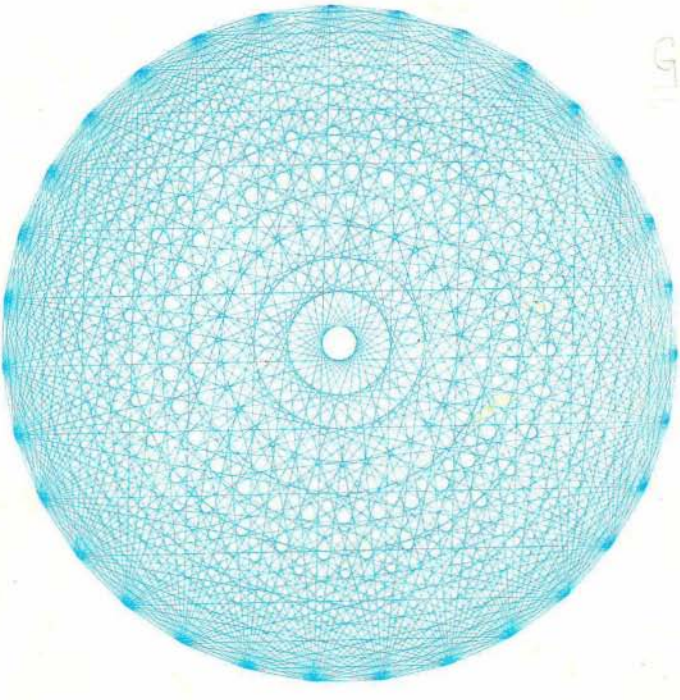
presek

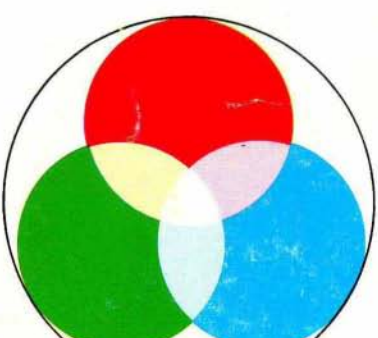
1

VI
1978-79

GRAFI



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME



IZDAJA DMFA SRS

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
6 (1978/79) ŠT. 1, STR. 1 - 64

V S E B I N A

UVODNIK

Dragi bralci!

Na začetku novega šolskega leta, ki je hkrati tudi začetek novega letnika Preseka, vsem prav lep pozdrav.

Uredniški odbor je že velikokrat premleval, kako izpolniti vaše želje, da bi dobili večje število Presekov na leto. Dvakrat smo to rešili tako, da smo natisnili 5. številko z zaokroženo tematiko v polnem obsegu, zato pa smo morali skrčiti obseg ene od ostalih štirih številk, da smo rešili finančno plat tako povečanega obsega letnika. Taka rešitev ni bila povsem povšeč niti vam niti nam! Eno dobro stran pa je le imela: domislili smo se, da bi poskusili nadaljevati izdajanje vsebinsko enotnih tekstov, ki bi jih združili v zbirko Presekova knjižnica π.

V VI. letniku Preseka želimo izdati 4 številke običajnega Preseka v polnem obsegu in eno številko z vsebino, ki spada v Presekovo knjižnico π. Da bi uresničili ta program, smo morali poseči malo globlje tudi v vaš žep, dragi bralci. Letno naročnino smo morali rahlo zvišati in bo tako za skupinska naročila na šolah po 32 dinarjev, individualni naročniki lahko dobijo letnik Preseka za 40 dinarjev, cena posamezne številke pa je 10 dinarjev.

Kot običajno smo poslali prvo številko Preseka vsem lanskim naročnikom. Aktive matematikov in fizikov na osnovnih in srednjih šolah in posameznike prosimo, da nam z naročilnico, ki je natisnjena na strani 36 , sporočijo, koliko izvodov Preseka naročajo. Tako vam bomo lahko v najkrajšem času poslali še dodatne izvode, če se je letos dvignilo na vaši šoli število naročnikov Preseka.

Zvonko Trontelj

ASTRONOMIJA

PEŠČENA ZRNCA V ARHIMEDOVEM VESOLJU

Danes cenimo radij vesolja na kakih deset milijard svetlobnih let ali 10^{26}m. Pravi pojem o velikosti vesolja izvira pravzaprav šele iz dvajsetih let našega stoletja. Prej so imeli vesolje za mnogo manjše. Že od nekdaj pa je nudilo vesolje obilo možnosti za računanje z velikimi števili. Tukaj nas ne bo zanimala velikost vesolja ali razvoj pogledov na vesolje, napravili bomo le nekaj zabavnih računov z velikimi števili.

Med prvimi, ki so poskusili določiti velikost vesoljskih teles in njihovo oddaljenost in tako dobiti predstavo o velikosti vesolja, so bili grški astronomi. Med njimi velja omeniti Eratostena, ki je živel v tretjem stoletju pred našim štetjem. Z njegovimi podatki si je pomagal njegov sodobnik Arhimed. Razdaljo do krogle zvezd stalnic je ocenil na 10^{16} m ali približno na eno svetlobno leto. Bližnje zvezde so zares oddaljene več svetlobnih let (najbližja - Proksima v ozvezdju Kentavra - 4,3 svetlobnega leta), a Arhimedov podatek za velikost vesolja je bil mnogo premajhen.

V nekem delu se je Arhimed namenil izračunati, s kolikšnim številom peščenih zrnc bi popolnoma napolnili vesolje. Za radij zrnca je vzel stotinko milimetra in se vprašal, koliko takih zrnc bi šlo v kroglo zvezd stalnic brez vmesnih prostorov. Prostornina krogle je sorazmerna s kubom radija, zato je število peščenih zrnc

$$(10^{16}\ \mathrm{m}/10^{-5}\ \mathrm{m})^3 = 10^{63}$$

Uporabimo Arhimedov podatek za nekaj bolj sodobnih računov.

Vzemimo, da je gostota peska 3 g/cm^3. Ker je prostornina zrnca $4\pi(10^{-5}\ m)^3/3$ približno $4.10^{-15}\ m^3$, je njegova masa $3.10^3\ kgm^{-3}.4.10^{-15}$ kg ali približno 10^{-11} kg. Masa peščenih zrnc v krogli zvezd stalnic bi bila tedaj $10^{63}.10^{-11}$ kg = = 10^{52} kg. Vzemimo, da bi vesolje s to maso sestavljal sam vodik. V 1 kilogramu vodika je 6.10^{26} atomov. V vesolju bi bilo tedaj $6.10^{26}.10^{52} = 6.10^{78}$ ali približno 10^{79} atomov vodika. Današnji astronomi cenijo, da ustreza masi vesolja okoli 10^{80} vodikovih atomov. Račun z Arhimedovim podatkom da čisto sprejemljiv rezultat. Zares je bilo Arhimedovo vesolje mnogo premajhno, a pri računanju največjega možnega števila peščenih zrnc smo ga v mislih izpolnili z gosto snovjo. Zato izračunana masa ni daleč od današnje ocene, ki upošteva, da je povprečna gostota snovi v vesolju zelo majhna.

Arhimed je računal največje možno število peščenih zrnc v vesolju kot vajo v računanju z velikimi števili. Stari Grki, ki še niso poznali desetiškega številskega sestava, so namreč imeli težave pri računanju z velikimi števili. Do miriade, po naše do deset tisoč ali 10^4, je šlo brez težav in tudi do miriade miriad, po naše sto milijonov ali 10^8, se ni zatikalo. Naprej pa je štel, kakor je kdo vedel in znal. Arhimed si je izmislil svoj številski sestav, v katerem je števila podajal s tremi podatki, po naše

$$aM^{2[(r-1)+(p-1)M^2]}$$

To preberemo kot a enot r-tega reda p-te periode. Pri tem označuje M miriado, $M = 10^4$. Premer krogle zvezd stalnic v stadijih je sto miriad enot drugega reda prve periode, torej a = = $100M = 10^6$, $r = 2$ in $p = 1$ ali $10^6.10^{8(2-1)} = 10^{14}$. Ker je stadij nekaj manj kot dvesto metrov, je premer krogle zvezd stalnic približno 2.10^{16} m. Največje mogoče število peščenih zrnc v vesolju je tisoč miriad enot osmega reda prve periode, torej $a = 1000M = 10^7$, $r = 8$ in $p = 1$ ali $10^7.10^{8(8-1)} = 10^{63}$.

Priznati moramo, da je današnje pisanje velikih števil z desetičnimi eksponenti mnogo preprostejše.

Janez Strnad

KAKO DALEČ JE DO OBZORJA ?

Količine, ki so povezane z iskano razdaljo do obzorja, so narisane na sliki, kjer pomenijo posamezne črke:

AB = AD = r zemeljski polmer $\approx 6{,}4.10^6$ m (zaradi enostavnosti vzamemo, da leži točka D na morski gladini);

BC = v višino opazovalca ali podlage in opazovalca nad morsko gladino (opazovalčevo oko je v točki C);

CD = x iskano razdaljo.

Najbrž ni treba pripomniti, da je slika močno pretirana. AB je na njej le kakih petkrat večja od BC. V resnici je AB običajno od tisoč do milijonkrat večja od BC (tisoč v primeru da je BC višina visokega hriba, milijon v primeru, da se opazovalec razgleduje z morskega brega).

Tangenta in polmer v točki D sta seveda pravokotna. Velja torej Pitagorov izrek:

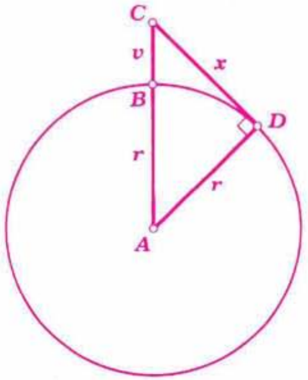
$$CD^2 = AC^2 - AD^2 \qquad \text{ali} \qquad x^2 = (r+v)^2 - r^2$$

če to razstavimo, dobimo

$$x^2 = (r+v+r)(r+v-r) = (2r+v)v$$

Ker je $v \ll r$, ga smemo iz vsote v oklepaju izpustiti in dobimo

$$x^2 = 2rv \qquad \text{ali} \qquad x = \sqrt{2rv} \qquad (1)$$



Vzemimo, da si 1,8 m visok opazovalec moči stopala v obrežni morski vodi. Iz (1) sledi za iskano razdaljo do obzorja

$x = \sqrt{2.6{,}4.10^6.1{,}8} = \sqrt{36.64.10^4} =$
$= 6.8.10^2$ m $\approx$ 5 km.

Druga naloga! Kako daleč na morju (če je seveda vidljivost dobra) vidijo svetlobni pramen, ki ga pošilja 20 m visok svetilnik? Tudi tej zasukani nalogi je formula

(1) kos:

$$x = \sqrt{2.6,4.10^6.20} = \sqrt{4.64.10^6} = 2.8.10^3\text{m} = 16\text{km}.$$

Ob koncu pa še vprašanje v premislek! Verjamete govoricam, da je morje vidno s Triglava (se razume, da za ostrovidne ali z daljnogledom opremljene ljudi in ob posebno jasnem vremenu)?

Karel Bajc

STVARNO KAZALO

P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome

5 1977/78 1 - 5, strani 1 - 288

Ciril Velkovrh

FIZIKA

NEVTRINO

Od časa do časa preberemo med časopisnimi novicami, da so fiziki odkrili nov *osnovni delec*. To pomeni, da se je pred raziskovalce postavilo novo vprašanje o zgradbi snovi. Ponavadi vzpodbudi odkritje nove raziskave. Navada je tudi, da se take raziskave končajo z novimi vprašanji.

Tudi *nevtrino* je eden od osnovnih delcev. Fiziki so ga spoznali že pred časom, pa še vedno postavlja za sedaj nerešljiva vprašanja. Za razliko od delcev, ki jih odkrivajo v sedanjem času in nastajajo le pri trkih delcev z velikimi energijami, se rodi nevtrino pri mnogih pojavih v atomskem svetu, ki so postali naša vsakdanjost. Veliko se govori in piše o jedrskih reaktorjih in o radioaktivnih izotopih. Debela plast betona in kovine varuje okolico reaktorja pred nevtroni, ki nastajajo pri razcepu uranovih jeder, in pred sevanjem gama, ki ga oddajajo radioaktivni preostanki uranovih jeder. Reaktor pa je tudi močan izvir nevtrinov, ki brez ovir zapuščajo sredico reaktorja, predirajo Zemljo in se izgube v vesolju. Tudi s Sonca nas neprestano obliva tok nevtrinov. Nobene sledi ne puščajo v snovi, skozi katero potujejo, zato tudi življenju niso nevarni.

Kako so se raziskovalci prepričali o obstoju nevtrina, če se ta sploh ne meni za snov in v njej ne zapušča sledi?

Na misel o obstoju nevtrina je napeljalo raziskovalce opazovanje *razpada beta*. Pri razpadu beta oddajajo atomska jedra elektrone ali pozitrone. Razpad z oddajo elektrona imenujemo razpad β^- (*beta minus*), razpad z oddajo pozitrona pa razpad β^+

(*beta plus*). Pri razpadu β^- se jedro atoma spremeni v jedro atoma sosednjega elementa v periodnem sistemu, ki ima atomsko število za eno večje. Označimo jedro z atomskim številom Z in z masnim številom A simbolično kot J(Z,A). Spremembo pri razpadu β^- zapišemo tedaj takole:

$$J(Z,A) \rightarrow J(Z+1,A) + e^-$$

Zapis označuje, da je v preostalem jedru enako število delcev, vendar se je za eno povečalo število protonov. Pomeni, da se je za eno zmanjšalo število nevtronov. Predstavljajmo si, da se je pri spremembi eden od nevtronov spremenil v proton. Simbolično bomo zapisali spremembo pri razpadu β^- takole:

$$n \rightarrow p + e^-$$

Po tej shemi tudi prosti nevtroni razpadajo v protone in elektrone. Razpolovni čas je okoli 12 minut.

Pri razpadu β^+ se jedro atoma spremeni v jedro atoma elementa, ki ima atomsko število za eno manjše. Simbolično bomo zapisali:

$$J(Z,A) \rightarrow J(Z-1,A) + e^+$$

Predstavljamo si lahko, da se je pri razpadu eden od protonov spremenil v nevtron:

$$p \rightarrow n + e^+$$

Protoni (vodikova jedra), ki niso vezani z nevtroni v jedru, ne razpadajo.

S tem pa še nismo povedali vsega. Pri vsakem novo odkritem pojavu preverjamo veljavnost prejšnjih spoznanj. Taka spoznanja so med drugim, da se pri telesih, ki so ločena od okolice, ohrani skupni električni naboj; da se energija teles, ki so ločena od okolice, ne spreminja; da se gibalna količina teles, ki so ločena od okolice, ne spreminja. Kaj po teh spoznanjih pričakujemo od delcev, ki so vključeni v razpad beta?

Pri obeh spremembah se mora ohraniti skupni električni naboj. Pri razpadu β^- ugotovimo tole: nevtron nima naboja, proton ima pozitivni osnovni naboj, elektron ima negativni osnovni naboj.

Skupni naboj po spremembi je res enak naboju pred spremembo, to je nič. Tudi pri razpadu β^+ se skupni naboj ne spremeni.

Notranja energija atomskega jedra po razpadu je manjša od notranje energije jedra pred razpadom. Na račun te razlike se je rodil elektron, ki ima tudi kinetično energijo. Ker so vsa istovrstna atomska jedra popolnoma enaka, prav tako pa so popolnoma enaki vsi elektroni, pričakujemo, da bodo imeli vsi elektroni enako kinetično energijo.

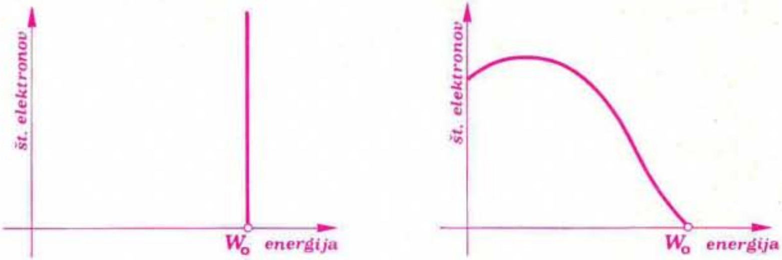
Vzemimo, da jedro pred razpadom miruje. Njegova gibalna količina je tedaj nič. Ker se gibalna količina pri razpadu ne spremeni, se morata elektron in preostalo jedro gibati v nasprotnih smereh. Prav tako se gibata drsalca, ki na ledu sprva mirujeta, nato pa se odrineta drug od drugega.

