

p r e **4**
s e k **VI**
1978-79



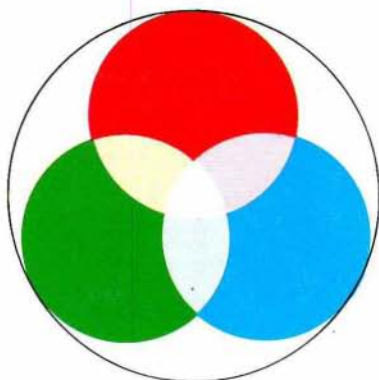
LIST ZA MLADE

MATEMATIKE

FIZIKE

ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS



P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
6 (1978/79) ŠT. 4, STR. 193 - 256

V S E B I N A

MATEMATIKA	193 Mistični šesterokotnik (Metka Žitnik)
	196 Od števil h geometriji, umetnosti in igri (Danijel Bezek)
	203 Igra z dvema kupoma (Cirila Borovšak)
	206 O pojmu dimenzije (Nadja Marušič)
NALOGE - TEKMOVANJA	209 Deveto zvezno tekmovanje iz matematike za učence osnovnih šol (Terezija Uran, foto Dušan Modic)
	211 Naloge z zveznega tekmovanja osnovnošolcev v matematiki (Aleksandar Jurišič)
	215 5. zvezno tekmovanje mladih fizikov (Bojan Golli in Andrej Likar)
	218 Nekatere naloge z 19. zveznega srednješolskega tekmovanja iz matematike (Bojan Mohar in Franci Forstnerič)
MATEMATIČNO RAZVEDRILLO	223 Zanimivo a nedokazano (Danijel Bezek)
KRIŽANKA	224 Slikovna križanka z rebusi (Pavel Gregorc)
PREMISLI IN REŠI	226 (Ljubo Kostrevc in Vladimir Batagelj)
PRESEKOV ŠKRAT	227 Netočnost ... (Gorazd Cvetič)
NALOGE	228 Naloge bralcev (Maja Hašimovič, Dragoljub Milošević, Peter Petek)
	229 Naloga (Stanislav Horvat)
REŠITVE NALOG	233 Bistrovidec - rešitev iz P VI/2 (Vladimir Batagelj)
PISMA BRALCEV	236 (Matilda Lenarčič)
FIZIKA	241 Preprosta fizika letenja (Janez Strnad)
	248 Mavrica (Fedor Tomažič)
NA OVITKU	I DC-10 najnovejše jugoslovansko letalo, ki nosi ime po našem velikem znanstveniku - fiziku Nikoli Tesli
NOVE KNJIGE	IV (Metka Luzar)



MISTIČNI ŠESTEROKOTNIK

Čudežni otrok pravimo otrokom, ki v neki svoji dejavnosti izstopajo med ostalimi vrstniki. Slišali ste že za čudežne otroke na področju glasbe, športa in podobno, morda pa še ne veste, da tudi matematika "premore" čudežnega otroka: Blaisa Pascala.

Rodil se je pred 355 leti, natančneje 19. junija leta 1623. Sedem let mu je bilo, ko ga je začel poučevati oče. Ker pa je bil mali Pascal krhkega zdravja, mu je prepovedal ukvarjati se z matematiko, da se ne bi preveč utrujal in zbolel. Ta prepoved pa je dosegla ravno nasprotni učinek. Z vso vnemo se je lotil matematike, njegova posebna ljubezen je bila geometrija. Prvi večji uspeh je bil, ko je sam brez pomoči knjig dokazal, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka vsoti dveh pravih kotov. Ko je oče spoznal, da ima sina matematika, mu je ves vesel kupil Evklidovo knjigo Elementi. Mali matematik je hitro napredoval in širil svoje znanje. Že pri štirinajstih letih je prisostvoval znanstvenim razpravam, ki jih je vodil Mersenne in iz katerih se je kasneje razvila Francoska znanstvena akademija.



BLAISE PASCAL

ja. Žal pa se Pascalovo zgodnje zanimanje za matematiko ni večalo, umikalo se je drugim njegovim zanimanjem, kot so verska vprašanja, filozofija in proza. Umrli je mlad, komaj 39 let mu je bilo.

Še kot šestnajstleten mladenič je dokazal trditev, ki so jo po njem poimenovali Pascalov izrek ali tudi Mistični šesterokotnik. Njegovega dokaza niso našli, vendar so ga kasneje nekako rekonstruirali. Ker pa je prezahteven, dokaza ne bomo navedli.

PASCALOV IZREK: Če podaljšamo stranice krogu včrtanega šesterokotnika, se podaljški nasprotnih si stranic sekajo v treh točkah, ki leže na isti premici.

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
6. letnik, šolsko leto 1978/79, 4. številka, str. 193-256.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (Bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover (Premisli in reši), Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Andrej Kmet (Presekova knjižica - matematika), Ljubo Kostrevec, Jože Kotnik, Edvard Kramar (Tekmovanja - naloge), Matilda Lenarčič (Pisma bralcev), Norma Mankoč-Borštnik (Presekova knjižica + fizika), Franci Oblak, Peter Petek (Naloge bralcev), Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Skulj, Janez Strnad (glavni urednik), Zvonko Trontelj (odgovorni urednik), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, Nove knjige, Novice - zanimivosti).

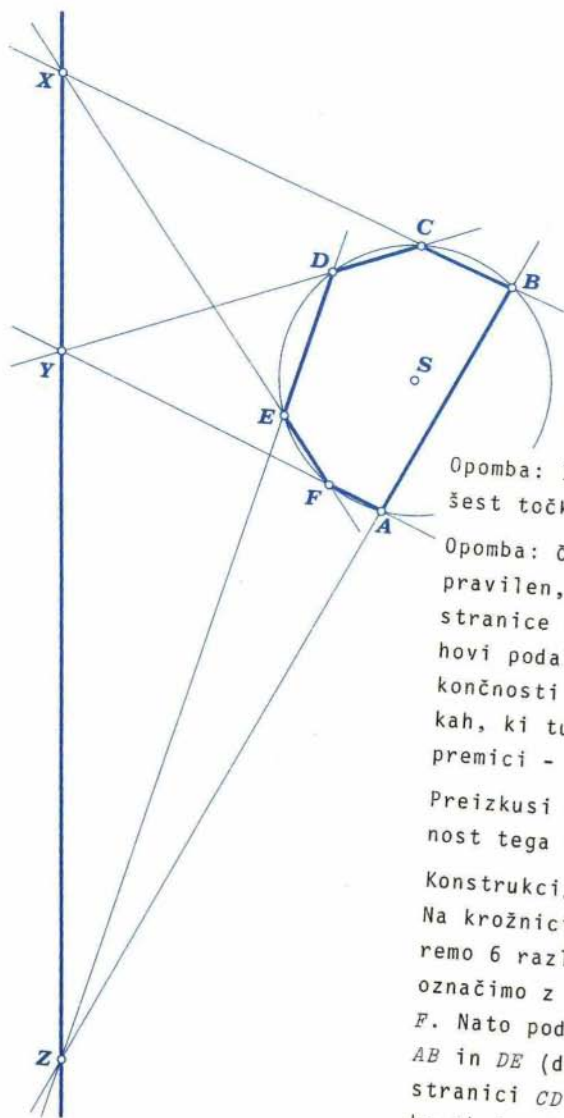
Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak, karikature Alenka Potnik.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupinska pa 32.-din; za inozemstvo 3 \$ = 54.-din, 2000 Lit, 54.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja petkrat letno v nakladi 22.000 izvodov.

©1979 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 372



Opomba: Izrek velja tudi za šest točk na elipsi.

Opomba: Če je šesterokotnik pravilen, so si nasprotne stranice vzporedne in se njihovi podaljški sekajo v neskončnosti - v neskončnih točkah, ki tudi vse leže na isti premici - neskončni premici.

Preizkusi z risanjem veljavnost tega izreka!

Konstrukcija:

Na krožnici (ali elipsi) izberemo 6 različnih točk, ki jih označimo z A, B, C, D, E in F . Nato podaljšamo stranici AB in DE (dobimo točko Z), stranici CD in AF (dobimo točko Y) in stranici BC in EF (dobimo točko X). Točke X, Y in Z ležijo na isti premici.

Metka Žitnik

OD ŠTEVIL H GEOMETRIJI, UMETNOSTI IN IGRI

UVOD: Med evropskimi matematiki srednjega veka je zanimiva osebnost LEONARDO FIBONACCI. Marsikaj o njem bo ostalo za vedno skrivnost, kot so bile skrivnostne rešitve njegovih nalog. Leta 1225. je na matematičnem tekmovanju v Pisi bila tudi tale naloga:

Poišči ulomek, ki je popoln kvadrat in ostane popoln kvadrat tudi, ko ga zmanjšamo ali povežamo za 5.

Fibonacci je našel rešitev: $1681/144$, še danes ni znano, kako. (Rešitev: $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$ in $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$)

Bil je odličen poznavalec števil - aritmetike in algebre.

a) Po skoraj 800 letih matematiki vedno znova odkrivajo zanimivosti, ki so povezane z zaporedjem števil, ki ga po njem imenujemo *Fibonaccijevo zaporedje*. Začelo se je z nalogo o zajcih: *Skoti se par zajcev - samec in samica. Po enem letu dozorita in od konca drugega leta skoti zajklja vsako leto nov par zajcev - samca in samico, za katere velja isti cikel razmnoževanja.* Vprašanje: *Koliko parov je po poljubnem številu let, če ni smrtnih primerov?*

Prikazana je shematična rešitev naloge, kjer posamezni krožec ustreza paru.

začetek

konec 1. leta

konec 2. leta

konec 3. leta

konec 4. leta

konec 5. leta

konec 6. leta



1

1

2

3

5

8

13

Legenda:

○ par, ki se skoti

● par po enem letu

⦿ par, ki ima potomce

Števila: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(1)

so členi Fibonaccijevega zaporedja. Prvi in drugi člen zaporedja sta v našem primeru 1; vse druge pa dobimo tako, da seštejemo oba predhodnika. To zapišemo takole:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ in } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (2)$$

člen a_n imenujemo splošni člen zaporedja, ker nam pove pravi lo, po katerem lahko poiščemo katerikoli člen zaporedja.

1. Poišči še nekaj naslednjih členov Fibonaccijevega zaporedja (1).
2. Poišči a_{30} in a_{35} v Fibonaccijevem zaporedju.

Zadnja naloga nas prepriča, da je iskanje "bolj kasnih" členov zaporedja zamudno delo. Po pravilu (2) je treba po korakih zapisati vse člene do iskanega člena zaporedja.

Postavlja se vprašanje: Ali lahko še kako drugače, razen po omenjenem načinu, poiščemo poljubni člen Fibonaccijevega zaporedja? Odgovor je pritrdilen, n -ti člen Fibonaccijevega zaporedja dobimo tako, da naravno število n vstavimo v izraz za splošni člen (3):

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \quad (3)$$

3. Preveri, če za $n=2$ in $n=3$ zares dobiš drugi in tretji člen Fibonaccijevega zaporedja, ko ju vstaviš v splošni člen (3).
4. Dokaži, da za Fibonaccijevo zaporedje veljajo naslednje zakonitosti:

$$a) a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - 1$$

$$b) a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-3} + a_{2n-1} = a_{2n}$$

$$c) a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

Navodilo: Upoštevaj temeljno lastnost splošnega člena!

- b) Število τ (izg.: tau) zapišemo kot verižni ulomek (4)

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \quad (4)$$

Pravi vrednosti števila τ se lahko približujemo korakoma, tako da izračunavamo vrednosti številskega izraza (4) s končnim številom operacij seštevanja. Glej (5) !

$$\begin{array}{l} 1 = 1,0000 \\ 2 = 2,0000 \\ 3/2 = 1,5000 \\ 5/3 = 1,6667 \\ 8/5 = 1,6000 \\ 13/8 = 1,625 \end{array} \quad \tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (5)$$

Izračunane vrednosti so ulomki, katerih števec in imenovalec sta zaporedna člena Fibonaccijevega zaporedja: a_n/a_{n-1} .

Bolj kasni členi Fibonaccijevega zaporedja dajo boljši približek števila τ . Kolikšna pa je prava vrednost števila τ ?

Iz zapisa (4) vidimo, da je $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ ali:

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \quad (6)$$

Enačbo (6) preoblikujemo ($\tau^2 - \tau = 1$) in dopolnimo levo stran do popolnega kvadrata ($\tau^2 - 2(\frac{1}{2}\tau) + (\frac{1}{2})^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2$) ali kar je isto ($(\tau - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$). Obe strani korenimo ($\tau - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$) in po premisleku ima naš τ pozitivno vrednost:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (7)$$

c) Število $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ ima tudi geometrijski pomen. τ je vrednost razmerja med večjim in manjšim delom celote, ki je razdeljeno po *zlatem rezu*.

Zlati rez razdeli celoto v večji in manjši del tako, da je manjši del v primerjavi s večjim v enakem razmerju kot večji del proti celoti.

Kar smo povedali, bomo v levem stolpcu razčlenili po algebrski poti. V desnem stolpcu pa bomo algebrsko razlago dopolnili z bolj nazorno geometrijsko razlago.

če označimo celoto z 1, večji del z M (po lat. Maior=večji) in manjši del z m (po lat. minor=manjši), smemo zgoraj povedano sorazmerje zapisati:

$$m/M = M/1 \text{ ali } (1-M)/M = M/1$$

Iz zapisanega sorazmerja sledi enačba za M :

$$M^2 + M - 1 = 0$$

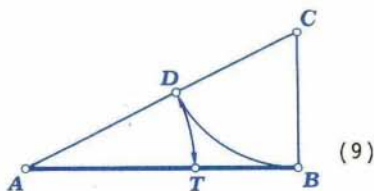
In podobno kot prej za τ poiščemo obe rešitvi, od katerih pride v poštev rešitev

$$M = (\sqrt{5} - 1)/2 \text{ in potem za}$$

$$m = 1 - M = (3 - \sqrt{5})/2$$

6. Izračunaj količnik M/m in se prepričaj, da je enak številu τ .

Za celoto vzamemo daljico $\overline{AB}=1$. Pravokotno nanjo postavimo v krajišču B drugo daljico $\overline{BC}=1/2$



Točka C je središče krožnice skozi točko B in seče daljico $\overline{AC}$ v točki D .

Točka A je središče krožnice, ki poteka skozi D in seče daljico $\overline{AB}$ v točki T .

Daljici $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ sta večji in manjši del po zlatem rezu T razdeljene daljice $\overline{AB}$.

Dokaz: Po Pitagorovem izreku meri hipotenuza $\overline{AC}=\sqrt{5}/2$ in daljica $\overline{AT}=\overline{AD}=(\sqrt{5}/2-1/2)=(\sqrt{5}-1)/2$ in $\overline{BT}=\overline{AB}-\overline{AT}=(3-\sqrt{5})/2$

7. Izračunaj vrednost razmerja za daljici $\overline{AB}/\overline{AT}$!

Za daljici $\overline{AB}$ in $\overline{AT}$ pravimo, da sta v *stalnem sorazmerju*.

Umetniki najrazličnejših zgodovinskih obdobij so menili, da imajo umetnine, kjer so karakteristični deli (npr.: dolžina in širina slikarskega platna, višina in dolžina hišnih portalov, tlorisne dolžine ...) v stalnem sorazmerju, najlepšo obliko.

Primer:

M i l l i o n s k i s o n e t

Pavla V a š a k a

1 6 2 9 3
7 5 3 9 6
6 8 8 0 6
9 0 4 5 3

8 3 5 2 4
9 3 3 4 2
8 2 3 1 2
2 9 1 3 4

3 7 2 8 8
7 7 3 9 8
9 6 5 2 5

7 5 6 5 7
8 0 9 6 7
9 2 9 0 5

Na levi strani je zapisan sonet. Kljub temu, da je zapisan s številskimi simboli (topografska poezija), ohranja vse oblikovne značilnosti soneta (kitica in rima).

Zanimiv je tudi zato, ker je vsota vseh 14 vrstic enaka 1 000 000. Preveri!

Sonet sestavljajo štiri kitice - dve kitici s po štirimi vrsticami (kvartini) in dve kitici s po tremi vrsticami (tercini).

Verz, s katerim se začneta tercini, je navadno miselno najbogatejši. Zanimivo je, da ta verz kot zlati rez, razdeli sonet v dva dela - večji in manjši - tako da je razmerje števila vrstic obeh delov $8/5$; t.j. približek števila τ ; ulomek pa sestavljata števili iz Fibonaccijevega zaporedja.

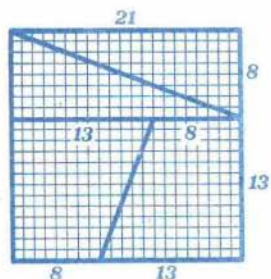
Bogati vsebini soneta se pridružuje še najlepša oblika.

8. Izberi si poljubno daljico b in na njej poišči po zgledu (9) daljši odsek M po zlatem rezu razdeljene daljice b .

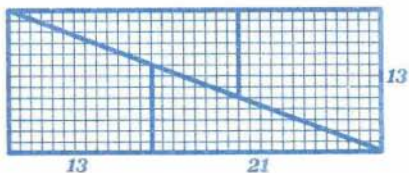
Konstruiraj pravokotnik, ki bo imel za osnovnico daljico $a=b+M$ in za višino daljico b .

Narisanemu pravokotniku pravimo "zlati pravokotnik" in ima po umetniškem prepričanju med pravokotniki najlepšo obliko, saj sta si osnovnica in višina v stalnem sorazmerju. Dokaži: $a/b=\tau$!

9. Ob koncu pa še igra s škarjami in Fibonaccijevimi števili. Iz milimetrskega papirja izrežemo kvadrat 21×21 in ga razrežemo kot kaže slika a). Stranice, ki oklepajo prave kote, so členi

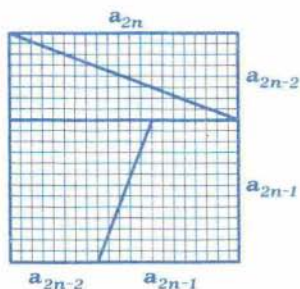


(a)

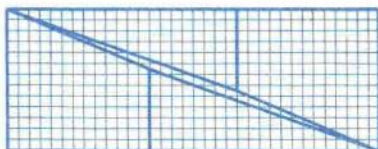


(b)

Fibonaccijevega zaporedja $(8, 13, 21)$. Iz razrezanih kosov sestavimo pravokotnik b). Primerjaj ploščini kvadrata in pravokotnika! Zdi se, kot da gre za "čarovniške škarje", s katerimi dobiš nekaj, česar ni. To velja za vse kvadrate s stranico, ki je člen a_{2n} iz Fibonaccijevega zaporedja (slika c). V resnici pa



(c)



(d)

gre za optično prevaro (slika d), ki je toliko manj opazna, kolikor večji je člen a_{2n} .

Danijel Bezek

$$\begin{aligned}
 4. \quad a_{n+2} - 1 &= a_{n+1} + a_n - 1 \\
 &= a_n + a_n + a_{n-1} - 1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots\dots + a_2 + a_2 + a_1 - 1
 \end{aligned}$$

Končno upoštevamo $a_2 = a_1 = 1$ in dobimo želeni izraz.

$$\begin{aligned}
 a_{2n} &= a_{2n-1} + a_{2n-2} \\
 &= a_{2n-1} + a_{2n-3} + a_{2n-4}
 \end{aligned}$$

Vsak člen s sodim indeksom razčlenjujemo po pravilu dalje

$$= a_{2n-1} + a_{2n-3} + a_{2n-5} + \dots + a_5 + a_3 + a_1$$

$$\begin{aligned}
 a_{2n+1} - 1 &= a_{2n} + a_{2n-1} - 1 \\
 &= a_{2n} + a_{2n-2} + a_{2n-3} - 1
 \end{aligned}$$

Vsak člen z lihim indeksom razčlenimo po pravilu dalje

$$= a_{2n} + a_{2n-2} + a_{2n-4} + \dots\dots + a_2 + a_1 - 1$$

Končno upoštevamo $a_1 = 1$ in dobimo želeni izraz.

