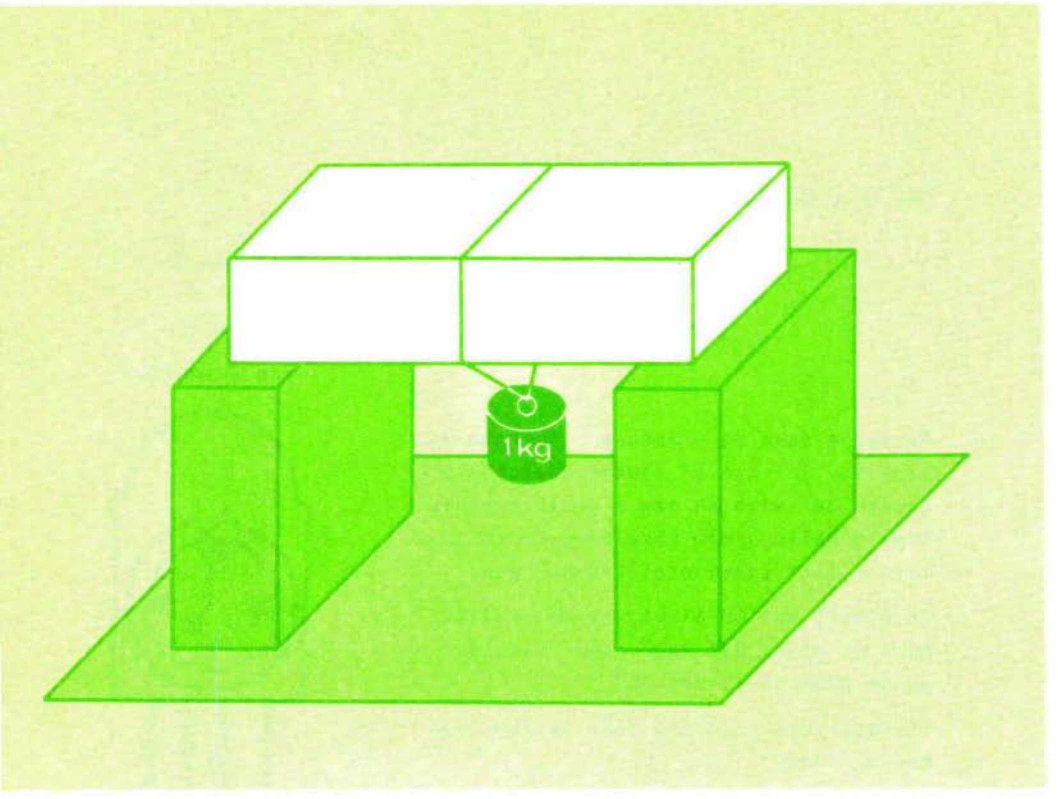
POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

Deset bralcev nam je poslalo opis poskusa, ki smo vam ga zastavili v 1. letošnji številki Preseka. Osmim se je poskus posrečil in vsi ste ga prav opisali. Malo težje je bilo razložiti poskus in še najbolj smo bili zadovoljni z odgovorom Damjana Kobala iz gimnazije v Ajdovščini. Knjižno nagrado Leksikon Cankarjeve založbe - Fizika bo prejel po pošti.

Zakaj se v kozarcu dvigne in ostane v tem položaju sveže, surovo jajce, na katerega teče primeren curek vode iz vodovodne pipe? Upoštevati moramo sledeče:

- *Oblika jajca*. Vodni tok se na vrhu jajca razdeli in obliva jajce.
- *Oblika kozarca*. Tudi oblika kozarca pomaga pri usmerjanju vodnega toka. Zanimivo je, da poskus ne uspe v veliki posodi.
- Vodnemu toku ob jajcu najlaže sledimo, če s pipeto vnesemo v vodo par kapljic barvila (tudi običajno črnilo je dobro). Ko je vodni tok iz pipe stalen, - pravimo, da smo dosegli stacionarno stanje - obstane jajce v pokončni legi. Opazimo tudi, da je tok vode ob jajcu največkrat nesimetričen glede na navpično os in jajce je pomaknjeno proti robu kozarca. Vodni tok se stisne med jajce in kozarec, zato je tam hitrost vode večja kot ob drugih delih jajca. Po Bernoullijevi enačbi je v zoženem prostoru med jajcem in kozarcem tlak manjši kot drugod v okolici jajca. Sile zaradi tlačnih razlik uravnovesijo majhno razliko med težo jajca in vzgonom. Gostota svežega, surovega jajca je samo malo večja od gostote vode. Jajce tako ostane na površju, del ga celo gleda iz vode.

Zvonko Trontelj



Za zimski čas je kakor nalašč tale poskus. V posodo z obliko kvadra približnih dimenzij 25 cm x 10 cm x 5 cm (primeren je podolgovat pekač za kolač) naliješ vodovodno vodo in jo pustiš, da zmrzne. Če zunaj ni dovolj mrzlo, postavi vodo v zmrzovalni prostor hladilnika. Vzemi leden kvader iz posode. (Led gre raje iz posode, če posodo za trenutek obliješ s toplo vodo.) Nato postavi led na dva kosa lesa. Preko ledu pa položi zanko iz tanke jeklene žice, npr. strune z debelino 0,2 mm , in jo obteži s kilogramsko utežjo (slika). Poskus naredi na mizi v kuhinji ali v kopalnici na tleh. Med utežjo in podlago naj bo vsaj 15 cm prostora. Pod led postavi še krpo, ki bo popila nekaj kapelj vode. Dobro opazuj, kaj se dogaja! Poskusi razložiti poskus! Rezultate nam pošljite do 1. aprila 1980. Čaka vas knjižna nagrada.

Metka Luzar

NALOGE O URI

"Očka, pa kaj je v tej zlati igrački?
Kaj to nabija nalahko ves čas?
Ciciban, veš, to so drobni kovački..."

Oton Župančič

Merjenje časa je prastaro človekovo opravilo. Pri tem si ljudje pomagajo z urami. Zanimive so ure z velikim minutnim in malim urnim kazalcem, ki se vrtita v isti smeri okoli skupne osi.

Ko poteče čas 60 minut, naredi veliki kazalec polni kot 360°, mali kazalec pa se pomakne za kot 30°.

Gibanje obeh kazalcev nudi veliko zanimivih nalog:

a) Kolikšen kot oklepata kazalca, ko ura kaže $2^{h}\ 48'$, $11^{h}\ 9'$ in $10^{h}\ 34'$? Poišči primeren obrazec, s katerim boš lahko določil kot med kazalcema za poljuben čas (ura, minuta).

b) Kdaj po polnoči se oba kazalca na uri prvič, drugič, ... , enajstič pokrijeta?

c) Kdaj po polnoči kazalca na uri prvič, drugič, ... , enajstič oblikujeta pravi in kdaj iztegnjeni kot?

d) In za konec še naloga, s katero se je v svojih dneh ukvarjal veliki fizik Einstein*.

* Izročilo pravi, da je nalogo Einsteinu postavil prijatelj Moškovski z namenom, da bi si z njo Einstein krajšal čas v bolezni. Einstein je za rešitev potreboval manj časa, kot ga je porabil Moškovski, da je nalogo sestavil.

Ali obstaja tak medsebojni položaj velikega in malega kazalca na uri, da sta oba kazalca v pravi medsebojni legi,tudi ko veliki in mali kazalec med seboj zamenjamo? Seveda po zamenjavi kažeta drugačen, toda medsebojni legi ustrezen čas.