Sl. 1a kaže pričakovano in izmerjeno kinetično energijo izsevanih elektronov. Večina elektronov ima manjšo energijo od pričakovane. Pri opazovanju sledi jeder in elektronov so ugotovili, da le pri neznatnem številu razpadov odletita delca v pričakovanih nasprotnih smereh (Sl. 1b).

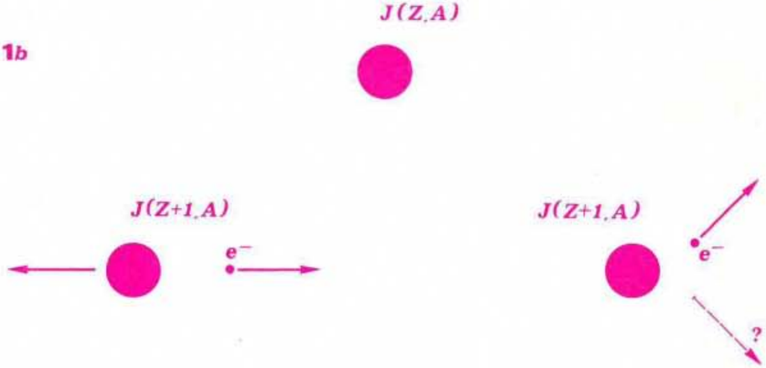
Ali tu preneha veljavnost zakonov ali pa naše spoznanje ni popolno? V veri v dotlej vselej veljavne zakone je Wolfgang Pauli leta 1930 predpostavil, da se pri razpadu poleg elektrona ali pozitrona rodi še neodkriti delec brez naboja in najbrž brez lastne mase. Imenoval ga je nevtrino. Ta delec odnese manjkajočo kinetično energijo in manjkajočo gibalno količino.

Šele v letu 1953 sta z zelo zahtevnimi eksperimenti ameriška fizika C. Cowan in F. Reines dokazala obstoj nevtrina. Z nadaljnimi raziskavami so odkrili, da nevtrino, ki se rodi pri razpadu β^-, ni enak nevtrinu, ki se rodi pri razpadu β^+. Prvi delec so imenovali antinevtrino, drugega pa nevtrino. Sl. 2 ponazarja, da se delca razlikujeta po smislu svojih vrtilnih količin glede na smer gibanja. Pravimo, da ima antinevtrino desnosučno (pozitivno), nevtrino pa levosučno (negativno) vijačnost. Z vsemi temi spoznanji lahko zapišemo spremembi pri razpadu beta pravilno takole:

1a



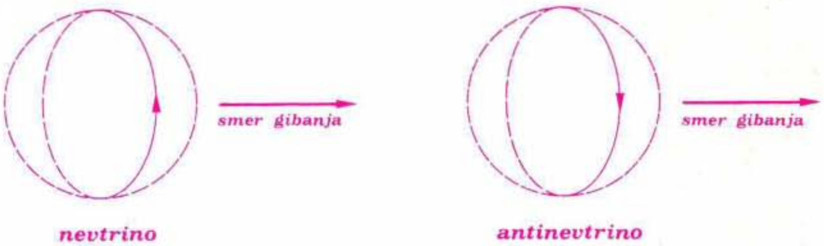
1b



Sl. 1: Razlike med pričakovanji in dejstvi so napotile W. Paulija, da je predpostavil obstoj nevtrina.

Sl. 2: Nevtrino in antinevtrino se razlikujeta po vijačnosti. Pravimo, da ima antinevtrino pozitivno, nevtrino pa negativno vijačnost.

2



$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad \text{in} \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

če s simbolom ν označimo nevtrino, s simbolom $\bar{\nu}$ pa antinevtrino.

Da bomo spoznali, kako težko je odkriti nevtrino, omenimo poskus, s katerim so hoteli določiti tok nevtrinov, ki nastajajo pri jedrskih reakcijah v sredici Sonca.

V sredici Sonca se v nizu jedrskih reakcij po štiri jedra vodika spajajo v jedra helija. Iz teh reakcij dobiva Sonce energijo, ki jo seva v vesolje. Pri reakcijah nastajajo tudi nevtrini. Velika večina nevtrinov uide iz Sončeve sredice, saj se v povprečju le vsak stotisoči ustavi v Soncu. Po računih naj bi prebadalo kvadratni meter Zemljinega površja okoli 100 milijard sončevih nevtrinov v sekundi. Natančna določitev tega toka naj bi pomagala podrobneje oceniti razmere v Soncu. Slika 3 kaže, kakšen je bil poskus. Posodo tetrakloretilena s prostornino $450 m^3$ so postavili v zapuščen rudnik okoli kilometer in pol pod zemljo. Tako globoko ne prodrejo niti kozmični žarki niti delci, ki nastanejo pri trkih kozmičnih žarkov z molekulami in atomi v atmosferi in na površju. Edino nevtrini prodirajo v to globino.

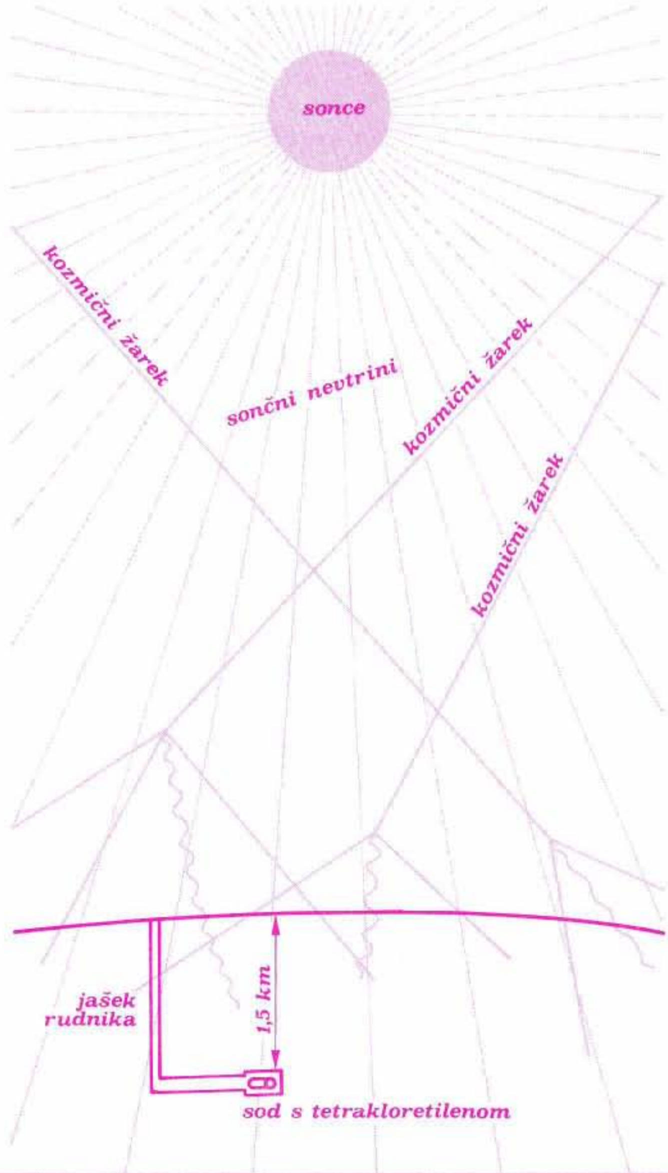
Pri trkih nevtrinov z dovolj veliko energijo se lahko jedro klora z masnim številom 37 - Cl^{37}* spremeni v jedro argona z masnim številom 37 - A^{37}, ki je radioaktivno. Reakcijo zapišemo takole:

$$Cl^{37} + \nu \rightarrow A^{37} + e^-$$

Verjetnost, da se reakcija zgodi, je zelo majhna. Četudi je v posodi okoli 2.10^{30} jeder Cl^{37}, preteče med dvema reakcija v povprečju okoli 50 ur.

Eksperiment je trajal nekaj mesecev. Nato so nastali argon zelo skrbno izločili iz tetrakloretilena. Argon je žlahtni plin in ne more ostati vezan na mestu klora. Zapusti molekulo tetrakloretilena, ostane pa ujet v tekočini. Tekočino so zato

* V naravnem kloru ima v povprečju vsak četrti atom klora jedro z masnim številom 37. Preostali atomi imajo jedra z masnim številom 35.



Sl. 3: Odkrivanje sončnih nevtrinov. Do soda s tetrakloretilenom 1500 m pod površjem Zemlje prodirajo le nevtrini.

skrbno prepihovali s helijem. Heliju so nato dodali še neaktivni argon in mešanico ohladili do temperature 77 K. Pri tej temperaturi je argon trden in se je izločil iz plinastega helija na stene posode. S števci so nato merili sevanje, ki nastane pri radioaktivnem razpadu nastalega argona A-37. Jedro argona A-37 namreč prej ali slej ujame enega od atomskih elektronov in se spremeni v jedro klora.* Elektronska lupina okoli nastalega jedra klora je pri tem v vzbujenem stanju in oddaja rentgenske žarke, ki jih zaznamo s števci.

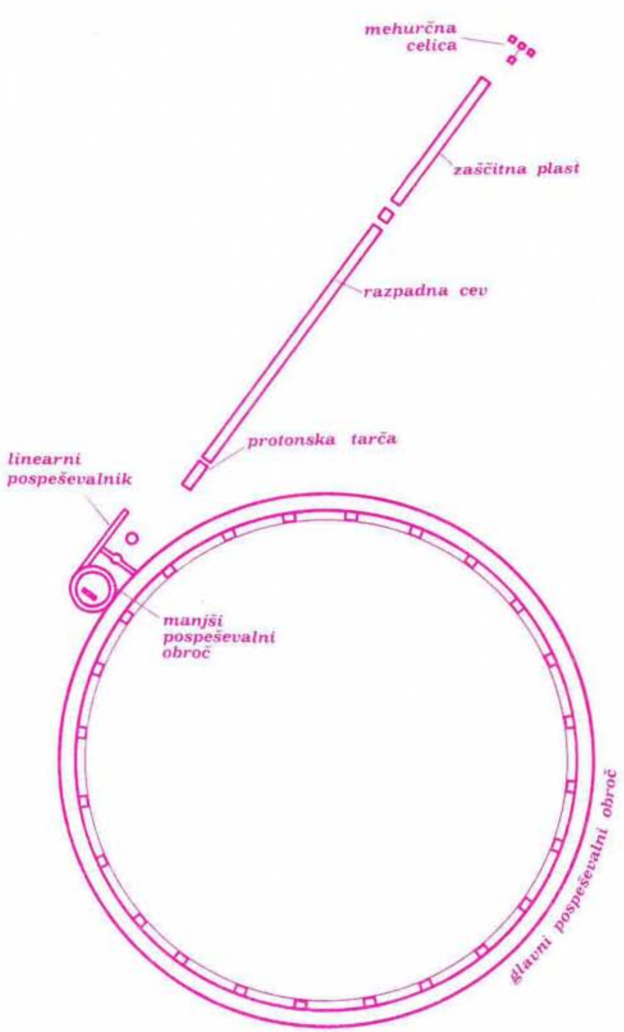
Pri tem velikem poskusu je nastalo vsega nekaj deset atomov argona, precej manj, kot so pričakovali. Ali pomeni to, da je tok Sončevih nevtrinov precej manjši od pričakovanega ali da so raziskovalci pri eksperimentu kaj spregledali? Majhnega toka nevtrinov ni mogoče razložiti na osnovi naših sedanjih predstav o dogajanjih v sredici Sonca. Da bi razrešili ta vprašanja, bo najbrž treba še veliko dela.

Poskuse z nevtrini je mogoče delati tudi pri velikih pospeševalnikih, kjer dobimo curke z zelo velikimi energijami. Sl. 4 kaže pospeševalnik v laboraturiju NAL v ZDA. V pospeševalniku pospešijo protone do hitrosti, ki je enaka 999 tisočink svetlobne hitrosti. Curek protonov vpada na debelo kovinsko ploščo, v kateri nastane ob trkih protonov z jedri veliko število zelo kratkoživih delcev pionov in kaonov, ki potujejo naprej po nekaj 100 m dolgi cevi in že med potjo razpadajo, pri čemer nastajajo tudi novi nevtrini. Konec cevi zapira okoli kilometer debela plast zemlje, ki naj ustavi vse razen nevtrinov. Curek nevtrinov na koncu udarja v tarčo, ponavadi v tekoči vodik. Raziskovalci fotografirajo sledi delcev, ki nastanejo pri reakcijah in jih kasneje razčlenjujejo (Sl. 5). Spoznali so, da so reakcije vse pogostejše, čim večjo energijo imajo nevtrini.

Kako si razlagamo, da snov tako malo moti gibanje nevtrina?

Oblika snovi in pojavi v snovi so odvisni od osnovnih gradnikov in od njihove medsebojne povezave. Gradniki vesolja so

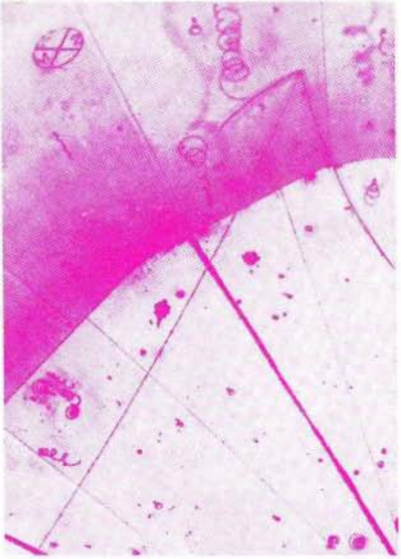
* Tudi to je razpad, pri katerem se rodi nevtrino, podobno kot pri razpadu β^+.



Sl. 4: Skica pospeševalnikov in drugih naprav, ki jih imajo v ustanovi NAL v ZDA. Linearni pospeševalnik in pomožni krožni pospeševalnik rabita za to, da pospešita protone do 0,945 svetlobne hitrosti za vstop v glavni pospeševalni obroč, ki jih pospeši naprej do 0.999 svetlobne hitrosti.

galaksije in zvezde - povezuje jih *težnostna* ali *gravitacijska sila*. Vso raznoliko snov okoli nas in v vesolju sestavljajo atomi, ki jih povezujejo *električne sile*. Električne sile povezujejo tudi elektrone in jedra znotraj atoma. Jedro sestavljajo protoni in nevtroni, ki jih povezuje *močna jedrska sila*. *Močna sila* povzroča tudi nastanek različnih kratkoživih delcev pri trkih protonov in nevtronov z velikimi energijami.

Nobena izmed naštetih sil ne deluje na nevtrino. Je pa še *šibka sila*. Ta je mnogokrat slabša od električne in močne, deluje pa med vsemi delci z nevtrinom vred. Ker je preslaba, ne povezuje delcev v stalne tvorbe, ampak povzroča le medsebojne



Sl. 5: Sledi delcev, ki so nastali ob reakciji nevtrina s protonom v mehurčni celici. Nevtrino je priletel s spodnje leve strani slike in na svoji poti ni pustil sledi. Pri reakciji so nastali proton, pozitivni pion in negativni mion. Sledi delcev so ukrivljene, ker je v celici magnetno polje.

Sila	Razmerje med silo in močno silo pri razdalji 10^{-15} m med delcema*				
	e-ν	e-p	p-p	p-n n-n	n-ν p-ν
Močna	0	0	1	1	0
Električna	0	10^{-2}	10^{-2}	0	0
Šibka	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
Gravitacijska	0	10^{-41}	10^{-38}	10^{-38}	0

* Močna in šibka sila sta sili kratkega dosega in ju delci pri razdaljah, ki so večje od 10^{-15} m, ne čutijo. Električna in gravitacijska sila delujeta med delci pri poljubno veliki razdalji.

spremembe. Tabela nam kaže primerjavo medsebojnih sil med nekaterimi delci pri razmiku, ki je tolikšen, da čutijo delci vse naštete sile. Vidimo, da je električna sila med delci z nabojem stokrat manjša od močne sile in da je šibka sila deset bilijonkrat slabša od močne. Gravitacijska sila pa je v primerjavi s prejšnjimi zanemarljiva. čim močnejša je sila, tem večja je verjetnost za reakcije med delci. Vidimo, da spremembe v snovi v prvi vrsti uravnavata močna in električna sila. Razumemo, zakaj nevtrini nemoteno potujejo skozi snov, saj uravnava njihovo gibanje le šibka sila.