6. $M : m = (\sqrt{5} - 1)/2 : (3 - \sqrt{5})/2$. Racionaliziramo:

$$\frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{4} \text{ in končno } 2(\sqrt{5} + 1)/4 = (\sqrt{5} + 1)/2 \quad !$$

7. $AB : AT = 1 : (\sqrt{5} - 1)/2$. Racionaliziramo: $2(\sqrt{5} + 1)/4 = (\sqrt{5} + 1)/2$

8. $a = b + b(\sqrt{5} - 1)/2 = b(1 + (\sqrt{5} - 1)/2) = b(\sqrt{5} + 1)/2$

Od tod: $a : b = (\sqrt{5} + 1)/2 \quad !$

Danijeľ Bezek



MATEMATIKA

IGRA Z DVEMA KUPOMA KAMNOV

To je kitajska narodna igra "Pobiranje kamnov", pri kateri dva igralca izmenoma pobirata kamne iz dveh kupov. Pri tem veljajo naslednja pravila:

1. Iz enega kupa vzamemo poljubno število kamnov (lahko vse, vendar ne manj kot enega), ali
2. istočasno vzamemo poljubno enako število kamnov iz vsakega kupa, toda vzeti moramo vsaj enega.

V igri zmaga tisti, ki vzame zadnje kamne. Pri tem nastajajo pozicije (k, l) , pri katerih imamo na enem kupu k , na drugem pa l kamnov. Ta pozicija je enakovredna poziciji (l, k) . Poglejmo si nekatere pozicije, za katere se izkaže, da so izgubljene: $(0,0)$; $(1,2)$; $(3,5)$; $(4,7)$; $(6,10)$; $(8,13)$; $(9,15)$... ali če jih označimo splošno: (C_0, D_0) ; (C_1, D_1) ; ... (C_n, D_n) ... Te pozicije se podrejujejo naslednjim pravilom:

- a) $C_0 = D_0 = 0$
- b) komponenta C_n pri poziciji (C_n, D_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) je najmanjše naravno število, ki ne nastopa v prejšnjih pozicijah.
- c) $D_n = C_n + n$

Pa dokažimo, da so te pozicije res izgubljene! Za primer si ogledjmo pozicijo $(1,2)$. Imenujmo igralca A in B. Če je po tem, ko je igralec A vzel iz kupov kamne, nastala pozicija $(1,2)$, pomeni, da bo igralec B zgubil. B ima namreč več možnosti:

- B vzame $(1,1)$ ostane $(0,1)$ igralec A vzame vse
- B vzame $(0,2)$ ostane $(1,0)$ igralec A vzame vse
- B vzame $(0,1)$ ostane $(1,1)$ igralec A vzame vse
- B vzame $(1,0)$ ostane $(0,2)$ igralec A vzame vse

Vse ostale možne pozicije pa imenujemo nezgubljene.

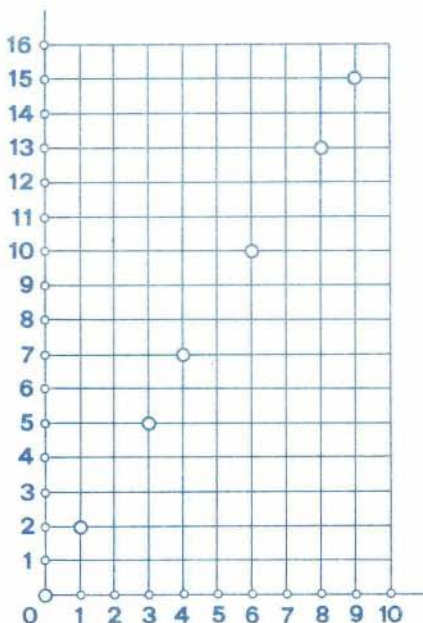
Za nastale pozicije veljajo naslednja pravila:

- I) Pri zgubljenih pozicijah vsako naravno število nastopi natančno enkrat.

Če na primer za C_n vzamemo najmanjše naravno število, ki ne

nastopa v prejšnjih pozicijah, potem res vsako naravno število nastopi v eni izmed pozicij.

Pa pokažimo še, da nastopi samo enkrat; se pravi, da niti en C_n ni enak nekemu D_k . Za poljuben k , ki je manjši od n ($k < n$), velja: $D_n = C_n + n$, kar je večje od $C_k + k = D_k > C_k$. Če je $n > k$, potem je tudi $C_n > C_k$. Iz gornje relacije je torej razvidno, da za poljubni naravni števili k in n ($k < n$) velja relacija $D_n > C_k$. Od tod pa je jasno, da se nobeno naravno število ne ponovi.



II) Vsaka zgubljenost pozicije se nujno da prevesti v nezgubljenost pozicije. Če pri zgubljeni poziciji (C_n, D_n) spremenimo eno samo komponento, dobimo nezgubljenost pozicije, zaradi tega, ker druga komponenta, ki ostane nespremenjena, ne more nastopiti v dveh zgubljenih pozicijah hkrati. Če bi obe komponenti C_n in D_n spremenili enako, tako da bi razlika med njima ostala enaka n , bi dobili novo pozicijo (C_k, D_k) , ki pa ni več zgubljena. k namreč ni enako n , razlika $D_k - C_k = n \neq k$, torej pozicija ni zgubljena.

III) Vsaka nezgubljenost pozicije se da prevesti v zgubljenost. Če je dana nezgubljenost pozicija (a, a) , kjer $a \neq 0$, lahko pridemo k zgubljeni poziciji $(0, 0)$, tako da obe komponenti odštejemo. Če pa je dana nezgubljenost pozicija (a, b) , pri čemer je $a < b$ izberemo:

- 1) $a = C_k$ in če je $b > C_k + k = D_k$, potem od b odvezamo razliko $b - D_k$ in dobimo pozicijo (C_k, D_k) ; ta je zgubljena

- 2) $\alpha = c_k$ in če je $b < c_k + k = d_k$, potem je tudi $b - c_k = b - \alpha = h < k$. Potem na obeh kupih odvezamemo razliko $c_k - c_h$ kamnov. Tako dobimo pozicijo $(c_h, b - c_k + c_h) = (c_h, h + c_h) = (c_h, d_h)$, torej dobimo zgubljeno pozicijo.
- 3) $\alpha = d_k$ v tem primeru iz drugega kupa vzamemo $b - c_k$ predmetov in dobimo zgubljeno pozicijo $(d_k, c_k) = (c_k, d_k)$.

Iz navedenih pravil je razvidno, da po določenem številu potez oba igralka lahko z jemanjem s kupa izgubljata pozicije. Te pozicije se zmanjšujejo, dokler ne prideta do pozicije $(c_0, d_0) = (0, 0)$, pri kateri je znan zmagovalec. Tako vidimo, da bo pri pravilni igri obeh igralcev zgubil tisti, ki prvi vzame kamne s kupov, če je bila začetna pozicija zgubljena, oziroma zmagal, če je bila začetna pozicija nezgubljena.

Povejmo brez dokaza, da za komponente veljata naslednji formuli:

$$c_k = \left[k \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

$$d_k = \left[k \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

kjer znak $[m]$ pomeni celi del števila m .

Za primer, če je $k = 100$

$$c_k = \left[100 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] = [161,803] = 161$$

$$d_k = \left[100 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right] = [261,803] = 261$$

Za primer poskusite rešiti naslednje naloge:

- dokažite, da je pozicija (3,5) res zgubljena
- prevedite zgubljeno pozicijo (4,7) na nezgubljeno
- prevedite nezgubljeno pozicijo (9,9) na zgubljeno
- prevedite nezgubljeno pozicijo (4,10) na zgubljeno.

Cirila Borovšak

O POJMU DIMENZIJE

Pojem dimenzije ne predstavlja nobenih nejasnosti tako dolgo, dokler imamo v mislih preproste geometrijske elemente kot točke, premice, trikotnike, poliedre. Posamezna točka ali končna množica točk ima dimenzijo 0, daljica je enodimenzionalna, trikotnik ali krogelna ploskev je dimenzije 2, množica točk, ki napolnjuje notranjost kocke, ima dimenzijo 3.

Toda, čim hočemo pojem dimenzije razširiti na bolj splošne množice točk, potrebujemo natančnejšo definicijo dimenzije.

Prav lahko najdemo primer za tako množico. Kakšno dimenzijo lahko pripišemo množici Q na realni osi, ki vsebuje točke z racionalnimi koordinatami? Zdaj še ne moremo odgovoriti na to vprašanje.

Poincaré je prvi poskusil natančneje definirati pojem dimenzije. Ogladali si bomo samo idejo, ker moramo za podrobno obdelavo poznati pojme iz topologije.

Poincaré je dimenzijo takole definiral:

Premica ima dimenzijo 1 zato, ker moramo premici odvzeti eno točko, ki ima dimenzijo 0, da lahko ločimo dve poljubni točki na premici.

Ravnina ima dimenzijo 2, ker ji moramo odvzeti zaprto krivuljo, ki ima dimenzijo 1, da lahko ločimo dve poljubni točki na ravnini.

Ti dve definiciji nam dasta slutiti induktivni značaj dimenzionalnosti. Prostor je n -dimenzionalen, če mu moramo odvzeti podprostor dimenzije $(n-1)$, da lahko ločimo dve poljubni točki tega prostora in če z odvzemom podprostora manjše dimenzije tega ne moremo storiti.

Induktivno definicijo dimenzije najdemo tudi v Evklidovih Elementih. Enodimenzionalen je tisti objekt, ki ima rob sestavljen iz točk, dvodimenzionalen objekt ima rob sestavljen iz krivulj, trodimenzionalen pa iz ploskev.

V zadnjem času se je teorija dimenzije zelo razmahnila. Preden definiramo dimenzijo, si oglejmo lastnost vsake končne množice točk.

Poljubna končna množica točk T ima lastnost, da lahko vsako točko te množice zapremo v poljubno majhen del prostora, ki ne vsebuje nobene druge točke množice T .

Iz te lastnosti sledi definicija množice dimenzije 0. Po dogovoru ima prazna množica dimenzijo -1.

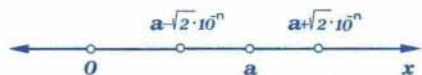
DEFINICIJA: Množica točk S ima dimenzijo 0, če ni prazna in če vsako točko te množice lahko spravimo v poljubno majhno okolico, katere rob seka množico S v množici dimenzije -1 (to pomeni, da rob okolice ne vsebuje nobene točke množice S).

Torej ima množica ulomkov na realni osi dimenzijo 0, saj lahko vsaki racionalni točki a konstruiramo poljubno majhen interval (okolico), ki vsebuje a in ima iracionalni krajišči (rob). Rob okolice torej ne vsebuje elementov množice Q . Taka okolica je na primer $[a - \sqrt{2} \cdot 10^{-n}, a + \sqrt{2} \cdot 10^{-n}]$, kjer je n poljubno naravno število (slika 1).

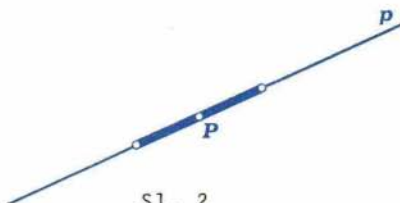
Doslej smo definirali samo dimenziji -1 in 0. Definicija množice dimenzije 1 izhaja iz njiju.

DEFINICIJA: Množica točk S ima dimenzijo 1, če nima dimenzije -1 ali 0 in če vsako točko množice S lahko spravimo v poljubno majhno okolico, katere rob seka množico S v množici dimenzije 0.

Vzemimo točko P na premici p . Rob vsakega intervala, ki vsebuje točko P , sestavljata dve točki (množica dimenzije 0) (slika 2).



S1. 1



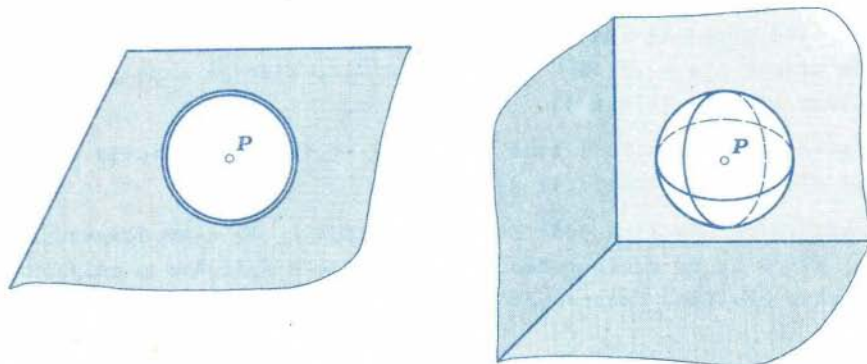
S1. 2

Nadalje lahko definiramo dimenzije 2, 3, 4, ... in splošno:

DEFINICIJA: Množica S ima dimenzijo n , če nima kake manjše dimenzije in če je vsaka njena točka vsebovana v taki poljubno majhni okolici, da njen rob seka množico S v množici dimenzije $(n-1)$.

Tako je ravnina dimenzije 2, saj lahko vsako točko vzamemo na primer za središče kroga poljubno majhnega polmera. Krožnica (rob) seka ravnino v množici dimenzije 1 (slika 3).

V običajnem prostoru nima nobena množica dimenzije večje od 3. Vsako točko prostora lahko namreč vzamemo za središče poljubno majhne kroglice in površina kroglice (rob) ima dimenzijo 2 (slika 4). Pod pojmom prostora pa ne razumemo samo običajnega prostora. Z razširitvijo pojma prostora lahko pridemo do dimenzije, večje od 3.



Prostor, ki ni dimenzije n za nobeno naravno število n , pravimo, da je neskončno dimenzionalen.

WHAT IS MATHEMATICS

by

Richard Courant and Herbert Robbins
Oxford University Press 1960

Nadja Marušič



DEVETO ZVEZNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA UČENCE OSNOVNIH ŠOL

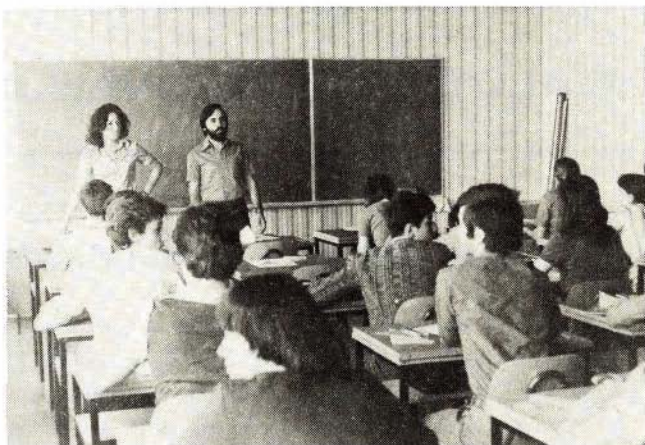
Tekmovanja osnovnošolcev iz matematike imajo že lepo tradicijo. Tako kot vsako leto so se tudi letos najboljši sedmošolci in osmošolci pomerili na 9. zveznem tekmovanju, ki je bilo 4. junija v Portorožu. Tekmovanje je tudi letos organiziral Matematički list iz Beograda, gostiteljica pa je bila podružnica DMFA SR Slovenije iz Kopra.

Devetega zveznega tekmovanja se je udeležilo 74 učencev iz vseh republik (37 tekmovalcev iz vsakega razreda). Za Slovenijo je tekmovalo naslednjih pet sedmošolcev in šest osmošolcev: 8. razred: Mojca Tavčar, OŠ. P. Voranc, Ljubljana; Liljana Trampuž, OŠ. M. Štrukelj, Nova Gorica; Đoko Mandrino, OŠ. V. Vodnik, Ljubljana; Nives Winkler, OŠ. M. Štrukelj, Nova Gorica;



Slovenska ekipa
na devetem zvez-
nem tekmovanju
v Portorožu
4. 6. 1978

Še zadnja
navodila



Aleš Mihev, OŠ. F. Prešeren, Kranj in Rastislav Potočnik, OŠ. D. Bordon, Koper;

7. razred: Robert Bukalo, OŠ. P. Voranc, Ljubljana; Robert Butarič, OŠ. P. Tomažič, Koper; Mitja Bensa, OŠ. M. Štrukelj, Nova Gorica; Saša Pucko, OŠ. Cerklje ob Krki in Marko Modic, OŠ. Radlje ob Dravi.

Komisija je podelila 8 nagrad in 9 pohval tekmovalcem iz 7.r. ter 10 nagrad in prav toliko pohval tekmovalcem iz 8.r.

Najboljši sedmošolec je bil Nikola Miljković iz Beograda, dobil je prvo nagrado. Tudi osmošolcem je bila podeljena prva nagrada. Dobila jo je Dragana Todorić iz Titovega Užica.

Med pohvaljenimi so bili tudi tekmovalci iz Slovenije: Mitja Bensa, OŠ. M. Štrukelj, Nova Gorica; Marko Modic, OŠ. Radlje ob Dravi (oba iz 7.r.) in Đoko Mandrino OŠ. V. Vodnik, Ljubljana; Liljana Trampuž, OŠ. M. Štrukelj, Nova Gorica (8.r.).

Za dosežene rezultate jim čestitamo!

V nadaljevanju objavljamo naloge z rešitvami za 8. razred.

Terezija Uran

Foto Dušan Modic

NALOGE Z ZVEZNEGA TEKMOVANJA OSMOŠOLCEV V MATEMATIKI (1978)

1. Posoda je napolnjena s 100% alkoholom. Odlijemo 2 litra alkohola in dolijemo prav toliko destilirane vode. Postopek še enkrat ponovimo: odlijemo 2 litra mešanice in dolijemo 2 litra destilirane vode. Tako dobimo v posodi 36% alkohol. Koliko litrov drži posoda?
2. Neko troštevilično število je 33-krat večje od vsote svojih cifer. Dokaži, da je to število deljivo z devet! Določi to število!
3. Iz kroga s polmerom r je izrezan enakostranični trikotnik. Izračunaj prostornino in površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem ostanka tega kroga okoli ene izmed njegovih osi simetrije!
4. Dve krožnici z enakima polmeroma r se dotikata od zunaj. Konstruiraj premico, ki seče obe krožnici tako, da so nastali trije odseki na tej premici po dolžini med seboj enaki! Utemelji konstrukcijo!
5. V kvadratni mreži 100 krat 100 je vpisanih 10 000 poljubnih števil. Označimo z a_1 vsoto števil v prvi vrsti, z a_2 vsoto števil v drugi vrsti, z a_3 vsoto števil v tretji vrsti, ..., z a_{100} vsoto števil v stoti vrsti. Nato označimo z b_1 vsoto števil v prvem stolpcu, z b_2 vsoto števil v drugem stolpcu, z b_3 vsoto števil v tretjem stolpcu, ..., z b_{100} vsoto števil v stotem stolpcu. Določi številčno vrednost izraza:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_{100} - b_{100})$$



Rešitve nalog

1. V posodi je x litrov 100% alkohola. Če odlijemo 2 l alkohola in dolijemo 2 l vode, dobimo $p\%$ mešanico, ki vsebuje $(x - 2)$ litrov alkohola in 2 l vode.

$$\begin{array}{rcl} x & \dots\dots\dots & 100\% \\ x - 2 & \dots\dots\dots & p\% \end{array}$$

$$p : 100 = (x - 2) : x ; \quad p = 100(x - 2)/x$$

Mešanica vsebuje $p\%$ čistega alkohola.

