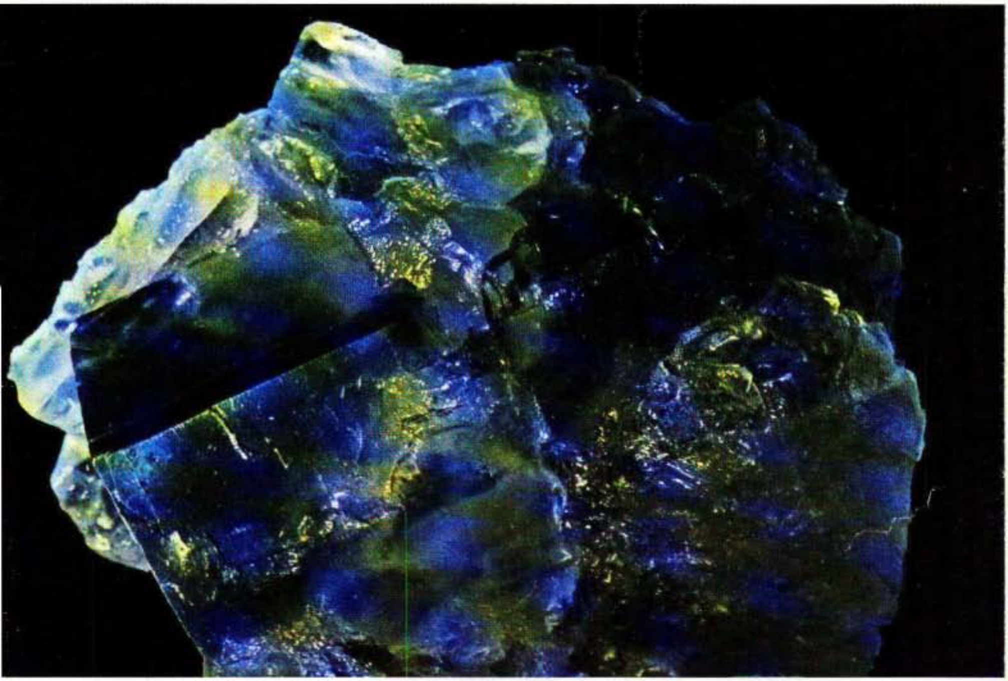
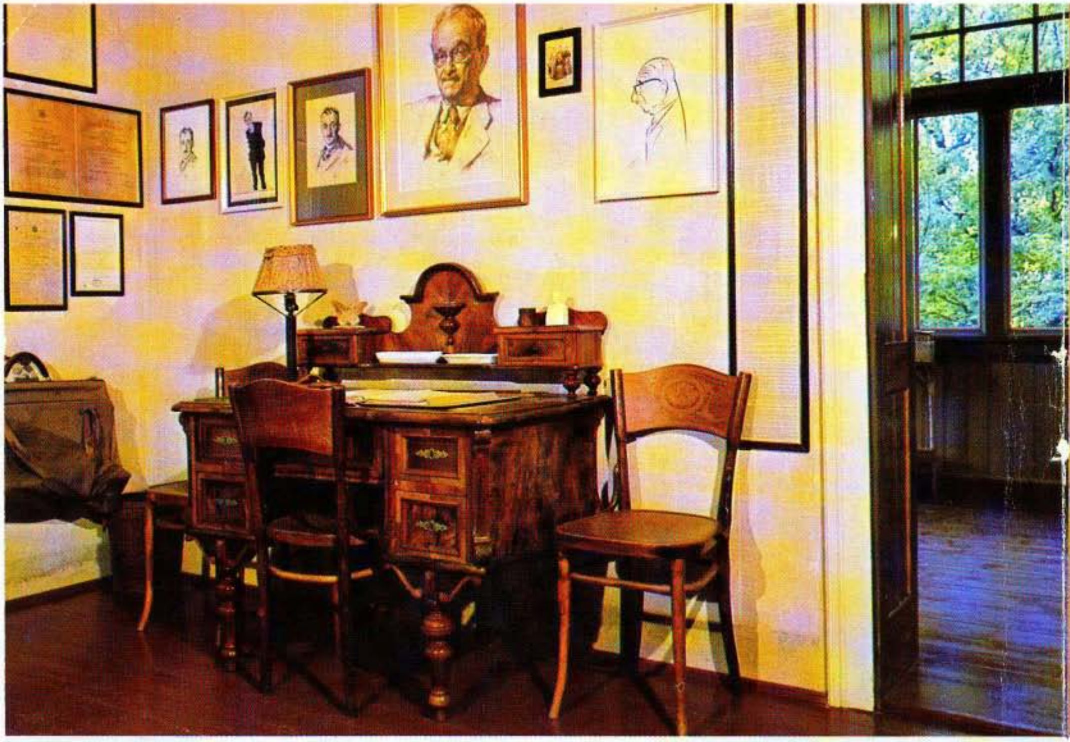
presek 2

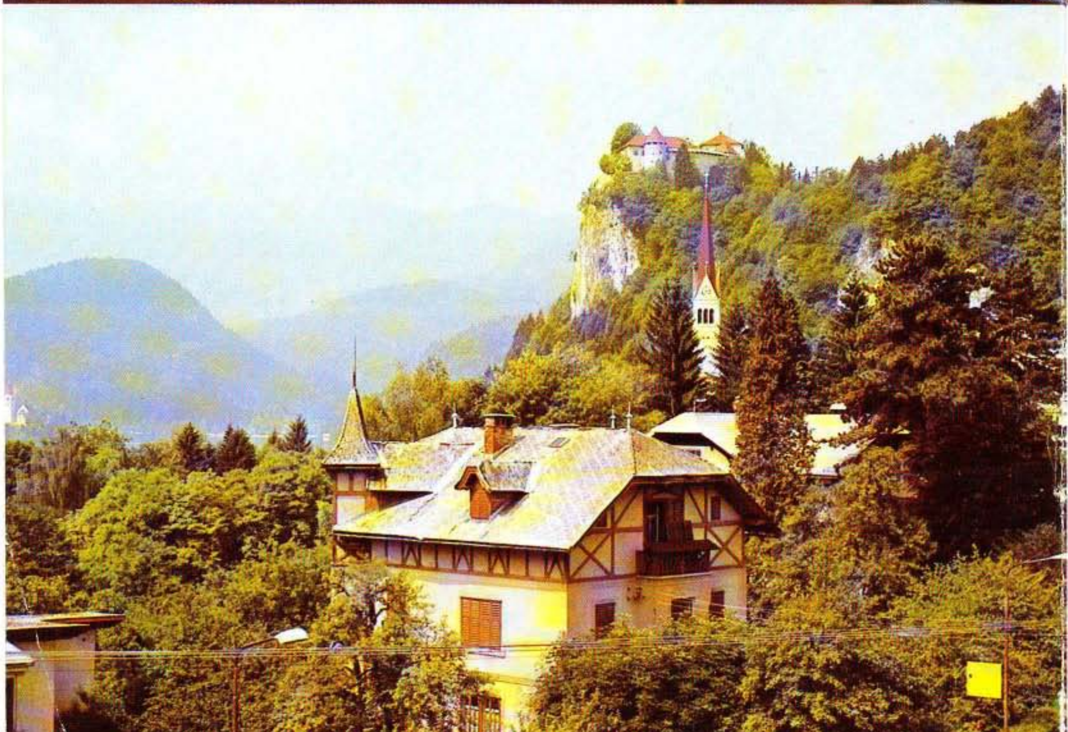
VII
1979-80



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS





V S E B I N A

ASTRONOMIJA

PRVI POSKUSI DOLOČANJA RAZDALJ V VESOLJU

Kako daleč je do zvezd? To vprašanje so si ljudje zastavljali že zelo dolgo. Največji astronomi svoje dobe so vedno znova dokazovali, kako daleč lahko seže človekov um. V več kot dvatisočletni zgodovini merjenja vesoljskih razdalj se je meja zaznavnega vesolja širila od površja Zemlje do Sonca, nato od bližnjih do oddaljenih zvezd in nazadnje do milijarde svetlobnih let oddaljenih svetov. Vsaka nova meritev je predstavljala svojevrsten dosežek znanosti. Nekaj prvih dosežkov bi si radi ogledali v tem sestavku.

Grki so že zelo zgodaj začeli razmišljati o zgradbi sveta in o odnosih med Soncem, Luno in planeti. Že okrog tristo let pred našim štetjem so imeli za današnje čase zelo napredne predstave o zgradbi sončnega sistema. Pitagorejci so verjeli, da se Zemlja giblje po vesolju - verjetno po krogu, Heraklit je mislil, da se vsaj nekateri planeti gibljejo okrog Sonca, Tales pa si je predstavljal, da je Luna svetla, ker odbija sončno svetlobo. Vse te napredne ideje so omogočile Aristarhu, enemu največjih antičnih astronomov, da se je lotil določanja razdalje do Sonca. To je naredil v dveh korakih. Najprej je sklepal takole: ker Sonce osvetljuje Luno, je oblika luninega krajca odvisna od medsebojnih leg Zemlje, Sonca in Lune. V trenutku, ko je Luna natanko razpolovljena, oblikujeta zveznici Luna - Zemlja in Luna - Sonce pravi kot (sl. 1). Z meritvijo je določil še kot med zveznicama Zemlja - Luna in Zemlja - Sonce (α). Tako je poznal vse kote trikotnika Sonce-Zemlja-Luna in je lah ko izračunal razmerja med stranicami trikotnika. Dobil je razdaljo do Sonca v enotah razdalje do Lune.

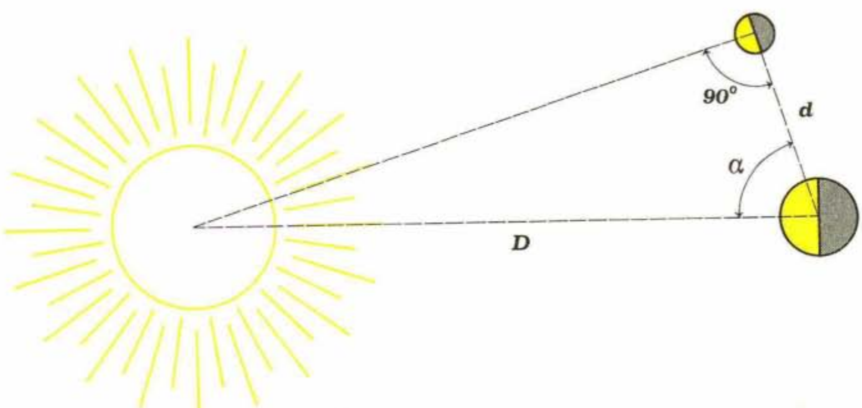
S pomočjo treh nadaljnjih meritev pa je uspel izračunati še razdaljo do Lune ter polmera Lune in Sonca v enotah zemeljskega polmera. Sledimo Aristarhovim sklepom s pomočjo sodobnega računstva, ki je seveda mnogo preprostejše, kot je bilo tristo let pred našim štetjem!
Najprej je Aristarh izmeril navidezni premer Sonca (δ), to je kot (kar v ločnih enotah), pod katerim vidimo sončni premer na Zemlji:

$$2R_s = D\delta \qquad (1)$$

R_s je polmer Sonca, D pa oddaljenost od Zemlje, ki je po Aristarhovem mnenju stalna. Njegovo naslednje opažanje je bilo, da je trajanje popolnega sončnega mrka zelo kratko, kar pomeni, da sta navidezni velikosti Sonca in Lune skoraj enaki. Tudi to enakost si zapišimo v matematični obliki za kasnejšo rabo:

$$R_s/R_l = D/d \qquad (2)$$

Tretje Aristarhovo opazovanje pa je bilo ob centralnem luninem mrku (pri takem mrku gre Luna skozi središče Zemljine sence).



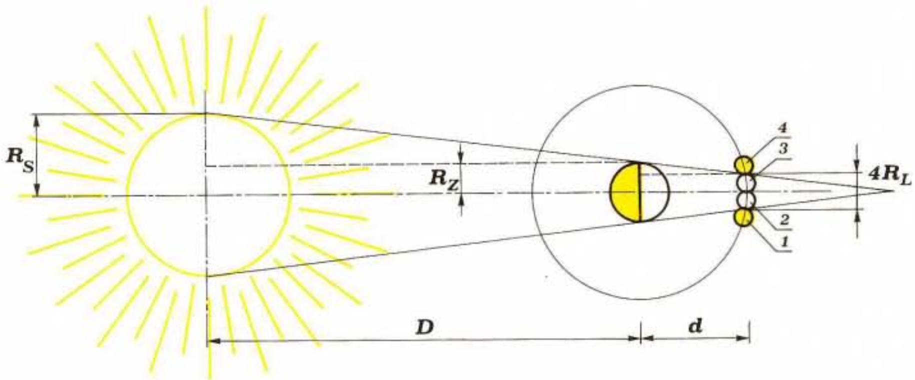
Sl. 1: Lege Sonca, Zemlje in Lune, ko vidimo Luno razpolovljeno

Meril je čas od vstopa Lune v Zemljino senco do popolne pomračitve in čas trajanja popolne pomračitve. Ugotovil je, da trajata obe fazi mrka enako dolgo. Slika 2 kaže faze luninega mrka, kot si jih je predstavljal Aristarh in si jih predstavljamo še danes.

S slike je razvidno, da je premer Zemljine sence na lunini oddaljenosti enak dvakratnemu luninemu premeru, če je le res, da potuje Luna enakomerno po svoji krožnici okrog Zemlje, kar pa je Aristarh brez nadaljnjega privzel. (To tudi ni zelo daleč od resnice, saj se lunin tir ne razlikuje prav dosti od krožnice.) Ta rezultat da še naslednjo enakost, ki sledi iz podobnosti s črtkami naznačenih pravokotnih trikotnikov na sl. 2:

$$(R_s - R_z)/D = (R_z - 2R_l)/d \tag{3}$$

Iz treh enačb (1), (2) in (3) danes ni težko izračunati obljubljenih razmerij R_l/R_z, R_s/R_z in d/R_z . Rezultate, do katerih je prišel Aristarh že pred kakimi 2200 leti, lahko napišemo v naslednji obliki:



Sl. 2: Lege Lune, Zemlje in Sonca ob luninem mrku;
1 - trenutek vstopa v Zemljino senco, 2 - začetek popolne pomračitve,
3 - konec popolne pomračitve, 4 - izstop iz Zemljine sence

$$R_l/R_z = (1 + d/D)/3$$
$$R_s/R_z = (D/3d)(1 + d/D) \qquad (4)$$
$$d/R_z = (2/3\delta)(1 + d/D)$$

Aristarhovo sklepanje je bilo sicer pravilno, njegove meritve pa so bile obremenjene s precejšnjo napako. Kot med Soncem in Luno v trenutku, ko je osvetljena natanko polovica Lune, je ocenil na 87°, pravilna vrednost pa je $89^{\circ}51'$. Zato je dobil za razmerje med razdaljama Zemlja-Sonce in Zemlja-Luna (D/d) vrednost 20, kar je skoraj dvajsetkrat premalo. Tudi vrednosti navideznega sončnega oziroma luninega premera (δ) ni dobro ocenil. Vendar so bili njegovi rezultati in podatki dovolj dobri, da je nedvomno ugotovil, da je polmer Sonca vsaj sedemkrat večji od zemljinega, Luna pa je po velikosti trikrat manjša od Zemlje. Na osnovi teh rezultatov je Aristarh izdelal heliocentrični sistem. Smatral je, da mora manjša Zemlja krožiti okrog veliko večjega Sonca, manjša Luna pa okrog večje Zemlje. Tako je bil Aristarh prvi, ki je ustvaril sliko o svetu na osnovi opazovanj in znanstvenega sklepanja.

Aristarh je imel malo naslednikov svojega kova. Šele 120 let mlajši Hiparh je uspel izboljšati natančnost merjenja kotov in je tako dobil precej boljšo vrednost za razdaljo do Sonca. Žal pa ni razumel Aristarhove ideje o Soncu kot središču, okrog katerega krožijo planeti, ampak je izdelal za filozofe prijaznejšo teorijo, po kateri je Zemlja središče sveta. Hiparhova teorija je bila z računske plati boljša od Aristarhove, ker je napovedala nekatere astronomske pojave. Tako je tehnična premoč mlajšega Hiparha pokopala heliocentrično teorijo za skoraj 18 stoletij.

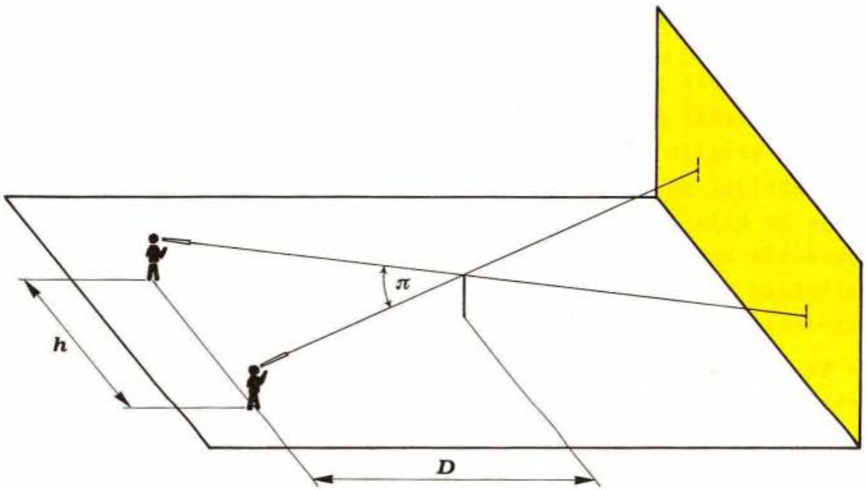
V teh osemnajstih stoletjih, ki vključujejo temačna obdobja srednjega veka, je globina pogleda v vesolje kvečjemu padala. Cerkvene dogme so bile težke spone, ki so prikovale človekov um, da je stoletja in stoletja nemočno cepetal na mestu. V renesansi se je človeštvo otresalo dogem in s Kopernikom (1473 - 1543) je v astronomiji zavel svež duh. Z Galilejevo uporabo teleskopa v astronomske namene pa je napočil čas za natančnejše meritve.