Po prispevku *Norme Mankoč*
priredil *Marjan Hribar*

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
6. letnik, šolsko leto 1978/79, 1. številka, str. 1 - 64

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupinska pa 32.-din; za inozemstvo 3 $ = 54.-din, 2000Lit, 54.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja štirikrat letno v nakladi 25.000 izvodov.

OPAZOVALNI SISTEMI

Ko govorimo o *legi*, *hitrosti* ali *pospeških* kakega telesa, moramo povedati, na kaj se te količine nanašajo. Najlaže to opravimo tako, da si zgradimo nepremični *pravokotni koordinatni sistem* in glede nanj opredelimo omenjene količine. Pravokotni koordinatni sistem v prostoru tvorijo tri med seboj pravokotne usmerjene premice, ki se v neki skupni točki sekajo. Sečišču pravimo *koordinatno izhodišče*, premicam pa *osi*. Lego telesa podamo tako, da povemo pravokotne razdalje telesa od ravnin, ki jih tvorijo koordinatne osi. Postavimo pravokotni koordinatni sistem v sobi! Koordinatno izhodišče si izberemo v enem od spodnjih oglov, robovi sobe pa ponazarjajo koordinatne osi. Lego telesa v sobi lahko potem povemo tako, da sporočimo njegovo oddaljenost od tal in od dveh sten, ki se stikata v izbranem oglu.

Poleg koordinatnega sistema moramo imeti še *uro* za merjenje *časa*. Tako opremljeni pravimo, da smo *opazovalci* v *opazovalnem sistemu*. Opazovalnih sistemov je poljubno mnogo, saj se različni opazovalci v svojih opazovalnih sistemih lahko med seboj gibljejo na poljubno mnogo različnih načinov.

Dva opazovalca, ki se gibljeta drug proti drugemu, vidita isti fizikalni pojav v svojih opazovalnih sistemih različno. Potnik v enakomerno drvečem vlaku vidi, da se hiše premikajo glede na njegov koordinatni sistem, ki je pripet na vagon. Avto, ki vozi vzporedno z enako hitrostjo kot vlak, pa zanj miruje. Drugače opazuje te pojave prometnik, ki stoji ob progi. Zanj se vlak in avto premikata v isto smer z enako hitrostjo, hiše pa so pri miru.

Opazovani sistem prometnika je pri ljudeh splošno v rabi. Saj je razumljivo, pravimo, da hiše mirujejo, vlak pa se giblje, ne pa obratno. Toda ta "razumljivost" je posledica globoke navade, ki se je ne zavedamo več. Tudi ko smo rekli: "enakomerno drveči vlak" in "avto, ki vozi vzporedno s tirom...", smo se postavili v opazovalni sistem, kjer površje Zemlje miruje.

Povezava med istimi količinami v različnih opazovalnih sistemih je odvisna od medsebojnega gibanja opazovalcev. Spet vzemimo za primer opazovalna sistema potnika v vlaku in prometnika, ki opazujeta hitrost avtomobila. Vzemimo, da vozi vlak s hitrostjo 100 km/h glede na prometnika. Medsebojna hitrost obeh opazovalcev je torej 100 km/h. Prometnik izmeri hitrost avtomobila, ki vozi vzporedno z vlakom in dobi rezultat 120 km/h. Zanj je avto za 20 km/h hitrejši od vlaka, se pravi, v eni uri bi prišel avto 20 km dlje kot vlak, če merimo čas od trenutka, ko sta oba na istem mestu. Kolikšno hitrost avta izmeri tedaj potnik v vlaku? Le-ta vidi, da se je po eni uri vožnje avto oddaljil od njega za 20 km, torej ima hitrost 20 km/h. Hitrost avta v opazovanem sistemu potnika je torej enaka razliki med hitrostma avta in vlaka, kot ju izmeri prometnik. Bolj splošno ugotovimo, da je hitrost v prvem opazovalnem sistemu enaka razliki med hitrostjo v drugem opazovalnem sistemu in medsebojno hitrostjo sistemov. Do podobnih zaključkov pridemo tudi za druge količine, ki jih merimo v različnih sistemih.

Pri opisovanju gibanja si vedno izberemo tak opazovalni sistem, v katerem je opis najpreprostejši. Izbor sistema je torej odvisen od pojava, ki ga opazujemo in od načina opazovanja.

Oglejmo si opazovalna sistema, ki sta v rabi pri opisovanju *jedrskih reakcij*. Prvi sistem je *laboratorijski* opazovalni sistem. Koordinatni križ je pritrjen v prostoru, kjer delamo poskuse, se pravi nekje v laboratoriju. S curkom pospešenih delcev obstreljujemo tarčo, ki v tem sistemu miruje. Reakcijske produkte, delce, ki nastanejo ob tem obstreljevanju, zaznavamo z detektorji, ki jih namestimo okrog tarče. Eksperimentalci torej najbolj preprosto pokažejo rezultate svojih merjenj v laboratorijskem opazovalnem sistemu.

Drugo stališče imajo tisti fiziki, ki skušajo teoretično pojasniti eksperimentalne rezultate. Ti imajo raje *težiščni* opazovalni sistem. V tem sistemu miruje *težišče* projektila in tarčnega jedra. Zato se gibljeta v tem sistemu projektil in tarčno jedro drugo proti drugemu.

Zakaj je težiščni sistem bolj prikladen od laboratorijskega, če kaj računamo? Tudi v mikrosvetu atomskih jeder in osnovnih delcev velja zakon o ohranitvi *gibalne količine*. To pomeni, da tudi težišče delcev, ki nastanejo pri trku, sovpada s težiščem projektila in tarče. Namesto podatkov o legi vsakega delca (laboratorijski sistem) shajamo tukaj le s podatki o medsebojnih legah delcev.

Za primer si oglejmo trk enakih trdih prožnih krogel. Računi, ki jih bomo naredili, bodo zelo preprosti. Kljub temu bomo videli, da bo opis trka v težiščnem opazovalnem sistemu preprostejši kot v laboratorijskem.

Najprej si oglejmo, kako opišemo središčni trk dveh takih krogel v laboratorijskem opazovalnem sistemu. Sprva tarčna krogla miruje, projektil pa drvi proti njej s hitrostjo v_0 (Sl. 1). Po trku ima projektil hitrost v_1, tarča pa hitrost v_2. Ker med trkom na krogli ne delujejo zunanje sile, ostane konstantna skupna gibalna količina krogel.* To zapišemo z enačbo

$$mv_1 + mv_2 = mv_0 \qquad (1)$$

Iz enačbe izračunamo hitrost v_2 in uvidimo, da sta spremembi hitrosti krogel pri trku nasprotno enaki: tarča se pospeši, projektil pa zavre:

$$v_2 = v_0 - v_1 = -(v_1 - v_0) \quad ** \qquad (2)$$

Ker je trk krogel idealno prožen, ostane nespremenjena skupna *kinetična energija* krogel:

$$mv_1^2/2 + mv_2^2/2 = mv_0^2/2 \qquad (3)$$

Od tod dobimo za hitrost krogel po trku še eno enačbo

$$v_1^2 + v_2^2 = v_0^2 \qquad (4)$$

* Gibalno količino imenujemo produkt iz mase in hitrosti telesa: $G = mv$.
** Sprememba hitrosti tarče je $v_2 - 0 = v_2$, sprememba hitrosti projektila pa je $v_1 - v_0$

Iz enačbe (2) izračunamo v_1, izraz kvadriramo:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2v_0v_2 + v_2^2$$

in vstavimo v enačbo (4), pa dobimo:

$$v_2^2 = v_0v_2 \qquad (5)$$

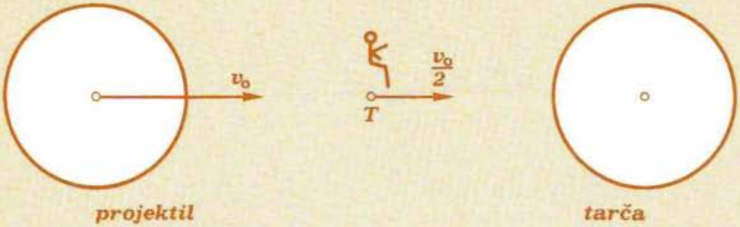
To preprosto kvadratno enačbo lahko na obeh straneh krajšamo z v_2, saj vemo, da hitrost tarčne krogle po trku ni enaka nič. Dobimo torej:

$$v_2 = v_0 \qquad (6)$$

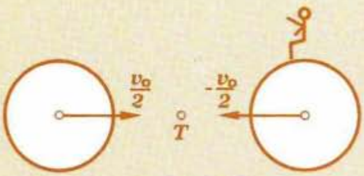
Hitrost tarče po trku je enaka začetni hitrosti projektila; hitrost projektila po trku mora biti torej nič. O tem se lahko prepričaš tudi, če v enačbo (2) ali (3) vstaviš za v_2 rezultat iz enačbe (5). Hitrosti tarče in projektila se torej zamenjata.

Kako opišemo trk v težiščnem sistemu? Na Sl. 1 vidimo razmere v laboratorijskem sistemu. Težišče krogel se giblje v isto smer kot projektil vendar s polovično hitrostjo. Težišče je namreč v poljubnem trenutku v razpolovišču daljice, ki veže središči krogel. Težiščni opazovalec se vozi na težišču. Ker je medsebojna hitrost težiščnega in laboratorijskega opazovalca $v_0/2$, je hitrost projektila v težiščnem sistemu po prejšnjem enaka $v_0 - v_0/2 = v_0/2$, hitrost tarče pa $0 - v_0/2 = -v_0/2$. Krogli se gibljeta s hitrostjo $v_0/2$ v nasprotnih smereh. Skupna gibalna količina je torej 0. Tudi po trku morata imeti krogli po velikosti enaki hitrosti, saj ostane gibalna količina nespremenjena. Ker se ne spremeni kinetična energija, morata biti hitrosti po trku enaki hitrostma pred trkom (zapiši enačbo za kinetično energijo in se o tem prepričaj). Krogli pri trku le zamenjata hitrosti (Sl. 2b). To je isti zaključek, kot pri opazovanju v laboratorijskem sistemu, do njega pa smo prišli bolj preprosto.

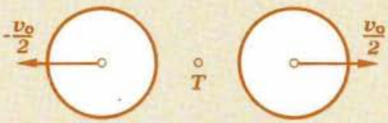
Za konec si oglejmo *enakomerno se vrteči* opazovalni sistem. V tem sistemu ne bomo opazovali jedrskih reakcij ali trkov - slutimo, da bi si brez potrebe nakopali težave. Sistem pa je zelo pripraven za opazovanje krožnega gibanja. Oglejmo si enakomerno kroženje kamna, privezanega na vrvici. Opazovalec naj



Slika 1: Enaki prožni krogli pred trkom, kot ju vidi opazovalec v laboratorijskem opazovalnem sistemu. Težišče krogel je označeno s T. Na težišču sedi težiščni opazovalec.



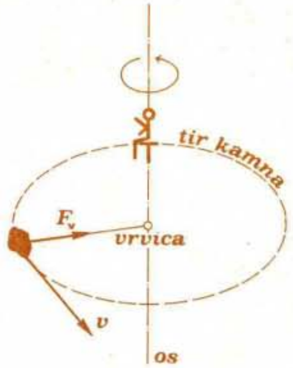
Slika 2a: Krogli pred trkom, ki ju vidi opazovalec v težiščnem sistemu. Laboratorijski opazovalec se pelje na tarčni krogli.



Slika 2b: Krogli v težiščnem sistemu po trku.

sedi na osi vrtenja in se vrti tako, da zanj kamen ves čas miruje. V tem primeru je opazovalec v vrtečem se opazovalnem sistemu.

Ta sistem pa je bistveno drugačen od opazovalnih sistemov, ki smo jih omenili prej. V prejšnjih opazovalnih sistemih se je telo gibalo enakomerno in premo ali pa je mirovalo, če je bila vsota sil drugih teles na to telo enaka nič. V vrtečem se opazovalnem sistemu pa izmeri opazovalec silo, s katero je napeta vrvica, ko vleče kamen. Kamen miruje kljub temu, da ni drugih sil. V prej opisanih sistemih bi se začel gibati enakomerno pospešeno v smeri pritezajoče vrvice. Če bi vrvica popustila, bi se začel kamen v vrtečem se opazovalnem sistemu zamotano pospešeno gibati, kljub temu, da je prepuščen sam sebi in nanj ne deluje nobeno telo.



Slika 3a: Kamen v vrtečem se opazovalnem sistemu miruje. Nanj delujeta dve sili, katerih vsota je enaka nič: sila vrvice F_v in centrifugalna sistemska sila F_c.

Slika 3b: Kamen s slike 3a, ki ga vidi inercialni opazovalec. Kamen kroži okrog osi s hitrostjo v_o, za kroženje pa poskrbi sila vrvice F_v. Na osi je narisan opazovalec v vrtečem se opazovalnem sistemu.

Opazovalne sisteme, kjer se telesa gibljejo pospešeno kljub temu, da nanje ne delujejo druga telesa, imenujemo *pospešene* ali *neinercialne* sisteme.

Vajeni nepospešenih (inercialnih) sistemov, imamo v pospešenem sistemu občutek, da delujejo na nas in na druga telesa sile, ne najdemo pa povzročitelja. Takim silam pravimo *sistemske sile*. Sistemski sili v vrtečem se opazovalnem sistemu pravimo *centrifugalna* sila (glej sliko 3a).

Zelo znan primer pospešenega opazovalnega sistema je tudi sistem potnika v zavirajočem vozilu. Lahko rečemo, da so varnostni pasovi zato, da kljubujejo sistemski sili, ki nas skuša pospešiti v sprednji del vozila.

Strogo vzeto opazovalni sistem potnika v enakomerno vozečem vlaku ni inercialen, ker vagon ves čas premetava zaradi neidealne proge. Tudi sistem opazovalca ob progi ni strogo inercialen - pripet je na površje Zemlje, ki se vrti okrog svoje osi. Sistemske sile v teh opazovalnih sistemih pa so tako majhne, da jih večinoma lahko zanemarimo. Še posebej velja to za sile zaradi vrtenja Zemlje.

Poglejmo še, kako razlaga kroženje opazovalec v nepospešenem opazovalnem sistemu, v katerem se kamen giblje po krožnici. Na kamen mora ves čas delovati zunanja sila. Če bi ta sila popustila, bi se začel kamen gibati premo. Silo oskrbi vrvica, na katero je privezan kamen. Opazovalec v inercialnem sistemu torej nič ne ve o centrifugalni sili - zanj te sile ni (glej sliko 3b).

Kako pa vidi opazovalec v nepospešenem opazovalnem sistemu zavirajoče vozilo in stvari v njem? Skušaj sam najti odgovor!

Andrej Likar

NALOGE Z MAGIČNIM KVADRATOM

Številski magični kvadrat reda n je razpredelnica z n vrsticami in n stolpci, v kateri so števila od 1 do n^2 posajena tako, da je vsota števil iz vsakega posameznega stolpca, vrstice in obeh diagonal enaka. Tej vsoti rečemo *magična konstanta.*

Zelo zanimivi so magični kvadrati, ki imajo še dodatno lastnost: vsota poljubnih dveh števil, ki ležita simetrično glede na sredino kvadrata, je konstantna. Temu kvadratu rečemo *regularni* magični kvadrat.

Sedaj pa poskusi odgovoriti na tale vprašanja:

1) Kakšna je splošna formula za izračun magične konstante, če poznamo red magičnega kvadrata?
2) Kakšna je vsota simetrično ležečih števil v regularnem magičnem kvadratu?
3) Magični kvadrat lihega reda ima v sredini polje. Katero število mora biti v njem?

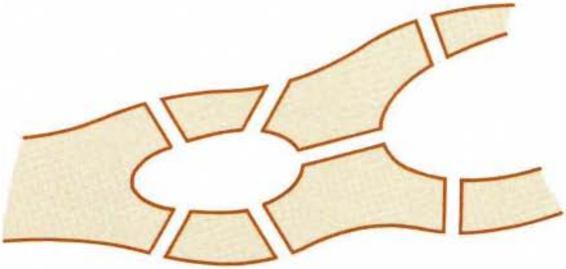
Roman Rojko

MATEMATIKA

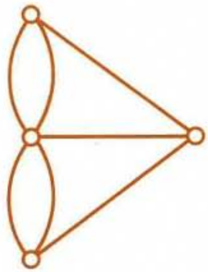
NEKAJ O GRAFIH IN NJIHOVI UPORABI

V ugankarskih kotičkih časopisov in revij najdemo nekatere tipične vrste nalog in problemov. V tem sestavku si bomo ogledali dokaj pogost tip takih nalog in pokazali, kako jih rešujemo z *grafi*, ki jih obravnava posebna veja matematike - *teorija grafov*.