Danijel Bezek

IGRA V DVANAJSTKOTNIKU

Na lepenko nariši oglišča pravilnega dvanajstkotnika, polmer naj bo primerno velik, recimo 15 cm. Okrog vsakega oglišča nariši krog polmera 2 cm. Potem spoji te kroge z daljicami kot kaže slika 1. Vzemi zdaj škarje in izreži 12 primerno velikih žetonov. Za žetone imate lahko tudi fižole, kamenčke, novčiče ali kaj podobnega. Igra se lahko začne.

Vzameš enega od 12 žetonov, položiš ga na poljuben krožec dvanajstkotnika in ga pomakneš v smeri ene od obeh daljic, ki iz tega kroga izhajajo, ter ga daš v krožec na drugem koncu daljice. Na primer, če si začel na številki 4, lahko pride žeton na 7 ali 12, odvisno od tega, katero pot si izbral. Končno polje je tako zasedeno. Naslednji žeton spet damo v prazno polje in ga spet potisnemo v sosednje prazno polje. Postopek ponoviš z enajstimi žetoni, če se seveda da in se ti igra že prej ni kje zataknila. Ko položiš še zadnji, dvanajsti žeton v edino prosto polje, igro *uspešno* končaš.(Gl. sliko na IV.str. ovitka)

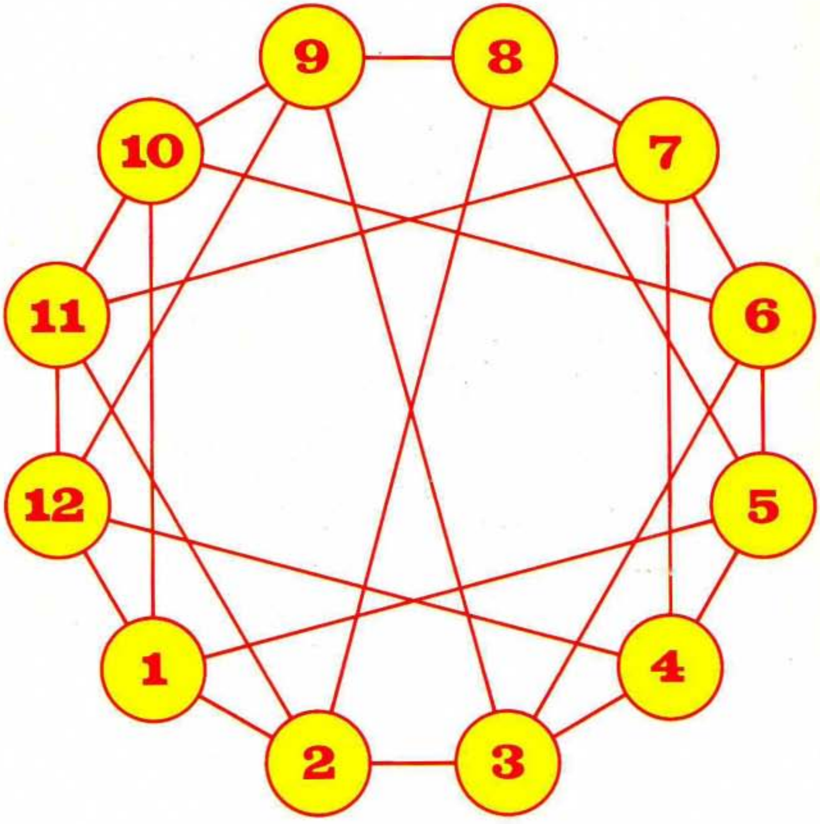
Dragoljub M. Milošević

prevedel *Peter Petek*

PRIPOMBA UREDNIKA: Dragi bralci, prav radi bomo objavili vaše pripombe o *Igri na dvanajstkotniku*; zato nam pišite, ko si z igranjem naberete dovolj izkušenj. Morda bi se dalo igro spremeniti, tako da bi igrala dva igralca?

Tomaž Pisanski

NALOGE



IGRA V DVANAJSTKOTNIKU - glej članek na prejšnji strani