Šele v 17. stoletju je bila merska tehnika dovolj dobra, da so mogli s pridom uporabiti metodo paralakse za merjenje vesoljskih razdalj. (To metodo je poznal verjetno že Aristarh, skoraj zagotovo pa Hiparh, ki je po izročilu napisal o tem celo knjigo.)

Metoda paralakse temelji na tem, da se bližnji predmet navidez no premakne glede na oddaljeno ozadje, če spremenimo lego opazovališča (sl. 3).

Kot med smerema opazovanja v prvem in drugem opazovališču imenujemo paralakso (π). S sl. 3 je razvidno, da je paralaksa tem večja, čim manjša je oddaljenost do opazovanega predmeta in čim večja je oddaljenost med opazovališčema.

To metodo sta uporabila astronoma Richer in Cassini za merjenje oddaljenosti planeta Marsa l. 1672, ko je bil najbliže Zem lji. Richer je opazoval Mars iz Cayenne - glavnega mesta francoske Gvajane, Cassini pa iz Pariza. Njuni navidezni legi Mar-



Sl. 3: Metoda paralakse; h - razdalja med opazovališčema, D - oddaljenost predmeta, π - paralaksa

sa sta se razlikovali za petnajst ločnih sekund. Iz znane razdalje med Cayennom in Parizom (razdalja po ravni črti je skoraj natanko enaka polmeru Zemlje) sta določila najmanjšo oddaljenost Marsa.

S tem sta še potrdila dosežke Keplerja in Newtona, ki sta pokazala, v kakšnih razmerjih so si obhodni časi planetov in velike osi njihovih eliptičnih tirov okrog Sonca ("tretji Keplerjev zakon"). Tako je bilo mogoče iz Richerovega in Cassinijevega podatka izračunati oddaljenosti vseh planetov od Sonca. Za Zemljino oddaljenost od Sonca so dobili tako prvi zanesljivi podatek 140 milijonov kilometrov, kar je le 7% manj od prave vrednosti, vendar veliko več kot so bili pričakovali. Postalo je jasno, da bo določitev paralaks bolj oddaljenih planetov, kaj šele zvezd, mnogo zahtevnejša.

Razen paralakse planetov so astronomi želeli izmeriti tudi paralakso oziroma razdaljo do zvezd. Istočasna meritev iz dveh različnih krajev na Zemlji tu ne pride v poštev, ker je razdalja med opazovališčema premajhna v primeri z razdaljami do zvezd. Večji uspeh so si obetali od meritev na istem kraju, vendar v polletnih časovnih razmikih. V pol leta pride Zemlja namreč ravno v nasprotno stran ekliptike. Zato je razdalja med opazovališčema v takem primeru enaka premeru ekliptike, t.j. okrog 300 milijonov kilometrov, kar je mnogo več, kot razdalja med katerimakoli točkama na Zemlji.

Po skoraj tristoletnih naporih in izboljšavah merskih priprav se je l. 1838 končno posrečilo Besselu, da je kot prvi izmeril paralakso zvezde 61 Cygni v ozvezdju Laboda. Rezultat nam pove, zakaj so bili potrebni tolikšni napori. Paralaksa, ki jo je Bessel izmeril, je komaj 0,3 ločne sekunde, to pa je kot, pod katerim bi videli 1,5 cm visok predmet z razdalje 10 km (za Ljubljančane bi to pomenilo videti škatlico vžigalic na vrhu Krima). Besselu so zelo hitro sledili še drugi astronomi, tako da so v sto letih namerili že več kot šest tisoč paralaks. Človek je tako končno prestopil prag sončnega sistema in se začel razgledovati po zvezdah.

Razvoj fizike in njenih metod proti koncu prejšnjega stoletja je še močneje pospešil človekove korake v vesolje. Potem ko so astronomi poznali oddaljenosti nekaterih zvezd, so jih lahko v mislih približali na poljubno razdaljo in jih primerjali med seboj. Pri tem so odkrili vrsto zakonitosti, ki vladajo v življenju zvezd. Z mnogimi od teh zakonitosti si danes pomagajo, da določijo razdalje, ki so mnogokrat večje od tistih, ki jih še lahko določimo s paralakso.

Andrej Čadež

NALOGE

NALOGA O KROŽNICI*

V ravnini leži $n > 3$ točk, nobene tri izmed njih na premici. Ali obstaja krožnica, ki gre skozi največ tri točke, v njeni notranjosti pa ni nobene izmed ostalih točk?

Dušan Repovš

*Ilustriral *Božo Kos*

MATEMATIKA

O OBSEGU IN PLOŠČINI

Poznavanje števil in prostorskih povezav je imelo v najstarejših civilizacijah praktičen pomen.

Geometrijski problemi, kot sta npr. računanje obsega in ploščine, so bili povezani z merjenjem kot praktično dejavnostjo. Če sežemo v zgodovino nazaj, vidimo po pisanih virih, da ljudem, kjub praktičnemu ravnanju in merjenju, dolgo ni bilo jasno, v kakšnem medsebojnem odnosu sta si obseg in ploščina.

<u>1. primer</u>: Grški zgodovinar Tukidid (460 - 396 pr.n.št.) je v Zgodovini peloponeških vojn zapisal: Za jadranje okoli dvakrat večjega otoka porabimo dvakrat daljši čas.

Tukididova ocenitev, da sta si obseg in ploščina premosorazmerna, je bila bolj posledica njegovega prepričanja, kot pa rezultat praktičnega poskusa ali matematičnega premisleka.

Sl. 1

Problem odnosa med obsegom in ploščino lahko nekoliko raziščemo s poenostavljenim matematičnim primerom, kjer je otok predstavljen s pravokotnikom, ostali liki pa predstavljajo ploščinsko dvakrat večji otok (sl. 1).

Ali je obseg pri teh likih tudi dvakrat večji? Razmisli!

2. primer: Polibij (okoli 200 do okoli 120 pr.n.št.) je nekje zapisal: še vedno so ljudje, ki ne morejo razumeti, da ima prostor, odmerjen za vojaški tabor, pri istem obsegu več ali manj prostora za šotore.

Sl. 2

Pri razmišljanju si lahko pomagamo s poenostavljenim poskusom (sl. 2). Sklenjeno nitko ali vrvico napnemo okoli bucik ali žebljičkov, ki predstavljajo oglišča trikotnikov. Dveh oglišč ne premikamo, s tretjim pa oblikujemo najrazličnejše trikotnike z istim obsegom.

Vsakič ugotovi ploščino nastalega trikotnika in jih primerjaj med seboj!

Poskušaj narediti kakšen zaključek!

Opomba: Kako se je iskanje odnosa med ploščino in obsegom ravninskih likov v zgodovini nadaljevalo, si lahko bralec poišče v knjigi Ivana Vidava: *Rešeni in nerešeni problemi matematike* v poglavju *Izoperimetrični problemi*.

3. primer: Narava rešuje problem odnosa med ploščino in obsegom na začudenja vreden način. Poglejmo v čebelji panj. Celice v satovju so pravilni šestkotniki. Domnevamo, da je vprašanje povezano z ekonomičnostjo. To pomeni, da je pri čim manjši porabi voska (iz tega so narejena stene celic), dosežen največji izkoristek prostora, ki je namenjen za skladiščenje medu.

Ali imajo čebele v svoji nagonski izbiri prav? Poglejmo si njihovo gradbeništvo v jeziku matematike.

Trditev: Od vseh pravilnih mnogokotnikov, s katerimi se da pokriti ravnino, tako da ni medprostorov, ima pravilni šestkotnik pri istem obsegu največjo ploščino.

Dokaz: a) Ravnino lahko na predpisani način, tako da ni medprostorov, pokrijemo z enakostraničnimi trikotniki, kvadrati in pravilnimi šestkotniki (sl. 3).

Sl. 3: a) b) c)

Z drugimi mnogokotniki ravnine ni mogoče prekriti. Razmišljamo pa takole: Vsota notranjih kotov m pravilnih n-kotnikov, ki se stikajo v skupnem oglišču, je 360^0.

$$m(180^0(n - 2)/n) = 360^0 \quad \text{ali tudi}$$
$$m = 2n/(n - 2) \qquad (1)$$

Če enačbo za m iz (1) preoblikujemo, dobimo:

$$(n - 2)(m - 2) = 4 \qquad (2)$$

Število 4 lahko na tri načine zapišemo kot produkt dveh naravnih števil: $4 . 1$, $1 . 4$ in $2 . 2$.

Tako dobimo za n tri rešitve, ki nam povedo možne mnogokotnike, s katerimi se da pokriti ravnino. Iz enačbe $(n - 2) = 4$ dobimo prvo rešitev $n_1 = 6$; iz enačbe $(n - 2) = 1$ dobimo drugo rešitev $n_2 = 3$ in iz enačbe $(n - 2) = 2$ dobimo tretjo rešitev $n_3 = 4$.

b) Dokazati je treba, da ima pri istem obsegu (oznaka L) pravilni šestkotnik od možnih mnogokotnikov največjo ploščino.

	Enakostranični trikotnik	Kvadrat	Pravilni šestkotnik
Obrazec za ploščino, če je stranica a	$a^2\ \sqrt{3}\ /\ 4$	a^2	$3a^2\sqrt{3}\ /\ 2$
Dolžina stranice pri danem obsegu L	$L/3$	$L/4$	$L/6$
Z obsegom izražena ploščina	$L^2.\sqrt{3}/36$ $L^2.0{,}0481$	$L^2/16$ $L^2.0{,}0625$	$L^2.\sqrt{3}/24$ $L^2.0{,}0722$

Naloga: Nariši enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik, če je obseg vsakega od njih 20 cm. Postavi jih tako, da je središče očrtanih krogov za vse mnogokotnike isto.

Danijel Bezek

KAKO PODVOJITI KOCKO ?

Problem podvojitve kocke se je pojavil že v delu nekega matematično neizobraženega grškega pesnika. Pisal je o mitološkem kralju Minosu, ki ni bil zadovoljen z velikostjo grobnice svojega sina Glavka. Zahteval je dvakrat večjo grobnico in menil, da se da to storiti s podvojitvijo vseh njenih dimenzij. Ta pesnikova "matematika" je vzpodbudila geometre, da so se lotili problema, kako podvojiti trdno telo, da pri tem ohrani obliko.

Znana je še druga zgodba. Delski vedež je prerokoval ljudstvu, da se bo rešilo kuge, če bodo podvojili Apolonov kockasti oltar. Najbrž so problem zaupali Platonu, ki ga je predložil geometrom v svoji Akadamiji. Zato se tudi imenuje delski problem.

Naj je zgodba resnična ali ne, vendar so se s podvojitvijo kocke ukvarjali številni grški matematiki in tudi prišli do rešitve. Znani so Menehmus, Arhitras, Evdoksos, Eratostenes, Pappus, Diokles, Hipokrat in drugi.

Matematiki so se zelo trudili, da bi problem rešili le s šestilom in neoznačenim ravnilom (Evklidsko orodje), pa ni šlo. Danes vemo zakaj! *S šestilom in ravnilom se ne da narisati premic, ki bi imeli dolžini v razmerju* $\sqrt[3]{2} : 1$. Problem podvojitve kocke je eden od treh znamenitih problemov grške matematike*.

Če je a stranica kocke, je treba poiskati stranico x kocke, ki bo imela dvakrat večjo prostornino $x^3 = 2a^3$ oziroma $x = \sqrt[3]{2}\, a$.

Poglejmo si dve rešitvi:

(A) Hipokrat (460 pr.n.š.) je sklepal takole: če lahko najdemo sestavljeno sorazmerje dveh danih premic $a : x = x : y = y : 2a$, ne more biti več daleč do rešitve.

Iz tega dobimo:

---

*Še *kvadratura kroga* in *trisekcija kota* (glej Presek III/3, str. 166). Primerjaj še Presek IV/4, str. 197.

$$x^2 = ay \quad , \quad x^4 = a^2y^2 \quad ; \quad y^2 = 2ax \quad \text{in zato}$$
$$x^4 = 2a^3x$$

Od tod pa

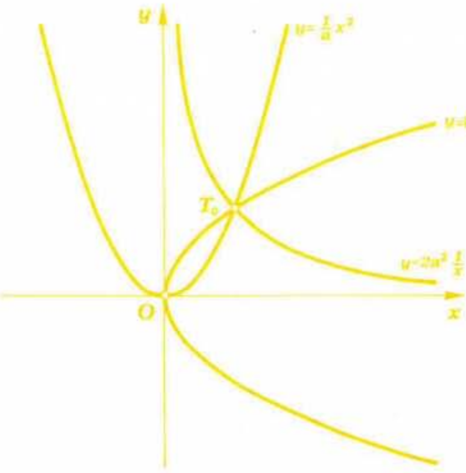
$$x(x^3 - 2a^3) = 0 \quad \text{in} \quad x^3 = 2a^3$$

Toda Hipokrat do končne rešitve ni prišel; na osnovi njegovega dela je problem rešil Menehmus (350 pr.n.š.). Iz sestavljenega sorazmerja je dobil tri enačbe

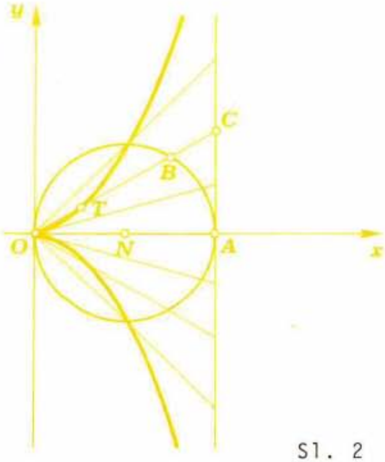
$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$
$$xy = 2a^2$$

Prvi dve predstavljata krivuljo parabole, tretja pa hiperbolo (sl. 1). Abscisa točke, kjer se pri danem $a > 0$ vse tri krivulje sekajo, je rešitev.

(B) Najbolj znana je Dioklesova rešitev. Pomagal si je s krivuljo cisoido (po naše bi rekli bršljančnica): $y^2(a - x) = x^2$.
Cisoido narišemo takole (sl. 2). V pravokotnem koordinatnem si



Sl. 1



Sl. 2

stemu narišemo krog s polmerom $a/2$ in središčem v točki $N(a/2, 0)$, v točki $A(a, 0)$ pa tangento na krog. Eno od točk cisoide dobimo tako, da iz izhodišča O narišemo poltrak pod poljubnim kotom, ki seka krožnico v točki B, tangento pa v točki C. Daljico BC prenesemo po poltraku do izhodišča O in dobimo točko krivulje T, da velja $OT = BC$.

Potek rešitve:

Najprej narišemo krog z radijem r (sl. 3), diametralni točki označimo z A in B, pravokotnica na premer skozi središče O naj seka krožnico v točki C, konstruiramo še tangento v B. Cisoido konstruiramo tako, da poteka skozi točki A in C.

Razpolovišče OC naj bo točka M in iz B skozi M potegnimo premico, ki seka cisoido v točki P. Skozi A in P potegnimo premico, ki seka krožnico v točki D. V točkah P in D narišemo pravokotnici na premer in dobimo nove točke: S na krožnici ter L in R na premeru.

Po definiciji cisoide je $AP = DE$, zato iz Talesovega izreka o sorazmerjih sledi $AL = RB$ in $LO = OR$.

Označimo sedaj LB z a, AL z x in SL z y in poglejmo razmerje

$LB : PL = OB : OM$ ali

$a : PL = r : r/2 \Rightarrow PL = a/2$

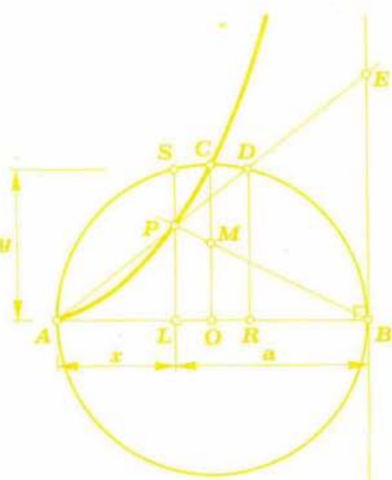
Da rešimo nalogo, poglejmo nekatere podobne ali pa skladne trikotnike. Očitno velja

$\Delta ALP \sim \Delta ARD$ in $\Delta ARD \cong \Delta BSL$

iz višinskega izreka v pravokotnem trikotniku (kraka poteka skozi diametralni točki, vrh pa je na krožnici) pa sledi $\Delta BSL \sim \Delta ALS$.