V posodi je x litrov $p\%$ mešanice. Če odlijemo 2 l mešanice in dolijemo 2 l vode, dobimo novo mešanico, ki vsebuje 36% alkohola.

$$\begin{array}{rcl} x & \dots\dots\dots & p\% \\ x - 2 & \dots\dots\dots & 36\% \end{array}$$

$$36 : p = (x - 2) : x ; \quad p(x - 2)/x = 36$$

Upoštevajoč dobljeni izraz za p , dobimo:

$$100|(x - 2)/x|^2 = 36 = 6^2 ; \quad 10(x - 2)/x = 6$$

Sledi $x = 5$. V posodi je bilo 5 litrov 100% alkohola.

2. Iskano troštevilično število $M = 100x + 10y + z$ lahko zapišemo takole:

$$M = 33.(x + y + z) = 3.11.(x + y + z)$$

Ker je M deljivo s 3, mora biti vsota njegovih cifer prav tako deljiva s 3:

$$x + y + z = 3m ; \quad m \geq 1$$

Pri tem je m naravno število. Dobimo

$$M = 11.3.(x + y + z) = 11.3.3m = 11.9m = 99m$$

S tem smo dokazali, da je M deljivo z 9. Od tod naprej sledi, da je tudi vsota njegovih cifer deljiva z 9:

$$x + y + z = 9n ; \quad n \geq 1$$

Pri tem je n naravno število. Ker so x , y in z manjši ali kvečjemu enaki 9, velja $x + y + z \leq 27$. Zato mora biti $n \leq 3$, torej je lahko n enak 1, 2 ali 3. Pri tem ima število M obliko:

$$M = 33(x + y + z) = 33.9n = 297n$$

Oglejmo si vse tri možnosti!

n	$M = 297n$	$x + y + z = 9n$
1	297	$2 + 9 + 7 \neq 9$
2	594	$5 + 9 + 4 = 18$
3	891	$8 + 9 + 1 \neq 27$

Iskano število je torej enako 594.

Ko pridemo do sklepa, da je M deljivo z 99, lahko reševanje naloge nadaljujemo še nekoliko drugače. Pišimo:

$$(100x + 10y + z) : 99 = x + (x + 10y + z)/99$$

Od tod sledi:

$$x + 10y + z = 99p ; p = 1, 2, 3, \dots$$

Ker so x, y in z manjši ali kvečjemu enaki 9, velja $x + 10y + z \leq 9 + 10 \cdot 9 + 9 = 108$ oziroma $99p \leq 108$ in končno $p = 1$. Sedaj lahko pišemo: $x + 10y + z = 99$ oziroma

$$10y + (x + z) = 10 \cdot 9 + 9$$

Ker mora biti $x + z \leq 18$ in ker ima število 99 na mestu enic število 9, sledi, da $x + z$ ne more biti dvoštevilično število. Zaradi tega lahko sklepamo iz zadnje enačbe, da mora biti $x + z = 9$ in $y = 9$, torej:

$$M = 33(x + y + z) = 33 \cdot 18 = 594$$

3. AS je simetrala $\angle BAC$. Zato je $\angle DAS = 30^\circ$ in ker je $\angle ADS = 90^\circ$, sledi, da je $\angle DSA = 60^\circ$. Trikotnik ADS je polovica enakostraničnega trikotnika s stranico r in je zato $SD = r/2$. Iz pravokotnega trikotnika ADS sledi $a/2 = r\sqrt{3}/2$ oziroma $a = r\sqrt{3}$. Vrtenina je določena s kroglo polmera r in z vrčtanim pravokotnim stožcem višine $v = 3r/2$ in polmera $R = a/2 = r\sqrt{3}/2$. Za kroglo velja:

$$V_K = (4/3)\pi r^3 ;$$

$$P_K = 4\pi r^2$$

za stožec pa:

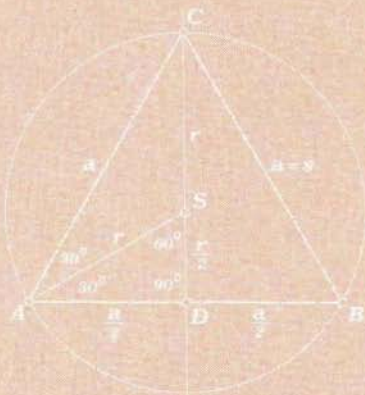
$$V_S = (1/3)\pi R^2 v = (3/8)\pi r^3$$

$$P_S = \pi R^2 + \pi R s = (9/4)\pi r^2$$

Tako dobimo za prostornino in površino vrtenine:

$$V = V_K - V_S = (23/24)\pi r^3 ;$$

$$P = P_K + P_S = (25/4)\pi r^2$$



4. Da bomo lahko konstruirali zahtevano premico, moramo ugotoviti razmerje med neznano dolžino treh enakih odsekov in danim polmerom r obeh krožnic.

Narišimo premico p in označimo na njej tri enake odseke poljubne dolžine $a = B_1A_1 = A_1A_2 = A_2B_2$. Odseka A_1B_1 in A_2B_2 predstavljata tetivi dveh krožnic enakih polmerov $r_1 = r_2 = r$ s središči S_1 in S_2 . Ker je $A_1S_1 = B_1S_1 = r$ in $A_2S_2 = B_2S_2 = r$ sledi, da sta S_1 in S_2 na simetralah tetiv A_1B_1 in A_2B_2 in sicer z iste strani premice p , sicer se krožnici ne bi dotikali. Razdalja simetral je enaka $S_1S_2 = 2r = 2a$, ker se krožnici dotikata in ker je tudi $A_1A_2 = a$. Od tod sledi, da je $a = r$. Trikotnika $A_1B_1S_1$ in $A_2B_2S_2$ sta torej enakostranična. To pomeni, da predstavljata tetivi $A_1B_1 = A_2B_2 = r$ stranici krožnicama vrčtanih šestkotnikov, ki se stikata v dotikališču M obeh krožnic. Zato velja $A_1M = A_2M = r$.



Zdaj lahko konstruiramo zahtevano premico. Načrtamo daljico $\overline{S_1S_2} = 2r$ in jo razdelimo na dva enaka dela s točko M . Nato načrtamo dve od zunaj se dotikajoči krožnici s polmerom r in središči v S_1 in S_2 . S šestilom določimo na obeh krožnicah točke, ki so za r oddaljene od dotikališča M . Tako dobimo dva para točk A_1 in A_2 ter C_1 in C_2 , skozi katera načrtamo premici, ki sta vzporedni z daljico S_1S_2 . Obe premici zadoščata pogojem v nalogi.

5. V vsoti $a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$ so zajeta vsa števila, vpisana v kvadratni mreži. Prav tako so v vsoti $b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100}$ zajeta vsa števila kvadratne mreže, zato je $a = b$. Izraz

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_{100} - b_{100})$$

lahko zapišemo, potem ko razrešimo oklepaje, tudi v obliki $(a - b)$. Upoštevajoč, da je a enako b sledi, da je vrednost podanega izraza enaka nič.

Aleksandar Jurišić



5. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

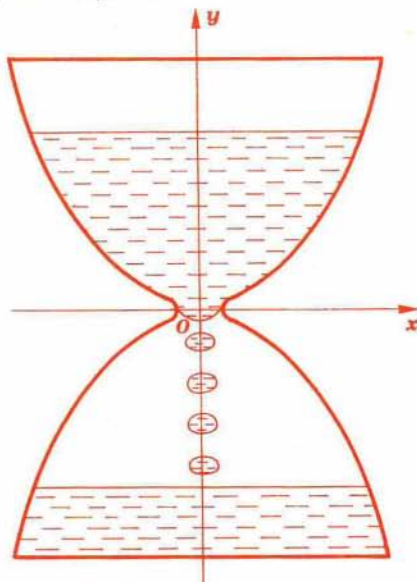
V istrskem mestecu Labinu je bilo 5. tekmovanje mladih fizikov iz vse Jugoslavije od 27. do 28. maja 1978. Slovence so zastopali naslednji tekmovalci: Marko Čebokli, Borut Ferlan in Tone Verbovšek iz I. gimnazije v Ljubljani, Kazimir Gomilšek in Mihael Florjančič iz gimnazije M. Zidanška v Mariboru, Janez Šetina iz gimnazije Šentvid pri Ljubljani ter Ludvik Medvešek iz gimnazije I. Cankarja v Ljubljani. Vsi ti so bili najboljši na republiškem tekmovanju v Celju.

Prvi dan so tekmovalci reševali naloge, ki so bile razdeljene v že ustaljene skupine: A) mehanika in toplota, B) elektrika in magnetizem in C) optika z atomiko. Vsak tekmovalec je že pred tekmovanjem izbral skupino, kjer bo tekmoval.

Težo nalog lahko presodijo bralci sami:

SKUPINA A: Mehanika in toplota

1. Kolo s polmerom R in maso m stoji pred stopnico z višino l . Polmer R je večji od l . Kolikšna je najmanjša vodoravna sila s prijemališčem v središču kolesa, ki lahko kolo dvigne preko stopnice?
2. Voziček z maso M se giblje s konstantno hitrostjo v_0 . V nekem trenutku izpustimo breme z maso m tako, da pade navpično na voziček. Koliko toplote se pri tem sprosti, če je bila hitrost bremena pri padcu enaka v_1 ?
3. Votla železna krogla z notranjim premerom 15 cm in z debelino stene 1 mm je napolnjena z vodo. Krogla se vrti na gladki mizi s frekvenco 5 s^{-1} . Z rokami za trenutek zaustavimo vrtenje krogle in jo ponovno spustimo. S kakšno frekvenco se bo krogla vrtela se daj? Gostota železa je $7,8 \text{ gcm}^{-3}$, vztrajnostni moment polne krogle je enak $2 \text{ m}^2/5$.
4. Vodna ura - klepsidra (slika 1) je rotacijsko simetrična posoda. Voda izteka skozi malo odprtino O . Površje vode nad odprtino se enakomerno spu-

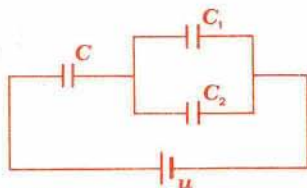


šča, kar omogoča merjenje časa. Kakšno obliko mora imeti posoda v navpičnem preseku vzdolž simetrijske osi? (Prikaži odvisnost višine nivoja vode y od vodoravnega preseka posode x : $y = f(x)$.)

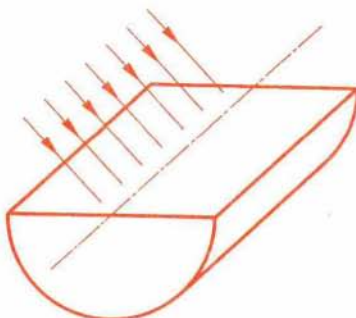
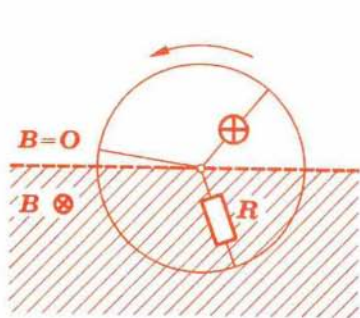
- Valj je razdeljen na dva dela z batom, ki se tesno prilaga stenam. Bat se premika brez trenja. Prvi del valja je napolnjen z idealnim plinom z maso 0,01 kg pri temperaturi 20°C. Kilomolska masa plina je 29 kg, razmerje specifičnih toplot pa 1,4. V drugem delu valja je vakuum. V tem delu je bat pritrjen na osnovno ploskev valja z vzmetjo, ki je v nerazteg-njenem stanju dolga toliko kot valj. S segrevanjem povečamo temperaturo plina za 100°C. Koliko toplote porabimo za takšno segrevanje?

SKUPINA B: Električna in magnetizem

- Tri enake kroglice z masami po 2 g so obešene v isti točki na tankih nitih z dolžinami po 30 cm. Koliko naboja moramo dovesti na vsako kroglico, da bo vsaka nit tvorila kot 30° z navpičnico?
- Na tokovni izvir je priključen porabnik z uporom R . Porablja moč P . Ko temu porabniku priključimo vzporedno še drug porabnik z enakim uporom, se rabljena moč ne spremeni.
 - Kolikšen je notranji upor izvora?
 - Kolikšna je njegova gonilna napetost?
- Ugotovi, če je mogoče v vezju, ki ga kaže slika 2, kapaciteti kondenzatorjev C_1 in C_2 povečati tako, da se naboja na C_1 in C_2 zmanjšata glede na prvotno vrednost! Kapaciteta C in napetost izvora ostaneta nespremenjeni.



- Krožni prevodnik s polmerom a se nahaja v navpični ravnini v polju zemeljske teže in v magnetnem polju z gostoto B , ki je pravokotno na to ravnino. Po prevodniku drsi eno krajišče metalne palice z dolžino a in z maso m . Drugo krajišče je pritrjeno v središču krožnega prevodnika, skozi katerega gre tudi os vrtenja palice. Kolikšno napetost moramo priključiti na konca metalne palice, da se bo palica vrtela enakomerno. Upor palice je R .
- V prostoru se nahaja kovinski obroč s tremi simetrično postavljenimi kraki. Polmer obroča je 5 cm. V enem kraku se nahaja upornik za 20 Ω , v drugem žarnica z uporom 10 Ω . V prostoru pod ravnino, v kateri leži geometrijska os obroča, je magnetno polje z gostoto 1 T. Nad to ravnino ni polja (slika 3). Obroč se vrti okrog geometrijske osi s frekvenco 150 s⁻¹. Kolikšna je povprečna moč, ki jo rabi žarnica? (Najprej skiciraj časovno odvisnost moči žarnice v enem obratu!)



SKUPINA C: Optika in atomika

1. V konkavno krogelno zrcalo s krivinskim radijem $0,5\text{ m}$ nalijemo vodo do roba. Kolikšen je premer slike Sonca, ki jo s tem sistemom dobimo na zaslonu? Vidni kot, pod katerim vidimo Sonce, je $0,5^\circ$.
2. Telo z obliko polovičnega valja je narejeno iz stekla z lomnim količnikom $\sqrt{2}$. Na ravno površino telesa padajo svetlobni žarki pod kotom 45° v ravnini, ki gre skozi os valja (slika 4). S katerega dela zakrivljene površine svetlobni žarki zapuščajo telo?
3. V kameri z majhno odprtino zaslonke je razmik med odprtino in fotografsko ploščo 10 cm . Želimo dobiti sliko Sonca v vidnem spektru ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\text{ m}$). Kolikšen naj bo premer odprtine zaslonke, da bo ločljivost najboljša?
4. Svetloba z neznano valovno dolžino λ_1 pada na fotokatodo in povzroči fotoefekt. Pri določeni katodni napetosti U_{k1} tok preneha teči. Če fotokatodo osvetlimo s svetlobo z valovno dolžino $\lambda_2 = 0,5\mu$, je napetost, pri kateri tok preneha teči, enaka U_{k2} . Razlika napetosti U_{k1} in U_{k2} naj bo 1656 mV . Izračunaj neznano valovno dolžino λ_1 !
5. Velika pola drsi po razsežni mizi s hitrostjo v glede na mizo. Po njej drsi druga pola s hitrostjo v glede na prvo polo. Tretja pola drsi po drugi s hitrostjo v glede na drugo, itd. Proti kateri hitrosti limitira hitrost n -te pole, ko gre n proti neskončnosti?

Drugi dan, ko je komisija pregledovala izdelke, so tekmovalci odšli na izlet v Poreč.

Naši predstavniki so se dobro odrezali. Tone Verbovšek je prejel I. nagrado, Kazimir Gomilšek pa III. nagrado v skupini A. V skupini B je Janez Šetina dosegel III. nagrado. V skupini C ni tekmoval noben naš predstavnik.

Bojan Golli in Andrej Likar

NEKATERE NALOGE Z 19. ZVEZNEGA SREDNJEŠOLSKEGA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE

Letošnje zvezno tekmovanje srednješolcev v matematiki je bilo v Bečičih v črni Gori. O tekmovanju, udeležencih in nalogah je Presek že poročal. Tisti med vami, ki vas privlačijo malo trši matematični orehi, pa boste prav gotovo veseli tudi rešitev nalog s tega tekmovanja. Čeprav sva želela, nisva objavila vseh rešitev, saj bi to zavzelo preveč dragocenega prostora, kajti Presek je namenjen še čemu drugemu kot reševanju nalog. Iz vsakega razreda sva zato izbrala po dve po najinem mnenju najbolj zanimivi nalogi in eno nalogo s kvalifikacijskega tekmovanja za matematično olimpiado.

O rešitvah velja kot vedno: naloga nam nudi zadovoljstvo pri reševanju, ne pa pri branju rešitve. Zato naj bodo rešitve le izhod v sili, če se vam pri reševanju kje ustavi. Njihov namen je kontrola vaših ugotovitev. Dobro pogledjte, ali pri reševanju niste izpustili kakšnega pomembnega sklepa, saj nas neutemeljeni zaključki kaj hitro privedejo v zmoto. Meniva, da bodo rešitve ohrabile tudi vse tiste, ki mislijo, da so naloge z zveznih tekmovanj zanje pretežke ali sploh "nerešljive". Tem in morda še komu želi pričajuči članek pokazati, da marsikatera naloga ni tako težka, kot kaže na prvi pogled, le način reševanja je malo manj običajen. Pa veliko uspeha pri reševanju!

1. razred, 2. naloga

Določi vsa naravna števila, ki so 33-krat večja od vsote svojih cifer!

Rešitev: Imejmo dano n -mestno naravno število x , ki ga v desetiškem sistemu zapišemo s ciframi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Enačba za iskana števila se potem glasi:

$$x = 10^{n-1}a_n + \dots + 10a_2 + a_1 = 33 \cdot (a_n + \dots + a_1)$$

Iz enačbe je razvidno, da je število x deljivo s 33, torej tudi s 3. Ker pa je število deljivo s 3 natanko tedaj, ko je s 3 deljiva vsota njegovih cifer, je desna stran enačbe deljiva z 9. Torej je z 9 deljivo tudi število x in potem tudi vsota njegovih cifer. Lahko zapišemo: $x = 33 \cdot 9y = 297y$. Kot rešitve pridejo torej v poštev le mnogokratniki števila 297.

Ničkratnik, t.j. število 0 kot rešitev odpade, saj ni naravno število. Pet in večmestnih rešitev tudi ni, saj za $n \geq 5$ velja:

$$33(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq 33(9 \cdot n) = 297n < 10^{n-1} \leq x$$

Podobna situacija je s 4-mestnimi števili x . Če je prva cifra enaka 1, potem je vsota cifer manjša od 28, produkt 33.28 pa ne presega 1000. Če pa je prva cifra 4-mestnega števila $a_4 > 1$, potem velja:

$$33(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \leq 33(9 \cdot 4) = 1188 < 1000 \quad a_4 = x$$

Enakosti tu ne moremo doseči.

Ostane nam le še preverjanje med trimestnimi mnogokratniki števila 297. Tako dobimo edino rešitev:

$$x = 594$$

1. razred, 4. naloga

Pravokotna mreža dimenzije 9×10 je pokrita z dominami dimenzije 2×1 . Do kaži, da ne moremo iste plošče pokriti z dominami tako, da bi vsako domino, ki je ležala prej horizontalno, postavili vertikalno (kamorkoli na mrežo), vsako vertikalno pa položili horizontalno!