Začetki teorije grafov segajo v 18. stoletje. Staro mesto Königsberg (znano tudi po tem, da tam počivajo posmrtni ostanki velikega filozofa Kanta) je krasilo sedem mostov, ki so povezovali bregove reke Pregel z otočkom sredi nje (Sl. 1).



Sl. 1



Sl. 2

Meščane Königsberga je lep čas vznemirjalo naslednje vprašanje: Ali se je mogoče sprehoditi preko mostov tako, da greš čez vsakega samo enkrat? Poskusi!

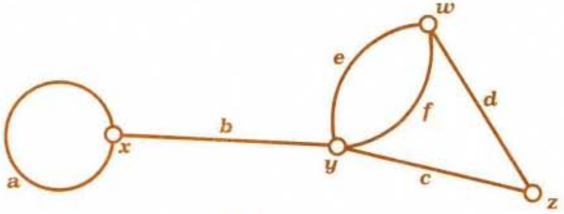
Za problem je zvedel tudi največji matematik tistega časa - *Leonhard Euler* (1707 - 1783). Problem si je poenostavil tako, da je bregove in otoček označil s krožci in jih povezal s črta-

Königsberg - danes Kaliningrad

Leonhard Euler je bil rojen 15. aprila 1707 v Bazlu v Švici. Bil je učenec in prijatelj Bernoullijev. Velik del svojega življenja (1727-1741, 1766-1783) je preživel v Rusiji na Petrograjski (danes Leningrad) akademiji, ki jo je takrat ustanovila carica Katarina I . Tam je tudi umrl 18. septembra 1783. Obdobje 1741-1766 pa je na povabilo Friedricha II prebil na berlinski akademiji znanosti. Euler je eden največjih matematikov vseh časov. Posegel je na vsa področja matematike in jo obogatil s pomembnimi spoznanji. Štejemo ga med očete variacijskega računa, teorije diferencialnih enačb, teorije števil in topologije. Pri dokazovanju je začel dajati prednost algebri pred geometrijo. Ukvarjal se je tudi s fiziko, mehaniko, balistiko in astronomijo. Leta 1735 je zaradi preveč vnetega opazovanja Sonca pri sestavljanju sistema za določanje časa oslepel na desno oko. Popolnoma slep je postal leta 1766, kar pa ni bistveno vplivalo na njegovo ustvarjalnost. Imel je izreden spomin. Človeštvu je zapustil nekaj knjig, več kot 800 člankov (nekateri so precej dolgi) in kup neobjavljenih del. Uvedel je oznake e za osnovo naravnih logaritmov, i za kvadtatni koren iz minus ena in $f(\ )$ za funkcije.

mi, ki predstavljajo mostove (Sl. 2). Taki shemi pravimo *graf*. Še nekaj grafov je prikazanih na slikah (Sl. 3) in (Sl. 5).

Kakor vidimo, je graf sestavljen iz množice krožcev ali *točk* grafa, ki so med seboj paroma povezani z množico črt ali *povezav*. Namesto besed točka (grafa) in povezava pogosto uporabljamo tudi besedi *vozel* in *veja*. Točki, ki ju povezava veže, imenujemo *krajišči* povezave. Da ima povezava p krajišči u in v, bomo zapisali $p(u;v)$.



Sl.3

Primer: Graf na sliki 3 je določen z množico točk $T = \{x, y, z, w\}$ in množico povezav $P = \{a(x;x), b(x;y), c(y;z), d(z;w), e(w;y), f(w;y)\}$. Najbrž je med povezavami pritegnila vašo pozornost povezava $a(x;x)$, ki ima za obe krajišči isto točko x. Takim povezavam pravimo *zanke*.

Število povezav, ki imajo za krajišče točko t, imenujemo *kratnost* točke t in jo označimo $k(t)$. Zanke upoštevamo pri določanju kratnosti dvakrat. Takc velja za graf na sliki 3:

$$k(x) = k(w) = 3 \quad , \quad k(y) = 4 \quad \text{in} \quad k(z) = 2 \quad .$$

Postavimo se v neko točko grafa. S tem, da se po povezavi, ki ima točko, v kateri se trenutno nahajamo, za krajišče, pomaknemo v drugo krajišče, lahko "potujemo" po grafu od točke do točke. Zaporedje povezav, ki jih pri tem prehodimo, imenujemo *pot* po grafu.

Za graf na sliki 3 sta zaporedji povezav:

$$P_1 = a, b, c, d, e, e, f$$

$$P_2 = c$$

poti; zaporedje

$$P_3 = b,\ a,\ e$$

pa ni (zakaj?).

Vsaka pot ima svoj *začetek* in svoj *konec*. Pot P_1 ima začetek v točki x in konec v točki y, kar zapišemo $P_1(x,y)$. Za začetek poti P_2 pa lahko izberemo katerokoli od krajišč povezave c. Za to, da bo pot po grafu natančno določena, moramo v splošnem poleg zaporedja prehojenih povezav podati še njen začetek.

Če obstaja pot iz točke u (začetek) v točko v (konec), pravimo, da je točka v *dosegljiva* iz točke u. Kadar so vse točke grafa med seboj dosegljive, bomo rekli, da je graf *povezan*.

Graf na sliki 3 je povezan; če pa "zbrišemo" povezavo b, dobimo nepovezan graf, saj točka x ni več dosegljiva iz drugih točk grafa.

Sedaj vemo o grafih že toliko, da lahko sledimo rešitvi naloge o königsberških mostovih, ki jo posplošimo na grafe takole:

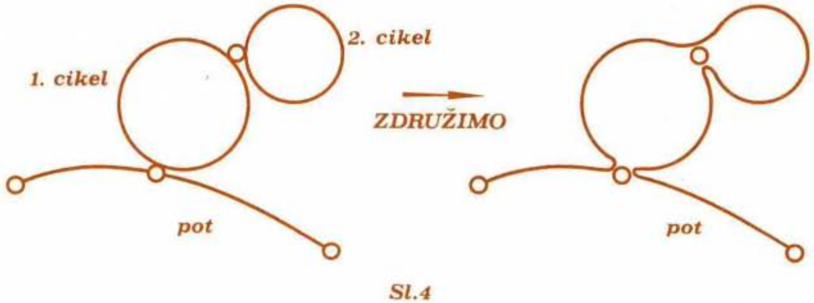
Ali obstaja po danem grafu pot, ki vsebuje vsako povezavo natanko enkrat?

Taki poti pravimo *Eulerjeva pot*. Rešitev zastavljene naloge daje naslednji izrek:

> V grafu obstaja Eulerjeva pot natanko takrat, ko je povezan in ima največ dve točki lihe kratnosti.
> Če obstajata dve lihi točki (vedno obstaja sodo število lihih točk), je ena začetek, druga pa konec Eulerjeve poti. Če pa so vse točke sode, je Eulerjeva pot sklenjena ali *cikel* - njen začetek in konec sovpadata; za začetek poti lahko izberemo poljubno točko.

Utemeljimo najprej trditev: če v danem grafu obstaja Eulerjeva pot, potem sta v grafu največ dve lihi točki. Mislimo si, da je graf narisan s kredo. Vzemimo v roke gobo in sledimo Eulerjevi poti po grafu. Prehojeno pot za seboj brišimo. Ko prehodimo celotno pot, bodo vse povezave grafa zbrisane - vse točke bodo imele kratnost 0, torej bodo sode. Očitno pri vsakem prehodu skozi točko zbrišemo dve povezavi - tisto, po kateri smo v točko prišli, in tisto, po kateri smo točko zapustili. Potemtakem pri prehodu skozi njo ostane soda točka soda, liha pa liha. Le na začetku in koncu poti lahko spremenimo parnost točke, kajti le v teh dveh primerih zbrišemo v dani točki eno samo povezavo. Ker morajo biti na koncu vse točke sode, imamo zato lahko spočetka kvečjemu dve lihi točki.

Naj sedaj graf zadošča pogojem izreka. Kako dobimo Eulerjevo pot? Če v grafu obstajata lihi točki, začnemo v eni izmed njiju in potujemo po grafu. Ker lahko v vsaki sodi točki pot nadaljujemo, se bomo prej ali slej ustavili v drugi lihi točki. V še ne prehojenem delu grafa so sedaj vse točke sode. To velja tudi v primeru, ko že spočetka ni v grafu nobene lihe točke. V obeh primerih izberemo poljubno točko, ki je krajišče še neprehojene povezave in začnemo potovanje. Ker so vse točke sode, bomo potovanje končali v začetni točki - dobljena pot je cikel. To ponavljamo, dokler ne pokrijemo s cikli ves graf. Zaradi povezanosti grafa lahko cikle (in pot) združimo v en sam cikel (pot). Osnovna zamisel združevanja je prikazana na sliki 4:



Sl.4

S podobnim razmišljanjem je Euler naredil konec brezglavemu iskanju. Svoja dognanja je objavil v razpravi: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae

Petropolitanae VIII, 1736 (1741), p. 128-140. Naloga o königsberških mostovih ni rešljiva, saj ima prirejeni graf štiri lihe točke.

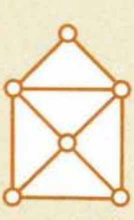
Tovrstne naloge srečamo v ugankarskih kotičkih pogosto pod naslovom "nariši z eno potezo". Take naloge nam ne bodo več delale težav. Kaj pa, če sta v grafu več kot dve lihi točki? V najmanj koliko potezah lahko narišemo tak graf? Odgovor daje izrek:

> Povezani graf z $2m$ lihimi točkami lahko pokrijemo (= vsaka povezava vstopa v neko pot) z m ločenimi (= vsaka povezava vstopa v največ eno pot) potmi.

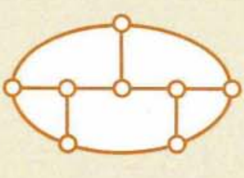
Sedaj nam ne bo več težko rešiti naslednjih nekaj nalog:

Naloge:

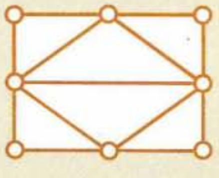
1. Nariši graf, določen z množico točk $T = \{x, y, z, u, v\}$ in množico povezav $P = \{a(z;y), b(y;v), c(v;z), d(u;z), e(u;v), f(u;y), g(v;v)\}$.
2. Nariši povezan graf na petih točkah, ki imajo vse kratnost 2.
3. Kratnosti petih točk so zaporedoma 1, 2, 3, 4 in 5. Nariši graf!
4. V vsakem grafu je sodo mnogo lihih točk. Dokaži!
5. Vsakega izmed grafov na sliki 5 nariši s čim manj potezami (poteza = neprekinjena črta), pri čemer narišeš vsako črto le enkrat:



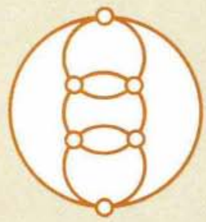
Sl. 5a



Sl. 5b



Sl. 5c



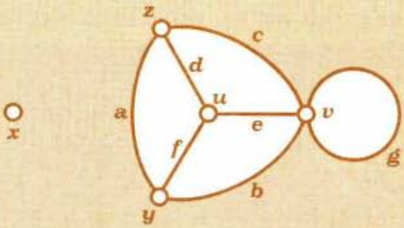
Sl. 5d

Med nalogami je tudi Plemljeva uganka (Sl. 5b). Anekdoto o njej si lahko poiščete v enem od preteklih letnikov Preseka.

6. Pravilni n-kotnik z vsemi diagonalami je pravzaprav graf nad n točkami (oglišči). Če je n liho število, ga lahko po Eulerjevem izreku narišemo v eni potezi. To zna tudi program, ki je "narisal" primer tega mnogokotnika za $n = 31$ (Glej sliko na naslovni strani). Poskusi sam narisati v eni potezi pravilni sedemkotnik z vsemi diagonalami!

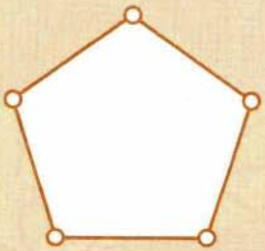
REŠITVE

1. Kako narišemo graf? Najprej narišemo za vsako točko po en krogec in ga označimo z njeno oznako. Nato točke povežemo s povezavami in graf je narisan. V našem primeru dobimo



Seveda je slika grafa odvisna od začetne razporeditve točk. Posebnost našega grafa je točka x, ki ni krajišče nobene povezave.

2.



3. Tak graf ne obstaja, ker je število lihih točk v grafu vedno sodo (glej nalogo 4).

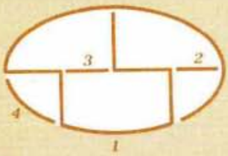
4. Vsaka povezava ima dve krajišči. Torej je število vseh krajišč povezav sodo. Število vseh krajišč pa dobimo tudi, če seštejemo kratnosti vseh točk. Ker je vsota soda, mora biti tudi število lihih členov v tej vsoti sodo.

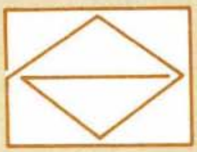
5. a. dve lihi točki - ena poteza

   b. 8 lihih točk - 4 poteze

   c. dve lihi točki - ena poteza

   d. same sode točke - ena sklenjena poteza





6. Kakor primeri iz prejšnje naloge, ima tudi ta naloga več različnih rešitev. Ena izmed njih je tale:

Po članku

Danijela Bezka

priredil

Vladimir Batagelj

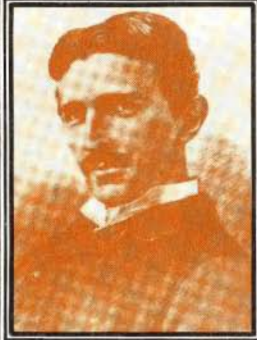
SREDIŠČE KROŽNICE

Tokrat boste morali znati vešče rokovati z geometrijskim priborom; da pa bo naloga še zahtevnejša, vam bomo dovolili uporabljati *samo* šestilo. Naloga se glasi takole:

Samo s šestilom poišči središče dane krožnice!

Dušan Repovš

KRIŽANKA



				LJUBKOV. OBLIKA IMENA ADO	PODROČJE DELA	PREBIVALKA EMONE	PASTIR IZ OPERE "SNEGUROČKE"	ŠVEDSKO IME FIN. JEZERA INARI	SARAJEVO	
			GRŠKI SLIKAR APEL (DALJŠA OBLIKA)	A	P	E			S	
			OBMOČJE / ABSOLUTNA VREDNOST ŠTEVILA	D	O	M			A	
			N	I	K	O	L	A	OPORA VRTEČIM SE DELOM	
	KAZALNI ZAIMEK / OBJEKT PREKO REKE	T	O	LILI NOVY / NIKELJ	L	N	GRŠKA ČRKA			UMRLI JUGOSLOV. KOŠARKAR (RADIVOJE)
PROSTORN. MERA ZA ŽITO(30l)	M	E	R	N	I	K	REKA V JUŽNI ŠKOTSKI			K
8	O	S	M	I	C	A	HRIBOVJE V SZ HRVATSKI	HUDA JEZA	VRH V KARAVANKAH (POTOČKA ZIJALKA!)	O
POŽELENJE	E	L	A	ANGL. ROMANT. PESNIK (JOHN)	DETE	KRAJEVNA SKUPNOST / GL. MESTO EGIPTA			TERMIN / DOLORES IBARRURI	R
TANTAL	T	A	EMBLEM / GUGLIELMO MARCONI		O	K			D	A
			G		T	A			I	Č
			M		P	I		JAMES IRWIN	μ	SPLETI LAS
			RADIOAKT. KEMIČNI ELEMENT(Th)			K		I	KONFERANSJE ORLOVIČ	M
			NENADNI DVIGI		K	O		I	IVAN PREGELJ	I

NAŠI MATEMATIKI, FIZIKI IN ASTRONOMI

			+	KRVNO SORODSTVO	STROJNIŠKI ELEMENT	GRŠKI BOG VOJNE	PAPIRNATI IZDELEK			
		ZMAGOVALEC TEKMOVANJA	D	R	V	A	K			
		FRANC. REKA (NAŠA PISAVA) / STIKALNA NAPRAVA	L	O	I		N			
			U	D	J		I			PREDSTOJNIK SAMOSTANA
JEZA	B	E	S	NEMŠKI FILOZOF (GEORG) / RAVNICA	A		I	JANA OSOJNIK / DANSKI FIZIK (NIELS)	T	O
PIJAČA ST. SLOVANOV / LIDIJA OSTERC			ROBERT KOCH / PREPLETANJE	R	K	OBUPANOST	G		U	
L				A	=	SKANDIN. Ž. IME / RENATA TEBALDI	A		R	
O	K	TRSKA / IZMERJENA VIŠINA TOČKE		V	E	P	POPULARNA POPEVKA		I	
OZVEZDJE B JUŽNEM NEBESNEM TEČAJU				A	N	T	RIHARD JAKOPIČ	L	J	ZNAK ZA MNOŽENJE
OBOROŽEN SPOPAD / SKULPTURA	V	O	J	N	A	IME SLOV. PESNICE ŠKERL	ROD LAVER	VIKTOR KORČNOJ / KRATICA ZA TOVARIŠ	V	K
K	I	T	A	LISTINA ZA TRANSPORT. LETALO / NAŠI RAZGLEDI	Č	A	R	T	E	R
I	Č	A	TEŽAVA, NEPRIJETNOST	N	A	D	L	O	G	A
P	? = 3,14		Fe_2O_3	R	J	A	ENOTA ZA MOČ	V	A	T

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

TEKMOVANJA - NALOGE

ŠOLSKA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Šolska tekmovanja iz matematike je letos izvedlo 30 gimnazij in srednjetehniških šol v Sloveniji.