Torej velja

$\Delta BSL \sim \Delta ALS \sim \Delta ALP$ in od tod



Sl. 3

$$a : y = y : x = x : PL = x : a/2 .$$

Iz tega sestavljenega sorazmerja dobimo

$$ax = y^2 \quad \text{oziroma} \quad x^2 = y^4/a^2 \quad \text{in} \quad x^2 = (a/2)y .$$

Izenačimo desni strani obeh enačb

$$\frac{a}{2}y = \frac{y^4}{a^2}$$

in rešitev je na dlani:

$$\frac{1}{2}a^3 = y^3$$

$$a^3 = 2y^3$$

Literatura:

Howard Eves , An Introduction to the History of Mathematics

Eugene Smith, History of Mathematics

Gregor Pavlič

BISTROVIDEC

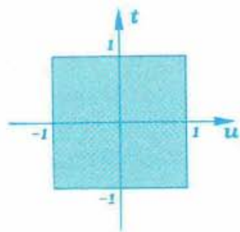
PRAVILNI ŠESTEROKOTNIK

Pravilni šesterokotnik razreži z ravnimi rezi tako, da boš lahko iz dobljenih koščkov sestavil kvadrat enake ploščine! (Obstaja več rešitev).

Vladimir Batagelj

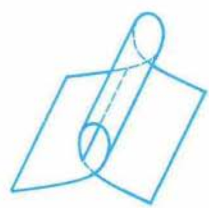
NEKI GEOMETRIJSKI RAZMISLEK V ŠTIRIDIMENZIONALNEM PROSTORU

če je K kvadrat brez roba $(-1,1) \times (-1,1)$ (sl. 1) in če ga v tridimenzionalnem prostoru zvijemo tako, da sam sebe seka, bodo sečišča vedno loki, nikoli ne samo posamezne točke (sl. 2).



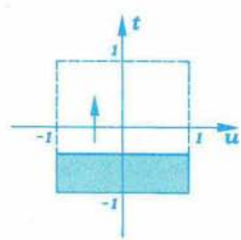
Sl. 1

Naš namen pa je premisliti, kako lahko v štiridimenzionalnem prostoru zvijemo kvadrat K tako, da se bo sekal v eni sami točki.



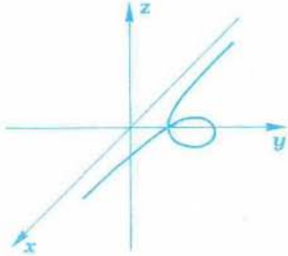
Sl. 2

V štiridimenzionalnem prostoru lahko vsako točko zapišemo s štirimi koordinatami, na primer: (x,y,z,t). To točko si lahko mislimo kot točko (x,y,z) v tridimenzionalnem prostoru v "času" t: torej si predstavljamo štiridimenzionalni prostor kot prostor, ki ga dobimo, če translatiramo tridimenzionalni prostor vzdolž četrte smeri. Tako lahko opišemo lego zvitega kvadrata K v štiridimenzionalnem prostoru tako, da povemo, kakšni so preseki s tridimenzionalnim prostorom v vsakem "času". Tudi kvadrat K si lahko predstavljamo kot sled, ki jo opiše daljica $(-1,1)$, če jo translatiramo v ravnini vzdolž druge koordinate (sl. 3).



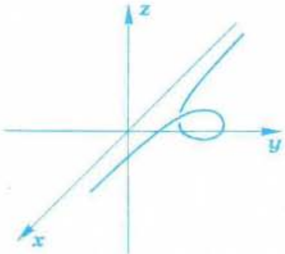
Sl. 3

Zato lahko K postavimo v štiridimenzionalni prostor tako, da postavimo daljico $(-1,1) \times \{t\}$, $-1 < t < 1$ v tridimenzionalni prostor v "času" t. To storimo takole: daljica $(-1,1) \times \{0\}$ naj leži v tridimenzionalnem prostoru v "času" 0 tako, da se enkrat seka (sl. 4).



Sl. 4: Tako obliko ima na primer krivulja $L(u) = (2u(1 - 2/(1 + 4u^2)), 2/(1 + 4u^2), 0)$.

Če se druga koordinata t veča, naj se slika v tridimenzionalnem prostoru (hkrati, ko "čas" enako hitro teče kot t) zvezno razmika kot kaže slika 5, sicer pa v obratno smer.



Sl. 5: Krivulja z enačbo $L_t(u) = (2u(1 - 2/(1 + 4u^2)), 2/(1 + 4u^2), 2tu)$ je že take oblike. To se vidi, če razmaknemo krivuljo L iz slike 3. Torej leži teme v ravnini $z = 0$, sicer pa tretja koordinata raste ali pada hkrati z u - torej je proporcionalna parametru u. Če vzamemo za proporcionalnostni faktor t, dobimo L_t .

S tem smo povedali, kako leži v štiridimenzionalnem prostoru vsaka daljica $(-1,1) \times \{t\}$ (ko "čas" mineva, vidimo, kako se spreminjajo preseki kvadrata), zato poznamo tudi lego vsega zvitega kvadrata K. Očitno je sečišče eno samo, in sicer v "času" 0. Jasno je tudi, da je kvadrat lepo zvit, t.j. da ni nikjer "zmečkan".

DODATEK: Bralcu z večjim znanjem ne bo težko predstaviti ta kvadrat z enačbami. Točka (u,t) preide, ko kvadrat zvijemo, na primer v točko s koordinatami

$$(2u(1 - 2/(1 + 4u^2)), 2/(1 + 4u^2), 2ut, t)$$

Marko Kranjc

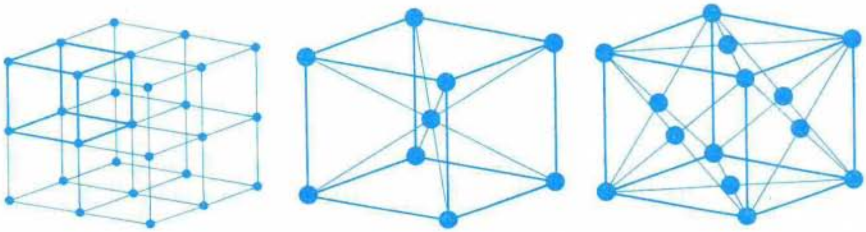
FIZIKA

NAPAKE V KRISTALIH

Pravilna oblika nekaterih kristalov je že v preteklih stoletjih napeljevala ljudi na misel, da nastanejo kristali s sestavljanjem enakih "gradbenih elementov". Danes vemo, da so ti gradbeni elementi atomi ali atomske skupine, ki so v kristalu razporejeni po pravilni prostorski mreži. Velika večina trdnih snovi ima kristalno zgradbo. Okoliščine, v katerih nastajajo v naravi, pa le redkokdaj omogočajo nastanek velikih ravnih ploskev, po katerih navadno prepoznavamo kristale.

Osnovna značilnost kristalov je stroga urejenost gradnikov. A naj dajejo kristali vtis še tako popolnega reda, tudi oni "niso brez napak". "Kot človeške napake se tudi napake v kristalih pojavljajo v brezštevilnih inačicah, mnoge odbijajoče in zoprne, druge spet očarljive", pravita v svojem učbeniku Fizika trdne snovi avtorja Ashcroft in Mermin. Tudi v kristalih so torej posejane napake, včasih v večjem, včasih v manjšem številu, enkrat nezaželene, drugič koristne. Ta prispevek naj bo kratek opis nekaj najobičajnejših napak.

Preden se lotimo napak, se na kratko pomudimo pri idealnem kristalu in nekaterih izrazih, ki jih bomo večkrat rabili. Kristalna mreža je pravilna periodična razporeditev točk v prostoru in je matematičen pojem, ki podaja osnovno geometrijo kristalne strukture. Kristal dobimo tako, da na vse mrežne točke "pripnemo" enake gradbene elemente. Tak gradbeni element imenujemo baza in ga lahko sestavljajo posamezni atomi, atomske skupine, molekule ali ioni. Najpreprostejšo kristalno mrežo si lahko mislimo sestavljeno iz enakih kock; oglišča kock tvorijo enostavno kubično mrežo (EKM). V naravi skorajda ni snovi, ki bi imela razporejene gradnike po točkah EKM. Mnoge snovi pa kristalizirajo v telesno-centrirani ali v ploskovno-centrirani kubični mreži. Prvo dobimo tako, da postavimo dodatne točke v središče vsake kocke v EKM. Na tak način kristalizirajo npr. krom, železo, volfram, vanadij itd. Drugo dobimo, če postavimo po kockah v EKM dodatne točke na sredini vsake ploskve. Po tem vzorcu kristalizirajo npr. aluminij, baker, srebro, zlato in mnogo drugih snovi. Vse tri različne kubične mreže kaže sl. 1. Doslej je bil v vsaki mrežni točki le po en atom. Kot zgled za kristal z bazo, v kateri je več kot en atom, vzemimo kuhinjsko sol NaCl. NaCl sestavlja enako število natrijevih in klorovih ionov, razvrščenih izmenoma po točkah EKM, tako da je vsak ion obkrožen s šestimi najbližjimi sosedi druge vrste. Tako strukturo lahko opišemo kot ploskovno-centrirano kubično mrežo z bazo, ki jo sestavljata malo razmaknjena natrijev in klorov ion. Enako kristalno zgradbo imajo še npr. NaBr, KCl, KBr in drugi (sl. 2). V anorganskih kristalih je število atomov v bazi povečini majhno, lahko pa se povzpne do okoli sto, v proteinskih molekulah pa tudi do sto tisoč. Kristalno strukturo potemtakem poznamo, če poznamo njeno kristalno mrežo in bazo. Razdaljo med dvema sosednjima mrežnima točkama imenujemo mrežno razdaljo.



Sl. 1: Kubične kristalne mreže: (a) enostavna kubična mreža, ki jo dobimo s sestavljanjem enakih kock, (b) element telesno-centrirane kubične mreže in (c) element ploskovno-centrirane kubične mreže. V resničnem kristalu so na mrežnih točkah atomi, podobni kroglam, ki se druga druge dotikajo.

Povejmo sedaj, kaj je napaka. Napaka je vsak odklon od idealne strukture: manjkajoč atom, odvečen atom, drugačen atom itd. Bolj na dolgo povedano je napaka vsako območje, kjer se razporeditev gradnikov razlikuje od razporeditve v idealnem kristalu. Napake so ploskovne, črtaste ali točkovne, glede na območje, po katerem se raztezajo. Resnični kristali niso nikoli idealni, vedno nosijo napake, ki bolj ali manj spreminjajo njihove fizikalne lastnosti.

Točkovne napake

Ustavili se bomo le pri točkovnih napakah. Najpreprostejše in najbolj pogoste so praznine in vrinki. Praznina je manjkajoč atom ali ion. Ločimo dve vrsti praznin: Schottkyjeve in Frenklove. Prve nastajajo tako, da se v idealnem kristalu preseli atom s kake mrežne točke na površje. Druge dobimo, če se preseli atom z mrežne točke na kako vmesno (intersticialno) točko, ki v idealnem kristalu ni zasedena. Sl. 3 shematično kaže nastanek praznin v ionskem kristalu. Vrinki so atomi, ki so se intersticialno vrinili v kristal in jih v idealnem kristalu ni. Vrinki se pojavljajo seveda tudi ob vsaki Frenklovi praznini.

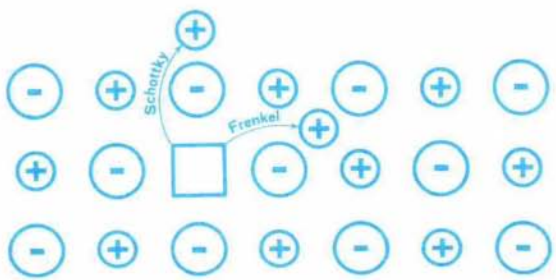
V kovinah,tik preden se stalijo, je navadno od 0,01 do 0,1 odstotka praznin. Opazili so, da nastajajo v nekaterih kristalih, npr. v NaCl in KCl, v glavnem Schottkyjeve praznine, v drugih, npr. v AgCl ali AgBr, pa Frenklove.

Gostota kristala, v katerem nastajajo Schottkyjeve praznine,

Sl. 2: Kristalna zgradba kuhinjske soli NaCl: bazo sestavljata iona Na^+ in Cl^-, ki sta narisana ojačeno. Ioni Na^+ in Cl^- vsak zase tvorijo ploskovno-centrirano kubično mrežo. Celoten kristal dobimo, če v vsaki točki natrijeve podmreže postavimo bazo. Poišči šest najbližjih sosedov iona Cl^- v središču slike. Izberi si enega natrijevih ionov in poišči njegovih šest najbližjih sosedov.

se manjša, medtem ko tvorba Frenklovih praznin gostote ne spremeni. Če namreč prehajajo atomi iz notranjosti kristala na površje - tako nastajajo Schottkyjeve praznine - se masa kristala ne spremeni, prostornina pa se poveča. Zato se gostota zmanjša. Pri nastajanju Frenklovih praznin prehajajo atomi z enega mesta na drugo le znotraj kristala, zato ostaneta nespremenjeni tako masa kot prostornina in torej tudi gostota.

Kristali s Schottkyjevimi prazninami se z rastočo temperaturo raztezajo bolj kot kristali s Frenklovimi prazninami ali kot idealni kristali. Vzemimo idealen kubični kristal z razdaljo a med mrežnima točkama. Kristal naj ima obliko kocke z robom L, ki meri N' mrežnih razdalj. Tako je $L = N'a$. Ko kristal segrejemo, se poveča mrežna razdalja za Δa, rob kristala pa za ΔL. Pričakovali bi, da sta ΔL in Δa sorazmerna: $\Delta L = N'\Delta a$, oziroma, da sta relativna raztezka enaka: $\Delta L/L = \Delta a/a$. Spremembo mrežne razdalje lahko določimo iz opazovanja uklona rentgenske svetlobe na kristalu, spremembo dolžine roba pri kristalu pa z merjenji, ki so podobna šolskim merjenjem raztezka segrete palice. Sl. 4 kaže izid merjenj pri aluminiju. Relativni raztezek kristala $\Delta L/L$ je večji kot $\Delta a/a$ in se s temperaturo hitreje povečuje. To kaže, da se kristal ne veča le na račun večanja mrežne razdalje a, ampak se hkrati povečuje števi-



Sl. 3: Schottkyjeve in Frenklove praznine. Z □ smo označili praznino. Slika kaže nastanek praznine pozitivnega iona, enako nastajajo tudi praznine negativnih ionov.

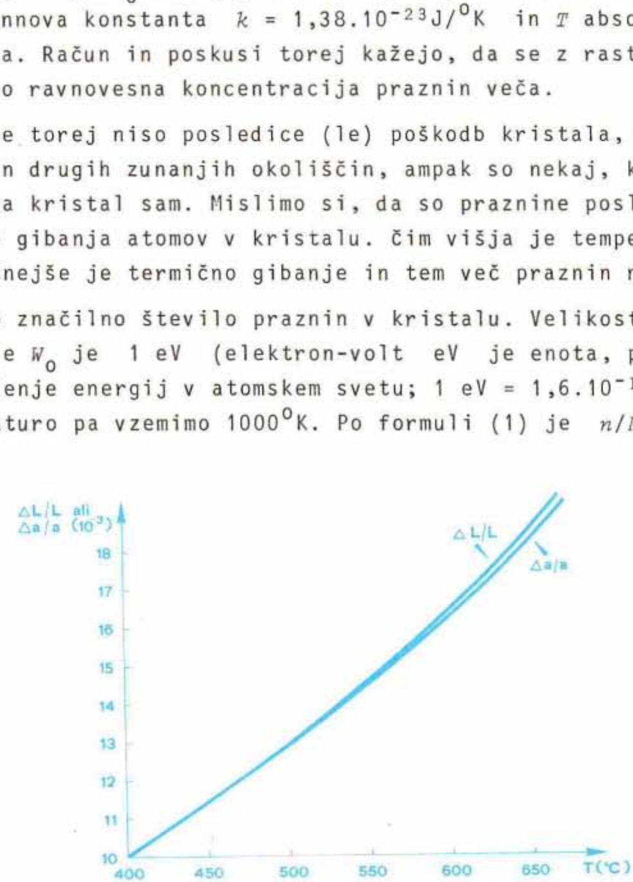
lo praznih mest v mreži - povečuje se število praznin. Ta in mnogi drugi poskusi kažejo, da je koncentracija praznin v kristalu odvisna od temperature. Iz zakonov fizike lahko izračunamo, da so praznine prisotne tudi v sicer idealnem kristalu. V kristalu z N atomi je

$$n = N \exp(-W_0/kT) \tag{1}$$

praznin, če je W_0 energija za oblikovanje ene praznine, k Boltzmannova konstanta $k = 1{,}38.10^{-23}\,J/^0K$ in T absolutna temperatura. Račun in poskusi torej kažejo, da se z rastočo temperaturo ravnovesna koncentracija praznin veča.

Praznine torej niso posledice (le) poškodb kristala, neidealne rasti in drugih zunanjih okoliščin, ampak so nekaj, kar je značilno za kristal sam. Mislimo si, da so praznine posledica termičnega gibanja atomov v kristalu. Čim višja je temperatura, tem močnejše je termično gibanje in tem več praznin nastane.

Ocenimo značilno število praznin v kristalu. Velikostni red energije W_0 je 1 eV (elektron-volt eV je enota, primerna za merjenje energij v atomskem svetu; 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$J), za temperaturo pa vzemimo 1000^0K. Po formuli (1) je $n/N \sim 10^{-5}$



Sl. 4: Razlika med relativnim linearnim raztezkom kristala $\Delta L/L$ in relativno spremembo mrežne razdalje $\Delta a/a$ pri segrevanju kristala aluminija.