Rešitev: vseh domin je 45, torej liho število. Vsako horizontalno domino preseka natanko ena vertikalna črta mreže in obratno. Denimo, da ima mreža 10 vrstic in 9 stolpcev. Dokažimo, da preseka vsaka vertikalna črta sodo število domin. Za prvo vertikalno črto to očitno velja, saj je polj v prvem stolpcu 10, vsaka pokončna domina zavzame po dve polji v tem stolpcu, torej ostane sodo polj za domine, ki leže horizontalno. Enak sklep ponovimo pri drugi črti, kjer upoštevamo tudi to, kar smo ravnokar dokazali za prvo črto, in nato še pri vseh nadaljnjih. Vertikalnih črt je 8, vsaka preseka sodo število domin, torej je horizontalnih domin sodo število. Pri opisani za menjavi domin pa bi ležalo horizontalno liho število domin (saj je vseh 45), kar pa smo pravkar ugotovili, da ne gre.

II. razred, 1. naloga

Ali obstajajo taka realna števila a, b, c in d , da velja:

1^o enačba $ax^2 + bdx + c = 0$ ima različna realna korena x_1 in x_2 ,

2^o enačba $bx^2 + cdx + a = 0$ ima različna realna korena x_2 in x_3 ,

3^o enačba $cx^2 + adx + b = 0$ ima različna realna korena x_3 in x_1 ?

Rešitev: če ustrezna števila a, b, c in d obstajajo, je gotovo $abc \neq 0$, saj bi bila sicer vsaj ena od enačb linearna in ne bi imela dveh korenov.

Vietova pravila nam povedo, da je:

$$x_1x_2 = c/a, \quad x_2x_3 = a/b, \quad x_3x_1 = b/c,$$

od koder dobimo, da velja: $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$, oziroma $x_1x_2x_3 = e$ ($e = \pm 1$).

Ko to ugotovitev upoštevamo v gornjih Vietovih enačbah, hitro vidimo, da mora za korene enačbe veljati: $x_1 = eb/a$, $x_2 = ea/b$ in $x_3 = ea/c$. Če to vstavimo v dane tri kvadratne enačbe, dobimo:

$$b^2(1 + de) = -ac$$

$$c^2(1 + de) = -ba \quad \text{in}$$

$$a^2(1 + de) = -bc$$

Ker je $abc \neq 0$, je tudi $1 + de \neq 0$. Če zdaj gornje enačbe medsebojno delimo, nam ostanejo naslednje relacije med koeficienti a, b in c :

$$b^2/c^2 = c/b, \quad c^2/a^2 = a/c, \quad a^2/b^2 = b/a,$$

kar nam pove, da je: $a^3 = b^3 = c^3$. To pa pomeni $a = b = c$, saj se iz zgornjih enačb vidi, da so a , b in c istega predznaka. To pa bi pomenilo, da so vse tri enačbe identične, kar je v nasprotju s pogojem, da so vsi trije koreni x_1 , x_2 in x_3 različni med seboj. Od tu lahko upravičeno zaključimo, da števila a , b , c in d , ki bi ustrezala nalogi, ne obstajajo.

11. razred, 4. naloga

Za točke $A_1, A_2, \dots, A_n$ v ravnini velja, da je največja od razdalj $\overline{A_i A_j}$ ($i \neq j$) enaka 1, a najmanjša enaka d . Dokaži, da je

$$d < \frac{2}{\sqrt{n} - 1} \quad !$$

Rešitev: Očrtajmo okrog vsake od n danih točk krog polmera $d/2$. Ker je najmanjša razdalja med točkami enaka d , se ti krogi medsebojno ne sekajo. Naj bo A_i poljubna izmed danih n točk. Če tej točki očrtamo krog polmera 1, bo ta vseboval vse dane točke. Ta krog sedaj odebelimo za $d/2$, t.j. narišemo koncentričen krog polmera $1+d/2$, in ta bo vseboval vseh n medsebojno disjunktih krogov s polmerom $d/2$. Ker so manjši krogi disjunktni, je vsota njihovih plosčin manjša od plosčine kroga s polmerom $1+d/2$, ki vsebuje vse te kroge. Torej lahko to ugotovitev zapišemo s pomočjo geometrijskih formul kot:

$$\pi(1 + d/2)^2 > n\pi(d/2)^2$$

Od tu dobimo po krajšanju in korenjenju (kar je možno, saj so vse količine pozitivne):

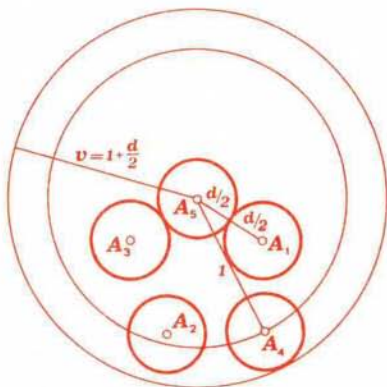
$$1 + d/2 > \sqrt{n} \cdot d/2$$

Iz zadnje enačbe pa s preureditvijo dobimo iskano oceno za :

$$d < \frac{2}{\sqrt{n} - 1}$$

Omeniti velja, da je ta ocena zelo groba, saj je za $n < 9$ trivialno izpolnjena. Očitno je namreč, da je $d \leq 1$, za $n < 9$ pa je

$$\frac{2}{\sqrt{n} - 1} > 1.$$



Mala olimpiada, 2. naloga

Naj bo k_0 enotski polkrog nad polmerom S_0B , a k_1 krog polmera $1/2$, ki se dotika k_0 in daljice S_0B . Krog k_{n+1} definiramo na sledeči način: k_{n+1} se dotika kroga k_n , polkroga k_0 in daljice S_0B . Naj bo r_n polmer kroga k_n , $n=1,2,\dots$. Dokaži, da je:

$$(a) \quad \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n-1}} = \frac{6}{r_n} - 4 \quad \text{in}$$

$$(b) \quad \frac{1}{r_n} \text{ je bodisi kvadrat nekega sodega naravnega števila, ali pa dvojni}$$

kvadrat nekega lihega števila.

Rešitev: Na risbi sta vrisana dva zaporedna kroga k_n in k_{n+1} . Hitro vidimo, da velja:

$$z^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

$$u^2 = (1-x)^2 - x^2 = 1 - 2x \text{ in}$$

analogno

$$(u+z)^2 = (1-y)^2 - y^2 = 1 - 2y.$$

Ko enačbe skorenimo in izračunamo $z + u - (z+u) = 0$, dobimo naslednjo enačbo:

$$\sqrt{4xy} = \sqrt{1-2y} - \sqrt{1-2x},$$

a od tu:

$$x^2 + y^2 + 4x^2y^2 - 6xy + 4x^2y + 4xy^2 = 0$$

Če vpeljemo novi spremenljivki

$a = 1/x$ in $b = 1/y$, se ta enačba prelevi v naslednjo:

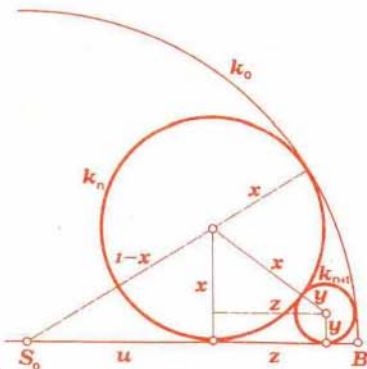
$$a^2 + b^2 + 4 - 6ab + 4a + 4b = 0 \quad (1)$$

Na naši sliki smo z x označili polmer r_n , torej je $a = 1/r_n$. Če enačbo (1) gledamo kot kvadratno enačbo za b pri fiksnem a , hitro odkrijemo eno njeno rešitev, to je ravno $1/y$, saj smo jo dobili iz geometrijske konstrukcije. Konstrukcijo pa bi lahko napravili tudi za kroga z radijem r_{n-1} in r_n . Če bi tu vlogo a in b zamenjali (ker nastopata simetrično), bi dobili isto enačbo. Tako nam je na dlani še drugi koren enačbe (1): $1/r_{n-1}$. Sedaj dobimo z upoštevanjem Vietovega pravila za linearni člen enačbe (1) ravno enakost (a). Iz te zveze najprej sledi, da so $1/r_n$ naravna števila. Drugo Vietovo pravilo nam pove, da je

$$\frac{1}{r_{n+1}} \cdot \frac{1}{r_{n-1}} = \left(\frac{1}{r_n} + 2\right)^2$$

Iz (1) izračunamo $r_2 = 1/4$. Vidimo, da trditev (b) velja

za $n = 1$ in za $n = 2$. Dokaz trditve (b) pa lahko zdaj izdelamo s pomočjo popolne indukcije, kjer na induksijskem koraku upoštevamo prej zapisano drugo Vietovo formulo. Naj poudarimo le še to, da je bilo za začetek indukcije nujno preveriti trditev (b) za $n = 1$ in $n = 2$, saj se ob induksijskem koraku sklicujemo na dva predhodna člena: $1/r_n$ in $1/r_{n-1}$.



III. razred, 1. naloga

Poišči vsa naravna števila n , za katera obstaja polinom n -te stopnje $P_n(x)$ s celoštevilskimi koeficienti, ki je v n različnih celoštevilskih točkah enak n in $P_n(0) = 0$.

Rešitev: Označimo s $Q_n(x)$ polinom $Q_n(x) = n - P_n(x)$. Polinom $Q_n(x)$ je v n različnih celoštevilskih točkah, imenujmo jih $x_1, x_2, \dots, x_n$, enak 0 in $Q_n(0) = n$. Če je $Q_n(x_i) = 0$, je $Q_n(x)$ deljiv z binomom $(x - x_i)$. Torej lahko pišemo $Q_n(x)$ kot produkt n faktorjev

$$Q_n(x) = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Vsi x_i so med seboj različni in nobeden ni enak 0, torej so po absolutni vrednosti vsi, razen morda dveh, večji od 1. Vstavimo $x = 0$:

$$n = Q_n(0) = A \cdot (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_n$$

$$\text{in ocenimo: } n = |A \cdot (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_n| \geq 2^{n-2}$$

To gre le pri $n \leq 4$. Za $n = 1, 2, 3$ in 4 lahko hitro dobimo primere za polinome z zahtevanimi lastnostmi:

$$n = 1: Q_1(x) = x + 1, P_1(x) = -x;$$

$$n = 2: Q_2(x) = (x - 1)(x - 2), P_2(x) = 3x - x^2;$$

$$n = 3: Q_3(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3), P_3(x) = x + 3x^2 - x^3;$$

$$n = 4: Q_4(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2), P_4(x) = 5x^2 - x^4.$$

III. razred, 4. naloga

V ravnini je danih n točk $A_1, A_2, \dots, A_n$, katerih medsebojne razdalje so vse večje ali kvečjemu enake 1. Dokaži, da število daljic $\overline{A_i A_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) dolžine 1 ne presega $3n$.

Rešitev: Vzemimo poljubno točko A_i in opišimo okoli nje enotski krog (krog s središčem v A_i in polmerom 1). Vse točke, ki so od A_i oddaljene za 1, leže na tem krogu. Koliko je največ takih točk med točkami A_j ? Očitno jih bo največ tedaj, ko bosta po dve sosednji točki med seboj enako oddaljeni. Ta oddaljenost mora biti najmanj 1, to pa dosežemo ravno pri pravilnem šestkotniku, torej je takih točk največ šest. Vseh točk je n , iz vsake izhaja največ 6 daljic dolžine 1, vsako tako daljico pa smo pri tem šteli dvakrat (k vsakemu krajišču po enkrat), skupaj torej njihovo število ne presega $6n/2 = 3n$, kar je bilo treba dokazati.

IV. razred, 1. naloga

Naj bo n naravno število. Označimo s p_k število nenegativnih celoštevilskih rešitev x, y enačbe

$$k \cdot x + (k + 1) \cdot y = n - k + 1$$

Izračunaj vsoto $p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1}$!

Rešitev: enačbo malo preoblikujmo:

$$k \cdot (x + y + 1) + y = n + 1$$

Označimo $z = x + y + 1$. Tako dobimo enačbo

$$k \cdot z + y = n + 1$$

Zaradi $x \geq 0$ velja $y \leq z - 1$, torej $0 \leq y \leq z - 1$. Očitno določa vsak par (x, y) , ki reši prvotno enačbo, natanko en par (z, y) , ki reši drugo enačbo in obratno. Torej lahko štejemo kar rešitve te enačbe pri vseh vrednostih $1 \leq k \leq n + 1$. Pri vsakem k med 1 in $n + 1$ predstavlja naša enačba razcep števila $n + 1$ na mnogokratnik števila z (med 1 in $n + 1$) in ostanek y . Tak razcep pa je, kot vemo, enoličen, torej obstaja za vsak tak z natanko ena rešitev naše naloge. Vseh rešitev je torej $n + 1$, kolikor je tudi rešitev prvotne enačbe, in to je enako iskani vsoti. Kot vidimo, nam za rešitev naloge ni treba iskati števil p_k , kar bi bila težja naloga.

IV. razred, 3. naloga

Za podmnožico P naravnih števil N velja:

- 1) $a \in P, b \in P \Rightarrow a + b \in P$,
- 2) $(\forall q \in N, q > 1)(\exists c \in P)(c \not\equiv 0 \pmod q)$.

Dokaži, da so v P vsa naravna števila razen morda končno mnogih, z drugimi besedami, množica $N - P$ je končna.

Rešitev: dokažimo najprej, da v P obstajata vsaj dve med seboj tuji števili. Naj bo $a \in P$. Razcepimo a na praštevila: $a = p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_n^{g_n}$. Zaradi zahteve 2) obstaja za vsak p_i tak $a_i \in P$, da p_i ne deli a_i . Postavimo $b = a_1/p_1^{g_1} + \dots + a_n/p_n^{g_n}$. Vzemimo poljuben p_i . Očitno je vsak člen v vsoti za b deljiv s p_i razen i -tega člena, vsota torej ni deljiva s p_i . Torej je število b tuje proti a . Ker je $a_i \in P$, je zaradi 1) tudi vsak njen večkratnik v P , torej je v P vsak člen vsote, s tem pa tudi b in obstoj tujih števil v P je dokazan.

Naj bo zdaj $n \geq a \cdot b + 1$. Trdimo, da je med b števili $n - a, n - 2a, \dots, n - b \cdot a$ eno deljivo z b . Če to ne bi bilo res, bi vsako od teh števil pri deljenju z b dalo nek ostanek med 1 in $b-1$. Števil je b , različnih ostankov le $b-1$, torej bi dali dve števili enak ostanek, zato bi bila njuna razlika deljiva z b . Razlika dveh izmed gornjih števil je očitno oblike $k \cdot a$, kjer je $k < b$. Ker je a tuj proti b , mora biti k deljiv z b , to pa gre zaradi $k < b$ le pri $k = 0$. Protislovje kaže, da naša trditev drži. Naj bo npr. $n - k \cdot a$ deljivo z b , torej $n = k \cdot a + l \cdot b$. Od tod vidimo, da je zaradi pogoja 1) tudi $n \in P$. Dokazali smo, da so vsa naravna števila n večja od $ab+1$ iz P . Množica $N - P$ je torej končna.

Bojan Mohar in

Franci Forstnerič

ZANIMIVO, A NEDOKAZANO

Vzemi poljubno naravno število m . Če je število *sodo*, ga deli z 2. Če je *liho*, mu priredi število $3m + 1$. Če se držiš tega pravila, prideš po končnem številu korakov vedno do 1. Poskusi!

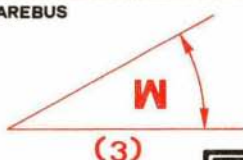
Na primer: Izberemo si $m = 7$. Ker je liho, mu priredimo $3m + 1 = 22$, to število delimo z 2, dobimo liho število 11 in mu priredimo 34. Nato 17, priredimo 52, dvakrat delimo z 2 in pridemo do 13, priredimo $3 \cdot 13 + 1 = 40$, trikrat delimo z 2, dobimo 5, priredimo $3 \cdot 5 + 1 = 16$, to pa je 2^4 in še s štirimi deljenji z 2 res pridemo do 1.

Daniël Bezek

SLIKOVNA KRIŽANKA

REBUS 		RAREBUS  (2,3,4,5)		GRMADA TLEČIH DRV ZA OGLJE	KOPNO SREDI VODE	ROLO	VITKA SMREKA			
					R	O	R	O		
				TUREK, OSMAN		T		M		
		IZDELOVA- LEC ORODJU	SAMORAS- LA JAB- LANA	IME ČRKE M	SPODRS- LJAJ	1/2	P	O	L	O
MORSKI POLŽ	V	O		E	R	ANGL. POVRŠIN. MERA TORINO	A	K	E	R
PUŠČAV- NIK	E	R	E	M	I	T	APA- RAT	NASIL- NICA APARAT ZA RAZGOVOR NA DALJAVO	T	I
KRATICA ZA KLJIC NA POMOČ	S	O	S	STIK SPOJ MADŽAR	K	O	N	T	A	R
RAZ- MERJE	O	D	N	O	S	ALBERT EIN- STEIN	A	E	VERDIE- VA OPERA	A
D. PRITOK KOLU- BARE	L	J	V	B	CHARLES DARWIN	PETER LEVEC	P	L	PALICA PRI BILIJARU	ČARODEJ REKA SKO FIRENCE
LJUBK. M. IME	J	A	N	E	C	NAŠA NAJVEČJA LUKA	R	E	K	A
FRANC. RODBINA IZDELOVAL- CEV KLA- VIRJEV	E	R	A	R	D	SPOR, PRAVDA ENAKI ČRIKI	A	F	I	
REBUS   					D	V	O	J	N	
				DEL TEDNA	D	A	N	SLOVES- NA OPRAVA		

Z REBUSI

DUŠA UMR- LEGA PRI SLOVANIH	2. IME	RAREBUS 				KOKOŠ	ORGAN VIDA	TOALET- NA POTREB- ŠČINA	POLET. ZANOS	1000 KG
N A						K	O	M	E	T
A N		SL. PISATELJ (IVAN)	NOETOVA BARKA		UČNI PRI- POMOČEK KRAPINA	U	Č	I	L	O
U I		C A		PSEVDONIM PEŠNIKA PAGLIARIU- ZUJA ANGL. M. IME	R R	I	L	A	N	
PLAČILO OB UVOZU MAJHEN RT		C A	R I		N A	OŠEBNI ZAIIMEK	O	N	A	
R A		N K	A		RAREBUS 					
T	MONGOLSKI VLADAR PRITRDIL- NICA	I L	A N							
I D	A	SKUPINA 8 PEVCEV	SL. IN HR PEŠNIK (STANKO)		M. IME	IZVRŠNI SVET	PTICA PEVKA			ŠOLSKI RED
T A	R O	V	N I	R		ZALOŽBA OBZORJA Ž. IME		Z	O	
REKA SKOZI BERN	SESTAVIL: PAVLE GREGORC	IZREDEN LEPOTEC Ž. IME	R	R A	S O	T E	C			
	OGLJI- KOVODIK C ₂ H ₆ CINK	E T	A N		SINKO ALUMINIJ	S I	N E			
A Z	V E	Z D	A		MESTEČE SZ. OD ZADRA	N I	N			
	N A	T		IME ČRKE L	E L	OČE	A T	A		

PAVEL GREGORC

PREMISLI IN REŠI



Na zastavljeno nalogo iz Preseka VI/2 smo prejeli 84 rešitev. 28 reševalcev je napravilo kakšno napako, 32 pa jih je pozabilo na prvi del naloge. Največ napak ste naredili pri uporabi oklepajev. Tako je ostalo le 24 popolnoma pravilnih rešitev.