Zaradi velike razširjenosti revije Presek smo letos kar v njem objavili razpis za vsa tekmovanja, s čimer smo si po eni strani prihranili nekaj dela, po drugi pa obvestili širok krog bralcev o tekmovanjih. Na žalost so nekatere šole razpis spregledale ali pa nanj pozabile in smo jih morali v zadnjem trenutku spomniti na prijavo. Lahko pa z veseljem ugotovimo, da so se letos prijavile nekatere šole, ki doslej niso sodelovale in ker sporočajo, da so ustanovile tudi matematične krožke, upamo, da bomo tudi iz njihovih vrst kmalu dobili dobre tekmovalce.

Predtekmovanje je bilo 11. marca na vseh šolah istočasno. Za posamezne razrede so bile naloge za vse šole iste. Izbrala in razposlala jih je tekmovalna komisija, ki deluje v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije in že vrsto let skrbi za popularizacijo matematike in fizike.

Iz poročil o predtekmovanju, ki so ga poslale šole, je razvidno, da je tekmovalo čez 1000 dijakov in od teh jih je nad 200 rešilo več kot polovico nalog. Tekmovalna komisija je med njimi izbrala 131 dijakov, ki so se 8. aprila pomerili na republiškem tekmovanju v Mariboru.

NALOGE-TEKMOVANJA

Naloge s predtekmovanja

1. razred

1. Na pameten način izračunaj vrednost izraza

$$(444445 \,.\, 888885 \,.\, 444442 + 444438) \,/\, 444444^2$$

2. Vsota dolžin katet pravokotnega trikotnika je d, višina na hipotenuzo pa je enaka v. Določi ploščino trikotnika!
3. Na nekem pikniku se je sestalo pet štiričlanskih družin. Vsak udeleženec se je rokoval z vsemi razen s člani svoje družine. Koliko rokovanj je bilo?
4. Dokaži, da za vsako dvojico naravnih števil a in b velja neenakost

$$v(a,b) + D(a,b) - (a + b) \geqq 0$$

pri čemer je $v(a,b)$ najmanjši skupni večkratnik, $D(a,b)$ pa največji skupni delitelj števil a in b! Kdaj velja enakost?

2. razred

1. Pri katerih logaritemskih osnovah x je za poljuben par števil $a,b > 0$:

$$2\log_x((a+b)/2) \leqq \log_x a + \log_x b$$

2. Podan je krog K in daljica AB, ki se dotika kroga v dani točki T. Konstruiraj krogu K očrtani trapez, ki ima za osnovnico daljico AB! Izračunaj ploščino trapeza, če sta dani dolžini $u = \overline{AT}$ in $v = \overline{TB}$!
3. Izračunaj natančno vrednost izraza

$$1 + \sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{7-\sqrt{40}} - \sqrt{6+\sqrt{20}} \quad !$$

4. Izračunaj prostornino kvadra, če so znane dolžine d_1, d_2 in d_3 diagonal mejnih ploskev !

3. razred

1. Pri katerem številu a sta naslednji enačbi hkrati rešljivi

$$\cos x + \sin x = a$$
$$\cos 2x + \sin 2x = a^2$$

2. Dokaži, da vsota korenov enačbe

$$mx^4 - m^2x^3 - x^3 + m^2x + x - m = 0$$

ni manjša od 2, če je m pozitivno realno število !
3. Krogu s polmerom $r=1$ včrtamo pravilni n-kotnik in pravilni $2n$-kotnik. Dokaži, da velja naslednja zveza med ploščino P_n pravilnega n-kotnika in ploščino P_{2n} pravilnega $2n$-kotnika

$$P_{2n} = P_n \cdot \sqrt{2} \,/\, \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4P_n^2/n^2}}$$

4. Določi parameter a tako, da bo neenakost $|(x^2-x+a)/(x^2+x+1)| < 5$ veljala za vsak realni x !

4. razred

1. Trije prijatelji, ki se pišejo Mesar, Kovač in Pečar imajo tele poklice: mesar, kovač in pečar, seveda ne nujno v istem vrstnem redu. O njih smo slišali naslednje tri izjave:

   (a) tovariš Kovač ni pečar
   (b) tovariš Mesar ni kovač
   (c) tovariš Mesar ni pečar

   vendar je le ena med njimi resnična. Ugotovi poklic Kovača, Mesarja in Pečarja!

2. Funkcije T_n, $n=0,1,2,\ldots$ so definirane z zvezo

   $$T_n(x) = \cos(n\alpha)$$

   kjer je $x=\cos\alpha$. Dokaži a) da za vsako naravno število $n>0$ velja: $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ in b) da je za $n=0,1,2,\ldots$ $T_n(x)$ polinom stopnje n !

3. Določi množico točk v ravnini, ki predstavljajo temena družine parabol $y^2+2ay-ax+a = 0$, kjer je a poljubno realno število !

4. Za realno funkcijo $f(x)$, ki je povsod definirana naj velja: $f(0) \neq 0$ in

   $$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$$

   za vsak par x,y. Dokaži a) da je $f(x)$ soda funkcija in b) če je za neki $h\in R$ $f(h)=0$, je $f(x)$ periodična funkcija s periodo $4h$!

Edvard Kramar

Člani aktiva matematikov, fizikov

šole . . . .

KOMISIJI ZA TISK pri DMFA SRS

Ljubljana, Jadranska c. 19, pp 227

N A R O Č A M O

. . . . izvodov lista za mlade matematike, fizike in astronome P R E S E K - VI. letnik, za šolsko leto 1978/79 po din 32.- (posamezna naročila 4o.-din) Naročnino bomo nakazali skupaj ali v . . obrokih najkasneje do . . 197 .

Naročamo še . . . kom. Presekovih značk, . . . kom. srebrnih in . . . kom. bronastih Plemljevih značk; skupaj . . . kom. značk po enotni ceni 1o.-din.

Naročamo še . . . izvodov priročnikov za srednje šole S.Uršič, Štirimestni logaritmi in druge tabele, 1978, 28.-din (maloprodajna cena je 35.-din).

Vprašalnik za knjige Sigma - smo - nismo - bomo - poslali.

Priimek in ime (tiskano)

Podpis

XXII. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Tekmovanje je bilo 8. aprila 1978 v Mariboru v prostorih Visoke ekonomsko komercialne šole. Udeležilo se ga je 131 tekmovalcev iz 22 srednjih šol. Med njimi je bilo le 18% deklet. Tretjina tekmovalcev je prišla v Maribor že v petek. Prespali so v Domu učencev srednjih šol. V soboto, na dan tekmovanja, so prišli še ostali. Podprti z malico so se zbrali v veliki dvorani k otvoritveni slovesnosti. Dobrodošlico jim je izrekel predsednik mariborske podružnice Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS Joso Vukman. Leo Gusel je pozdravil tekmovalce, njihove mentorje in tekmovalno komisijo v imenu delovne skupnosti VEKŠa. Predsednik tekmovalne komisije Jože Vrabec je tekmovalce seznanil s pravili tekmovanja in jim zaželel veliko uspeha pri reševanju nalog. Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

1. razred

1. Izberemo poljubnih 6 zaporednih naravnih števil, večjih od 3. Dokaži, da sta med njimi največ dve praštevili!
2. V ravnini je dana točka S, krožnica s središčem S ter taki točki A in B, da premica skozi A in B seka krožnico, vendar ne gre skozi točko S. Samo s šestilom konstruiraj presečišči krožnice s premico skozi A in B.
3. Dokaži, da je vsak trapez, včrtan krogu, enakokrak!
4. Cev, dolgo vsaj 18 m, želimo razžagati na kose. Prodati je mogoče le kose dolžine
   5 m po 400 din
   7 m po 800 din
   11m po 1300 din
   13m po 1600 din
   Cev razžagamo tako, da je izkupiček največji. Dokaži, da noben kos ne bo dolg 5 m!

2. razred

1. V trikotniku naj stranica a ne bo daljša od 1, stranica b ne daljša od 2 in stranica c ne daljša od 3. Kolikšna je največja mož-

Naslovna stran Biltena, ki so ga izdali požrtvovalni organizatorji tekmovanja v Mariboru.

na ploščina takega trikotnika?

2. Diagonali konveksnega četverokotnika razdelita četverokotnik na štiri trikotnike. Znane so ploščine treh od teh štirih trikotnikov. Izračunaj ploščino četverokotnika!
3. Pri katerih vrednostih x iz zaprtega intervala od 1/4 do 1 se vrednosti funkcij

$$f(x) = x^{1/2} \quad \text{in} \quad g(x) = (32x + 17)/48$$

največ razlikujeta?
4. Na nekem otočju je med vsakima otokoma bodisi letalska bodisi ladijska zveza. Dokaži, da je mogoče obiti vse otoke s prevoznimi sredstvi ene vrste!

3. razred

1. Kocki včrtamo in očrtamo pravilni oktaeder (oglišča kocke so središča mejnih ploskev očrtanega oktaedra, oglišča včrtanega oktaedra so središča mejnih ploskev kocke). V kolikšnem razmerju sta prostornini oktaedrov?
2. Naj bodo p, q in c realna števila in naj velja $p^2 + q^2 = 1$. Izračunaj $\mathrm{tg}(x/2)$, če je

$$p.\sin(x) + q.\cos(x) = c$$

Za katere c je naloga rešljiva?
3. Za poljubno realno število a reši enačbo

$$2x^3 + (a-2)x^2 - (a-2)x + a = 0$$

Kolikšen mora biti a, da bo eden od korenov enačbe enak vsoti drugih dveh korenov?
4. Fantič se nahaja v "izposojenem" čolnu na sredi okroglega ribnika, ko opazi, da ga na bregu ribnika čaka jezni lastnik čolna. Fantič more veslati s hitrostjo 2 km/h in teči po suhem s hitrostjo 12 km/h, medtem ko lastnik čolna preteče le osem kilometrov v eni uri. Dokaži, da fantič lahko privesla do brega in uide lastniku, če le prav izbere pot pri veslanju!

4. razred

1. Privzemimo, da imata funkciji $f(x) = ax^2 + bx + c$ in $g(x) = px^2 + qx + r$ skupno ničlo u. Ugotovi, kdaj ima kvocient $f(x)/g(x)$ limito, ko gre x proti u, in izrazi to limito s koeficienti a, b, c, p, q in r !
2. Naj bosta v zaporedju a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ... člena a_1 in a_2 pozitivna in naj za vsak indeks n, večji od 2 velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokaži, da noben člen tega zaporedja ni enak vsoti osmih zaporednih členov tega zaporedja!
3. Ugotovi, pri katerih realnih številih a ima enačba

$$x^3 - ax + 1 = 0$$

same realne korene!
4. V trikotniku z oglišči T_1, T_2, T_3 naj bo T_4 razpolovišče stranice T_1T_2. Dalje naj bo T_5 razpolovišče daljice T_2T_3, T_6 naj bo razpolovišče daljice T_3T_4 itd. Za vsak indeks n, večji od 3, naj bo torej T_n razpolovišče daljice $T_{n-3}T_{n-2}$ (to je nožišče težiščnice trikotnika $T_{n-3}T_{n-2}T_{n-1}$ iz oglišča T_{n-1}). Zaporedje točk T_n konvergira k neki točki T (tega ni tre-

ba dokazovati). Pri danih točkah T_1, T_2, T_3 konstruiraj točko T !

Po dveh urah in pol napornega razmišljanja so tekmovalci odšli na kosilo, po kosilu pa na izlet v okolico Maribora. Ogledali so si tudi elektrarni Mariborski otok in Falo. Dvajsetčlanska komisija je medtem pregledala in ocenila izdelke tekmovalcev. Ob 17. uri je komisija na majhni svečanosti razdelila diplome, nagrade in pohvale. Vsi pohvaljeni in nagrajeni tekmovalci so dobili diplome in po eno knjigo iz zbirke Sigma. K denarnim nagradam, ki jih podeljuje DMFA SRS sta pridružili nagrade še Založba Obzorja Maribor in tovarna Zlatorog Maribor. Tekmovalci pa so se razvrstili takole:

1. RAZRED:
I. nagrada: ČERNE Darko, COKAN Tomaž in BOŽIČ Brane (vsi I.gimn. Ljubljana);
II. nagrada: BANIČ Marko in ANŽIČ Borut (oba gimn. V. Janežič, Ljubljana), TURK Goran,(gimn. Koper), KALUŽA Matjaž (gimn. M. Zidanška, Mb);
III. nagrada: ČINČ Roman (gimn. Murska Sobota);
Pohvala: AMBROŽIČ Milan (gimn. Nova Gorica), MAJCEN Marjan (gimn. Ravne na Koroškem), ŠPELIČ Miran (gimn. I. Cankar Ljubljana), ŠTEFANIČ Srečko (gimn. Kočevje);

2. RAZRED:
I. nagrada: ROMIH Maks (I. gimn. Ljubljana);
III.nagrada: HVALA Bojan (gimn. Idrija);
Pohvala: PADEŽNIK Jana (gimn. M. Zidanška Maribor), ZUPAN Janez in BAHOVEC Igor (gimn. Ljubljana-Šentvid), RESNIK Samo (I. gimn. Maribor), MATOH Leon (gimn. Novo mesto), LOVŠIN Boštjan (gimn. Koper), CESTNIK Bojan (I. gimn. Ljubljana);

3. RAZRED:
II.nagrada: BREGAR Tone (I. gimn. Ljubljana), JUVAN Rado (gimn. Trbovlje);
III. nagrada: LOVREČIČ Marko (gimn. Koper);
Pohvala: GOMILŠEK Kazimir (gimn. M. Zidanška Maribor), PETROVČIČ Janko (elektroteh. šola Ljubljana), ŠKAPIN Meta (I. gimn. Ljubljana), OBAD Nada (gimn. Koper), KOVIČ Jurij (gimn. V. Janežič Ljubljana), ZORKO Igor in TAKAČ Iztok (oba I. gimn. Maribor);

4. RAZRED:
II. nagrada: GRUDEN Darjo (gimn. N. Gorica), RUSJAN Edmond (I.gimn. Ljub.);
III. nagrada: BRADEŠKO Tončka (I. gimn. Ljubljana);
Pohvala: FLORJANIČ Miha in MUDRI Zdravko (oba gimn. M. Zidanška Maribor), DEMŠAR Franci in MLAKAR Primož (oba I. gimn. Ljubljana);

Tekmovalna komisija je izbrala za zvezno tekmovanje naslednje tekmovalce: Černe Darko, Cokan Tomaž, Božič Brane, Romih Maks, Bregar Tone, Juvan Rado, Gruden Darjo, Rusjan Edmond in Florjanič Miha.

Dijaki med reševanjem

Podeljevanje zasluženih nagrad

Podjetji Konstruktor Maribor in Swaty Maribor ter Kreditna banka Maribor so z naročilom oglasov v biltenu, ki smo ga izdali ob tekmovanju, omogočili pogostitev tekmovalcev in izlet.