Na vsakih sto tisoč atomov eden manjka. To pomeni, da je v kristalu z velikostjo $1 cm^3$ z okoli 10^{23} atomov okoli 10^{18} praznin. Pri drugačni temperaturi je seveda tudi koncentracija praznin drugačna.

Omenimo, da v kristalih ne morejo nastajati poljubne koncentracije poljubnih vrst praznin. Ena od važnih omejitev je električna nevtralnost kristala. Če bi npr. iz kristala KCl odstranjevali le ione K^+, bi postal kristal električno neuravnovešen - negativno nabit. Če naj ostane nevtralen, mora nastati enako število pozitivnih in negativnih praznin.

Praznine so pomembne pri električni prevodnosti ionskih kristalov, ki jih sicer poznamo kot izolatorje. Nosilci električnega toka v teh kristalih niso elektroni kot v kovinah, ampak ioni. Le-ti se le stežka prebijajo skozi gosto mrežo ionov idealnega kristala. Zato je specifični upor takih kristalov tako velik: v kristalih alkalnih halogenidov je od 10 do 10^6 ohm-m (v bakru npr. je le 10^{-8} ohm-m). Upor pa se hitro manjša, če se poveča število praznin, saj se le-te premikajo v kristalu mnogo lažje. Da je električna prevodnost res odvisna predvsem od gibanja praznin, se prepričamo, če izmerimo odvisnost prevodnosti od temperature: prevodnost se veča eksponentno z $1/T$, torej na enak način kot ravnovesna koncentracija praznin, ki jo podaja formula (1).

O pomenu praznin za prevodnost se prepričamo tudi, če dodajamo kristalom alkalnih halogenidov kak dvovalentni element. Ugotovili so, da je električna prevodnost sorazmerna z dodatkom dvovalentnega elementa. Hkrati so opazili, da se na elektrodah še vedno nabira enovalentni element, kar priča, da je še vedno le-ta nosilec električnega toka. Vsak ion Ca^{++}, ki ga vgradimo v kristal na mesto iona K^+, ustvari namreč negativno praznino K^+ .* Dvovalentni ioni povečujejo prevodnost posredno tako, da ustvarjajo nove praznine. Več praznin pomeni večjo prevodnost. Zato je prevodnost v ionskih kristalih tako zelo odvisna od temperature in od čistosti vzorca.

Barvni centri

Napake v kristalih lahko vplivajo tudi na njihovo barvo. Mrežne napake, ki vpijajo (absorbirajo) vidno svetlobo, imenujemo *barvne centre*. Praznine same navadno kristalov ne obarvajo. V kristalih alkalnih halogenidov na primer, ki so prozorni na vsem vidnem območju, kadar so čisti, vplivajo mrežne praznine na absorpcijo ultravijoličnih žarkov, ne pa na vidno svetlobo in zato tudi ne na barvo. Lahko pa jih obarvamo drugače. V nadaljnjem si bomo ogledali nekaj preprostih barvnih centrov, ki dajejo kristalom barvo.

Najpreprostejši iz družine barvnih centrov je *F-center* (kar je okrajšava za nemško besedo Farbzentrum = barvni center). F-center je na praznino negativnega iona vezan elektron. Učinek praznine negativnega iona je tak, kot bi na njegovem mestu sedel delec s pozitivnim nabojem**.

Sistem praznina-elektron je podoben izoliranemu atomu, npr. vodikovemu ali natrijevemu ali kašnemu drugemu, in se podobno tudi obnaša. Zakaj lahko tak sistem kristal obarva? Vemo, da se plamen, v katerega vržemo malo kuhinjske soli, t.j. NaCl, rumeno obarva. To razložimo takole. Atomi se lahko nahajajo v

* Negativne praznine K^+ se v kristalu v resnici pojavljajo, ker so potrebne za ohranitev električne nevtralnosti. Dvakrat ionizirani ioni Ca^{++} izpodrivajo le enkrat ionizirane ione K^+ in ustvarjajo presežek pozitivnega naboja. Presežek se uravnovesi tako, da se vsakemu ionu Ca^{++} umakneta dva iona K^+ ; na mesto prvega sede Ca^{++}, mesto drugega ostane prazno. Torej ustvari vsak Ca^{++} eno negativno praznino K^+. To potrjujejo tudi merjenja gostote kristala.

** To si predstavljamo takole. Ko so prisotni še vsi ioni, je kristal nevtralen. Nato odstranimo naboj $-e$ negativnega iona na dva načina. Enkrat odnesemo negativni naboj iz kristala in ustvarimo praznino. Drugič "uničimo" naboj $-e$ negativnega iona tako, da mu dodamo enako velik pozitivni naboj $+e$. Obakrat je elektrostatični učinek enak, obakrat smo se znebili negativnega naboja. Torej ima odstranitev negativnega iona z nabojem $-e$ enak učinek, kot če v nevtralnem kristalu dodamo na njegovo mesto pozitivni naboj $+e$. Zato deluje praznina negativnega iona kot bi imela pozitiven naboj. Pozitivni naboj pa privlači negativne elektrone in kakšnega tudi ujame. Tako nastane F-center.

stanjih z različnimi notranjimi energijami. Te energije niso poljubne, ampak imajo le izbrane, točno določene vrednosti. Kadar je atom v stanju z najnižjo energijo, pravimo, da je v osnovnem stanju, sicer je v vzbujenem. Atomi se iz vzbujenih stanj vedno sami vračajo v osnovno stanje. Atom lahko preide iz enega stanja v drugo, če dobi ali odda primerno energijo, t.j. energijo, ki je natančno enaka energijski razliki med obema stanjema. Pri natrijevem atomu je prvo vzbujeno stanje za energijo 2,1 eV nad osnovnim stanjem. Atom natrija lahko preide iz osnovnega stanja, če dobi ravno to energijo, ko pa preide nazaj v osnovno stanje, to energijo spet odda. Natrijevim atomom lahko prinese za prehod v vzbujeno stanje potrebno energijo svetloba - natrijeva para črpa iz vidne svetlobe tisto sestavino, ki ima energijo fotonov ravno 2,1 eV, t.j. rumeno svetlobo z valovno dolžino 5900 Å. Pri poskusu s kuhinjsko soljo v plamenu izhlapeva iz soli natrij. Pri temperaturi, ki je v plamenu okrog 2000^{o}C, je kinetična energija atomov že dovolj velika, da lahko dobivajo natrijevi atomi energijo za prehod v vzbujeno stanje tudi s trki. Iz vzbujenega stanja v osnovno pa se spet vračajo tako, da se znebijo odvečne energije v obliki fotonov svetlobe valovne dolžine 5900 Å. Zato je plamen rumeno obarvan.

Barvni centri so lahko kot izolirani atomi v različnih stanjih z določenimi notranjimi energijami. Pri prehodih centri črpajo ali sevajo fotone svetlobe s primerno valovno dolžino. Tako, podobno kot natrijevi atomi plamen, barvni centri obarvajo kristal.

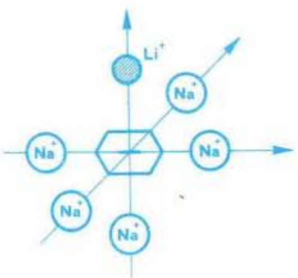
Najbolj znani so barvni centri v kristalih alkalnih halogenidov. Dobimo jih tako, da čiste kristale obsevamo z rentgensko svetlobo ali z žarki gama ali pa segrevamo kristale v pari alkalne kovine. Kristal NaCl, ki ga segrevamo v natrijevi pari, postane npr. rumen, kristal KCl pa v kalijevi škrlatnordeč. Pri segrevanju kristala v kovinski pari se alkalni atomi vgradijo v kristal in jih je od 10^{16} do 10^{19} na cm^3. Gostota obarvanega kristala se manjša sorazmerno s koncentracijo alkalnih atomov. To pomeni, da se atomi iz pare alkalne kovine ionizirajo in vgradijo v kristalu na mesta pozitivnih ionov. Pri tem nastajajo hkrati praznine negativnih ionov. Elektroni ioniziranih atomov se ujamejo na te praznine in ustvarijo F-centre.

Na podoben način kot F-centri nastajajo tudi sorodni, a bolj zapleteni barvni centri. *M-center* je nekakšen dvojni F-center: dva elektrona se ujameta na dve sosednji praznini. *R-center* je trojni F-center, v katerem so povezane tri bližnje praznine s tremi elektroni itd.

F-centru zelo podoben je tudi *F_A-center*. V kubičnih kristalih tipa NaCl obdaja F-center šest enakih najbližjih sosedov - pozitivnih ionov. F_A-center dobimo, če enega od njih nadomestimo z drugačnim ionom - nečistočo (sl. 5). Ko zamenjamo enega od prvotnih ionov, se spremeni električno polje, v katerem se nahaja F-center. Zato se spremenijo možna energijska stanja barvnega centra, s tem energijske razlike med osnovnim in vzbujenimi stanji in tako tudi barva svetlobe, ki jo center črpa ali oddaja.

Vrsto centrov razpoznavajo predvsem iz barve svetlobe, ki jo absorbirajo pri prehodih iz osnovnega v vzbujena stanja. Vendar samo iz barve sestava centra še ne morejo zanesljivo določiti. Za to uporabljajo najrazličnejše tehnike in zvijače, ki pa si jih žal tu ne moremo ogledati.

S tem opisom nismo niti približno izčrpali točkovnih napak. Nismo npr. omenili, da obstajajo poleg običajnih napak, ki smo jih srečali - praznin, vrinkov, nečistoč, barvnih centrov - v



Sl. 5: F_A- center, označili smo ga z ⊖, v kristalu NaCl. F_A-center je nastal na mestu iona Cl^-, najbližji sosedi so ioni Na^+, od katerih je enega zamenjal ion Li^+.

kristalih tudi bolj neopazne napake, ki pravzaprav sploh niso prave napake. Taka "napaka" je npr. eksciton. To je navaden ion idealnega kristala, ki se od drugih ionov razlikuje po tem, da je v vzbujenem (ekscitiranem - od tod ime) stanju. Vzbujeno stanje se lahko prenaša z iona na ion in se obnaša kot poseben delec. No, za tak podrobnejši pregled nimamo niti dovolj prostora niti dovolj znanja. Namen prispevka je bil le pokazati, da v kristalih ne obstaja samo svet zanimivih urejenih struktur, ampak tudi nič manj zanimiv in privlačen svet nereda in napak.

Tomaž Kranjc

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
7. letnik, šolsko leto 1979/80, 2. številka, str. 65 - 128.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupinska pa 32.-din; za inozemstvo 3 \$ = 60.-din, 2500Lit, 45.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost Slovenije in raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja petkrat letno v nakladi 22.000 izvodov.

PISMA BRALCEV

Dr. Alojzij Vadnal, profesor matematike na Univerzi E. Kardelja v Ljubljani, ekonomska fakulteta, nam je poslal zanimivo pismo. Njegov predlog o objavljanju literature, ki jo imamo v slovenskem jeziku, na koncu člankov, uredniški odbor pozdravlja in ga bo posredoval tudi vsem bodočim avtorjem člankov.

Uredništvu čestitam od vsega srca, PRESEK je zares čudovita revija. Namenjen je sicer osnovnošolski mladini, berejo jo pa radi tudi drugi, zlasti starši otrok, številni odrasli ljubitelji matematike, z velikim zanimanjem in zadovoljstvom pa ga beremo tudi - učitelji matematike.

Dovolite mi, da sporočim malenkostno priporočilo, ki bo lahko koristilo zlasti tistim bralcem, ki bi se radi še kaj več informirali o vsebini v PRESEKU prebranega članka. Kjer je to mogoče, bi temu namenu lahko služila na koncu članka navedena literatura v slovenščini, v kateri lahko najde bralec kake informacije o prebrani vsebini. S tem bi ubili dve muhi na mah: opozorili bi na obstoječo literaturo v našem jeziku in navedli bi bralca na brskanje po literaturi. Mnogi, zlasti bolj zavzeti bralci vam bodo za to hvaležni.

Kot primer navajam članek D. Bezek: Od števil k geometriji umetnosti in igri. PRESEK VI-1978/79:4, str. 196-201. Avtor obravnava med drugim Fibonaccijevo zaporedje. O tem zaporedju je v slovenščini že nekaj napisanega v naslednji literaturi:

1. F. Križanič: Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije. DZS 1970, str. 89-90.
2. J. Adler: Matematika od zlatega reza do teorije množic, DZS 1973, str. 40-44.
3. L. Hobgen: Matematika v nastajanju. MK 1976, str. 166-167.
4. A. Vadnal: Osnove diferenčnega računa. SIGMA, DZS 1979, str. 183-185.

VESNA URBANČIČ iz Velenja se nam je oglasila prvič in pravi: "Revija mi je zelo všeč, ker mi veliko pomaga pri učenju. Zelo rada jo prebiram, čeprav prejemam Presek vedno prepozno. Kljub temu rešujem naloge sama doma. Tokrat sem rešila nalogo pravočasno, da sem jo mogla poslati, ker sva delali s prijateljico, ki redno prejema Presek."

Vesna, hvala ti tudi za poslane pozdrave in za lepe želje. Veseli smo, da si kljub neprijetnim zakasnitvam pri prejemanju Preseka našla pot, po kateri lahko pravočasno narediš veselje vsem nam s poslano rešitvijo. Potrudili se bomo, da boš Presek odslej prejemala bolj redno.

SMILJA HITI iz Maribora je napisala takole: Dragi Presek! Sem tvoja zvesta bralka. Revijo naročam že drugo leto in mi je zelo všeč. Upam, da je poslana rešitev pravilna. Vse lepo pozdravljam.

Lepo te pozdravljamo tudi mi in ti želimo še dosti veselja in uspehov ob reševanju nalog. Oglasi se še kdaj!

SONJA JAN iz Zgornjih Gorij si je po štirih letih zvestega branja zaželela Presek na svoj naslov in je med drugim zapisala v pismu naslednje: "Vaša revija mi je zelo všeč, čeprav nekaj nalog nisem znala rešiti, ko sem obiskovala osnovno šolo. Še vedno hranim vse Preseke in večkrat pogledam vanje ter rešim kakšno nalogo, ki jo takrat nisem znala. Veliko so mi pomagale zbirke rešenih nalog pri pripravi na tekmovanje za Vegova priznanja. Vedno se razveselim nove številke, saj mi prinese zabavo in razvedrilo. Vse najlepše in najboljše želim vsem, ki urejate Presek in da bi ostal Presek še vedno tak, kakršen je."

Draga Sonja, hvala ti za pismo in za odkritosrčno besedo. Tvoj odnos do Preseka je zelo lep. Tako ti bo ostal Presek zvesti prijatelj vse življenje in ne le okras lastne knjižnice. Poskrbeli bomo, da boš tudi po zaključeni osnovni šoli prejemala Presek na svoj naslov. Želimo ti lepega razvedrila ob Preseku!

IVAN JOVAN iz Mislinja je napisal: Pozdravljeni! Drugič se vam oglašam. Predlagam, da bi v Preseku odprli kotiček, v katerem bi lahko bralci zastavljali razna vprašanja o astronomiji, fiziki in matematiki. Tu bi bilo veliko zanimivega, posebno razna dogajanja v vesolju ter matematični in fizični problemi, s katerimi se srečujemo v šoli in življenju. To je želja še mnogih bralcev. V odgovoru na moje prvo pismo ste me povpraševali po številu naročnikov v našem razredu. V razredu nas je tretji na učencev naročena na Presek in vsi se veselimo vsake nove številke.

Ivan, tvoji želji bomo ustregli takoj, ko bomo prejeli zadostno število vprašanj. Mogoče bodo tvoje vrstice vzpodbudile bralce k sodelovanju za predlagano rubriko. Srečno in lep pozdrav tebi in vsem prijateljem Preseka v razredu.

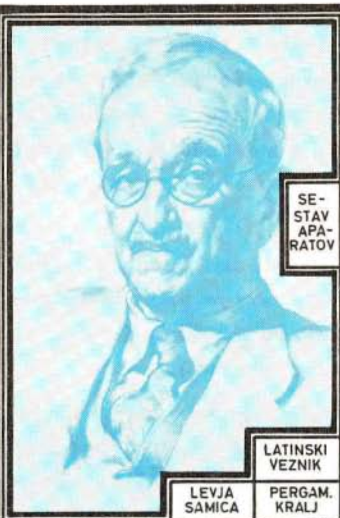
ANDREJA HAMER iz Velenja se je oglasila tudi drugič in sicer takole: Zdravo Presek! V številki 2/VI sem zasledila v rubriki Pisma bralcev, da nekdo sprašuje, če bo tudi letos izšla posebna priloga nalog. Tudi meni so bile tiste naloge všeč, saj sem jih rešila veliko. Upam na izid take priloge.

Andreja, hvala ti, da nam pošiljaš večkrat rešene naloge. Na svoje vprašanje si dobila deloma odgovor v uvodniku Preseka 1/VII. Vabimo te pa k tesnejšemu sodelovanju. V ta namen pričakujemo tudi tvoj prispevek za objavo. Srečno ob reševanju in sestavljanju nalog!

KARMEN ČUČEK iz Komende se lepo zahvaljujemo za pismo in za rešitev ter za lepe želje. Prisrčno te pozdravljamo in ti želimo poglobitve v matematiki in fiziki. Veseli bomo, če nam boš svoja odkritja zaupala še v kakšnem pismu. Srečno!