Če ste se držali samo seštevanja in odštevanja, je rešitev nič koliko in tudi dobiti jih ni posebno težko. Zato objavljamo rešitev Uroša Erjavca, učenca osnovne šole Jožeta Mihevca iz Idrije, ki je delal tudi z množenjem, deljenjem in sestavljanjem.

$$12 : 3 + 4 - 5.6 + 7 + 8 + 9 = 2$$

$$4 - 3 + 2 - 1 = 2$$

$$5 + 4 - 3.2 - 1 = 2$$

$$6.5 + 4 - 32.1 = 2$$

$$7 + 6 + 5.4 - 32 + 1 = 2$$

$$87 - 65 + 4 - 3 - 21 = 2$$

$$98 - 76 - 5.4 + 3 - 2 - 1 = 2$$

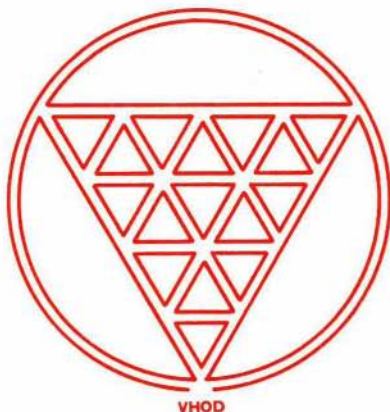
Nalogo so pravilno rešili: Jakobčič Andrej, STŠ Novo mesto; Dolinšek Majda, o.š. Stane Žagar, Kranj; Burgar Boštjan, Kranj; Kozir Simona, Ljubljana; Bertoncej Alenka, o.š. Prešernove brigade, Železniki; Šturm Milena, gim. Kranj; Kersnik Janko, gim. Jesenice; Kofol Eda, gim. Koper; Kloboves Bojan, o.š. Peter Kavčič, Škofja Loka; Šinkovec Andreja, o.š. Spomenik NOB, Cerklje; Turkovič Janko, gim. Koper; Čokan Tomaž, gim. Ljubljana Bežigrad; Tatjana Čokan, o.š. Prule, Ljubljana; Zorko Tomaž, o.š. Rihard Jakopič, Ljubljana; Samuda Lidija, gim. Ljubljana Vič; Medica Boris, o.š. Rihard Jakopič, Ljubljana; Kočevar Heda, gim. Ivana Cankarja, Ljubljana; Urh Božidar, o.š. Lucijan Seljak, Kranj; Celarc Tomislav, gim. Ljubljana Bežigrad; Kogovšek Simona, o.š. Ivana Cankarja, Vrhnika; Jerala Franc, Kranj; Štrubelj Jana, Novo mesto; Rupnik Erik, Ljubljana; Cerar Bernarda, Laško.

Izžrebani so bili: Erjavac Uroš, o.š. Jožeta Mihevca, Idrija; Kogovšek Simona, o.š. Ivana Cankarja, Vrhnika in Samuda Lidija, gim. Ljubljana Vič.

Za nagrado prejmejo knjigo Fizika, leksikon Cankarjeve založbe.
Rešitev naslednje naloge pričakujemo do 30. VI. 1979.

Ljubomir Kostreva

Na sliki je prikazan načrt poti po parku.



Kakor vemo (glej Presek VI/1), se lahko sprehodimo po vseh poteh, ne da bi katerokoli prehodili dvakrat in tako obidemo ves park. Če pa dopuščamo večkratni sprehod po isti poti, poskusimo ugotoviti, kako se moramo sprehajati po parku, da ga v celoti obidemo in pri tem čim manjkrat spremenimo smer hoje.

po Samu Loydu *Vladimir Batagelj*

NETOČNOST V ČLANKU "XIX. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA" (Presek V/4)

V lanskem Preseku števil. 4 sem v članku o 19. matematični olimpiadi pomotoma napisal, da sta na tej olimpiadi prvič dva Slovenci hkrati dosegla po eno od nagrad. To ni res, saj sta na 5. matematični olimpiadi, ki je bila leta 1963 v Wrocławu, dosegla F. Dacar prvo in P. Petek drugo nagrado. Za napako se opravičujem.

Gorazd Cvetič



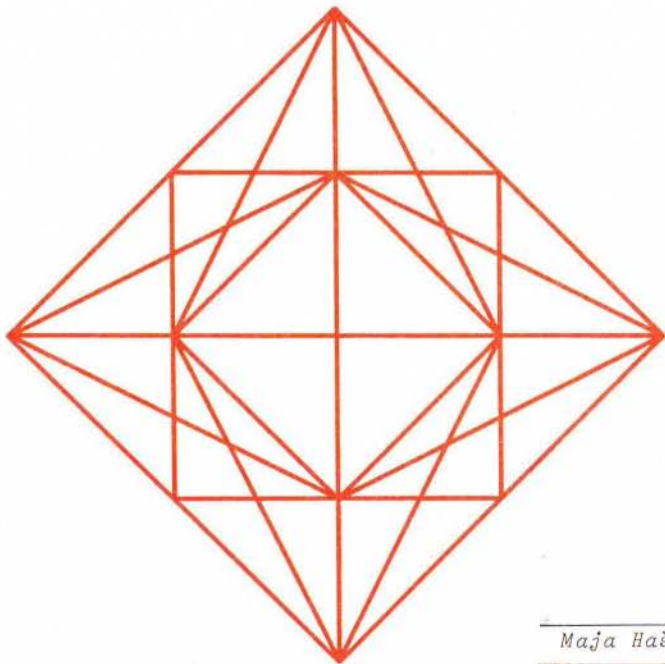
NALOGE

NALOGE BRALCEV

Rešitve nalog iz arhiva so nam poslali Andrej Jakobčič iz Novega mesta, Etbin Tavčar iz Dutovelj, Romana Lazanski iz Žalca, Nataša Centa z Roba in Marjan Šantl iz Remšnika.

Maja Hašimovič s Koroške Bele pa nam je poslala tole sliko in vprašanje:

Koliko trikotnikov najdeš na tej sliki spodaj? Jaz sem jih 80. Mogoče jih boš ti še več! Poskusi! Veliko sreče!



Maja Hašimovič

PET NALOG

1. Razlika kvadratov merskih števil stranic paralelograma je enaka k^2 , kot med diagonalama je 120° . Izračunaj (brez trigonometrije) ploščino paralelograma!
2. Stranici pravokotnika sta v razmerju $1:\sqrt{k}$ (k je naravno število). Iz dveh nasprotnih si oglišč narišemo normali na diagonalo. V kakšnem razmerju delita normali diagonalo?
3. Najdaljša od diagonal pravilnega konveksnega n -kotnika je enaka D , najkrajša d . Izračunaj ploščino tega n -kotnika, če je število n sodo!
4. Vsota kvadratov treh zaporednih lihih števil, zmanjšana za 11, je deljiva s 24. Dokaži!
5. Dokaži, da je $31^{107} + 107^{31}$ deljivo z 42 !

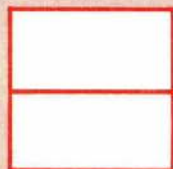
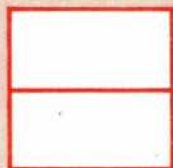
Dragoljub Milošević

Zbral, uredil in prevedel Peter Petek

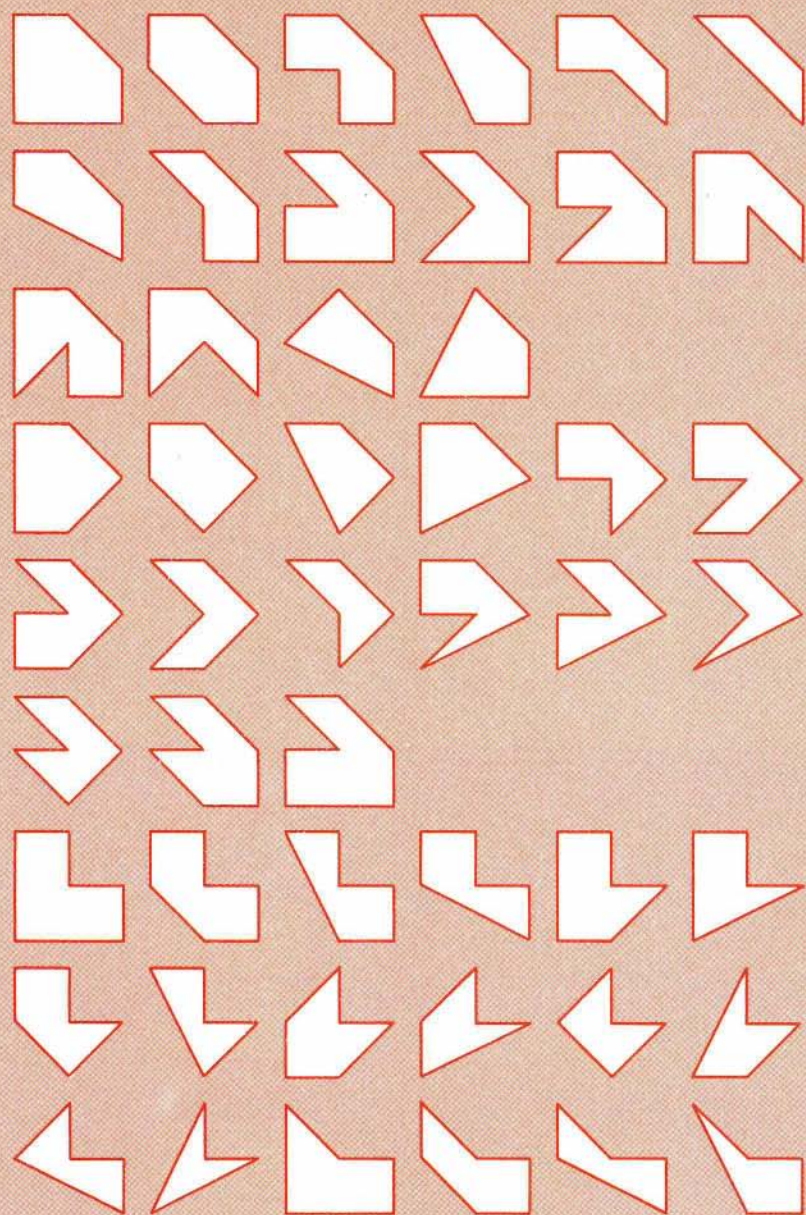
NALOGA

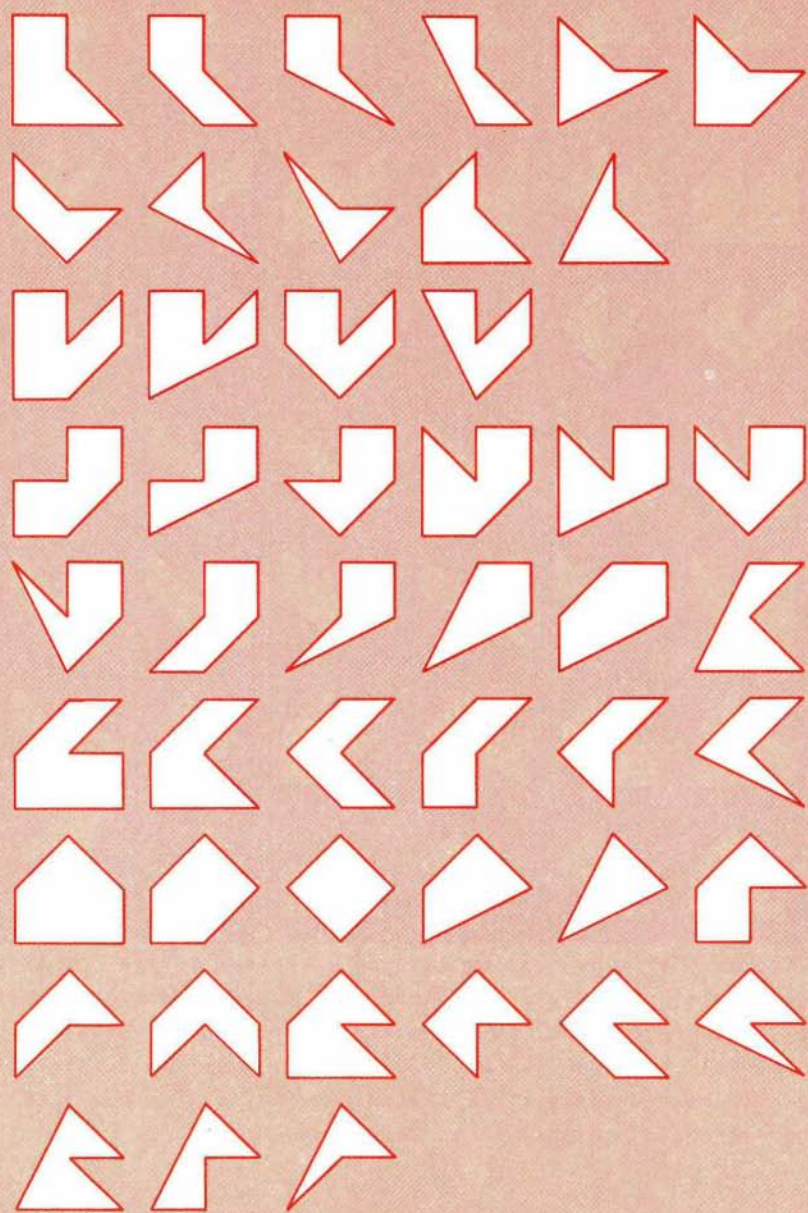
Na sliki vidiš naris in tloris oglatega telesa. Da bi si mogel telo dovolj jasno predstaviti, nariši še njegov prečni ris. Koliko različnih teles je možnih?

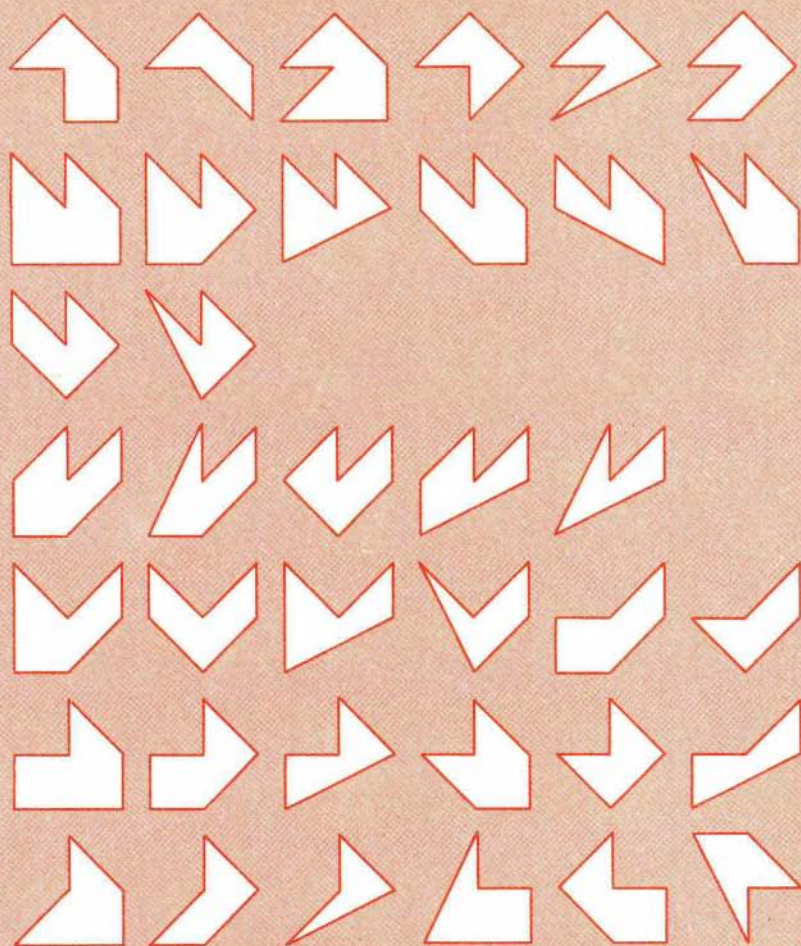
Nariši jih!



?







Odgovor: Če se ne omejimo samo na konveksna telesa, je število vseh možnih teles kar precej veliko. Avtorju je uspelo najti 134 različnih teles, pa ni povsem prepričan, da je izčrpal vse možnosti. Trdi pač, da jih je vsaj 134. Nekatere dvojice (trojice) predstavljajo sicer skladna telesa, a so v različnih legah nasproti projekcijskima ravninama.

Stanislav Horvat

REŠITVE NALOG



BISTROVIDEC - HIŠNA ŠTEVILKA / Presek VI/2 - rešitev

Skopa rešitev te naloge je bila objavljena že v P VI/3, str. 191. Ker je naloga zanimiva, se pomudimo pri njej še malo.

Označimo z n hišno številko in s h število hiš v ulici. Potem je odgovor naslednji:

- če je hišna številka dvomestna, je $n = 35$ in $h = 49$;
- če je hišna številka trimestna, je $n = 204$ in $h = 288$.

Kako se izognemo preboru vseh možnosti?

Naj $S(k)$ pomeni vsoto prvih k naravnih števil. Po besedilu naloge mora veljati:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \dots + (h-1) + h$$

oziroma

$$S(n-1) = S(h) - S(n)$$

ali, ker je $S(n) = S(n-1) + n$, tudi:

$$2 \cdot S(n) - n = S(h)$$

Upoštevamo še, da je $S(k) = k \cdot (k+1)/2$, pa dobimo naslednjo celoštevilsko (Diofantsko) enačbo:

$$2 \cdot n^2 = h \cdot (h+1) \quad n, h \in \mathbb{N}$$

Pri reševanju te enačbe nastopita dva primera:

- a) h je lih; tedaj iz oblike leve strani enačbe in tujosti števil h in $h+1$ izhaja, da sta ti dve števili oblike:

$$h = p^2, \quad p \text{ je lih}$$

$$h+1 = 2q^2$$

b) h je sod; številki h in $h+1$ sta v tem primeru oblike:

$$h = 2q^2$$

$$h+1 = p^2, \quad p \text{ je lih}$$

Oba primera lahko spet združimo v prirejeno enačbo:

$$p^2 \pm 1 = 2 \cdot q^2, \quad p \text{ je lih} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Vsaki rešitvi osnovne enačbe ustreza natančno določena rešitev prirejene enačbe; in obratno! Kako dobimo iz rešitve (p, q) rešitev (n, h) ? Število h je določeno s tem ali gre za primer a) $(p^2 + 1 = 2 \cdot q^2)$ ali za primer b) $(p^2 - 1 = 2 \cdot q^2)$; v obeh primerih pa je $n = p \cdot q$.

Poglejmo, do katerega p moramo poiskati vse rešitve prirejene enačbe, da bomo lahko iz njih dobili vse rešitve osnovne enačbe, ki nas zanimajo!

Za večje p in q velja $p = \sqrt{2 \cdot q^2 \pm 1} \approx q \cdot \sqrt{2}$. Vstavimo to v enačbo za n pa dobimo

$$n_{\max} \approx p_{\max}^2 / \sqrt{2} \quad \text{oziroma} \quad p_{\max} \approx \sqrt{\sqrt{2} \cdot n_{\max}}$$

V našem primeru je $n_{\max} = 999$ in zato $p_{\max} = 37$. Ker nas zanimajo samo lihi p , je torej potrebno pogledati vsega 19 različnih vrednosti:

p	p^2	$(p^2+1)/2=q_a^2$	$(p^2-1)/2=q_b^2$
1	1	1 ←	0 ←
3	9	1	4 ←
5	25	13	12
7	49	25 ←	24
9	81	41	40
11	121	61	60
13	169	85	84
15	225	113	112
17	289	145	144 ←

19	361	181	180
21	441	221	220
23	529	265	264
25	625	313	312
27	729	365	364
29	841	421	420
31	961	481	480
33	1089	545	544
35	1225	613	612
37	1369	685	684

Rešitve prirejene enačbe dobimo povsod tam, kjer je število v tretjem ali četrtem stolpcu res popolni kvadrat. Iz tabele preberemo naslednje rešitve:

k	p	q	n	h
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1
2	3	2	6	8
3	7	5	35	49
4	17	12	204	288

Tretja in četrta rešitev sta iskani rešitvi.