Tabelarni pregled udeležbe in uspeha tekmovalcev po šolah:

Šola	razred									
	1.	2.	3.	4.	sk.	I.	II.	III.	pohv.	skupaj
1. Gimn. Brežice	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-
2. Gimn. Celje	-	-	2	1	3	-	-	-	-	-
3. Gimn. Idrija	1	1	-	1	3	-	-	1	-	1
4. Gimn. Koper	1	1	3	-	5	-	1	1	2	4
5. I. gimn. Lj.	4	5	6	13	28	4	2	1	4	11
6. Gimn. I. Cankar Lj.	4	2	3	1	10	-	-	-	1	1
7. Gimn. V. Janežič Lj.	3	-	1	-	4	-	2	-	1	3
8. VII. gimn. Lj.	1	-	3	-	4	-	-	-	-	-
9. Gimn. M. Zidanška Mb.	1	6	2	2	11	-	1	-	4	5
10. Gimn. Trbovlje	-	1	1	1	3	-	1	-	-	1
11. Gimn. M. Sobota	4	4	2	-	10	-	-	-	1	1
12. Gimn. Novo mesto	-	1	-	-	1	-	-	-	1	1
13. Gimn. Nova Gorica	2	1	-	4	7	-	1	-	1	2
14. Gimn. Piran	3	1	1	-	5	-	-	-	-	-
15. Gimn. Ravne na Kor.	1	1	-	-	2	-	-	-	1	1
16. Gimn. Škofja Loka	1	-	-	1	2	-	-	-	-	-
17. Gimn. Jesenice	-	-	-	4	4	-	-	-	-	-
18. Gimn. Stična	1	-	-	1	2	-	-	-	-	-
19. Gimn. Šentvid Lj.	-	3	1	1	5	-	-	-	2	2
20. Elektrotehnična Lj.	-	1	2	1	4	-	-	-	1	1
21. I. gimn. Maribor	-	4	5	3	12	-	-	-	3	3
22. Gimn. Kočevje	3	-	-	2	5	-	-	-	1	1
Skupaj :	31	32	32	36	131	4	8	3	23	38

Marija Munda

NEKAJ NALOG ZA OGREVANJE

Za učence 6., 7. in 8. razreda

1. Preveri, ali so za dani enačbi rešitve pravilne!

   a) $\frac{24,08}{x} + \frac{1}{x} \cdot 0,04.(x + 0,9) = 241,2$ za $x = 0,1$

   b) $\frac{3}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 3} = \frac{x + 9}{x^2 - 9}$ za $x = \frac{3}{2}$

2. Poljubnemu pravokotnemu trikotniku včrtaj kvadrat tako, da eno oglišče kvadrata leži v vrhu pravega kota trikotnika.

3. Kaj se zgodi s količnikom, če deljenec štirikrat povečamo, deljitelj pa zmanjšamo za njegovo petino?

4. Kolika je ploščina pravokotnika, ki ima diagonalo dolgo 20 cm in velikost kota med diagonalami je 30^0?

5. Svetilka z žarnico stane 110 din. Svetilka je za 100 din dražja od žarnice. Koliko stane svetilka?

6. Za koliko procentov se spremeni ploščina pravokotnika, če stranici povečamo za 50% ?

7. Biciklist je v eni uri in 12 minut prevozil 2/7 razdalje iz kraja *A* v kraj *B*. V kolikšnem času je pri enaki hitrosti prevozil polovico poti?

8. Širina pravokotnika, ki ima obseg 156 m, je 5/8 njegove dolžine. Kolika je ploščina pravokotnika?

9. Kocki povečamo rob za njegovo polovico.
   a) Kolikokrat se je povečala prostornina kocke?
   b) Za koliko se je povečala površina kocke?

10. Dva vlaka vozita v nasprotni smeri vsak po svojem tiru. Prvi vlak vozi s hitrostjo 72 km/h, drugi 90 km/h. Potniki v drugem vlaku so opazili, da je prvi vlak prevozil mimo v 3 sekundah. Koliko je dolg prvi vlak?

Za učence 7. in 8. razreda

11. Kako izračunamo ploščino pravokotnika, če je dana diagonala d in kot med njima 45° (60°) ?

12. Dve premici p in q se sekata pod kotom 60°.
    a) načrtaj krožnici k_1 in k_2 tako, da se dotikata premic in dotikata med seboj.
    b) Izračunaj ploščino trapeza $T_1T_2T_3T_4$, ki ima za krake odseke danih premic-tangent.

13. Dan je ulomek $\frac{a + 3b}{3a + b}$
    Za katero število moramo povečati števec in zmanjšati imenovalec, da dobimo 1 ?

14. Krogu s polmerom $r = 2$ cm očrtaj enakokraki trapez. Velikost kota ob daljši osnovnici je 60°. Nato izračunaj obseg in ploščino tega trapeza.

15. Iz kroga s polmerom $r = 6$ cm izrežemo lik, ki ga sestavljata enakokraki trikotnik ABC s kotom $\sphericalangle C = 30^\circ$ in krožni odsek, ki ima tetivo AB za osnovnico trikotnika. Izračunaj ploščino sestavljenega lika.

Za učence 8. razreda

16. Reši enačbo: $100 : (((7x + 24) : 5) . 4 + 36) = 1$

17. Iz enakostraničnega valja s polmerom $r = 1$ dm izsekamo pokončno tristranično prizmo, ki ima za osnovno ploskev enakokraki trikotnik ABC s kotom ob osnovnici 75°. Izračunaj prostornino prizme.

18. Iz kroga s polmerom $r = (1 + \sqrt{3})$ izrežemo mrežo pravilne štiristranične enakorobne piramide. Izračunaj prostornino.

19. Iz kocke z robom a izsekamo kvadratno piramido, ki ima vrh v središču zgornjega roba. Kolika je površina piramide in kolika je vsota vseh robov?

20. Točka E je središče stranice AB kvadrata $ABCD$. Določi v kakšnem razmerju dolžin DE deli diagonala AC.

Pavle Zajc

REŠITVE NALOG

NALOGE IZ ARHIVA - rešitve iz PV/4 str. 206

1. Števila v prvem stolpcu dobimo tako, da seštejemo enakoležni števili v drugem in tretjem stolpcu. Števila v prvi vrstici pa so vsota enakoležnih števil v vseh ostalih vrsticah tabele. Zato ima izpolnjena tabela obliko:

141	89	52
28	19	9
27	17	10
28	17	11
29	18	11
28	18	11

2. Za trak potrebujemo dvakrat po 20 cm, dvakrat po 10 cm, štirikrat po 5 cm in še 40 cm za pentljo. Torej potrebujemo 120 cm dolg trak.

3. Visok bi bil 1,5 m.

4. Prostornine podobnih teles so v enakem razmerju, kot kubi njihovih višin. Če privzamemo, da sta imela velikan in pritlikavec enako gostoto, je bil velikan 343-krat težji od pritlikavca.

5. Če ura odbije 6 udarcev v 5 sekundah, odbije 12 udarcev v 11 sekundah.

6. Npr. 1 = 148/296 + 35/70.

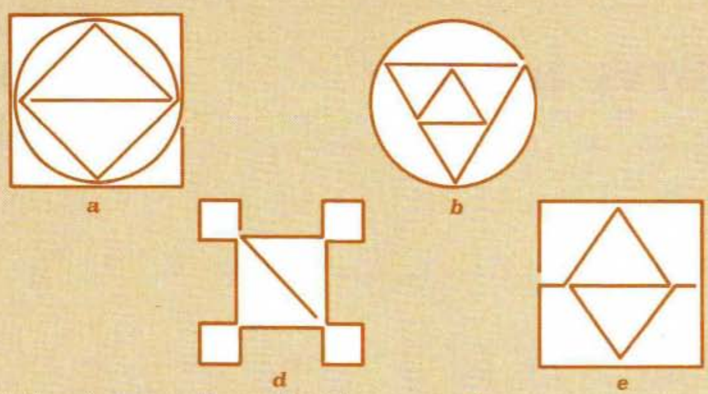
7. Npr. 10 = 9 + 99/99.

8. Npr. 100 = 111 - 11.

9. Takrat je imela 36 rac.
   Preizkus:

rešitev	... 36
še enkrat	... 36
še pol	... 18
še četrt	... 9
še ena	... 1
Skupaj	100

10.



Lika c) se ne da narisati z eno potezo.

11. Števila 5, 10, 15, ..., 100 dajo po eno ničlo ... 20 ničel
Števila 25, 50, 75 in 100 dajo še po eno ničlo ... 4 ničle
Skupaj: 24 ničel
V številu 1 X 2 X 3 X ... X 99 X 100 je na zadnjih 24 mestih povsod ničla.

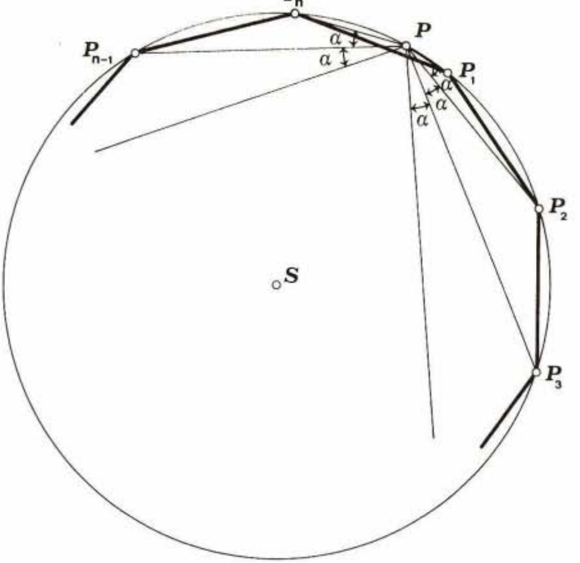
12. Denimo, da na začetku prenesemo n črnih kroglic iz prvega zaboja v drugi. Potem iz drugega zaboja vzamemo n kroglic, p belih in q črnih in jih vrnemo v prvi zaboj. $p + q = n$. V prvem zaboju imamo $100 - n + q = 100 - p$ črnih in p belih kroglic. V drugem zaboju imamo pa $100 - p$ belih in $n - q = p$ črnih kroglic. V prvem zaboju imamo na koncu ravno toliko belih, kot je v drugem zaboju črnih kroglic.

13. Če od vsote ploščin trikotnikov P_1PP_2, P_2PP_3, ... , $P_{n-1}PP_n$ odštejemo ploščino trikotnika P_nPP_1, dobimo ravno ploščino S n-kotnika, ki je stalna in neodvisna od položaja točke P. V prvih n trikotnikih so koti pri P vsi enaki $\alpha = \pi/n$, v trikotniku P_nPP_1 pa je kot pri P ravno $\pi-\alpha$. Če ploščine trikotnikov izrazimo s sinusi kotov pri P, dobimo za ploščino S izraz:

$$S = \overline{P_1P}\cdot\overline{PP_2}\cdot\sin\alpha + \ldots + \overline{P_{n-1}P}\cdot\overline{PP_n}\cdot\sin\alpha - \overline{P_nP}\cdot\overline{PP_1}\cdot\sin(\pi-\alpha).$$

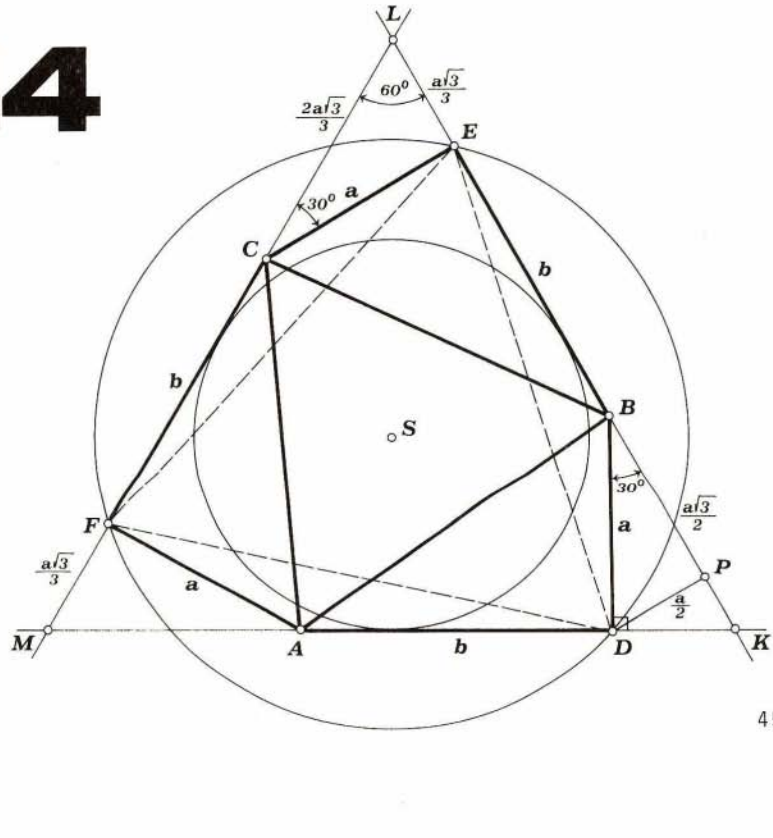
Ker je $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, lahko S delimo s $\sin\alpha$ in na desni strani dobimo ravno naš izraz. Vrednost izraza je stalna, saj je enaka $S/\sin(\pi/n)$.

13



P_n
P
P_{n-1}
P_1
P_2
P_3
a
a
a
a
a
S

14



L
60^0
$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$
$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
E
30^0
a
C
b
b
S
B
30^0
$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
F
a
$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
P
a
$\frac{a}{2}$
M
A
b
D
K

14. Iz slike 6 je razvidno, da je ploščina sestavljena iz štirih kosov: trije pravokotni trikotniki s ploščinami po $ab/2$ in enakostranični trikotnik s ploščino $c^2\sqrt{3}/4$. Ker je $c^2 = a^2 + b^2$, je ploščina P lika enaka:

$$P = 3ab/2 + (a^2 + b^2)\sqrt{3}/4 = 163{,}18 \text{ cm}^2$$

Obseg lika je $O = 3(a + b) = 51$ cm.

Polmer včrtanega kroga dobimo tako, da izračunamo polmer včrtanega kroga enakostraničnega trikotnika KLM. Potrebujemo torej dolžino stranice tega trikotnika. Računali bomo dolžino stranice LM. Ker sta trikotnika CEL in AFM skladna, je dovolj, da opazujemo le enega. Ker sta kota FCA in BDE komplementarna in meri kot ACB 60°, meri kot CEL ravno 30°. Trikotnik CEL je polovica enakostraničnega trikotnika. Ker poznamo dolžino stranice CE, lahko izračunamo: $\overline{CL} = 2a\sqrt{3}/3$, $\overline{EL} = \overline{MF} = a\sqrt{3}/3$. Tako dobimo: $\overline{ML} = \overline{MF} + \overline{FC} + \overline{CL} = b + a\sqrt{3}$. Na risbi smo upoštevali, da je a dolžina krajše stranice, zato a in b v obrazcu za $\overline{ML}$ ne nastopata simetrično. Polmer včrtanega kroga je:

$$r = \overline{ML}\sqrt{3}/6 = (b\sqrt{3} + 3a)/6 = 5{,}96 \text{ cm}$$

Polmer očrtanega kroga pa je enak polmeru očrtanega kroga trikotnika DEF. Izračunali bomo dolžino stranice DE. Pravokotni trikotnik DPB je polovica enakostraničnega trikotnika s stranico DB. Zato je $\overline{DP} = a/2$ in $\overline{PB} = a\sqrt{3}/2$. Iz pravokotnega trikotnika DPE določimo DE s Pitagorovim izrekom:

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{PE}^2} = \sqrt{(a/2)^2 + (b + a\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$$

Polmer očrtanega kroga je:

$$R = (\overline{DE})\sqrt{3}/3 = (a^2 + b^2)/3 + ab/\sqrt{3} = 9{,}54 \text{ cm}$$

Tomaž Pisanski

BISTROVIDEC

REZANJE

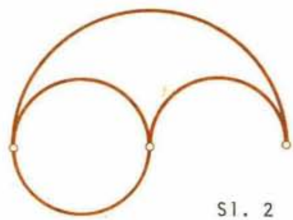
Pred časom je Presek objavil tole nalogo:

Razreži narisani lik na dva ploščinsko enaka dela! (Slika 1) Glej Presek IV/1, str. 35 in str. 61!