Matilda Lenarčič

SLIKOVNA KRIŽANKA



POMLADANI MESEC | GLASNIK, ZAGOVORNIK | MOŽEV OČE | JEZERO NA MEJI MED ZDA IN KANADO | MAJHNA MAPA | ATMOSFERA | ETUI | P… PO…

SESTAV APARATOV

REFRAKCIJA

PRIRODA

AM. PISATELJICA (GERTRUDE)

GR. ČRKA

REKA SKOZI NORTHAMPTON

LATINSKI VEZNIK

LEVJA SAMICA

PERGAM. KRALJ

STADION V BUDIMPEŠTI

KALCIJ

ILOVICA

VIOLINIST OZIM

GRŠKI FILOZOF, SOKRATOV UČENEC

OPERNI SPEV

KROM

AVIATIK

TURŠKI VELIKAŠ

PRVI ČRKI ABECEDE

POPEVKARICA SRŠEN

MUSLIM. SODNIK

PRAVNA VEDA

NAJV. EGIPČ. BOG

V…

LJUBK. Ž. IME (MILA)

VRSTA VRBE

LADJA

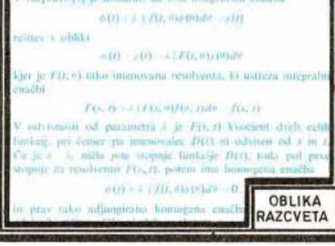
GLAVNI ŠTEVNIK

MODEL CITROENA

ANICA ČERNE

RUSKI SKLADAT. (ANATOL)

JAKOST


V razpravi [9] je dokazal, da ima integralska enačba

rešitev v obliki

kjer je F(t, θ) tako imenovana resolventa, ki ustreza integralni enačbi

V odvisnosti od parametra λ je F(s, t) kvocient dveh celih funkcij, pri čemer je imenovalec D(λ) ni odvisen od s in t. Če je λ … ničla p-te stopnje funkcije D(λ), tedaj pol prve stopnje za resolvento F(s, t), potem ima homogena enačba

in prav tako adjungirana homogena enačba

OBLIKA RAZCVETA

ℝIKRITO)SMEHO- /ANJE

"LADJA PUŠČAVE"

BOB HOPE

TRATE

VOJAŠKA ENOTA NA POHODU

DRŽAVA MED SRED. EVROPO IN SKANDINAV.

JEZERO V VZHODNI TURČIJI

NUMERO

BIVALIŠČE

PREDUJEM

DARILO

DANSKI OTOK V MALEM BELTU

MAKEDON. LJUDSKI PLES

DEL LADJE-DELNICE

ŽIVALSKI VRT

TORINO

VRSTA KORUZE

PLANOTA V ZAH. BOSNI

TANGENS

IGRA Z JAJČASTO ŽOGO(NAŠA PISAVA)

SOMBOR

SPISEK, SEZNAM

ŠPORTNA TROFEJA

KRONIKA

OJAŠKA LUKA V ZRN

NOBELOVEC ZA MIR 49 (JOHN)

TUJE Ž. IME

SKUPINA NASILNEŽEV

PERZIJA

DESNI PRI-TOK RENA

KRADLJIVEC

NAELEKTR. DELEC

D. PRITOK DRINE

ITALEC

VEZNIK

DRŽAVA V ZAHOD. AFRIKI

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

PREMISLI IN REŠI

Nalogo iz 4. številke 6. letnika Preseka "Sprehodi se po parku in pri tem čim manjkrat spremeni smer hoje" je rešilo 14 bralcev.

Najbolj ekonomično pot je našel Franc Jerala, ki obiskuje kranjsko gimnazijo. Na svoji poti skozi park je zavil le štirinajstkrat. Pri tem pa celo ni niti kosa poti prehodil dvakrat, kar je bilo sicer dovoljeno. Objavljamo njegovo rešitev.

Za nagrado prejme knjigo Alojzij Vadnal, Elementarni uvod v verjetnostni račun. Rešitve naslednje naloge pričakujemo do 20. 1. 1980.

Ljubomir Kostrevc

Prijatelj Tone je opazil, da ima številka njegove osebne izkaznice zanimive lastnosti: Sestoji iz devet cifer in v njej nastopajo vse cifre od 1 do 9. Število, ki ga številka predstavlja, je deljivo z 9. Če odrežemo enice, je dobljeno število deljivo z 8. Če odrežemo enice in desetice, dobimo število, ki je deljivo s 7. Če odrežemo na koncu tri cifre, je preostalo število deljivo s 6 itd., do konca. Kakšna je številka Tonetove osebne izkaznice?

Ivan Vidav

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

PREGIBANJE PAPIRJA IN ULOMKI PO DVOJIŠKO

Prvi razdelek

"Kako si po morji gledal, ko je bilo tema?"

"Naj bo tema, saj sem imel kresilo in gobo in drva, pa sem zakuril."

Josip Jurčič, Deseti brat

Papirnat trak pravokotne oblike lahko preganemo na pol. Enako lahko storimo z vsako polovico traku, z vsako polovico polovice, z vsako osmino, šestnajstino traku in tako naprej. Ko roka in oko odpovesta, lahko s pregibanjem nadaljujemo v mislih. Tako moremo razdeliti trak na 2, 4, 8, 16, ... - pri poljubno izbranem n torej na 2^n - enakih delov.

Za nadaljnje delo je koristno, če privzamemo, da je dolžina traku *enota*. Hkrati okličemo en konec traku za podobo števila *nič*, drugega pa za podobo števila *ena*. Tako opremljenemu papirčku rečemo *enotski trak*.

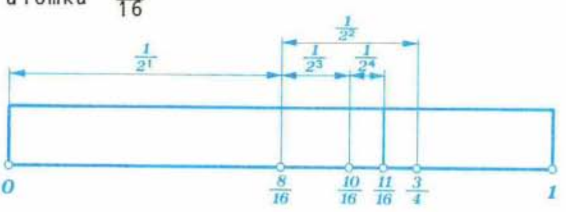
Če zanemarimo rokodelske težave, lahko na enotskem traku s pregibanjem upodobimo vsak ulomek $a/2^n$, ki ni večji od 1; priredimo mu pregib, ki je od začetka traku oddaljen ravno za $a/2^n$.

Zgled 1.1: Upodobitev ulomka $\frac{11}{16}$

$$\frac{11}{16} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} = \frac{0}{4} + \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$



$$\frac{11}{2^4} = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Opomba

Ulomke z imenovalcem 2^n ; $n \in N$ imenujemo *dvojiške* ulomke.

Vaja

Upodobi s pregibi enotskega traku ulomke 3/8, 4/16, 19/32, 35/112 .

V zgledu 1.1 smo razčlenili 11/16 na vsoto polovic, četrtin, osmin in šestnajstin tako, da števci posameznih členov *ne presegajo števila 1* . Dobljeno vsoto lahko zapišemo z *dvojiško številko*:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}1011_2$$

Preberemo jo: "Nič celih, ena nič ena ena po dvojiško."

Prva cifra, ki je v dvojiški številki zapisana za vejico, pomeni število polovic, druga število četrtin, ...; n-ta cifra za vejico pomeni števec ulomka z imenovalcem 2^n.

Vaja

Okrajšaj in zapiši po dvojiško 15/40, 4/64, 38/64, 35/112, 33/192 .

Prevajanje ulomkov v dvojiški zapis si oglejmo bolj podrobno.

Začnimo s pozitivnim okrajšanim ulomkom $a/2^n$, ki je manjši od 1. Bistroumni bralec je že opazil, da ima dvojiška številka tega ulomka za vejico ravno n cifer in da je zadnja med njimi vselej enica. *Prva* pa je enica le, če izbrani ulomek ni manjši od ene polovice:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{1}{2}$$

Tak ulomek ima svojo podobo na desni polovici enotskega traku ali kvečjemu na njegovi sredini.

Ulomka a/b in 1/2 lahko primerjamo po velikosti, tako da $2a/b$ primerjamo z 1 :

$$\frac{a}{b} \geqq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a \geqq b$$

Pogoj $2a \geqq b$ nas vodi pri iskanju prve cifre, ki sledi veji-ci:

1. Dani ulomek pomnožimo z 2.
2. Če je novi števec večji ali enak imenovalcu, je iskana cifra enica. V nasprotnem primeru je ničla.

Pri iskanju naslednje cifre moramo upoštevati dve možnosti:

a) Prva cifra je ničla. Enica ji sledi le, če je $\frac{a}{b} \geqq \frac{1}{4}$, se pravi $2.\frac{2a}{b} \geqq 1$

Ulomek, ki smo ga dosegli s prejšnjim korakom, pomnožimo torej z 2. Potem primerjamo novi števec z imenovalcem in zapišemo ustrezno cifro.

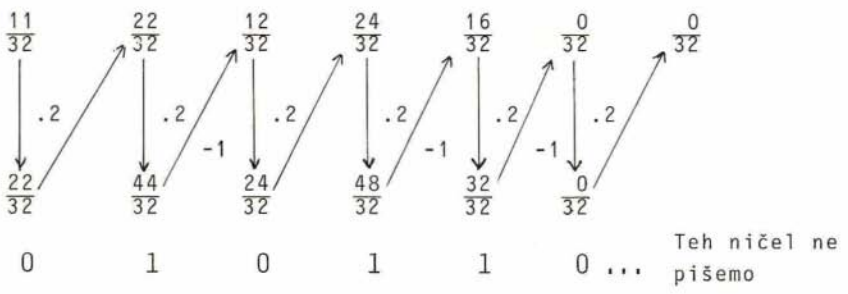
b) Prva cifra je enica. Enica je tudi naslednja, če le razlika $\frac{a}{b} - \frac{1}{2}$ ni manjša od $\frac{1}{4}$:

$\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{4}$ ali $2(\frac{2a}{b} - 1) \geqq 1$

Od ulomka, ki smo ga dosegli s prejšnjim korakom, odštejemo torej 1 in dobljeno razliko pomnožimo z 2. Potem zopet primerjamo novi števec z imenovalcem.

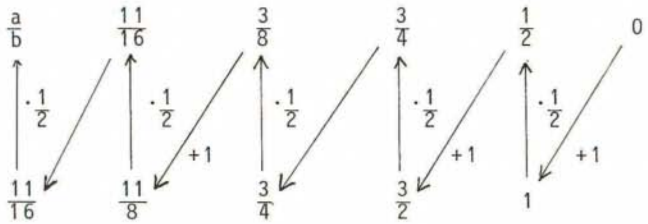
Tako kot drugo, poiščemo tudi vsako naslednjo cifro.

Zgled 1.2: Dvojiška številka ulomka 11/32



$$\frac{11}{32} = 0{,}01011_2$$

Rešimo še obratno nalogo! Pot, ki smo jo zgoraj opisali z diagramom, prehodimo sedaj v obratni smeri, pri čemer zamenjamo vsak razteg z obratnim raztegom in vsak premik z nasprotnim premikom.



Krajše: $(((((0 + 1)\frac{1}{2} + 1)\frac{1}{2} + 0)\frac{1}{2} + 1)\frac{1}{2} + 0)\frac{1}{2} = \frac{11}{32}$

Z obratnim prevodom pričnemo torej pri *zadnji* cifri dane dvojiške številke. Vodijo nas cifre:

1 pomeni ukaz "Prištej 1 in dobljeno vsoto deli z 2" ,
0 pa ukaz "Prištej 0 in dobljeno vsoto deli z 2",
ali krajše "Deli z 2".

Zgled 1.3

$$0{,}100011_2 = (((0 + 1)\frac{1}{2} + 1)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1)\frac{1}{2} = \frac{35}{64}$$

Vaja

Poišči števec in imenovalec okrajšanega ulomka, ki ga predstavlja dvojiška številka

a) 0,0001 b) 0,01010101 c) 0,001001001 d) 0,011011011

Dvojiški zapis nam olajša upodobitev danega ulomka na enotskem traku.

Denimo, da smo model enotske daljice preganili že vsaj enkrat in da pregib, ki smo ga izdelali nazadnje, upodablja število x.

Cifra 0 ("Deli z 2!") pomeni sedaj

"Prepolovi tisti del traku, ki leži *levo* od zadnjega pregiba." Ta ukaz označimo z L.

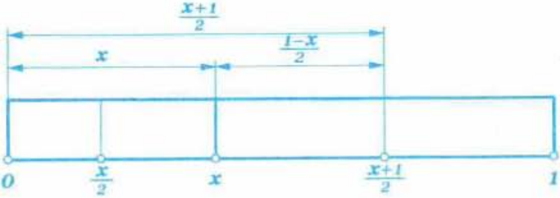
Navodila "Prištej 1, nato deli z 2!" pa v ukaz za pregibanje traku ne moremo prevesti neposredno, ker bi s premikom za 1 v desno prekoračili desni rob traku. Pomagamo si z domislekom

$$\frac{x + 1}{2} = x + \frac{1 - x}{2}$$

pri čemer pomeni x dolžino tistega dela traku, ki leži levo od zadnjega pregiba, $(1 - x)/2$ pa dolžino polovice ostanka na desni.

Cifra 1 pomeni torej

"Prepolovi tisti del traku, ki leži *desno* od zadnjega pregiba!" Ta ukaz označimo z D.



Zgled 1.4: Upodobitev ulomka $\frac{27}{64}$

Ulomek najprej zapišemo po dvojiško: $\frac{27}{64} = 0{,}011011_2$

Številko preberemo od desne proti levi in dobimo zaporedje ukazov za pregibanje enotskega traku:

$$D \to D \to L \to D \to D \to L$$

Opomba

Pri prvem ukazu vzamemo za "zadnji pregib" kar levi rob traku.

Drugi razdelek

"Ali te je bilo kaj strah?" praša krčmar.
"Kako me bo strah, ko sem
britko sabljo v rokah držal?"

Josip Jurčič, Deseti brat

Oglejmo si dvojiški zapis kakega okrajšanega ulomka, ki v imenovalcu nima prafaktorja 2. Tudi tokrat se omejimo na ulomke, ki so manjši od 1.

Zgled 2.1: Dvojiški zapis ulomka $\frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} \quad \dots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & \dots & \\
 & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & 0 & & 1 & \dots &
\end{array}
$$

Ulomku 1/3 ustreza neskončna periodična dvojiška številka 0,010101 ... Zapišemo jo takole: $0,\overline{01}_2$

Ulomke, ki so jim v danem sestavu prirejene periodične neskončne številke, nadomestimo pri računanju v tem sestavu s približki. V našem primeru je začetni približek lahko kar 0; zapis vsakega naslednjega približka naj bo od predhodnikovega zapisa daljši za periodo:

$$
\begin{array}{ll}
p_0 = 0 & p_3 = 0{,}01010101 = 21/64 \\
p_1 = 0{,}01 = 1/4 & \quad \dots \\
p_2 = 0{,}0101 = 5/16 & p_k = 1/1 + 1/16 + 1/64 + \dots + 1/4^k
\end{array}
$$

V izrazu za p_k izpostavimo skupni faktor:

$$p_k = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right]$$

Če upoštevamo identiteto $(a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1}) = a^k - 1$, dobimo

$$p_k = \frac{1}{3}\,\frac{4^k - 1}{4^k}$$

Označimo z Δp_k absolutno napako približka p_k : $\Delta p_k = |\frac{1}{3} - p_k|$

Hitro lahko izračunamo $\Delta p_0 = \frac{1}{3}$, $\Delta p_1 = \frac{1}{12}$, $\Delta p_2 = \frac{1}{48}$, $\Delta p_3 = \frac{1}{192}$

Domnevamo, da je absolutna napaka vsakega naslednjega približka štirikrat manjša od napake predhodnega.

Premislek

$$\Delta p_k = \frac{1}{3} - p_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{4^k - 1}{4^k} = \frac{1}{3.4^k}$$

Potem je

$$\Delta p_{k+1} = \frac{1}{3.4^{k+1}} = \frac{1}{4}\;\frac{1}{3.4^k} \quad \text{, se pravi}$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{4}\;p_k \quad ; \text{ domneva je bila pravilna.}$$

Vaja

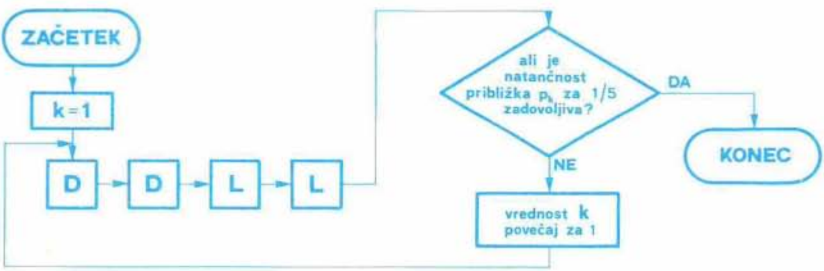
Poišči nekaj dvojiških približkov za ulomke 1/5, 1/7, 1/17 in izračunaj njihove absolutne napake.

Dvojiške približke ulomka $\frac{1}{n}$ že znamo upodobiti na enotskem traku. To se pravi, da lahko papirnat trak razdelimo samo s pregibanjem na n (približno) enakih delov.

Zgled 2.2: Kako razdelimo papirnat trak na pet približno enakih delov?