Kot zanimivost naj omenim, da lahko vse rešitve osnovne in prirejene enačbe v naravnih številih dobimo kot člene zaporedij:

$$p_0 = 1, q_0 = 0$$

$$q_{k+1} = p_k + q_k, p_{k+1} = q_{k+1} + q_k$$

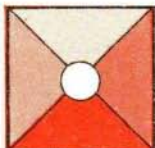
$$n_k = p_k \cdot q_k, h_{2k} = 2 \cdot q_{2k}^2, h_{2k+1} = p_{2k+1}^2$$

Preverite in dopolnite tabelo do $k = 10$!

Vladimir Batagelj



REŠITVE NALOG



PISMA BRALCEV

KROPEC ROMANA iz Rogaške Slatine nam je ob poslani rešitvi zapisala: *Ob novem letu želim vsem, ki urejate Presek, veliko uspehov. Pohvaliti moram Presek. Vsakdo lahko najde v njem, kar ga zanima. Čeprav sem letos v četrtem razredu gimnazije, bom naročevala Presek še naprej, ukvarjala se bom z nalogami tako kot sedaj. Sprejmite prisrčne pozdrave.*

Romana, zelo smo veseli, da misliš ostati naš zvesti bralec tu di kot študent. Želimo ti uspešno maturo in odločitev za nadaljnji študij. Torej računamo s tvojim prijateljstvom in pričakujemo še kdaj tvojo pošto.

JANA ŠTRUKELJ iz Novega mesta nam je tudi poslala lepe pozdrave in zaželela veliko uspehov. K rešitvi naloge je pripisala: *Oglašam se vam prvič, čeprav sem že štiri leta naročena na revijo. Presek mi je všeč, ker so v njem naloge za vse starostne stopnje. Morda jih je malo manj za srednješolce, a upam, da boste tudi to popravili. Upam tudi, da bo v naslednjem Preseku križanka, ki je v 2. številki ni bilo. Lahko bi bili tudi dve, saj je veliko takih, ki jih radi rešujemo.*

Hvala, Jana, za poslano rešitev in za iskrene besede. Oglasi se nam še kdaj in želimo ti še dosti prijetnih trenutkov v družbi s Presekom.

NADA LAVRIH iz Zagorja o/S je zapisala takole: *Dragi Presek! Oglašam se ti prvič. Tvoj naročnik sem komaj drugo leto, ker prej sploh nisem vedela za to revijo. Vsake nove številke se zelo razveselim in tako sem se tudi današnje. Ta revija mi je zelo všeč zaradi njenih šaljivih in prijetnih nalog. Kljub temu pa mislim, da bi bilo lahko še več nalog za nas osnovnošolce. Vprašujem se, zakaj dobimo to revijo tako pozno, čeprav je v njej zapisano: Rešitve pošljite do 15.1.1979. Kako, če sem jo pa prejela 12.1. ? Čeprav je prepozno, ti pošiljam rešitve.* Tako je, Nada, "korajža" velja. Rešitev je prispela pravočasno, ker vedno računamo tudi z morebitnimi zamudami pri odpošiljanju. Hvala ti. Želimo ti pogum pri reševanju nalog. Kar nisi mogla letos rešiti, boš gotovo rešila čez kakšno leto.

ALEKSANDER REJC iz Gaberja, ki obiskuje 8. razred osnovne šole v Tolminu, piše: *Na revijo sem naročen že od 6. razreda dalje. Od začetka mi pri reševanju sploh ni šlo, čeprav sem v matematiki imel vedno oceno prav dobro. Zdaj mi gre vedno bolje! Tako sem rešil tudi nalogo iz letošnje druge številke. Presek sem dobil šele danes, 13. januarja 1979.*

Ugotovil si, Aleksander, da je trening dobrodošel tudi v matematiki. Vztrajati je treba, da se ti odpre okno v svet matematike in da se naužiješ njene lepote. Pošlji nam vsako rešeno nalogo in ne samo pod rubriko Premisli in reši. Srečno!

ROMAN MAZI iz Ljubljane, sedmošolec na osnovni šoli Riharda Ja kopiča je napisal: *Vašo revijo naročam že drugo leto. Zanj sem se navdušil pri matematičnem krožku. Zelo mi je všeč in mi pomaga pri učenju. Koristna je predvsem za tekmovanja, saj je v njej mnogo nalog, ki so podobne onim s tekmovanj. Lahko pa bi imela več nalog za osnovnošolce.*

Hvala ti, Roman, za tvoje misli. Ugotovitev o pomanjkanju nalog za osnovnošolce je že tako pogosta, da nam je hudo, ker še nismo mogli ustreči našim najmlajšim bralcem. Takih nalog nam resnično primanjkuje. Vaš krožek je videti delaven in morda bi našli tudi pri vas kakšno zakladnico nalog, primernih za Presek, kot je to storila naša bralka Olja. Roman, srečno na tekmovalnih za Vegova priznanja! Piši nam še kdaj!

ERIK RUPNIK iz Ljubljane piše: *Kot edini turostni časopis v Sloveniji mora imeti zelo pisano vsebino, da bi ugajal najširšemu krogu bralcev. To nalogo Presek po mojem izpolnjuje, če sodimo po pisemih bralcev. Tudi mojemu okusu za zdaj ustreza. Opažam, da je sestavljen iz člankov in nalog, ki skušajo biti čim manj računski. To mi ugaja in s takim konceptom se popolnoma strinjam. Sam se najraje ukvarjam s kratkimi in duhovitimi nalogami, ki dajejo misliti bolj logično in katerih rešitve so po navadi zelo enostavne - pa je ravno zaradi te enostavnosti rešitev težja. Take so na primer naloge starih egipčanskih, grških in drugih matematikov, ki so se ohranile kot enkratne, in uganke.*

Glede nalog imam predlog, s katerim bi poživili delo krožkov, ki se vsaj na zunaj malo kaže. Natisnili bi posebne naloge, pri katerih bi morala sodelovati skupina ljudi in katerih rešitev bi imela tudi praktičen pomen. Na primer, opozorili bi na obseg onesnaževanja okolja, kot so storili člani krožka iz Žužemberka. Tako bi dobili krožki konkretne naloge, ki bi jih skupno reševali in bi sčasoma pridobile tekmovalni značaj. Najboljše rešitve bi objavili in po možnosti tudi nagradili. Kar v ostalem zadeva vsebino Preseka, pogrešam predstavitev velikih matematikov, fizikov in astronomov - kakšne drobne zgodbiče ali anekdote iz njihovega življenja. Obseg revije se mi zdi ravno pravi, zato pa bi lahko izhajala bolj pogosto.

Prav posebej se moramo zahvaliti za tako izčrpne misli v poslanem pismu. Hvala za pozdrave in obljubljam, da bomo o vseh rečeh razmišljali na naših sejah in veseli bomo vsake nove ideje. Hvala Erik!

- - -

OLJA KRPOVIČ iz Ljubljane obiskuje osnovno šolo Prule in nam je pisala takole: *Spoštovano uredništvo! Na Presek sem naročena že tri leta. List mi je zelo všeč. Je privlačne zunanosti, primerne formata in zanimive, pisane vsebine. Edino, kar me moti, je pomanjkanje nalog za osnovno šolo, predvsem za 5. in 6. razred. Prav zato sem se odločila in pobrskala po listkih z matematičnimi nalogami, ki si jih sama izmislim ali pa mi jih zastavljajo starši in sorodniki. Upam, da se bo katero dalo uporabiti. Bila bi zelo vesela, saj bi tako prispevala kamenček v mozaik, ki se imenuje Presek.*

Zanima me, kaj je z možnostmi za študij matematike, koliko časa traja šolanje, na katerih šolah, za kakšen poklic se pri tem usposobiš... Že vnaprej najlepša hvala za odgovor. Vse naj lepše želim uredništvu in sami reviji Presek! Naj le ostane tak, kakršen je!! Lepe pozdrave od zveste bralke Olje.

Draga Olja, hvala predvsem za poslane naloge, ki bodo gotovo izpolnile želje naših najmlajših bralcev. Upamo, da imaš doma še bogato zakladnico "kamenčkov" za naš Presek. Glede nadaljnega študija se boš verjetno najhitreje pogovorila s svojo učiteljico matematike. Hvala za lepe želje. Tudi mi vsi ti želimo uspeha na poti skozi matematiko.

- - -

MILENA ŠTORM iz Kranja se nam je predstavila kot gimnazijka I. letnika in pravi: *Presek sem naročevala že v osnovni šoli in mi je zelo všeč. Pošiljam vam rešitve Premisli in reši. V želji, da vam bo to v vzpodbudo, vam še vnaprej želim veliko delovnih uspehov. Tovariški pozdrav.*

Hvala, Milena, da si nam v pismu razodela že svojo dolgoletno naklonjenost. Želimo ti uspehov pri študiju in naj Presek ostane tudi vnaprej tvoj prijatelj.

- - -

IRENA GRABRIJAN je poslala naslednje pismo iz Črnomlja: *Dragi Presek! Oglašam se ti prvič. Kljub temu, da sem šele drugo leto vaša naročnica, mi Presek zelo ugaja. Zelo rada berem rubriko Pisma bralcev in tudi druga poglavja ne spregledam. Vašo revijo bom še vnaprej z veseljem naročala in prebirala ter reševala naloge. Pošiljam vam rešeno nalogo, ki ste jo zastavili v rubriki Premisli in reši.*

Hvala za izraženo zvestobo, draga Irena. Tudi mi ti obljubljamostati zvesti, radi bomo prisluhnili svojim bralcem in skupaj z njimi urejali naš Presek. Pozdravljena!

- - -

BRANKA KUŽNIK, učenka osmega razreda o.š. v Trebnjem, se nam je oglasila prvič in pravi: *Presek skrbno prebiram že tretje leto. Večino nalog, ki jih objavite, ne znam rešiti, ker so pač namenjene srednješolcem. Želim, da bi v Preseku, ki je vse kakor tudi revija osnovnošolcev, objavili več nalog, ki bi bile za nas primerne. Želim tudi, da bi v rubriki Premisli in reši zastavili reševalcem več nalog. Če je mogoče, prosim, da bi rok za dostavo rešitev podaljšali vsaj za nekaj dni, saj dobim Presek šele, ko je že prepozno za pošiljanje rešitev. Sicer pa mi je Presek zelo všeč in vam želim še mnogo uspehov pri urejanju te bogate revije.*

Branka, tvoje odkritosrčne misli so nam v veselje. Razmišljali bomo o številu nalog pri Premisli in reši in gotovo moramo rok za dostavo rešitev podaljšati. Sicer pa ne bodi v skrbeh, ker smo upoštevali tudi poznejše rešitve prav zaradi poštinih zamud. Branka, oglasi se še kaj. Srečno!

Matilda Lenarčič



PREPROSTA FIZIKA LETENJA

Najbrž se kdaj pa kdaj kdo od številnih potnikov na letalu vpraša, kako to, da letalo sploh leti. Katera sila drži letalo v zraku? Učbeniki fizike govorijo o sili, ki deluje na letalska krila in uravnovesi težo letala, navadno v zvezi z *Bernoullijevo enačbo* (okvir 1).

Iz enačbe, ki velja le približno pri neprevelikih hitrostih, sledi, da je tlak na kraju z večjo hitrostjo manjši, na kraju z manjšo hitrostjo pa večji. Letalsko krilo ima takšno obliko, da je hitrost delov zraka na zgornji strani krila večja kot na

Okvir 1

Bernoullijeva enačba:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1$$

sledi iz izreka o kinetični in potencialni energiji, če ga uporabimo za del tekočine. Enačba pravi, da je skupna gostota energije in dela konstantna. $(1/2)\rho v^2$ je gostota kinetične energije - ρ je gostota in v hitrost - $\rho g z$ je gostota potencialne energije - g je težni pospešek in z višina nad izbrano ničelno vodoravno ravnino.

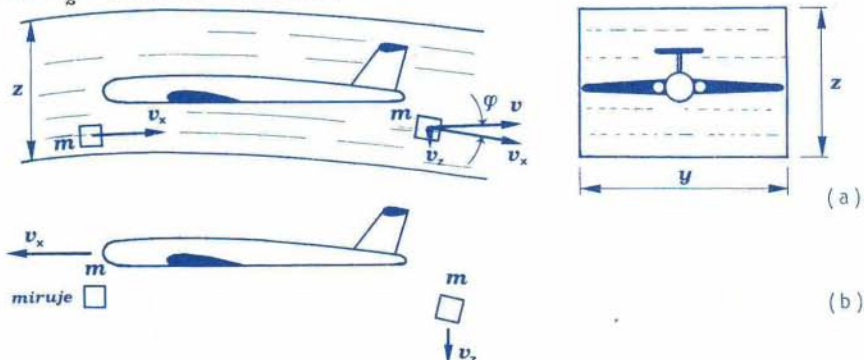
Tlak p je "negativna gostota dovedenega dela tlaka". ($-p\Delta V$ je dovedeno delo, ko premaknemo del tekočine s prostornino ΔV na kraju, kjer je tlak p .) Enačba se nanaša na točki 1 in 2 na izbrani tokovnici ali na dva prečna preseka cevi. (V drugem primeru je treba upoštevati povprečno hitrost in povprečni tlak po preseku.) Velja za tok nestisljive tekočine, če notranje sile ne opravijo nobene ga dela. Nekoliko površno rečeno preneha veljati Bernoullijeva enačba pri majhnih hitrostih, ko postane odločilno notranje trenje, in pri velikih hitrostih, recimo nekako pri polovici hitrosti zvoka, ko ne moremo več zanemariti stisljivosti zraka.

spodnji. Zato je tlak na zgornji strani manjši kot na spodnji. Razlika tlakov da rezultanto, ki deluje navpično navzgor. To je *prečna sila* ali *dinamični vzgon*; *prečna sila*, ker deluje prečno na smer gibanja, in *dinamični vzgon*, da ga ločimo od statičnega vzgona iz Arhimedovega zakona ("tekočina deluje na mirujoče potopljeno telo s silo, ki ima smer navpično navzgor in velikost teže izpodrinjene tekočine").

Prečno silo je mogoče pojasniti preprosteje in prepričljiveje kot s približno Bernoullijevo enačbo. Namesto te enačbe uporabimo *izrek o gibalni količini* (okvir 2).

Naj leti letalo s konstantno hitrostjo v_x v vodoravni smeri. Ker je hitrost konstantna, je rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na letalo, enaka nič. V vodoravni smeri deluje "potis na" *sila motorjev* in v nasprotni smeri enako velik *upor* (okvirja 3 in 4). Navpično navzdol deluje teža letala Mg in navpično navzgor enako velika prečna sila. (Statični vzgon, ki je več kot tisočkrat manjši kot teža, zanemarimo.)

Prečno silo pojasnimo najboljše, če si mislimo, da smo v letalu (Sl. 1a). Opazujemo del zraka (to je naš sistem). Zrak pred letalom ima v navpični smeri komponento hitrosti nič. Zrak za letalom pa ima komponento hitrosti v_z navpično navzdol. Po izreku o gibalni količini mora delovati letalsko krilo na zrak s silo F'_z navpično navzdol:



Sl. 1: Nastanek prečne sile v opazovalnem sistemu, v katerem miruje letalo (a), in v opazovalnem sistemu, ki miruje glede na Zemljo (b).

Okvir 2

Izrek o gibalni količini:

$$F \cdot t = mv_2 - mv_1$$

pravi, da je skupni sunek vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem, enak spremembi gibalne količine. m je masa sistema, v_2 hitrost po prenehanju konstantne sile F , ki deluje čas t , in v_1 hitrost, preden je začela sila delovati. Izrek o gibalni količini izpeljemo iz drugega Newtonovega zakona in velja splošno.

Okvir 3

Sila motorja. Opazujmo iz letala, ki leti s konstantno hitrostjo. Naš sistem je del zraka z maso m_1 , ki ga zajame motor, in del goriva z maso m_2 . Na začetku ima zrak hitrost v_x , gorivo pa miruje. Potem, ko gorivo zgori v zraku, zapustijo vroči izpušni plini z maso m_1+m_2 s hitrostjo v_0 šobo motorja. Iz izreka o gibalni količini sledi za silo F_x^s , s katero deluje motor na zrak in gorivo v smeri nazaj:

$$F_x^s \cdot t = (m_1 + m_2)v_0 - m_1v_x$$

Po zakonu o vzajemnem učinku je nasprotna ("reakcijska") sila vročih izpušnih plinov na motor, to je "potisna" sila motorja v smeri naprej

$$F_x = (m_1/t)(v_0 - v_x) + (m_2/t)v_0$$

m_2/t je masa goriva, ki ga porabi motor na sekundo, in m_1/t masa zraka, ki ga motor zajame na sekundo. Večinoma smemo zanemariti drugi člen. Enačba

$$F_x = (m_1/t)(v_0 - v_x) \quad (2)$$

je po obliki enaka enačbi (1) za prečno silo.

Motor DC-9 rabi na sekundo okoli 0,4 kg goriva in zajame na sekundo okoli 150 kg zraka ter izpihava vroče pline s hitrostjo 500 m/s. Za "potisno" silo motorja dobimo z enačbo (2)

$$F_x = 150 \text{ kgs}^{-1}(500 - 170) \text{ m/s} = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Masa goriva prispeva le $(m_2/t)v_0 = 0,4 \text{ kgs}^{-1} \cdot 500 \text{ m/s} = 200 \text{ N}$, kar je proti $5 \cdot 10^4 \text{ N}$ zares zanemarljivo. Seveda pa iz šobe motorja ne bi iztekali vroči plini s hitrostjo, večjo od v_x , če v motorju ne bi zgorevalo gorivo.

Skupaj imata po našem računu oba motorja DC-9 "potisno" silo $2F_x = 10^5 \text{ N}$. V resnici je ta sila nekoliko večja: $1,3 \cdot 10^5 \text{ N}$. Najbrž je bilo napak, da smo vzeli v_x za hitrost zraka, ki ga zajame motor. Tolikšno hitrost ima zrak daleč od letala. Tik pred motorjem pa ima zrak glede na letalo manjšo hitrost in je zato sila motorja večja od izračunane.