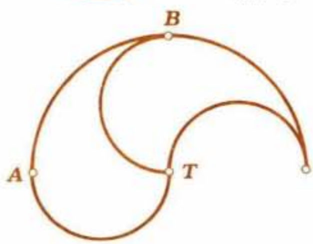
Objavljena je bila rešitev, ki jo prikazuje slika 2. Brez težav se prepričamo, da je rezanje na sliki 3 tudi rešitev naloge. Lika na sliki 3 sta celoskladna in je potemtakem seveda ploščina enaka. Še več, eno polovico lahko premaknemo po ravnini tako, da pokrije drugo. Če zavrtimo lik *B* okoli točke *T* za pravi kot (90^0) v nasprotni smeri urinega kazalca, pokrije lik *A*.

Zdaj pa poskusite rešiti nalogo za like na slikah 4 - 11. Vsakega od njih razdelite na dva površinsko enaka dela. Po možnosti naj bosta skladna. Če pa znate razdeliti na skladna dela tako, da lahko eno po

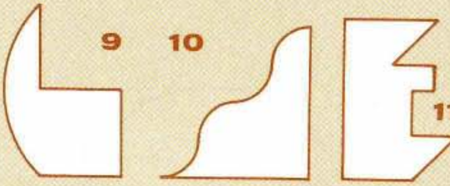
Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

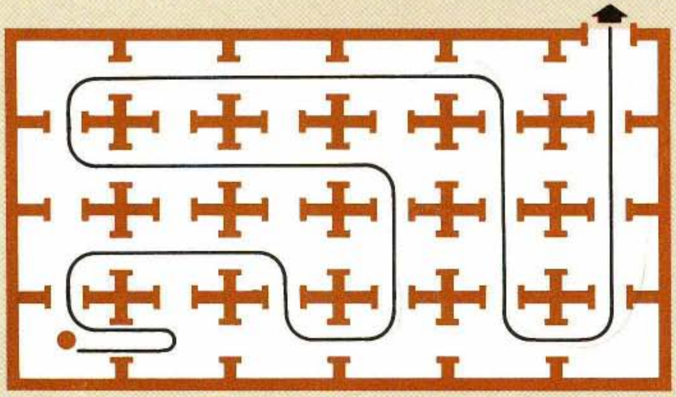


lovico zavrtimo v drugo, določite še točko, okoli katere morate polovico lika zavrteti in kot, za katerega jo morate zavrteti, da pokrije drugo polovico.

Tomaž Pisanski

LABIRINT - rešitev iz P/3, str. 176

Iskana pot je na sliki:



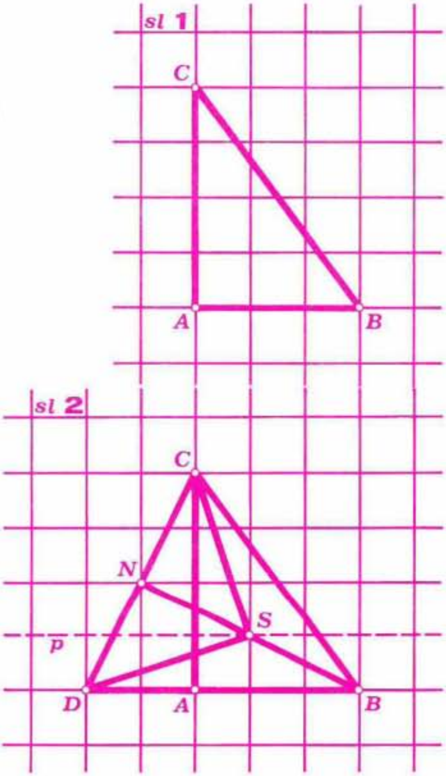
(Seveda to *ni* edina rešitev!) Bralec je gotovo opazil, da je zvijača ravno v tem, da se paznik enkrat vrne v *svojo* sobo. To ni proti pravilom, saj naloga zahteva le to, da vsakega *jetnika* (!) obišče natanko enkrat.

Dušan Repovš

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK NA VRTU TETE AMALIJE

Polonca in Tomaž se igrata na vrtu tete Amalije. Tla so lepo tlakovana z velikimi kvadratnimi kamnitimi ploščami. Polonca teka za mačko, Tomaž pa je zabil v presledke med ploščami tri količke, na sliki 1 so označeni z A, B, C.



"Polonca", pokliče Tomaž, "glej,med količkoma A in B so tri plošče, med A in C pa štiri. Kaj misliš, koliko sta vsaksebi količka B in C; za koliko dolžin plošče?"

Polonca pusti mačko in pride k Tomažu. "Ja, kako naj vem, ko po bi bilo treba meriti postrani in ne kar vzdolž stranic plošč. Menda vendar ne misliš, da bom izdrla ploščo in šla z njo merit med tvoje količke?!"

"Ne, seveda ne," se je zasmejal Tomaž in zabil še tri količke med plošče - slika 2 jih kaže, označeni so s črkami S, D, N: +Ampak glej, trikotnik DSC je prav gotovo enakokrak. Priznaš?"

"No, seveda", potrdi Polonca,

"saj sta stranici DS in SC diagonali dveh enakih pravokotnikov in zato enaki."

"Prav," nadaljuje Tomaž, "potem sta pa trikotnika DSN in CSN skladna."

"In pravokotna", ga dopolni Polonca, "oba imata pravi kot pri N."

"V redu," je zadovoljen Tomaž, "zdaj mi moraš pa še verjeti, da leže količki B, S, N vsi na eni premici!"

Polonca za trenutek pomisli, nato reče: "Drži, kar poglej kota, ki ju tvori premica p skozi točko S, vzporedna premici DAB, z daljicama BS in SN."

"In če je tako," povzame Tomaž, "sta trikotnika BND in BNC skladna, saj se ujemata v pravem kotu pri N, stranico BN imata skupno, stranici CN in DN sta enaki ..."

"Zato sta enaki tudi stranici BC in BD," zdeklamira Polonca, "kar pomeni, da sta količka B in C za pet dolžin plošče vsaksebi."

Epilog. Tomaž in Polonca sta pokazala kar precej znanja geometrije, da sta ugotovila razdaljo med količkoma; pri tem pa je treba priznati, da nista uporabila znamenitega izreka starogrškega modreca ...

Peter Petek

MIHEC JE PRIŠEL danes zopet prepozno v šolo. Takole se je opravičeval: "Veste, šica, nisem mogel priti prej. Zunaj je grozna poledica. Ko stopiš en korak naprej, ti zdrsne za dva koraka nazaj." Tovarišica je ostrmela: "Mihec, potem pa je pravi čudež, da si zdaj tu!"

Dragi bralci, ali je Mihec lahko prišel v šolo brez čudeža, pri tej hudi poledici?

(Odgovor: Lahko, le obrniti se je moral in iti proti domu.)

Marija Munda

PREMISLI IN REŠI

Na zastavljeno nalogo iz PRESEKA V/3 smo prejeli 65 odgovorov.

Oglejmo si rešitev, ki jo je poslala Vida Rus: "Pravilni odgovori na izpitu so: *da*, *ne*, *da*, *da*, *ne*(1). Ta vrstni red ustreza vsem opisanim pogojem. Ključna zanka je prav v drugem odgovoru. Če bi predpostavili, da je drugi odgovor *da*, potem bi imeli tri možnosti:

ne, *da*, *ne*, *da*, *da* (2)
da, *da*, *ne*, *da*, *ne* (3)
ne, *da*, *da*, *ne*, *da* (4)
Ti odgovori zadostijo prav tako vsem pogojem razen enemu. Ne zagotavljajo nam pravilne odgovore na vseh pet vprašanj, ker imamo možnost izbire.

Nekdo od reševalcev je pripomnil, da odgovore bereš od leve proti desni ali obratno, od zgoraj navzdol ali obratno, odvisno pač, v kateri državi živiš. Oglejmo si po vrsti gornje odgovore v obratnem redu: ne, da, da, ne, da (1); da, da, ne, da, ne (2); ne, da, ne, da, da (3) in da, ne, da, da, ne (4), ki postane sedaj pravilni odgovor. Zanimivo, kajne!

Med odgovori je bilo 9 nepravilnih. Trinajst reševalcev je poslalo poleg pravilnega odgovora še enega s trdilnim odgovorom *da* na drugo vprašanje in pripomnilo, da imamo pač dve možnosti.

Pravilno so rešili:

Marjeta Adamič, o.š. Prežihov Voranc, Ljubljana; Breda Bezjak, gimnazija Miloša Zidanša, Maribor; Janka Bodlaj, gimnazija Kranj; Rado Bumbar, o.š. Staneta Žagarja, Kranj; Mirjam Cvelbar, o.š. Jože Potrč, Ljubljana; Marinka Dragonja, Ljubljana; Breda Drinovc, gimnazija Kranj; Andreja Habjan, Suhadole, Komenda; Gorazd Habjan, gimnazija, Ljubljana; Neli Habjan, o.š. Žiri; Janez Horvat, gimnazija,Kranj; Renato Horvat, o.š. Mirana Jarca, Ljubljana; Janez Hosterih, gimnazija M. Zidanška, Maribor; Stojan Ihanec, TSEŠ, Trbovlje; Andrej Jakobčič, STŠ, Novo mesto; Mojca Janžekovič, gimnazija Novo mesto; Matjaž Kavčič, VII. gimnazija, Ljubljana; Dejan Kerčič, o.š. Prežihov Voranc, Maribor; Marko Kikelj, gimnazija, Tolmin; Tanja Kocjan, o.š. Angel Besednjak, Maribor; Terezija Kolenc, gimnazija Trbovlje; Karmen Kompara, gimnazija Ajdovščina; Romana Kropec, Rogaška Slatina; Marko Lampe, Velenje; Andraž Legat, gimnazija, Kranj; Tanja Lesničar, gimnazija, Velenje; Slavko Margot, vojaška gimnazija, Ljubljana; Andreja Meliva, o.š. Slovenske Konjice; Greta Mermelj, o.š. Slovenske Konjice; Lučka Mlinar, gimnazija, Trbovlje; Barbara Motnikar, o.š. Fr. Albreht, Kamnik; Polona Novak, I. gimnazija, Ljubljana; Marija Oražem, gimnazija, Kočevje; Gordana Plazinič, gimnazija Šentvid, Ljubljana; Igor Poberaj, gimnazija Poljane, Ljubljana; Vida Rus, gimnazija, Kočevje; Irena Šifrar, o.š. Franc Lešnik - Vuk, Slivnica pri Mariboru; Marija Šolar, Sp. Dobrava, Kropa; Igor Šorli, Stara Vas, Žiri; Janez Tomažič, Petrovče; Matjaž Turnšek, TŠ Celje;

Bojan Videtič, gimnazija, Črnomelj; Majda Zupanc, TŠ Celje.

Izžrebani so bili: Andraž Legat, gimnazija, Kranj; Matjaž Kavčič, VII. gimnazija, Ljubljana; Terezija Kolenc, gimnazija, Trbovlje.

Za nagrado prejmejo knjigo: Jože Grasselli: Osnove teorije števil iz zbirke SIGMA.

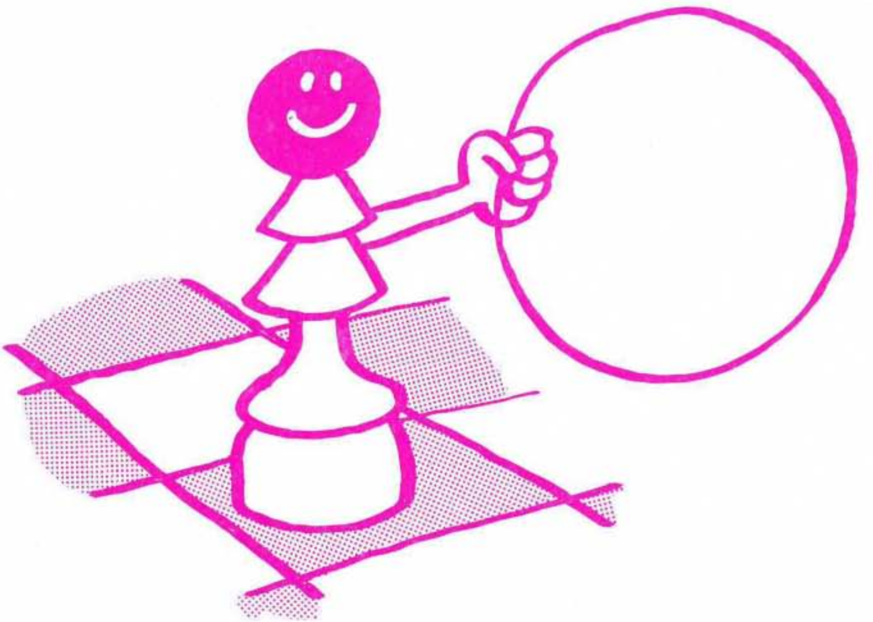
Rešitev na tole šahovsko nalogo, ki pa ne zahteva znanja šaha (str. 50), pričakujemo do 10. oktobra 1978.

Jože Dover

ČRNA KROŽNICA*

Na običajni šahovski deski poskusi načrtati krožnico s čimvečjim polmerom, tako da tvoja krožnica ne seka niti enega belega polja!

Dušan Repovš



* Karikaturo k članku je prispeval *Božo Kos*

PISMA BRALCEV

Vera Stancar iz Zagorja ob Savi nam je napisala dolgo pismo poleg poslane rešitve in je med drugim poudarila:
Strinjam se z nekaterimi bralci, ki bi želeli letno več številk Preseka. Presek je zelo zanimiva in razgibana revija, zato se potrudite, da bo takšen tudi ostal.

Veri in vsem bralcem bi radi povedali naslednje: Naše delo ob urejanju Preseka nam bo zelo olajšano, kadar bodo bralci pošiljali pošto, v kateri bodo rešitve nalog na posebnem listu in prispevek za Pisma bralcev na posebnem; lahko pa je vse v isti ovojnici. Vera, glede razgibanosti revije se pa moramo truditi vsi. Ali nam lahko pošlješ kakšen prispevek? Hvala!

\- - -

Marica Hrovat iz Šmarij pri Jelšah pravi:
Lepo pozdravljeni! Najprej vam želim veliko uspeha pri urejanju našega lista. Z revijo si krajšam prenekatero uro. Posebno všeč mi je rubrika Premisli in reši. Tudi jaz si želim, da bi Presek izhajal pogosteje, vendar vem, da ne morete vse naenkrat stresti iz rokava. Vaša zvesta bralka Marica.

Hvala ti za lepe misli in za razumevanje, da se ob vsem prizadevanju do sedaj ni dalo priti do pogostejšega izhajanja Preseka. Potrudili se bomo, da bo v bodoče vedno izhajalo 5 številk na leto. Marica, pridno rešuj naloge in nam piši še kdaj!

\- - -

Irena Lamovec iz Ljubljane tudi hvali kot mnogi drugi Presek, pravi pa:

V letošnjih številkah sem navdušena predvsem nad slikami iz narave, ki jih lahko najdemo na začetku in na koncu revije. Neverjetno, kakšna čuda je zmožna ustvarjati narava!

Zadovoljni smo, da smo te razveselili tudi s takimi okraski v Preseku. Hvala ti za lepe želje in za poslano rešitev.

\- - -

Andreji Habjan iz Komende bi radi samo odgovorili na njeno zaupno pismo. Veš Andreja, če kdo ljubi umetnost, postane umetnik in če imaš rada matematiko, lahko postaneš matematik. Vso srečo ti želimo na tej poti!

\- - -

Mojca Janžekovič iz Novega mesta pravi, da jo kot mnoge druge bralce moti, da Presek ne izhaja tako pogosto, kot bi si želela, je pa zato tako bogate vsebine.

Hvala Mojca za lepe želje in za odkritje bogastva v vsebini Preseka. Tudi mi ti želimo uspehov pri pridobivanju znanja.

\- - -

Sonja Dolžan iz Litije nam je poslala naloge. Hvala Sonja. Praviš, da si prvo leto naročena na Presek in upamo, da boš sčasoma prišla do podobnega spoznanja kot naš bralec Matjaž iz Celja.

Mirko Šmid iz Železnikov, Magda Samec iz Jurkloštra, Andreja Kovačič iz Maribora in Bojana Lunar iz Radovljice kar vsi štirje šestošolci so nam pisali o skupni želji, naj bi bilo v Preseku več nalog primernih za 6. razred. Vsi nam želijo kar največ uspehov. Bojana nam pa želi še veliko dobre volje pri sestavljanju nalog za šeste razrede.

VERA LOVRENČIČ iz Kopra piše:

Obiskujem tretji letnik gimnazije. Na Presek sem naročena že štiri leta. Poudariti moram, da je Presek vedno boljši, tako po pestrosti, kakor po zanimivostih iz področja matematike, fizike in astronomije.