Najprej zapišemo 1/5 po dvojiško: $1/5 = 0,\overline{0011}_2$

Periodo 0011 prevedemo v zaporedje ukazov DDLL za pregibanje traku. Nadaljnji potek dela lahko razberemo z diagrama:



Z opisanim postopkom se sorazmerno hitro približamo iskani petini traku: če zanemarimo napake, ki jih povzročata papir in omejena natančnost oči in rok, je absolutna napaka vsakega naslednjega približka 16 krat manjša od napake predhodnega. Po trikratni izvršitvi zaporedja ukazov DDLL znaša le še $\frac{1}{16^3} p_0$, se pravi $\frac{1}{20480}$ dolžine traku. Pri 20 cm dolgem traku pomeni to le slabo stotinko milimetra.

Vaja
Razdeli papirnat trak na 7 (na 9, 11, 17) približno enakih delov.

Franc Savnik

POCENI TABLICE

Črk je več kot številk. Tako ima naša abeceda 25 črk, medtem ko je številk 10. Napisati serijo (pravzaprav permutacijo s ponavljanjem) recimo petih znakov s črkami moremo zato na dosti več načinov kot pa s številkami.

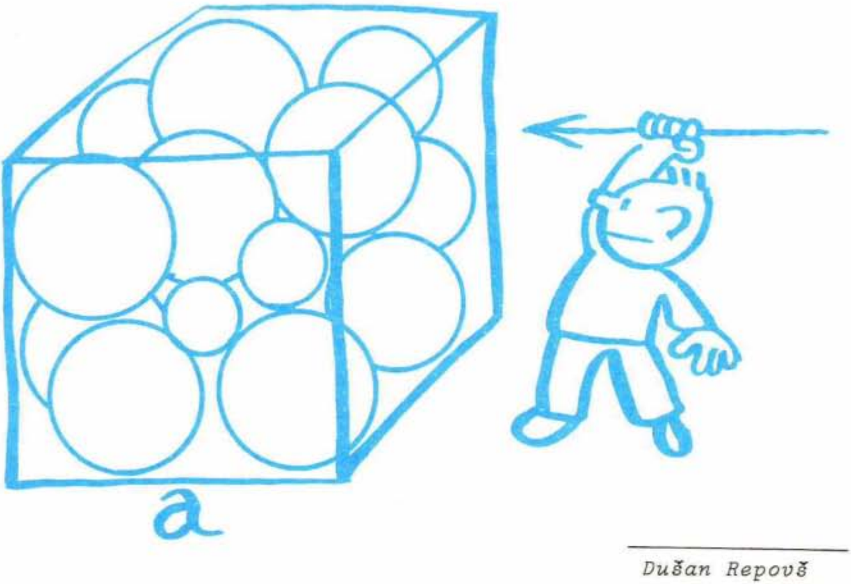
Na avtomobilskih registracijskih tablicah so številke. Če bi uporabljali črke, bi bile lahko tablice krajše. Vprašanje: "Kolikšen odstotek materiala bi lahko prihranili na tablicah s celjsko registracijo?"

Karel Bajc

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

NENAVADNA PREMICA*

Znotraj kocke z robom a se nahaja nekaj krogel s skupno površino S, ki je večja od πa^2. Dokaži, da obstaja premica, ki seka vsaj $[\frac{n}{4}] + 1$ teh krogel in je pravokotna na eno stransko ploskev. (Oglati oklepaj $[x]$ pomeni največje celo število, ki ne presega realnega števila x.)



Dušan Repovš

* Prispevek je ilustriral *Božo Kos*

TEKMOVANJA - NALOGE

17. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Letošnje republiško tekmovanje mladih fizikov je bilo 12. maja v Kopru. Sodelovalo je 131 dijakov iz 19 srednjih šol, ki so bili izbrani na podlagi rezultatov predtekmovanja.

Tekmovanje je potekalo v znamenju sončne energije, saj fiziki nismo mogli ostati ravnodušni ob bolj in bolj žgoči energetski krizi. Dijaki četrtih razredov so tako reševali računske naloge na temo o sončni energiji; na predvečer tekmovanja pa je bilo v dijaškem domu v Kopru družabno tekmovanje srednješolskih ekip. Na tem tekmovanju so se vprašanja nanašala na fizikalne osnove sevanja, na merilno in tehnično opremo ter na dosežke in zamisli sončne energetike. Pokroviteljstvo nad tekmovanjem je prevzelo Gorenje iz Velenja. Zanimanje za sončno energijo je preseglo vsa pričakovanja, nastopilo je 13 tričlanskih ekip iz vse Slovenije, tako da se je tekmovanje zavleklo pozno v noč. Bilo je živahno, poleg vprašanj tekmovalcem je bilo več resnih pa tudi šaljivih vprašanj, zastavljenih prisotnim v dvorani, ki so za vsak pravilni odgovor prejeli nagrado. Prvi dve mesti sta osvojili ekipi s I. gimnazije v Ljubljani, tretje mesto pa je pripadlo ekipi I. gimnazije iz Maribora.

Republiško tekmovanje je bilo naslednji dan, v soboto, v prostorih koprske gimnazije. Po kosilu so si dijaki četrtih razredov ogledali inštitut tovarne Tomos, dijaki drugih in tretjih razredov pa Luko Koper. Slednji so imeli prav posebno srečo, saj jih je krepak naliv presenetil ravno pri ogledu skladišča banan... Ob 17^{h} je predsednik tekmovalne komisije prof. Moljk podelil nagrade in pohvale najuspešnejšim posameznikom.

Nagrade in pohvale so prejeli naslednji dijaki:

2. razred:
Matjaž Koluža (gimn. M. Zidanšek, Maribor) in Vasja Jurkas (gimn. Nova Gorica) drugo nagrado, Gorazd Planišič (I. gimn. Ljubljana) tretjo nagrado; pohvale pa so dobili Tomaž Senica, Igor Poberaj, Ervin Križnič in Branko Dernač.

3. razred:
Tone Verbovšek (I. gimn. Ljubljana) prvo nagrado, Boris Majaron (I. gimn. Maribor) drugo nagrado, Maks Romih (I. gimn. Ljubljana), Samo Lazar (gimn. M. Zidanšek, Maribor) in Jana Padežnik (gimn. M. Zidanšek, Maribor) tretjo nagrado; pohvale pa Andrej Brodnik, Tomi Dolenc, Bojan Resman in Samo Resnik.

4. razred:
Magda Godina (gimn. N. Gorica), Kazimir Gomilšek (gimn. M. Zidanška, Maribor) in Matjaž Jošt (gimn. Celje) prvo nagrado, Ludvik Medvešek (gimn. I. Cankar), Mark Pleško (gimn. Vič), Zlatko Rek (gimn. Ravne na Koroškem) in Borut Robič (I. gimn. Ljubljana) tretjo nagrado; pohvale pa Jure Čretnik, Darko Hanžel, Marko Lovrečič in Iztok Parzer.

Naloge z letošnjega predtekmovanja:

<u>Drugi razred:</u>

1. Kandidate za šoferski izpit učijo naslednjo "formulo" za pot zaviranja:

$$\text{pot zaviranja} = \frac{(\text{hitrost})^2}{100}$$

pri čemer morajo hitrost vstaviti v km/h , pot pa dobijo v metrih. Ali se za to formulo skriva fizikalna vsebina? Razloži! Kolikšen koeficient trenja pri zaviranju so upoštevali sestavljalci formule?

2. Iz balona z maso 500 kg, ki lebdi na višini 20 m nad tlemi, spusti član posadke vrečo peska z maso 30 kg. Opazovalec v balonu lahko izračuna hitrost, ki jo ima balon v trenutku, ko se vreča razleti na tleh. Izračunaj jo še ti. Pri tem zanemari upor zraka.

3. Na tiru miruje vagon z maso 20 t. Vanj se zaleti s hitrostjo 5 m/s drug vagon z enako maso in se z njim sprime. Čez nekaj časa se v drugi vagon zaleti tretji vagon, za njim pride četrti in nato še peti, vsi imajo enako maso in hitrost kot drugi vagon. Kolikšna je hitrost kompozicije petih vagonov? Trenje zanemari!

4. Z vzmetno pištolo streljamo izstrelke z začetno hitrostjo 20 m/s proti zidu, ki je oddaljen 10 m in prav toliko visok. Pri prvem strelu je pištola v vodoravnem položaju, pri vsakem naslednjem strelu povečamo naklonski kot za 5^o. Oceni število izstrelkov, ki preletijo zid! Zračni upor zanemarimo.

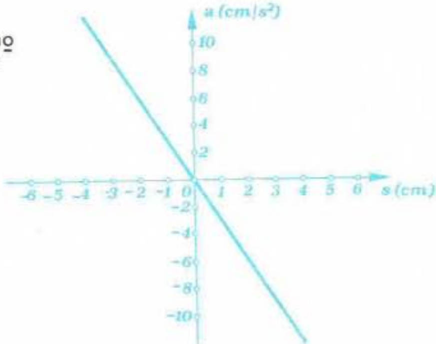
Tretji razred:

1. 2 decilitersko oranžado, ki ima temperaturo 20°C, damo v hladilnik, v katerem je temperatura -5°C. Z računom oceni, v kolikšnem času se ohladi oranžada na 16°C. Toplotna prevodnost stekla je 0,8 W/mK, ostale podatke oceni sam. Zakaj dobimo s takim računom prekratek čas? (Približno 10 x)

2. V železno posodo (1 dm x 1 dm x 1,1 dm) nalijemo liter vode pri 20°C. V vodo potopimo grelec z močjo 1 kW. Grelec izpodrine 80 cm^3 vode. Čez koliko časa po vključitvi grelca bo posoda polna? Koeficient volumskega raztezka železa je $3{,}6.10^{-5}$ K^{-1} , vode pa $4{,}6.10^{-4}$ K^{-1} .

3. Predpostavimo, da zajame človek pri enem vdihu 0,5 l zraka. Pozimi, pri temperaturi zraka -5°C vdihne 16 krat v minuti. Kolikokrat v minuti mora vdihniti poleti, ko je temperatura zraka 28°C, da bo sprejel enako količino kisika?

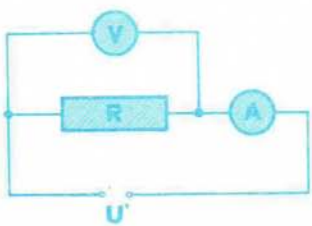
4. Pri nekem gibanju poznamo diagram pospeška v odvisnosti od odmika.
Nariši diagram odmika v odvisnosti od časa. Čas začnemo šteti od trenutka, ko je odmik enak 0. Diagram opremi z enotami.



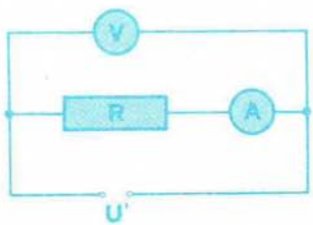
Četrti razred:

1. Na vir napetosti z zanemarljivim notranjim uporom priključimo upornik. Napetost in tok izmerimo na dva načina (glej sliki). Pri prvi meritvi pokaže voltmeter 9,01 V, ampermeter pa 0,99 A. Pri drugi meritvi pokaže voltmeter 10,00 V, ampermeter pa 0,91 A. Kolikšen je upor priključenega upornika?

1. meritev

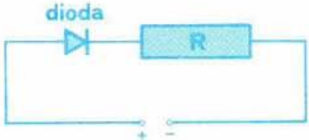


2. meritev



2. Tok, ki teče skozi diodo, ni sorazmeren napetosti, ki je priključena na njo. V grobem približku lahko rečemo, da narašča tok sorazmerno s kvadratom napetosti, če teče tok v smeri puščice, v obratni smeri pa tok ne more teči (glej sliko 2). Diodo, skozi katero teče tok 0,25 A, če je na njej napetost 0,5 V, vežemo zaporedno z upornikom z uporom 5 ohmov in baterijo z gonilno napetostjo 10 V ter notranjim uporom 5 ohmov. Kolikšen tok teče skozi vezje? (Slika 1)

Slika 1:



Slika 2:

3. Ploščati kondenzator s ploščino plošč po 50 cm^2 v razmiku 1 mm nabijemo in sicer tako, da damo na eno ploščo naboj $2,2.10^{-8}$ As, na drugo pa $-6,6.10^{-8}$ As. Nato priključimo kondenzator na vir stalne napetosti 500 V in sicer pozitivno ploščo s pozitivnim polom vira. Za koliko % se spremeni električna poljska jakost v kondenzatorju?

4. Vodo v bazenu segrevamo s pomočjo Sonca. Na strehi s površino 20 m x 5 m teče vzporedno z daljšo stranico 1 cm globoka plast vode. S kolikšno hitrostjo mora teči voda, da se bo pri prehodu strehe segrela za 5°C ? Upoštevaj, da pride skozi atmosfero 30 % svetlobnega toka, izgube zaradi segrevanja strehe in zraka pa ocenimo na 40 %. Solarna konstanta je 1,3 kW/m^2, specifična toplota vode pa 4200 J/kgK .

Naloge z republiškega tekmovanja:

Drugi razred:

1. Dve gladki krogli s polmeroma 3 dm in 2 dm sta pritrjeni tako, da sta težišči v vodoravni ravnini. Krogli se dotikata. Nanju postavimo kroglo s polmerom 1 dm in maso 1 kg. S kolikšnima silama delujeta spodnji krogli na zgornjo?

2. Z 10 m visokega balkona spustimo kepo ilovice. Kdaj moramo s tal vreči navpično navzgor drugo kepo ilovice s hitrostjo 10 m/s, da bosta kepi v trenutku, ko se sprimeta, obmirovali? Druga kepa ima dvakrat večjo maso od prve.

3. Okrogla plošča z maso 50 kg in polmerom 4 m miruje na ledu. Na njej stojijo štirje ljudje, vsak izmed njih ima maso 50 kg. Dva stojita na zunanjem robu, dva pa v razdalji 2m od središča plošče. Vsak par stoji simetrično glede na središče plošče. Nenadoma začno vsi štirje hoditi: zunanja dva po zunanjem robu, notranja dva pa po krogu s polmerom 2 m. Vsi štirje imajo enako hitrost 2 m/s glede na ploščo. Smisel gibanja notranjega para je nasproten smislu gibanja zunanjega para. Kako se giblje plošča?

4. Leseno palico, dolgo 2 m, do polovice potopimo v vodo. Kako globoko se potopi spodnji konec palice po tem, ko palico spustimo? Gostota lesa je 0,6 kg/dm^3 .

Tretji razred:

1. V sredini bakrenega valja, dolgega 40 cm, je grelec, ki oddaja moč 200 W. Polmer valja je 2 cm. Plašč valja je izoliran s 5 mm debelo plastjo toplotnega izolatorja s toplotno prevodnostjo 0,5 W/mK. Zunanja temperatura je 20°C. Kolikšna je temperatura tik pod plastjo izolatorja? Oceni kolikšna je temperatura v sredini valja! Toplotna prevodnost bakra je 390 W/mK. Toplotne izgube skozi osnovni ploskvi valja zanemari.

2. V krogelnem zrcalu je nekaj vode. S pomočjo tega zrcala dobimo dve sliki, ki sta 45 cm in 72 cm oddaljeni od temena zrcala. Kako daleč od temena zrcala je predmet? Kolikšen je krivinski polmer zrcala? Lomni količnik vode je 1,33.

3. Valjasto posodo, napolnjeno z zrakom, zapira lahek bat. Temperatura zraka je 20°C. Presek zračnega valja je 1 dm^2, dolžina pa 1 m. Na bat položimo utež z maso 10 kg. Za koliko se premakne bat? Za koliko se še premakne bat, če počakamo dalj časa?

4. Na 10 cm dolgi lahki vrvici visi homogena krogla s polmerom 10 cm in z maso 2 kg. Na kako dolgo vrvico moramo obesiti kroglo z enako maso, a dvakrat manjšim polmerom, da bosta nihajna časa obeh nihal enaka?

Četrti razred:

1. Platinasto kroglo z radijem 1 cm damo v pečico, katere stene imajo temperaturo 1772°C. V kolikšnem času se krogla segreje za 100°C. Gostota platine je 21,46 kg/dm^3, specifična toplota pa 133 J/kgK .

2. Iz neke kovine napravimo tri telesa: ravno ploščo s površino 1 m^2, kroglo z enako površino in dvojno ploščo (ploščo s površino 1 m^2 preganemo na pol, tako da je med zgornjo in spodnjo ploskvijo razmik 1 cm). Sončna svetloba vpada na vsa tri telesa pravokotno. V kolikšnem razmerju bodo temperature teh teles po dovolj dolgem času? (Zanemarimo ohlajanje s konvekcijo in prevajanjem.)

3. Sončni kolektor je v osnovi kovinska plošča v obliki pravokotnika s ploščino 1 m^2, ki je na eni strani počrnjena, na drugi pa spolirana. Pravokotno na kolektor (na počrnjeno stran) pada sončna svetloba z gostoto 1 kW/m^2. Napiši enačbo in nariši graf funkcije, ki podaja odvisnost izkoristka kolektorja od njegove temperature. Izkoristek je razmerje med toploto, ki jo lahko odvedemo s kolektorja in toploto, ki jo sprejema.

4. Satelit, ki v vesolju pretvarja sončno energijo v električno, pošilja na Zemljo energijo s pomočjo mikrovalovnega valovanja s frekvenco 2,5 GHz. Izkoristek pri pretvarjanju sončne svetlobe v mikrovalove je 10 %. Koliko fotonov mikrovalovnega valovanja nastane iz enega fotona sončne svetlobe? Upoštevaj tisti foton s Sonca, ki ima najbolj verjetno energijo.