Za razliko od "reakcijskega" letala nosi raketa s sabo gorivo in oksidacijsko snov in ne zajema zraka iz okolice. Zato je potisna sila raketnega motorja

$$F_x = [(m_1 + m_2)/t]v_0$$

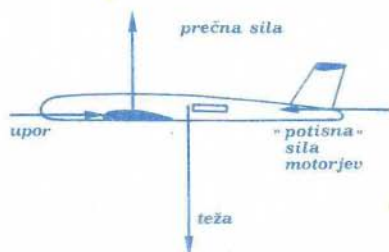
Okvir 4

Upor: Tlak v zastojni točki, v kateri tekočina pred oviro miruje, je po Bernoullijevi enačbi

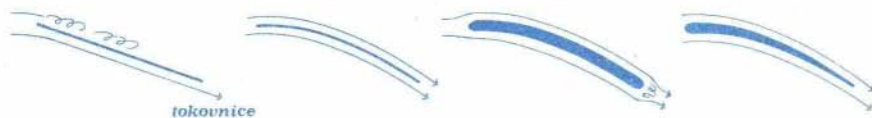
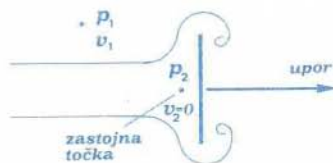
$$p_2 = p_1 + (1/2)\rho v_1^2$$

v_1 je hitrost tekočine v nemotenem toku glede na oviro (vseeno je, ali miruje tekočina in se giblje ovira ali pa miruje ovira in se giblje tekočina). Na sprednji strani ovire je tlak večji kot na zadnji strani. Rezultanta je sila, s katero deluje tekočina na oviro v smeri relativne hitrosti. Tako je upor približno sorazmeren z gostoto kinetične energije $(1/2)\rho v_1^2$. Odvisen je še od oblike telesa in je sorazmeren z njegovim čelnim presekom. Ta ugotovitev je vezana na veljavnost Bernoullijeve enačbe (glej okvir 1).

Sl. 2: Zunanje sile na letalo, ki enakomerno leti v vodoravni smeri.



Sl. 3: Upor zaradi zastojnega tlaka



Sl. 4: Letalsko krilo kot naprava, ki da zraku komponento hitrosti v smeri navpično navzdol. Oblika (a) povzroči zaradi nenadnih sprememb nastajanje vrtincev, oblika (b) sicer ne povzroči vrtincev, a ni dovolj trdna. Oblika (c) je dovolj trdna, a ima precejšen upor. Krilo (d) je trdno in ima majhen upor. Oblika (a) zadostuje za otroške zmaje, oblika (b) pa za zmaje, s katerimi se zmajarji spuščajo s hribov.

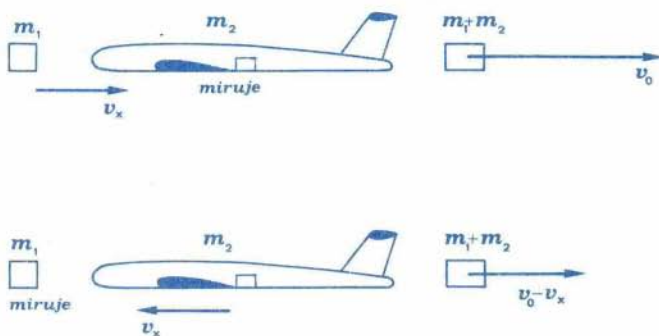
$$F_z^* \cdot t = mv_z - 0$$

m je masa zraka, na katerega deluje letalsko krilo. Po zakonu o vzajemnem učinku (3. Newtonovem zakonu: "če deluje prvo telo na drugo telo z dano silo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo") deluje zrak na krilo z nasprotno enako silo. Sila zraka na krilo

$$F_z = (m/t)v_z \quad (1)$$

deluje navpično navzgor.

Tako smo prečno silo pojasnili prepričljivo in preprosto. Razlaga ni omejena na majhne hitrosti. Njena šibka točka pa je v tem, da zrak, ki ga zajame letalsko krilo, nima ostre meje in vsi njegovi deli nimajo enako velike komponente hitrosti navpično navzdol. Zato je težko dobiti podatek za maso zraka, ki ga zajame krilo vsako sekundo. Za grobo oceno pa nismo v zadregi.



Sl. 5: Nastanek "potisne" sile v opazovalnem sistemu, v katerem miruje letalo (a), in v opazovalnem sistemu, ki miruje glede na Zemljo (b).

Vzemimo, da krilo pri vodoravnem letu letala preusmeri tok zraka za kot φ proti vodoravnici. Medtem ko priteče zrak na krilo z vodoravno hitrostjo v_x , odteče zrak s krila za kot φ odklonjen navzdol, tako da je komponenta hitrosti zraka navpično navzdol $v_x \varphi$ (tangens in sinus sta enaka ločno merjenemu kotu, če je kot zelo majhen; pri približnem računu smemo vzeti, da je vodoravna komponenta hitrosti zraka še naprej v_x). Krilo ni povsod enako nagnjeno proti vodoravnici, tako da je kot φ povprečni nagib krila in $v_z = v_x \varphi$ povprečna navpična komponenta hitrosti zraka. Nagib meri navadno okoli 40° . Pri nas uporabljajo največ potniška letala DC-9, ki pogosto letijo s hitrostjo* 600 km/h ali 170 m/s. Za ta primer dobimo za povprečno navpično komponento hitrosti zraka

$$v_z = v_x \varphi = 170 \text{ ms}^{-1} \cdot 4\pi/180 = 12 \text{ m/s}$$

Prečna sila (1) uravnovesi težo letala Mg , ki je pri DC-9 z maso okoli 50 ton okoli $5 \cdot 10^5 \text{ N}$. Iz enačbe $Mg = (m/t)v_z$ lahko izračunamo maso zraka, ki ga zajame krilo na sekundo:

$$m/t = Mg/v_z = 5 \cdot 10^5 \text{ N} / 12 \text{ ms}^{-1} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ kg/s}$$

Kot rečeno, je največja pomanjkljivost našega računa v tem, da zrak, ki ga zajame krilo, nima ostre meje in nima enake navpične komponente hitrosti. Zato smo dobili samo oceno, ki jo je treba sprejeti s kančkom nezaupanja.

Za zabavo pa računajmo še naprej. V višini* 8,5 km, v kateri DC-9 pogosto letajo, je gostota zraka samo še približno $0,4 \text{ kg/m}^3$ nasproti $1,2 \text{ kg/m}^3$ pri tleh. Maso zraka, ki ga zajame krilo, izrazimo z gostoto ρ in s prostornino kvadra:

$$m/t = \rho xyz/t = \rho v_x yz$$

$x/t = v_x$ je hitrost letala, y približno ustreza razponu kril in z je ocena za višino plasti zraka, ki ga zajame krilo. DC-9 ima razpon kril nekaj več kot 28 m, tako da sledi za višino plasti

$$z = (m/t) / \rho v_x y = 4,2 \cdot 10^4 \text{ kgs}^{-1} / 0,4 \text{ kgm}^{-3} \cdot 170 \text{ ms}^{-1} \cdot 28 \text{ m} = 22 \text{ m}$$

Ta ocena je še bolj sporna kot prejšnja, a po velikostni stopnji ji najbrž smemo zaupati. Hitro potniško letalo v višini okoli 10 km preusmeri plast zraka, ki sega kakih deset metrov pod letalo in približno toliko nad letalo.

Prepričali smo se, da je krilo naprava, ki dá zraku komponento hitrosti navpično navzdol. Zaradi tega je upor krila večji, kot bi bil, če krilo pri enaki hitrosti v_x ne bi dalo zraku nobene komponente hitrosti navpično navzdol. (Tedad pač letalo ne bi moglo leteti.) "Curek" zraka, ki ga krilo usmeri navzdol, dobi svojo energijo od motorjev. Ti morajo premagovati povečan upor in pri tem opravljati dodatno delo.

Prečno silo dobimo s podobnim računom kot "potisno" silo motor

* S tema povprečnima podatkoma računajo pri podjetju INEX-ADRIA, katerega letala letijo večinoma na srednjih progah. Podjetju INEX-ADRIA se zahvaljujemo za prijaznost.

jev. Reakcijski motor izpihava curek vročih plinov v vodoravni smeri nazaj, krila pa "oddajajo" "curek" zraka s komponento hitrosti navpično navzdol. Seveda zaradi notranjega trenja (viskoznosti) zraka dovolj daleč za letalom in dovolj pod njim ni mogoče zaznati ne vodoravnega curka ne navpičnega "curka".

Tudi *letalski vijak* izkorišča prečno silo. Vijak z vodoravno osjo zajema zrak in ga potiska v smeri nazaj. Nasprotna sila tega "curka" je "potisna" sila motorja. Helikopter izkorišča prečno silo na vijak z navpično osjo. Vijak zajema zrak in ga potiska navpično navzdol. Nasprotna sila tega "curka" uravnove si teži helikopterja.

Medtem ko smo tu obravnavali le vodoravni let letala s konstantno hitrostjo, bi bilo zanimivo premisliti, kaj vse se dogaja ob vzletu ali pristanku in ob zavijanju. Zanimivo bi bilo tudi premisliti, kako je z ravnovesjem navorov. Prečna sila prejme na krilu in na krilu na repu, "potisna" sila v motorjih, u upor na površini letala, za teži pa si lahko mislimo, da prijeme v težišču letala. Po površini porazdeljeni sili bi bilo treba približno nadomestiti s silama z danim prijemališčem: za upor v težišču čelnega preseka letala, za prečno silo pa v težiščih tlora krila in krila na repu. Ker mora biti navor vseh sil glede na težišče letala enak nič, bi lahko po tej poti okvirno pojasnili namestitve kril in motorjev.

Tukaj nam je šlo samo za fizikalne osnove. Zato smo se lahko zadovoljili z izrekom o gibalni količini. Načrtovalci letal pa morajo upoštevati vrsto drugih stvari, med njimi tudi porazdelitev tlaka po površini letala. V prvem približku si pri tem pomagajo z Bernoullijevo enačbo, podrobnejše podatke pa dobijo z merjenji na modelih v vetrovniku.

Janez Strnad

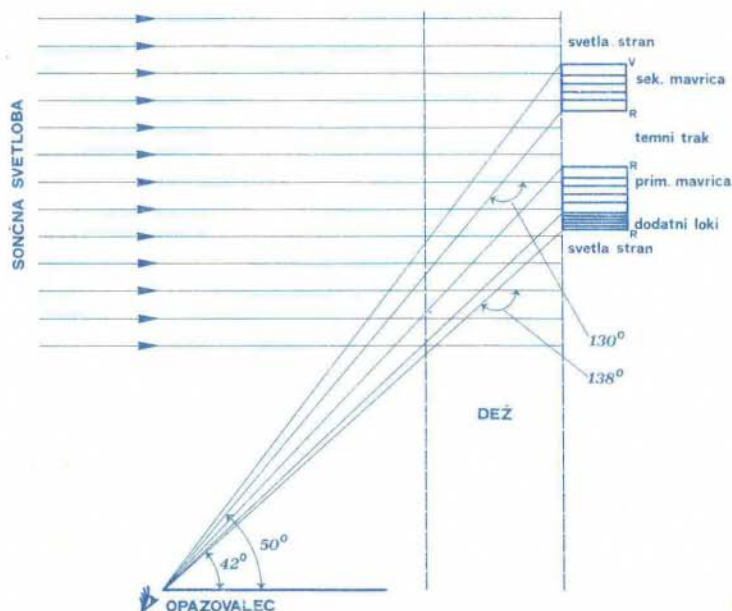
LITERATURA:

K. Weltner, *Der aerodynamische Auftrieb in didaktischer und physikalischer Sicht*, Naturwissenschaft im Unterricht, Physik-Chemie 26 (1978) 65.

MAVRICA

Spomladi in poleti lahko mnogokrat po nevihti opazujemo prelepe mavrične loke, ki se bočijo na nebu nad pokrajino, obsijano od sonca. Mavrico si lahko "naredimo" tudi sami, ko ob sončnem vremenu zalivamo vrt ali peremo avtomobil. Celo takrat, ko vržemo v vodo težak kamen in voda brizgne visoko v zrak in se razprši, jo zagledamo. Običajno nas mavrica prevzame, radi občudujemo njene lepe, čiste barve. Med preprostimi ljudmi so na stale številne vraže, ki človeku napovedujejo srečne dogodke, če na določenem kraju zagleda mavrico. Oglejmo si pojav podrobneje!

Mavrico vidimo takrat, ko je v zraku mnogo vodnih kapljic, na katerih se siplje sončna svetloba, ki prihaja opazovalcu izza hrbta (Sl. 1). Pod kotom okoli 42° glede na vodoravnico vidi



Slika 1.: Sončna svetloba se na dežnih kapljicah siplje. Svetloba, ki pride v oko opazovalca iz primarnega loka mavrice, se odkloni za približno 138° od prvotne smeri. Za sekundarni lok meri ta kot okoli 130° . Kota 138° in 130° imenujemo mavrična kota.

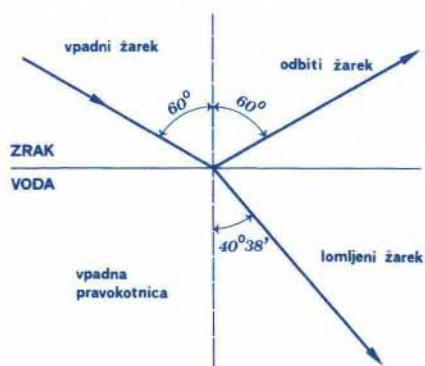
opazovalec *primarni mavrični lok* z izrazitimi barvami, ki si od spodaj navzgor sledijo takole: vijolična, modra, zelena, rumena, oranžna in rdeča. Nad primarnim lokom, pod kotom okoli 50° se vidi nekoliko šibkejši, širši *sekundarni mavrični lok*. Pozorni opazovalec ugotovi, da je zaporedje barv v tem loku obratno kot v primarnem. Del neba med lokoma je temnejši, imenujemo ga *temni trak*. Ob ugodnih okoliščinah se na spodnjem robu primarnega mavričnega loka pokaže še nekaj ozkih in šibkih komaj opaznih *dodatnih lokov*.

Nastanek mavričnih lokov si bomo razložili z odbojnim in lomnim zakonom za svetlobo.

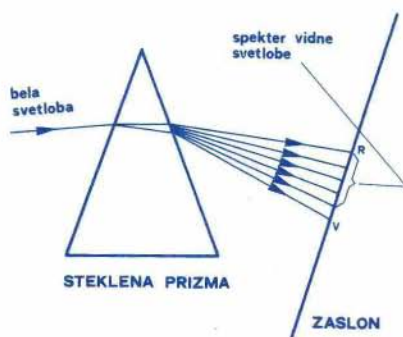
Ponovimo oba zakona. Slika 2 kaže curek svetlobe, ki vpada na mejo med zrakom in vodo. Del svetlobe se na tej meji odbije, del pa vstopi v vodo. Odbojni zakon pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu in da leži odbiti žarek v ravnini, ki jo določata vpadni žarek in vpadna pravokotnica. Delež odbite svetlobe se veča z večanjem vpadnega kota. Curek svetlobe, ki prehaja v vodo, na meji spremeni smer. V narisanim primeru, ko gre svetloba iz zraka v vodo, je lomni kot manjši od vpadnega. Tudi pri prehodu iz vode v zrak se svetloba lomi; takrat je lomni kot večji od vpadnega. Zvezo med vpadnim in lomnim kotom za dani par sredstev povemo z lomnim zakonom. Razmerje med *sinusom* vpadnega kota in *sinusom* lomnega kota je konstantno za izbrani par snovi in je enako razmerju med hitrostma svetlobe v teh snoveh. Pri natančnem opazovanju vidimo, da je lomljeni curek na notranjem robu obarvan rdeče in na zunanjem modro. To je zato, ker je lomni količnik vode za vsako barvo svetlobe drugačen. Najmočnejše se lomi vijoličasta, najmanj pa rdeča svetloba. Še lepše vidimo to, če pade ozek curek bele sončne svetlobe na stekleno prizmo (sl. 3). Na zaslonu, postavljenem za prizmo, vidimo obarvan trak, v katerem si barve sledijo v zaporedju, ki ga že poznamo iz opisa mavrice. Ta obarvani trak imenujemo spekter sončne svetlobe. Poskus nam kaže, da sončna svetloba ni enobarvna, ampak da vsebuje vse mogoče *spektralne* barve. Pojav, da se svetloba zaradi loma razcepi v svoje sestavine, imenujemo *razklon* ali *dispersija*.

Vzemimo, da na kapljico vpada enobarvna rumena svetloba z valovno dolžino okoli 5600 Å. Slika 4 kaže, kaj se zgodi s svetlobo, ki jo prestreže kapljica. Del svetlobe se odbije na površju kapljice, del pa vstopi v kapljico in se znotraj večkrat odbije. Pri vsakokratnem vpadu na mejo med vodo in zrakom preide del svetlobe v zrak. Zanimala nas bo svetloba, ki preide v zrak po enem, dveh, treh ali večjih zaporednih odbojih znotraj kapljice. Število notranjih odbojev bomo imenovali *red* izstopajočega curka. Poglejmo žarek, ki po enkratnem odboju v notra-

njosti zapusti kapljico. Kot, za katerega se odkloni žarek glede na vpadni žarek - imenovali ga bomo *sipalni kot* - je odvisen od *vpadnega parametra*, to je od pravokotne razdalje med žarkom in vzporednim žarkom skozi središče kapljice. Če je razdalja, to je vpadni parameter, enaka nič, je sipalni kot enak 180° ; žarek potuje skozi središče kapljice in se odbije nazaj proti Soncu. Ko vpadni parameter raste, se sipalni kot najprej zmanjšuje, nato pa začne spet naraščati. Okoli žarka, ki se odkloni za okoli 138° , je kot skoraj neodvisen od parametra. Vsa svetloba, ki vpada na kapljico z vpadnimi parametri v okolici žarka z najmanjšim odklonom, zapusti kapljico v isti smeri. Zato je v tej smeri svetloba zgoščena - povečana je gostota svetlobnega toka. Žarku z minimalnim odklonom pravimo *mavrični žarek*, ustreznemu kotu pa *mavrični kot*. Če bi opazovalec zrl v nebo pod kotom okoli 42° glede na vodoravnico, bi vpada-

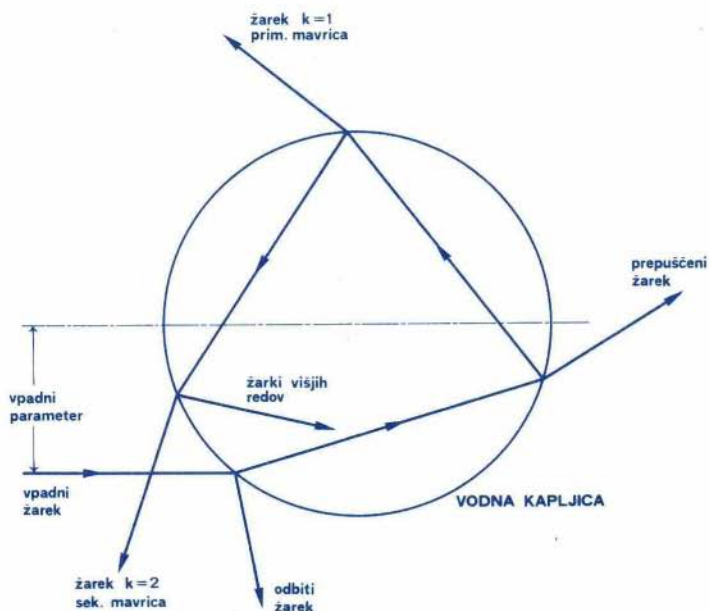


Slika 2.: Odboj in lom svetlobe na meji med zrakom in vodo sta osnovna vzroka za nastanek mavrice. Lomni kot je določen z vpadnim kotom in lastnostmi snovi, v katero vstopa svetloba. Snov z večjim lomnim količnikom močnejše lomi svetlobo. Lomni količnik snovi je za vsako barvo svetlobe nekoliko drugačen.



Slika 3.: Sončna svetloba, ki jo imenujemo tudi bela svetloba, se pri prehodu skozi stekleno prizmo dvakrat lomi (pri vstopu in izstopu). Na zaslonu se pojavi njen spekter, ki dokazuje, da je sončna svetloba sestavljena.