5. Jadrnica na sončni tlak v vesolju ima površino jadra 10^4 m^2 in maso 100 kg. Jadro je črno. Nanj vpada pravokotno svetlobni tok z gostoto 1,4 kW/m^2. V kolikšnem času naraste hitrost jadrnice za 1 km/s ?

Bojan Golli

20. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Letošnje jubilejno zvezno tekmovanje mladih matematikov - srednješolcev je organiziralo društvo matematikov, fizikov in astronomov SAP Vojvodine. Tekmovanje je potekalo od 21. do 23. aprila 1979 v Novem Sadu. Kot vsako leto so se na tem tekmovanju zbrali mladi matematiki iz vse Jugoslavije, ki so se najbolje odrezali na republiških tekmovanjih, da še tukaj pomerijo svoje umske moči in znanje. Ekipe iz Črne Gore pa letos ni bilo na tekmovanje. Posledic tako hudega potresa, kot ga je doživela ta naša republika, se kajpak ne da hitro odpraviti.

Slovenska ekipa je štela 13 članov. Pot v Novi Sad je potekala brez večjih težav. Tu so nas v centru za usmerjeno izobraževanje naravoslovno-matematične smeri sprejeli organizatorji tekmovanja in nas skupaj z drugimi ekipami nastanili v hotel v Ćortanovcih. Hotel, kakih 15 km oddaljen od mesta, leži na lepem kraju nad široko strugo Donave.

V tekmovalni komisiji je imela vsaka republika in pokrajina po enega predstavnika. Naš član je bil Bojan Mohar. Izmed obilice predlogov, ki so jih prinesli člani s seboj, so izbrali za tekmovanje naslednje naloge.

1. razred

1. Določi realna števila x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5)$, če so znane vse vsote $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ $(s_1 < s_2 \leqq s_3 \ldots \leqq s_9 < s_{10})$ po dveh izmed njih!

2. V krog je včrtan sedemkotnik, ki ima tri kote enake 120°. Dokaži, da sta vsaj dve stranici tega sedemkotnika enaki!

3. Ali lahko v krog polmera 1 postavimo končno mnogo krogov, tako da se medsebojno ne sekajo, vsota njihovih polmerov pa je enaka 1979 ?

4. Za katera naravna števila n je vsota cifer števila $N = 1.2.3\ldots n = n!$ enaka 9 ?

2. razred

1. Točka P leži na stranici DC kvadrata $ABCD$, točka M pa na stranici BC, tako da je PM tangenta kroga s središčem v A in polmerom $\overline{AB}$. Q in N naj bosta presečišči daljic PA in MA z diagonalo BD. Dokaži, da je petkotnik $PQNMC$ tetiven (točke P, Q, N, M in C ležijo na isti krožnici)!

2. Naj bo $x > y \geqq 0$. Dokaži, da velja: $\Leftrightarrow \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3-x \Leftrightarrow$

$$x + 4/((x - y).(y + 1)^2) \geqq 3$$

$\Leftrightarrow 4 \geq (3-x)(x-y)(y+1)^2$ $\quad (3-x)(x-y) \leq \left(\frac{3-x+x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-y}{2}\right)^2$

$\Rightarrow (3-x)(x-y)(y+1)^2 \leq \left[\frac{3-y}{2}(y+1)\right]^2$ $\quad (3-y)(y+1) \leq 4 \Leftrightarrow 3y-y^2-y+3 \leq 4 \Leftrightarrow y^2-2y+1 = (y-1)^2 \geq 0$

3. Določi vse možne zapise števila 2001 v obliki vsote 1979 popolnih kvadratov naravnih števil !

4. Naj bosta m in n medsebojno tuji števili in imejmo dano zaporedje $m + n$ kroglic. Prvih m kroglic tega zaporedja premestimo v istem vrstnem redu na konec zaporedja, nato storimo isto s tako dobljenim zaporedjem itd. Dokaži, da lahko s tem postopkom prvo kroglico začetnega zaporedja privedemo na katerokoli vnaprej določeno mesto v zaporedju.

3. razred

1. Dana sta dva polinoma s kompleksnimi koeficienti:

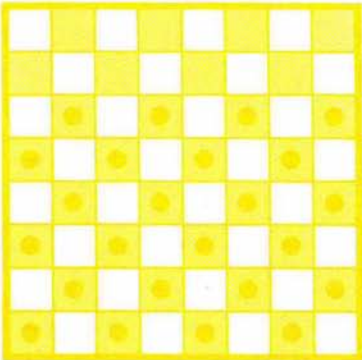
$$P(x) = x^n + a_1 . x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{z ničlami } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ in}$$
$$Q(x) = x^n + b_1 . x^{n-1} + \ldots + b_n \quad \text{z ničlami } x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$$

Pri tem je vsota koeficientov s sodimi in vsota koeficientov z lihimi indeksi v polinomu $P(x)$ realno število. Dokaži, da je vsota koeficientov $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ polinoma Q tudi realno število !

2. Dana sta pravilni tetraeder z robom dolžine a in pravilna štiristrana piramida (osnovna ploskev je kvadrat, vsi robovi so enaki) z robovi dolžine a. Razreži ju tako, da boš iz dobljenih delov lahko sestavil kocko!

3. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ naj bodo kompleksna števila. Dokaži, da lahko izberemo nekaj števil $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$, tako da velja $|z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_k}| \geq 1/(4.\sqrt{2}).(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|)$.

4. Na šahovski deski stojijo v prvih šestih vrstah na vseh črnih poljih kamenčki. V vsaki potezi nek kamen preskoči enega od kamnov, ki so mu sosednji. Poteza je možna le, če je polje za preskočenim kamnom prosto. Pri tem vzamemo preskočeni kamen s table. Poteze so možne v vse smeri (tudi nazaj). Ali lahko vlečemo poteze tako, da bo po nekaj korakih ostal na tabli le en kamen?



4. razred

1. Dokaži, da enačba $(p - 1)! + 1 = p^n$ nima rešitev v množici naravnih števil $(p, n \in N)$, če je $p > 5$.

2. Za katere od trditev (i), (ii), (iii) obstajata taki dve pozitivni števili $a, b > 0$, da velja:

i) $a, b \notin Q$ in $a^b \in Q$
ii) $a, b, a^b \notin Q$
iii) $a \in Q, b \notin Q$ in $a^b \notin Q$

Pri tem pomeni Q množico racionalnih števil.

3. Naj bodo A, B in C različne točke krožnice, P ploščina trikotnika ΔABC in P' ploščina trikotnika, določenega s tangentami na to krožnico v točkah A, B, C. Določi limitno vrednost razmerja P'/P, ko je točka A fiksna, B in C pa se približujeta točki A. Pri tem so točke vedno različne med seboj.

4. Naloga 3 za 3. razred.

Po končanem tekmovanju je pokrovitelj, SOZD Nafta-gas iz Vojvodine, povabil utrujene tekmovalce na kosilo in na izlet - ogled naftnih polj, kjer črpajo nafto in zemeljski plin. Komisija pa je medtem pregledala rešitve, izbrala najboljše tekmovalce in določila nagrade.

Slovenska ekipa se je izkazala kot že dolgo ne. Le ekipa SR Srbije je bila boljša, a naj pripomnim, da je ta štela 23 članov! Poglejmo si uspeh slovenskih "matematikov"! V prvem razredu sta Aleksander Jurišič (gimn. Vide Janežič, Ljubljana) in Kuka

Pred odhodom nas je na beograjskem letališču fotografiral *Uroš Boltin.*

vica Igor (gimn. Ljubljana - Bežigrad) dosegla tretjo nagrado. V drugem razredu je Tomaž Cokan (gimn. Lj. - Bežigrad) osvojil drugo nagrado, pohvaljen pa je bil Uroš Boltin (gimn. Ivana Cankarja, Lj.). V tretjem razredu je prejel tretjo nagrado Leon Matoh iz gimnazije Novo mesto, v četrtem razredu pa je bil pohvaljen Jurij Kovič (gimn. Vide Janežič, Lj.). Naj pripomnim, da je bila v četrtem razredu podeljena le ena nagrada!

Komisija je takoj izbrala tri tekmovalce v osemčlansko ekipo, ki naj bi zastopala našo ekipo na mednarodni matematični olimpiadi. Naslednji dan je potekalo izbirno tekmovanje, ki naj bi pomagalo izbrati še ostalih pet članov ekipe. Med štirinajstimi tekmovalci sta sodelovala tudi Leon Matoh in Jurij Kovič. Rešiti je bilo treba naslednje tri naloge.

Kvalifikacijsko tekmovanje

1. Dokaži, da za različna naravna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ velja neenakost
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqq a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$$
2. Poišči vsa naravna števila $n < 1979$, ki zadoščajo pogoju: če je m naravno število $1 < m < n$ in sta števili m in n tuji, je m praštevilo.
3. Dani sta dve krožnici z obsegom 1979. Na prvi je označenih 1979 različnih točk, na drugi pa nekaj krožnih lokov s skupno dolžino manjšo od 1 (loki so paroma disjunktni). Dokaži, da lahko drugo krožnico postavimo na prvo tako, da nobena od označenih točk ne pade v nobenega od označenih lokov!

Leon Matoh je bil izbran v olimpijsko ekipo.

France Forstnerič

PROBLEM IZ DELJIVOSTI

Dokaži, da je število $3^{105} + 4^{105}$ deljivo s 13, 49, 181 in 379, da pa ni deljivo ne s 5 ne z 11.

Šefket Arslanagić

RAZPIS TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1979/80

Urnik za to šolsko leto je naslednji:

Matematika: predtekmovanje bo 1. marca (sobota) od 9. do 11. ure, tekmovanje pa 5. aprila (sobota) od 10. do 12. ure.

Fizika: predtekmovanje bo 12. aprila (sobota) od 9. do 11. ure, tekmovanje pa 17. maja (sobota) od 10. do 12. ure.

Predtekmovanja izvedejo aktivi profesorjev matematike in fizike na srednjih šolah. Ti sestavijo komisijo za predtekmovanje, ki oceni izdelke svojih dijakov. Za strokovno plat izvedbe predtekmovanj in tekmovanj sta sestavljeni republiški komisiji, ena za matematiko, druga za fiziko. Ti dve komisiji pripravita naloge za predtekmovanji in za tekmovanji, za vsak razred po štiri. Razmnožene naloge za predtekmovanja, rešitve in druge napotke pošljeta predsednikom šolskih komisij. Na osnovi ocen predlagajo šolske komisije najboljše dijake svoje šole za republiški tekmovanji. Predlagani srednješolci morajo pravilo-ma doseči vsaj polovico možnih točk, od tega kriterija pa se lahko odstopi, če noben tekmovalec v posameznem razredu na šoli ne preseže 60% od vseh možnih točk. Izjemoma lahko predlagajo tudi dobre dijake, ki se zaradi opravičljivih razlogov niso mogli udeležiti predtekmovanja. Šole lahko prijavijo svoje učence za republiški tekmovanji le, če so izvedle predtekmovanja (same ali več skupaj). Kot prijavnica za predtekmovanje velja vprašalnik, objavljen v tej številki. Tega izrežite ali prepišite, izpolnite in pošljite priporočeno do srede, 20. februarja 1980 na naslov: Lešnjak Gorazd, 61001 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 227, s pripisom: Prijava za predtekmovanji.

Dijaki srednjih šol, ki imajo drugačen učni načrt kot gimnazije, se lahko po posvetu s profesorjem prijavijo za drug razred kot ga obiskujejo. Šol, ki se ne bodo prijavile za predtekmovanje, ne bomo naknadno obveščali!

Izmed predlaganih tekmovalcev bosta republiški komisiji izbrali kandidate za republiški tekmovanji, do 30 v vsakem razredu. Le v izjemnem primeru, če predlaganih primerno dobrih tekmovalcev ne bo dovolj, bosta komisiji upoštevali tudi predloge šol, ki predtekmovanj ne bodo izvedle. Komisije za predtekmovanje po šolah morajo oceniti izdelke, sestaviti seznam predlaganih dijakov in ga skupaj z njihovimi izdelki poslati na zgornji naslov (z oznako matematika oz. fizika) do
12. marca 1980 - za matematiko
23. aprila 1980 - za fiziko

Obvestilo o kraju obeh republiških tekmovanj in druge informacije bodo šole prejele skupno z nalogami za predtekmovanja.

Želimo, da bi se predtekmovanj udeležile vse srednje šole v Sloveniji. Zato pozivamo tudi dijake, da opozorijo svoje učitelje na ta razpis. Profesorje matematike in fizike pa seveda prosimo, da sodelujejo pri izvedbi predtekmovanj, vzpodbujajo dijake in jim svetujejo pri pripravah. Predvsem jih prosimo, da sodelujejo z republiškima komisijama pri izdelavi nalog. Za vse predloge in pripombe bomo zelo hvaležni, naslovite pa jih na komisijo za popularizacijo, z navedbo za matematiko oz. fiziko. Mladim nadebudnežem želimo v letošnjem tekmovalnem ciklusu čimveč dobrih idej ob reševanju nalog!

Gorazd Lešnjak

OČE IMA DVA SINOVA in dve hčerki. Ko se je prvi sin poročil, mu je dal oče 8% od 4300 arov velikega posestva. Ko se je poročil drugi sin, je dobil 2/23 ostalega posestva, prva hčerka je dobila polovico tega, kar sta dobila oba brata skupaj. Najmlajša hčerka pa je dobila polovico tistega, kar je očetu še ostalo. Koliko arov je na koncu obdržal oče in koliko je dal otrokom?

Anka Urh

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

ŠOLA: . . . .

NASLOV: . . . . .TELEFON: . . . .

Predtekmovanje bomo - ne bomo izvedli (ustrezno obkrožite)

Predtekmovanje bomo izvedli skupaj s šolami: . . . .

. . . .

Priimek, ime, domači naslov in telefon predsednika komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Priimek članov komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Cenimo, da bo na šolskem tekmovanju sodelovalo

v I. razredu .... dijakov v III. razredu .... dijakov
v II. razredu .... dijakov v IV. razredu .... dijakov

Skupaj: .... dijakov

Opomba: število dijakov rabimo, da bomo vedeli, koliko izvodov s formulacijami nalog vam bomo poslali.

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ FIZIKE

ŠOLA: . . . .

NASLOV: . . . . .TELEFON: . . . .

Predtekmovanje bomo - ne bomo izvedli (ustrezno obkrožite)

Predtekmovanje bomo izvedli skupaj s šolami: . . . .

. . . .

Priimek, ime, domači naslov in telefon predsednika komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Priimek članov komisije za predtekmovanje na šoli: . . . .

. . . .

Cenimo, da bo na šolskem tekmovanju sodelovalo

v III. razredu .... dijakov
v II. razredu .... dijakov v IV. razredu .... dijakov

Skupaj: .... dijakov

Opomba: število dijakov rabimo, da bomo vedeli, koliko izvodov s formulacijami nalog vam bomo poslali.

Pri rešitvah nalog k članku *Heronovi trikotniki* v tretji številki šestega letnika Preseka na strani 186 se je avtorju in uredniku vtihotapilo več napak.

Z obrazcem za generiranje Heronovih trikotnikov iz članka namreč ne dobimo vseh. Zato je npr. rešitev 2. naloge napačna. Heronov trikotnik 5, 5, 6 ima polmer včrtanega kroga 3/2, kar seveda ni celo število.

Tudi rešitev 4. naloge ja napačna, saj ima npr. Heronov trikotnik 25, 25, 30 celoštevilske višine 20, 20 in 24.

V peti nalogi pa dobi avtor Heronov trikotnik 5, 5, 6 z obsegom 16 kot odgovor na vprašanje: kateri Heronov trikotnik ima najmanjši obseg. Očitno ima pravokotni Heronov trikotnik 3, 4, 5 manjši obseg 12.

Kot vidite, avtorji in uredniki nismo nezmotljivi, zato vas prosimo, da nam takoj pišete, če odkrijete v Preseku kakšno napako.

Tomaž Pisanski

Škrat je ponagajal tudi risarju (Presek 1978/79, št. 4, str. 201). Če hočemo nazorno pokazati tisto, kar je na sliki b) zaradi bolj kasnega člena a_{2n} manj opazno, moramo za stranico kvadrata, ki ga razrežemo in sestavimo v pravokotnik, vzeti $a_{2n} = 8$, potem sta $a_{2n-1} = 5$ in $a_{2n-2} = 3$.

Danijel Bezek

REŠITVE NALOG

NENAVADNA PREMICA - rešitev s str. 107

Vzemimo nasprotno, da taka premica ne obstaja. Projiciramo vse krogle na eno od stranskih ploskev kocke. Potem je vsaka točka te ploskve prekrita z največ

$$[\tfrac{n}{4}] + 1 - 1 = [\tfrac{n}{4}]$$

projekcijami, ker bi v nasprotnem primeru v eni izmed točk na tej stranski ploskvi obstajala normala, ki bi sekala vsaj $[\frac{n}{4}] + 1$ kroglo, kar pa bi bilo se-vé v nasprotju z našo predpostavko.

To pa pomeni, da je vsota vseh ploščin projekcij, torej plošči na vseh velikih krogov (glavnih krogov) teh krogel $P \leqq [\frac{n}{4}]a^2$. Ker je površina krogle 4 krat večja od ploščine njenega glavnega kroga, je res

$$S \leqq 4[\tfrac{n}{4}]a^2 \leqq 4.\tfrac{n}{4}.a^2 = na^2$$

kar pa je v očitnem protislovju s predpostavko, da ta površina presega na^2 . Torej iskana normala vedno obstaja - vedno lahko najdemo premico z zahtevano lastnostjo.