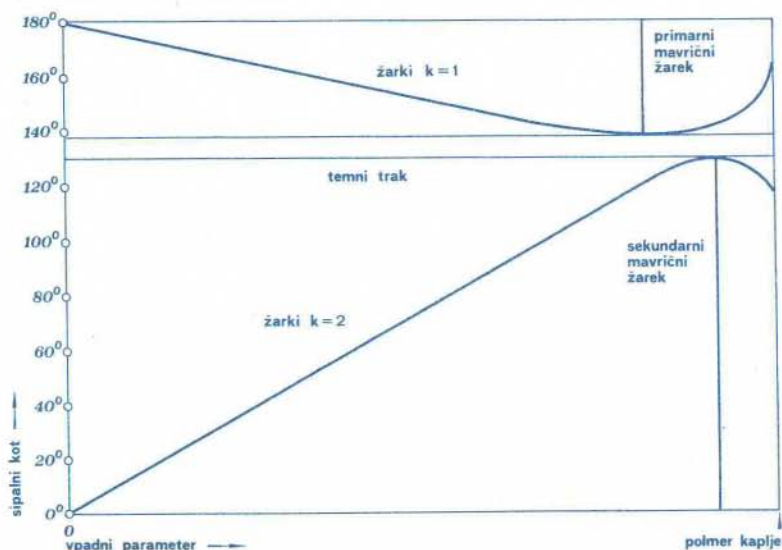
la v njegovo oko ravno ta zgoščena svetloba. Del neba, od koder bi prihajala, bi se mu zdel svetlejši. Videli pa smo, da sončna svetloba vsebuje vse spektralne barve, za katere je občutljivo človeško oko. Pri vsakem lomu na meji kapljice se svetloba razkloni. Posledica tega je, da pripada vsaki barvi nekoliko drugačen mavrični kot. Za rdečo svetlobo meri ta kot $137,6^{\circ}$, za modro pa $139,4^{\circ}$. Med tema vrednostima so mavrični koti za ostale barve sončnega spektra. K jasnosti mavričnih barv pripomore tudi odbojnost vode, ki je tudi odvisna od barve in vpadnega kota. Primarna mavrica je na vrhu (na zunanji strani) rdeča. Siplalni kot za rdečo svetlobo je $137,6^{\circ}$; ostalih barv pa v rde



Slika 4.: Svetloba, ki jo vodna kapljica prestreže, se na meji zrak-voda odbija in lomi. Narisane so mogoče poti svetlobnih žarkov. Vpadni parameter vsakega žarka določa kot, pod katerim kapljica siplje svetlobo. Mavrico tvorijo tisti žarki, ki se sipljejo proti opazovalcu. Ta je na tleh med Soncem in kapljicami.

čem področju loka skoraj ni. Notranji lok primarne mavrice je modro obarvan. Od tam prihaja v oko svetloba, ki se siplje pod kotom $139,4^{\circ}$. Poleg modre vsebuje tudi majhne primesi ostalih barv. Med rdečim in modrim delom mavričnega loka se pojavijo še ostale barve, vsaka pod svojim mavričnim kotom. Vidimo barvo, ki je v izbrani smeri najmočnejša.

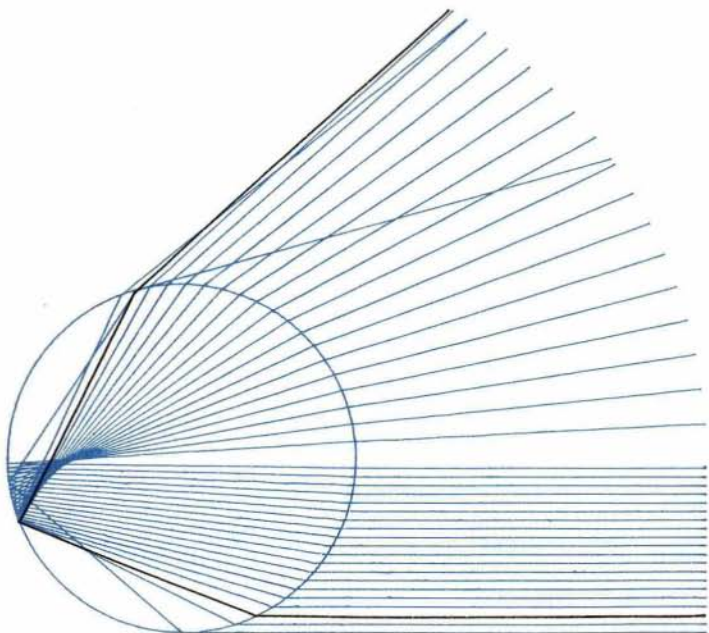
Tudi sekundarna mavrica nastane na podoben način, le da je pri njej mavrični žarek pri največjem sipalnem kotu, ki meri okoli 130° . Svetloba, ki oblikuje sekundarno mavrico, se v kapljicah dvakrat zaporedno odbije. Mavrica je zato manj svetla in tudi nekoliko širša od primarne. Na svetlem ozadju jo težje opazi-



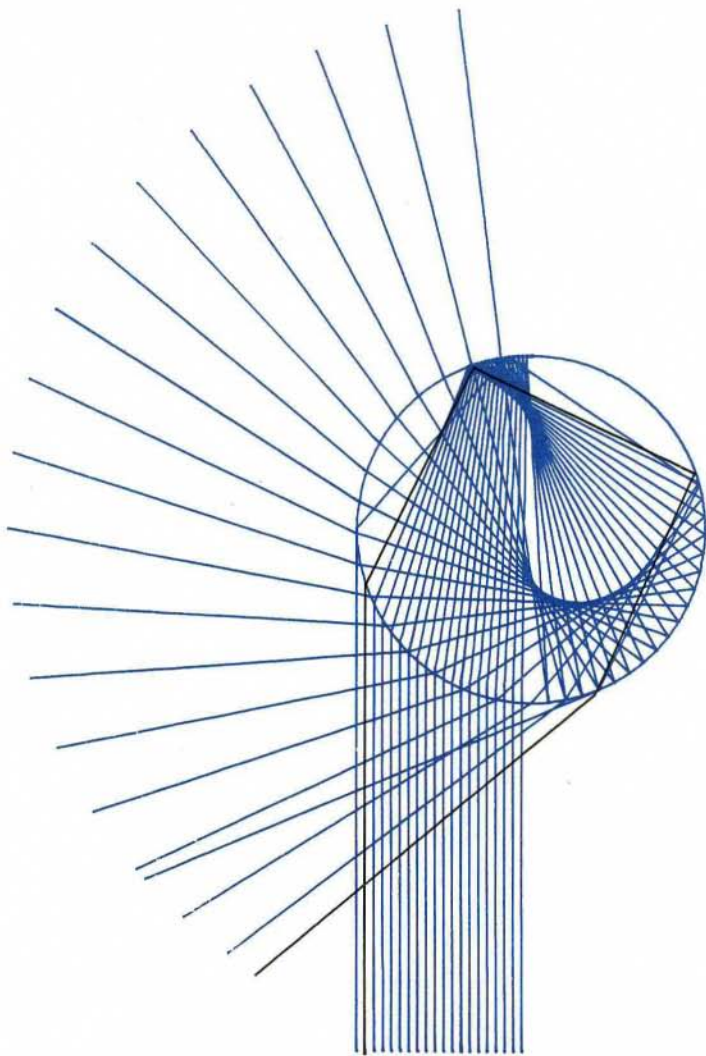
Sl. 5.a.: Na grafu vidimo odvisnost sipalnega kota od vpadnega parametra za žarke reda $k=1$ in $k=2$. Minimum na gornji krivulji ustreza mavričnemu kotu primarne mavrice, maksimum na spodnji krivulji pa mavričnemu kotu sekundarne mavrice. Čisto slučajno - igra narave - je pri teh mavričnih kotih jakost sipane svetlobe za vsako barvo, vsebovano v sončni svetlobi, nekoliko drugačna, kar pravzaprav omogoči, da te barve izstopajo iz ozadja. Ta različnost sipanja za vsako barvo je tudi vzrok, da je mavrica na modri strani nekoliko svetlejša.

mo, ker moti svetloba, ki se odbija na površju kapelj. Med mavricama, to je med kotoma 138° in 130° , ni sipane svetlobe (Sl. 5). Zato je nebo med mavricama temnejše od okoliškega neba.

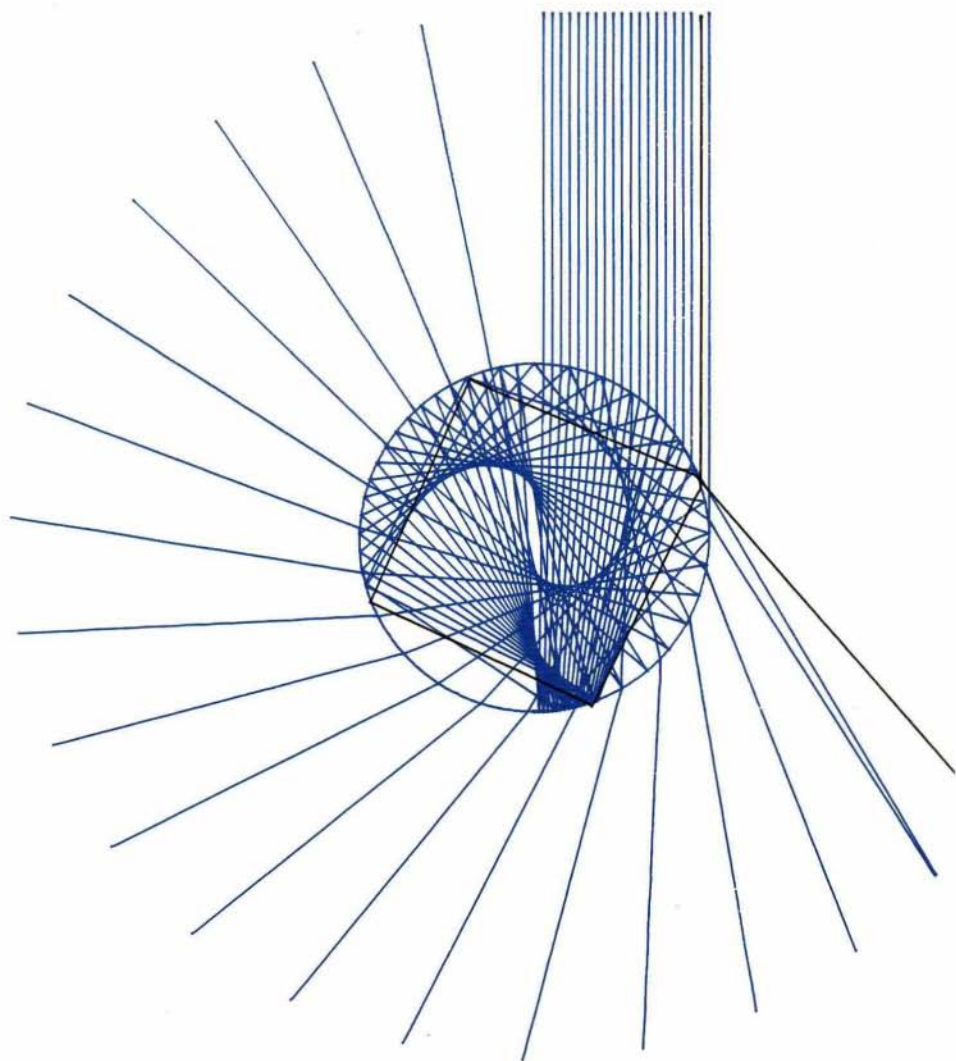
Svetloba se v notranjosti kapljic lahko tudi večkrat odbije. To vodi do nastanka mavric višjega reda ($K = 3, 4, 5, \dots$), ki so tudi posejane po nebu. Če bi te mavrice ne bile prešibke zaradi številnih notranjih odbojev, bi se opazovalcu nudila po ne-



Sl. 5.b.: Nastanek primarne mavrice. Najmanjši odklon od smeri vpadle svetlobe doživi žarek, narisani z drugo barvo. V okolici mavričnega žarka je gostota svetlobnega toka, ki izstopa iz kapljice, največja.



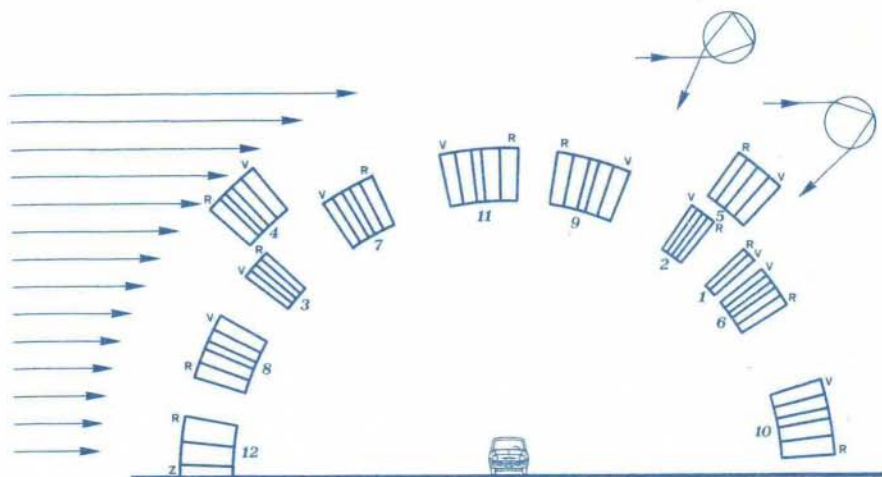
Sl. 5.c.: Svetloba, ki se v kapljici dvakrat zaporedoma odbije, povzroči nastanek sekundarne mavrice. Gostota svetlobnega toka, izhajajočega iz kapljice, je zdaj največja v okolici žarka, ki se najbolj odkloni od prvotne smeri.



Sl. 5.č.: Del vpadle svetlobe se v kapljici trikrat zapored odbije, kar vodi do nastanka mavrice tretjega reda ($k = 3$).

vihti čudovita slika. Videl bi pisan razpored mavričnih lokov, celo takrat, ko bi gledal proti Soncu. Slika 6 kaže razpored mavric za prvih nekaj redov. Za mavrice višjih redov so tudi vpadni koti mavričnih žarkov večji, zato se na kapljicah svetloba že pri vpadu močnejše odbija kot pri primarni in sekundarni mavrici. Kljub temu bi nekatere od teh mavric lahko opazovali v naravi, če ne bi motila odbita svetloba in svetlost neba v ozadju.

Z uporabo lomnega in odbojnega zakona svetlobe smo razložili nastanek mavrice. Toda mnogo vprašanj je ostalo še odprtih. Prav nič nismo povedali o dodatnih mavricah pod primarnim lokom, pa tudi o tem ne, zakaj so ti dodatni loki bolje vidni na vrhu mavrice kot spodaj in zakaj potem, ko dež pojenjuje, postaja mavrica šibkejša, dokler se ne stopi z ozadjem. Odgovor



Slika 6.: Če je Sonce na horizontu, bi opazovalec videl takšen razpored mavric (do $k=12$). V resnici vidimo na nebu le mavrice prvega in drugega reda, mavric višjih redov pa ne, ker so prešibke. Za Sonce višje na nebu se razpored mavric zavrti v smeri vrtenja urinega kazalca. Razdalja med opazovalcem in kapljicami ni pomembna, meri lahko nekaj m do nekaj km. Mavrice višjih redov lahko opazujemo v poskusu, ki je v članku opisan.

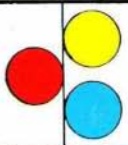
na ta vprašanja moramo poiskati s pomočjo drugih teorij o naravi svetlobe, geometrijska optika tu ne da odgovora.

Zdaj, ko smo izvedeli toliko novega o mavrici, bi radi tudi kaj preverili. S preprosto napravo a z velikim potrpljenjem lahko v dobro zatemnjenem prostoru opazujemo mavrico prvih dveh in tudi višjih redov, tja do trinajstega ali še celo več, na eni sami vodni kapljici. Potrebujemo diaprojektor in kartonasto škatlo. V škatlo zavrtamo ozko luknjico, ki jo osvetlimo s projektorjem, da dobimo ozek curek svetlobe. V curek postavimo kapljico vode, ki se je nabrala na koncu povoskane žice. Z zaslonko zastavimo curek svetlobe, da je osvetljena le polovica kapljice. Z nekaj truda in iznajdljivosti se lahko z dodatno zaslonko znebimo moteče odbite svetlobe. Mavrice, ki izhajajo iz kapljice, spoznamo po bleščečih barvah na kapljici. Še bolje bomo opazovali, če uporabimo pri opazovanju daljnogled. Poskus lepše uspe z večjimi kapljicami, s polmerom 1 mm ali več. Opazovanje mavric lahko ponovimo tudi s kapljami drugih kapljev, na primer s kapljo sladkornega sirupa, ki ima večji lomni količnik kot voda. Mavrični koti, ki jih izmerimo v tem primeru, so nekoliko drugačni od tistih, ki jih dobimo z vodnimi kapljami. Ko iz kapljice sirupa izpareva voda, se povečuje lomni količnik sirupa, zato se spreminja razpored mavric.

Mavrice nekaj prvih redov lahko opazujemo tudi na bolj preprostem način. Skozi ozko režo pravokotne oblike z močnim svetlom posvetimo na vodni curek, ki počasi izteka iz vodovodne pipe. Reža naj bo vzporedna s curkom. S prostim očesom z razdalje okoli 1 m lahko opazujemo mavrice, če je prostor zatemnjen.

Želimo vam veliko zabave in uspehov pri poskusih. Veseli bomo, če nam boste pisali o svojih uspehih. Učitelja lahko prosite, da vodni curek ali kapljo osvetli s svetlobo iz laserja. Ta svetloba je seveda enobarvna. Tudi "mavrice" bodo enobarvne, pri vsaki pa boste lahko opazovali dodatne loke. Mogoče si jih boste poskušali sami razložiti.

Fedor Tomažič



NOVE KNJIGE

LEKSIKON CANKARJEVE ZALOŽBE FIZIKA, priredil in strokovno uredil Janez Strnad, Cankarjeva založba in Društvo matematikov, fizikov in astronomov, 1979. 265 str. Cena 120.-din (96.-din).

Leksikon Cankarjeve založbe FIZIKA vsebuje bogato zalogo fizikalnih pojmov predvsem iz srednješolske fizike, pa tudi iz različnih področij sodobne fizike, kot npr. fizike atomov, atomskih jeder in delcev, ki presegajo srednješolski okvir. Kot je rečeno v predgovoru, so pojmi razloženi le na kratko, prikazane pa so tudi zveze med sorodnimi pojmi. Pri tem se skuša avtor skrbno izogniti polresnicam in možnostim, da bi razlaga bralce kakorkoli zavedla. Čeprav pokriva leksikon zelo obširno področje fizike, ne more nadomestiti učbenika, saj je v fiziki razumevanje pojavov in zakonov pomembnejše od definicij. Pač pa bo leksikon v veliko pomoč vsem tistim, ki bi si radi le osvežili spomin na kak pozabljen pojem, ali pa bi se radi o njem le okvirno poučili. Prav gotovo se bodo leksikona zelo razveselili vsi srednješolci, ki se bodo v usmerjenem izobraževanju bolj samostojno lotevali fizikalnih problemov, pa jim bo leksikon lahko služil tudi kot nekakšen vodič po fiziki. Razumljiv način pisanja in veliko nazornih slik bo prav gotovo pritegnilo k branju tudi osnovnošolce. Vsem mladim fizikom pa bo leksikon koristil tudi pri reševanju nalog iz fizike, saj je v njem zbranih precej enačb.

Metka Luzar