Dušan Repovš

Literatura:

[1] Скърцев А.И. - Сборник задач по элементарной математике, Наука, Москба, 1976

[2] Matematičko-fizički list, Zagreb, 23 (1972/73) 3

POCENI TABLICE - rešitev s str. 106

Zgled za celjsko tablico CE * 102238

Dve mesti torej gresta na račun črk C in E, eno mesto je potrebno za presledek, šest mest (ker so Celjani pravkar prekoračili 100 000) pa za številke. Skupno je tablica dolga $2 + 1 + 6 = 9$ enot.

Pa nadomestimo 6 številk z n črkami! Kolikšen mora biti n zato, da bo vsak celjski lastnik avtomobila imel različno tablico?

Sklepamo takole. Prvo mesto lahko zasede katerakoli od 25 črk, drugo mesto prav tako katerakoli od 25 črk, ... n-to mesto prav tako. Torej je $25.25.\underset{n\text{-krat}}{\cdots}.25 = 25^n$ različnih možnosti. Dobljeno število pa mora doseči število 100 000 . Od tod enačba

$$25^n = 100\,000$$

iz katere moremo izraziti n.

Kdor ne pozna logaritmov, si lahko pomaga tako, da izračuna zaporedne potence števila 25:

$25^1 = 25$ $25^2 = 625$ $25^3 = 15\,625$ $25^4 = 390\,625$

in uvidi, da je 100 000 med 25^3 in 25^4. Za črke so torej potrebna 4 mesta. Skupno s CE in presledkom 7 mest.

Razmerje med dolžino "črkovne" in dolžino "številčne" tablice je $7/9 = 0{,}778 = 77{,}8\%$. Relativni prihranek na materialu bi bil tedaj $2/9 = 0{,}222 = 22{,}2\%$. Z uporabo črk bi bila vsaka peta tablica zastonj.

Priznati je treba, da bi na enako dolgo številčno tablico spravili 999 999 številk, na črkovno pa le 390 625 , kar pa je pri sedanjem številu avtomobilov v Celju vseeno.

Karel Bajc

PROBLEM IZ DELJIVOSTI - dokaz naloge str. 116

če je število liho, lahko razstavimo izraz $a^n + b^n$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \qquad (1)$$

Tako imamo

$$3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35}$$

in je število $3^{105} + 4^{105}$ deljivo z vsoto

$$3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91 = 7 \;.\; 13$$

torej deljivo s 13.

Analogno iz enakosti

$$3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21}$$

ugotovimo, da je število $3^{105} + 4^{105}$ deljivo z vsoto

$$3^5 + 4^5 = 243 + 1024 = 1267 = 7 \;.\; 181$$

in zato tudi s 181.

če pa zapišemo

$$3^{105} + 4^{105} = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$$

vidimo, da je število $3^{105} + 4^{105}$ deljivo z

$$3^7 + 4^7 = 2187 + 16384 = 18571 = 49 \;.\; 379$$

kar nam potrdi še deljivost z 49 in 379.

Dalje imamo

$$4^3 + 1 = 64 + 1 = 65$$

in je $4^3 + 1$ deljivo s 5. Zato je po formuli (1) deljivo s 5 tudi število

$$4^{105} + 1 = (4^3)^{35} + 1^{35} \qquad (2)$$

Podobno je deljivo s 5 število

$$3^2 + 1 = 10$$

in zato tudi

$$3^{104} - 1 = (3^{52} - 1)(3^{52} + 1) = \\ = (3^{26} - 1)(3^{26} + 1)(3^{52} + 1)$$

ker je drugi faktor deljiv s 5 spet po formuli (1)

$$3^{26} + 1 = (3^2)^{13} + 1^{13}$$

Ker pa je $3^{104} - 1$ deljivo s 5, je deljivo s 5 tudi

$$3.(3^{104} - 1) = 3^{105} - 3 \qquad (3)$$

Seštejemo (2) in (3), vidimo, da je deljiva s 5 vsota

$$3^{105} + 4^{105} - 2$$

kar seveda pomeni, da število $3^{105} + 4^{105}$ ni deljivo s 5, saj daje pri deljenju s 5 ostanek 2.

Ravno tako je z deljivostjo z 11. Z 11 je deljivo število

$$4^3 + 2 = 64 + 2 = 66$$

in zato po formuli (1) tudi

$$(4^3)^5 + 2^5 = 4^{15} + 32 = 4^{15} - 1 + 33$$

Iz zadnjega zapisa vidimo, da je z 11 deljivo število

$$4^{15} - 1$$

in zato tudi

$$4^{105} - 1 = (4^{15})^7 + (-1)^7 \qquad (4)$$

Če pogledamo potence števila 3, opazimo, da je

$$3^5 = 243 = 242 + 1 = 22.11 + 1$$

in je zato deljivo z 11

$$3^5 - 1$$

ravno tako pa

$$3^{105} - 1 = (3^5)^{21} + (-1)^{21} \tag{5}$$

Seštejemo (4) in (5), z 11 je deljivo

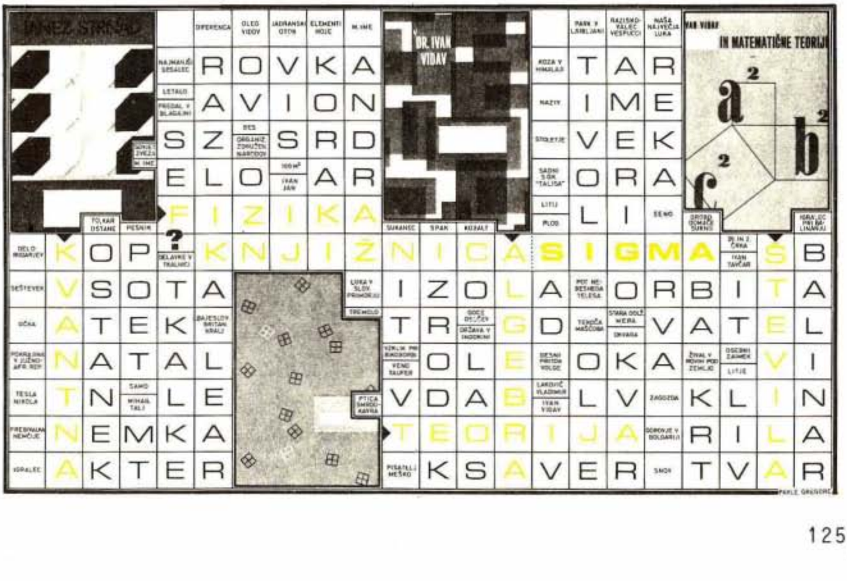
$$3^{105} + 4^{105} - 2$$

Ker da torej število $3^{105} + 4^{105}$ pri deljenju z 11 ostanek 2, ni deljivo z 11.

Šefket Arslanagić

prevedel *Peter Petek*

SLIKOVNA KRIŽANKA „**SIGMA**"



NEVARNA NOGOMETNA AKCIJA - rešitev s IV. strani ovitka

Vratar je prepočasen za 0,1 s. Do te točke pride v 2 s, žoga pa pride v 1,9 s.

Ivan Jovan

NALOGA O KROŽNICI - rešitev s strani 72

Vzemimo par točk (ali enega izmed takih parov), ki sta najbližji. Označimo ju z A in B. Izmed ostalih izberimo tretjo točko C tako, da bo kot $\sphericalangle ACB$ največji. Po predpostavki naloge točke A, B in C niso kolinearne. Krožnica, ki jo potemtakem točke A, B in C določajo, je iskana krožnica.

Dokaz: $\sphericalangle ACB$ je oster (ni težko pokazati, da je celo kvečjemu enak 60°). V nasprotnem primeru bi bil največji kot trikotnika ABC in zato bi bilo $AB > AC$ in $AB > CB$, kar pa nasprotuje pravilom, po katerih smo izbrali par A, B. Predpostavimo, da vseeno kakšna točka M leži znotraj kroga.

1. primer: Točka M leži znotraj tistega segmenta kot C. (sl.1) Potem je kot $\sphericalangle AMB$ večji od kota $\sphericalangle ACB$, kar pa ni v skladu z izborom točke C. Res $\sphericalangle AMB > \sphericalangle AM'B = \sphericalangle ACB$.

Sl. 1

Sl. 2

Sl. 3

2. primer: Točka M leži v drugem segmentu (sl. 2). Potem je kot $\sphericalangle AMB$ top, kar ni v skladu z izborom točke C. Spet $\sphericalangle AMB > \sphericalangle AM'B = 180^{0} - \sphericalangle ACB$.

Potemtakem znotraj kroga ni nobene točke, na sami krožnici pa točke lahko leže: na primer - dane točke so lahko oglišča pravilnega n-kotnika, včrtanega v ta krog (sl. 3).

Dušan Repovš

Vsem bralcem PRESEKA

želim

SREČNO NOVO LETO

1980

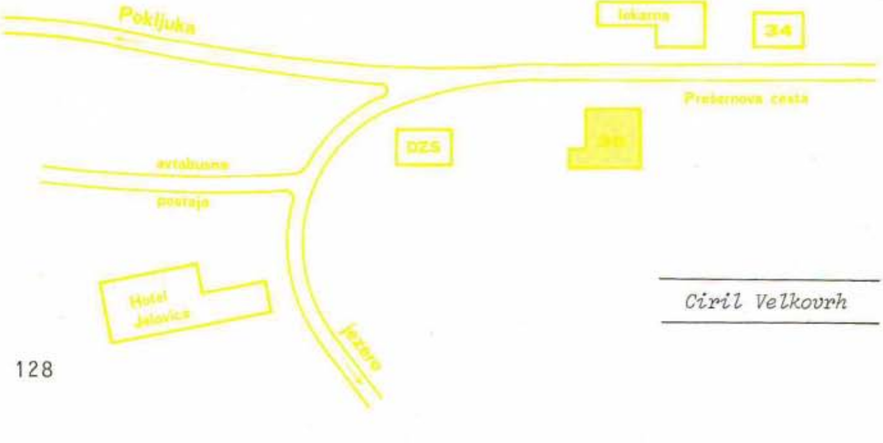
Presečko

NOVICE

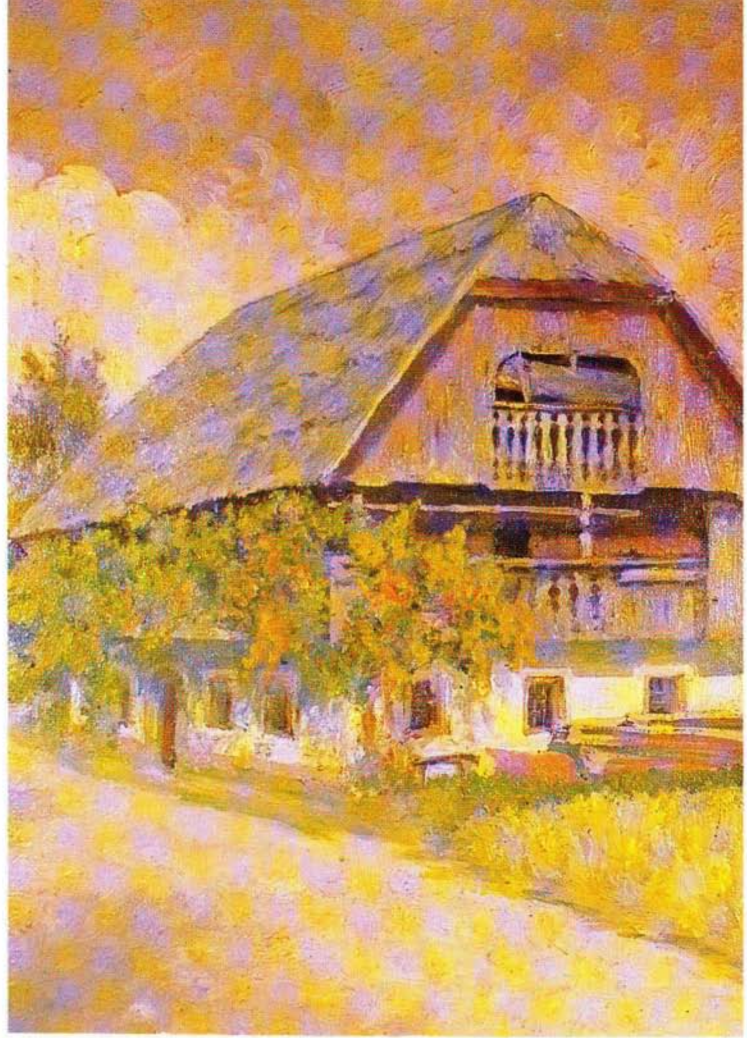
PLEMLJEVA SPOMINSKA SOBA NA BLEDU

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je v letu 1977 opremilo in odprlo za javnost Plemljevo spominsko sobo na Bledu, Prešernova 39. Obiskovalcev ni bilo zelo veliko. Prihajali so posamezniki, domači in tuji turisti ob najrazličnejšem času. Veseli smo bili skupinskih ogledov spominske sobe. Nekatere osnovne in srednje šole so obiskale ob ekskurzijah na Gorenjsko tudi Bled. Obiskovalci so si lahko ogledali razstavljene predmete, ki nas spominjajo na življenje in delo velikega slovenskega matematika. Kupili so lahko tudi nekaj v spomin: brošuro o prof. Plemlju, dve različni razglednici s portretom prof. Plemlja ter tri različne Plemljeve značke. Za leto 1980 pa smo pripravili še natis štirih dodatnih razglednic, ki jih je financirala Kulturna skupnost Radovljica. Na razglednicah so tile posnetki: notranjost Plemljeve spominske sobe, Bled s Plemljevim domom, gradom in otokom v ozadju, karikatura prof. Plemlja ter barvna slika rojstne hiše. Vse štiri razglednice so tudi natisnjene na 2. in 3. strani te številke Preseka. Skupinska naročila (cena 2.-din) sprejema Komisija za tisk DMFA SRS, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, pp 227.

V letošnjem letu je Plemljeva spominska soba na Bledu dobila novega pokrovitelja. Skrb za sobo je prevzela osnovna šola prof. dr. Josipa Plemlja na Bledu, za kar se ji, predvsem pa njenemu direktorju prof. Petru Nuku, najlepše zahvaljujemo. Osebno pa je nadzorstvo sobe prevzela učiteljica matematike na tej šoli Alenka Plestenjak. Vsi, ki si bodo želeli ogledati sobo, se za ogled lahko dogovorijo pri tovarišici Plestenjak na osnovni šoli Bled (tel. št. 064-77-861), ali na njenem domu (tel. št. 064-77-828) na Bledu, Prešernova 34, ki je le nekaj deset metrov oddaljen od Plemljeve hiše. Do nadaljnjega pa bodo v sobi dežurali učenci blejske šole vsako soboto od 15^h - 16^h.



Ciril Velkovrh

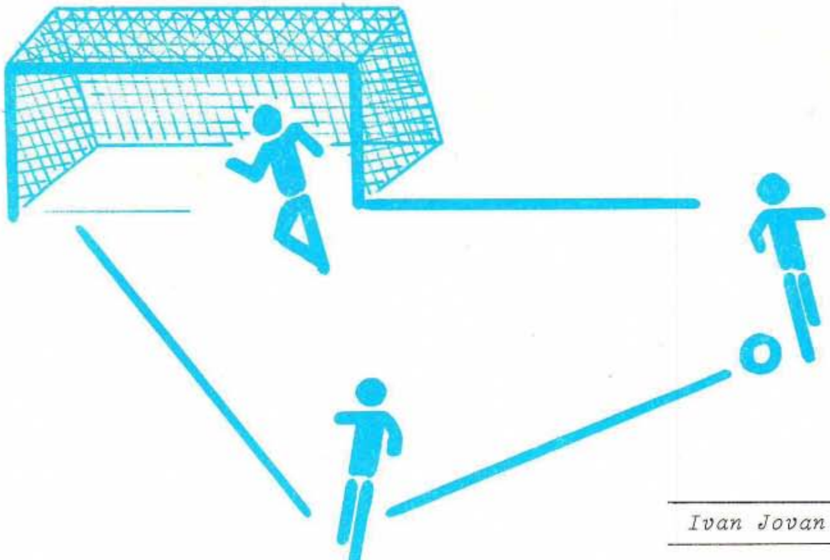


NALOGE BRALCEV

NEVARNA NOGOMETNA AKCIJA

Vratar je stal ob levi* stativi svojega gola, ko je po desni strani prodiral nasprotni napadalec z žogo. V istem hipu, ko je napadalec podal žogo svojemu 24 m oddaljenemu levemu napadalcu s hitrostjo 108 km/h, se je tudi vratar premaknil proti desni stativi s hitrostjo 3 m/s. Levi napadalec je podstavil nogo tako, da je zmanjšal hitrost na 72 km/h in usmeril žogo proti 22 m oddaljeni točki na črti vrat, ki je 1 m oddaljena od desne stative gola (za tiste, ki se ne spoznajo na nogomet: širina vrat je 7 m).

Vprašanje: Ali bo vratar ujel žogo, ali pa bo žoga hitrejša od njega?



Ivan Jovan

*Položaji na golovi črti se opisujejo tako, kot jih vidi vratar; položaji napadalcev pa tako, kot jih vidi napadalec.