Taka ugotovitev nam bo gotovo v vzpodbudo pri delu, ker si prav v tem prizadevamo, kar si ti Vera ugotovila. Pri reševanju nalog ti želimo uspehov in zadovoljstva!

\- - -

ALBINA HAMER iz Celja nam je napisala takole:

Lepo pozdravljeni! Pišem vam prvič, čeprav sem na Presek naročena že štiri leta, od osmega razreda osnovne šole. Sedaj sem na pedagoški gimnaziji v Celju. Vaša revija mi je zelo všeč. Čeprav v začetku še nisem tako z zanimanjem sledila vsebini, pa zdaj, ko ogledujem stare Preseke, ugotavljam, da se je v marsičem spremenil. Boljši je! Lep pozdrav!

Albina, hvala ti tudi za tri poslane naloge, zlasti pa, da si upoštevala naše sporočilo in nam poslala kopije in da si pazila na primerno obliko, ki nam zelo pomaga za hitrejše pregledovanje. Ko pregleduješ Preseke iz prejšnjih let, nam lahko sporočiš kakšno svojo konkretno ugotovitev. Piši nam še kdaj!

\- - -

IRENA SAVŠEK iz Trbovelj nam je poslala pismo:

Spoštovani! Kot učenka 7. razreda z zanimanjem prebiram in rešujem naloge iz Preseka. Najbolj sta mi všeč matematika in fizika, seveda pa ne gre prezreti tudi astronomije. Hvala vam za tako dobro revijo. Želim vam še veliko uspehov pri urejanju.

Draga Irena, upamo, da boš tudi v bodoče našla veselje ob Preseku. Hvala tudi tebi za lepo obliko pisma, zlasti pa za iskrene misli.

Jasni Mihevc iz Logatca, Maji Arh ob Bohinjskem jezeru, Knapelj Majdi iz Pivke, Jolandi Osolin iz Kamnika, Damjani Pavlinec iz Ljubljane, Damjanu Blatniku iz Šoštanja, Mihaeli Zupan iz Sevnice in Urošu Habiču iz Litije se zahvaljujemo za prijazne besede ob poslanih nalogah, katere so zavzeto reševali. Le tako naprej, mi pa bomo poskušali ustreči vašim željam.

Sonja Dolžan iz Litije nam je poslala naloge. Hvala Sonja. Praviš, da si prvo leto naročena na Presek in upamo, da boš sčasoma prišla do podobnega spoznanja kot naš bralec Matjaž iz Celja.

Obljubljamo vam, da se bomo potrudili ustreči vaši želji in želji vseh ostalih šestošolcev.

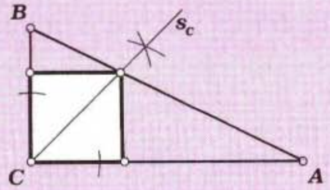
Matilda Lenarčič

REŠITVE NALOG

NEKAJ NALOG ZA OGREVANJE

rešitve s str. 51

2.



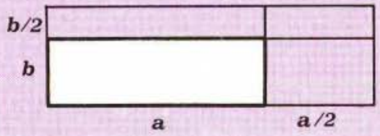
3. 5-krat

4. $p = \frac{d^2}{2}$

5. 105 din

6. Pomagaj si s skico!
   Za 125 %

6.



7. 2 uri 6 minut

8. $p = 1440\ m^2$

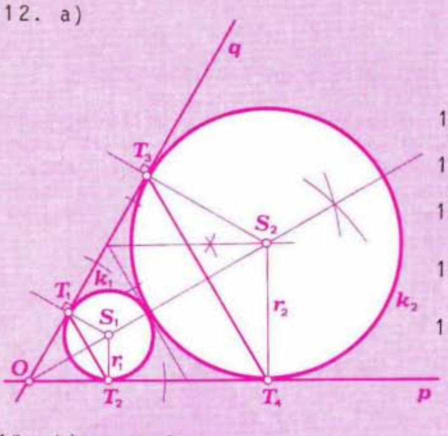
9. a) 3,375-krat večji

b) za $\frac{5}{4} \cdot P$

10. Vlak je dolg 125 m

11. $p = d^2\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\left(p = d^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

12. a)

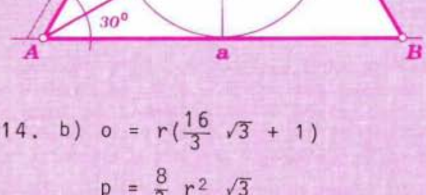


12. b) $r_2 = 3r_1$

$p = 6r_1^2\sqrt{3}$

13. $x = a - b$

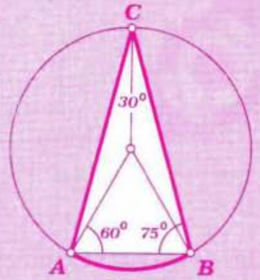
14. a)



14. b) $o = r\left(\frac{16}{3}\sqrt{3} + 1\right)$

$p = \frac{8}{3} r^2 \sqrt{3}$

15.



15. $p = r^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

16. $x = 8$

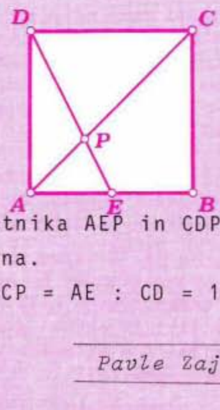
17. $V = r^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

18. $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$

19. $P = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$

Vsota robov: $(7a + a\sqrt{5})$

20.



Trikotnika AEP in CDP sta skladna.

AP : CP = AE : CD = 1 : 2

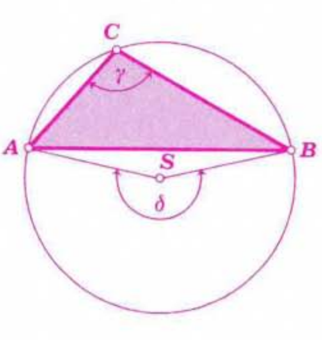
Pavle Zajc

REŠITVE NALOG

O TRIKOTNIKU IN TOČKI - rešitev naloge iz druge številke 1977/78

I. Prepričajmo se najprej, da pri ostrokotnem trikotniku središče očrtanega kroga leži znotraj trikotnika. To je enakovredno trditvi: če pri nekem trikotniku ΔABC leži središče S očrtanega kroga na robu ali zunaj ΔABC, potem je ΔABC pravokoten ali topokoten. Dokažimo to trditev in v ta namen vzemimo ΔABC, pri katerem je S na njegovem robu ali zunaj njega. Tedaj velja za eno od stranic, npr. za AB, da nasprotno oglišče (C) in središče S nista na istem bregu nosilke (Sl. 1). Za središčni kot δ, ki pripada obodnemu kotu $\gamma = \sphericalangle C$, sledi od tod: $\delta \geqq 2R$. Potem je $\gamma = \delta/2 \geqq R$, kar pomeni, da je trikotnik ΔABC pravokoten ali topokoten. Tako smo dokazali našo trditev - s tem pa tudi trditev iz prvega stavka.

sl. 1



II. Vzemimo zdaj poljuben ostrokoten trikotnik ΔABC v dani ravnini Π; središče trikotniku očrtanega kroga označimo z S, njegov polmer pa z r. V ravnini Π izberimo poljubno točko T (na Sl. 2 je T slučajno znotraj ΔABC) in dokažimo, da ne morejo biti razdalje $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ vse tri manjše od r. Dokazati moramo, da je največja od teh treh razdalj večja ali enaka r.

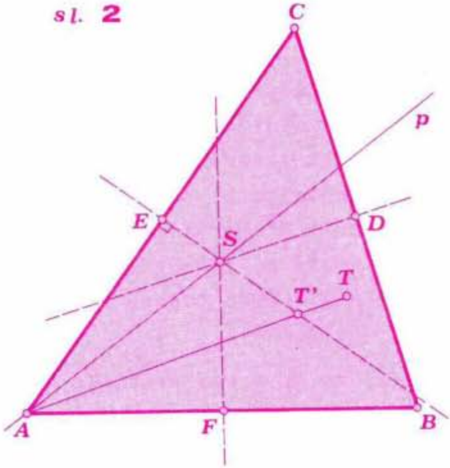
Recimo, da je $\overline{AT}$ največja od razdalj $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$, torej $\overline{BT} \leqq \overline{AT}$ in $\overline{CT} \leqq \overline{AT}$. (S tem privzetkom ne bo naše dokazovanje nič manj splošno, saj bi potekalo povsem enako, če bi bila največja razdalja $\overline{BT}$ ali $\overline{CT}$.) Ker je $\overline{BT} \leqq \overline{AT}$, mora daljica AT sekati simetralo stranice AB; ker je $\overline{CT} \leqq \overline{AT}$, seka daljica AT še simetralo stranice AC; pri tem je možno, da sama točka T leži na eni ali drugi simetrali.

Naj bo p premica skozi točki A in S. Ker je ΔABC ostrokoten, je S znotraj ΔABC, zato premica p seka stranico BC in tako sta oglišči B, C na nasprotnih bregovih premice p. Glede na to imamo naslednje tri možnosti za lego točke T z ozirom na premico p: lahko je $T \in p$, lahko je T na istem bregu premice p kakor B (Sl. 2), ali pa je T na istem bregu premice p kakor C.

Naj bo najprej $T \in p$. Ker daljica AT seka simetrali stranic AB in AC, mora tedaj S ležati na AT. Od tod sledi, da je $r = \overline{AS} \leqq \overline{AT}$; enakost $r = \overline{AT}$ imamo le v primeru, če smo izbrali $T = S$.

Obravnavi drugih dveh možnosti sta si čisto podobni, zato vzemimo le prvo od obeh: T je na istem bregu premice p kakor oglišče B. V tem primeru označimo s T' presečišče daljice AT s simetralo stranice AC (pri tem je lahko tudi $T' = T$). Ker je $T' \in AT$, je T' spet na istem bregu premice p kakor oglišče B. Ker je razpolovišče E stranice AC na istem bregu p kakor C, sta tedaj točki E in T' na nasprotnih bregovih premice p. Zato sta kota $\sphericalangle ASE$ in $\sphericalangle AST'$ suplementarna. Trikotnik ΔASE ima pravi kot pri E, zato je $\sphericalangle ASE$ oster, s tem pa je $\sphericalangle AST'$ top. V trikotniku $\Delta AST'$ je torej $\sphericalangle AST'$ največji kot, zato je $\overline{AS} < \overline{AT'}$ in s tem $r = \overline{AS} < \overline{AT'} \leq \overline{AT}$, se pravi $r < \overline{AT}$.

sl. 2



Pri obravnavi različnih možnosti smo tako ugotovili, da je bodisi $r \leq \overline{AT}$ bodisi celo $r < \overline{AT}$; to pomeni, da je vedno $r \leq \overline{AT}$. Največja od razdalj $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ je torej večja ali enaka r in s tem je naša trditev dokazana.

III. Naša trditev obvelja tudi, če namesto ostrokotnega vzamemo pravokoten trikotnik ΔABC. Če je pri C pravi kot, je središče S trikotniku očrtanega kroga ravno razpolovišče stranice AB; njegov polmer je tako $\overline{AB}/2$. Ni težko dokazati: za poljubno točko T v ravnini trikotnika ΔABC ne more biti hkrati $\overline{AT} < \overline{AB}/2$ in $\overline{BT} < \overline{AB}/2$.

Če je trikotnik ΔABC topokoten, pa zanj naša trditev ne velja več. Tedaj namreč lahko v ravnini trikotnika najdemo takšno točko T, ki je od vsakega izmed oglišč A, B, C oddaljena za manj kot r (= polmer očrtanega kroga). Če je topi kot pri C, naj bo T npr. razpolovišče stranice AB. Ker imata trikotnika ΔAST in ΔBST prava kota pri T, je $\overline{AT} < \overline{AS} = r$ in $\overline{BT} < \overline{BS} = r$. Ker sta točki C in S na nasprotnih bregovih nosilke stranice AB, ima trikotnik ΔCST top kot pri T in zato je $\overline{CT} < \overline{CS} = r$.

IV. Naj bo ΔABC poljuben ostrokoten ali pravokoten trikotnik v dani ravnini Π in naj bo T poljubna točka v prostoru. Tudi v tem primeru ne morejo biti razdalje $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ vse tri manjše od polmera r trikotniku očrtanega kroga. Če T ni v ravnini Π, se o tem prepričamo takole. Naj bo N nožišče pravokotnice iz točke T na ravnino Π. Ker je $N \in \Pi$, že vemo, da razdalje $\overline{AN}$, $\overline{BN}$, $\overline{CN}$ niso vse tri manjše od r. Ker pa imajo trikotniki ΔANT, ΔBNT, ΔCNT prave kote pri N, je $\overline{AN} < \overline{AT}$, $\overline{BN} < \overline{BT}$ in $\overline{CN} < \overline{CT}$. Zato tudi razdalje $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ ne morejo biti vse tri manjše od r.

Janez Rakovec

REŠITEV NALOGE "SREDIŠČE KROŽNICE" s str. 31

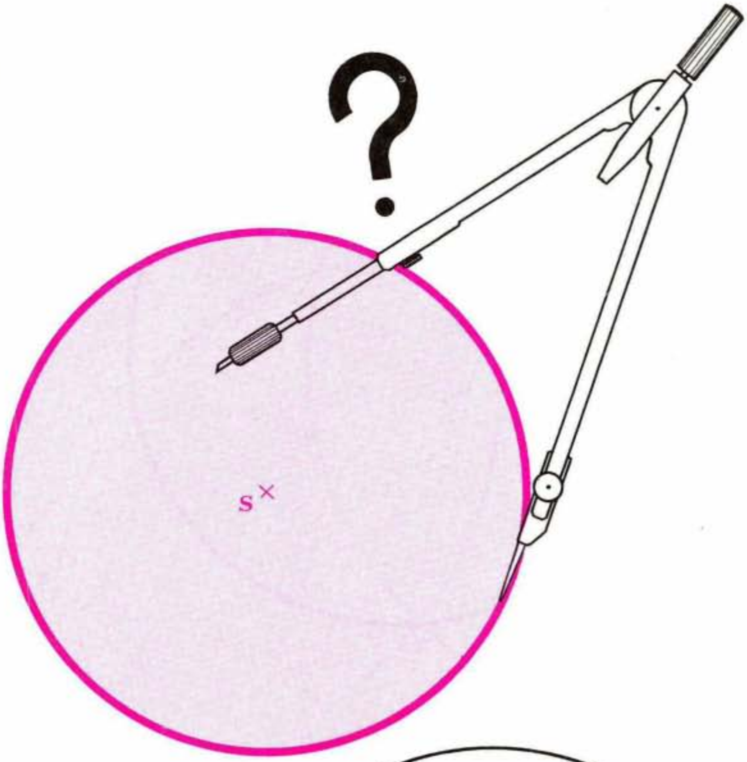
Konstrukcija: Dano krožnico označimo s K.

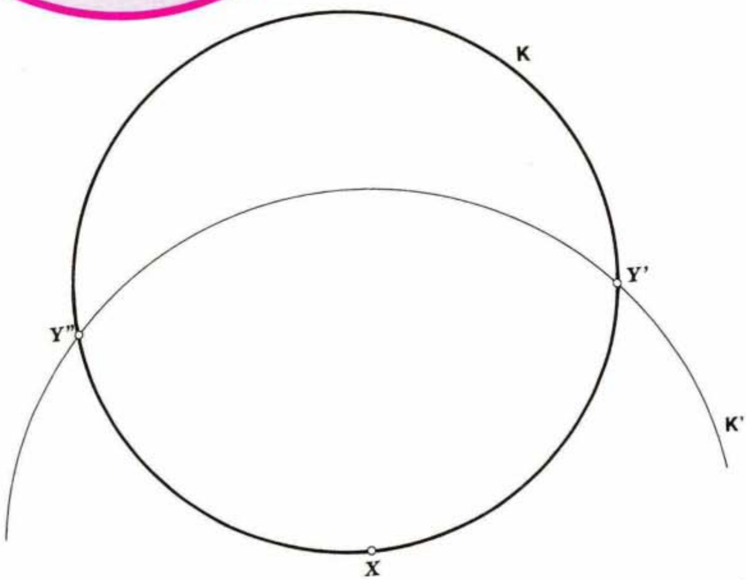
1. Izberimo na K poljubno točko X in v njej narišimo poljubno veliko krožnico K', ki pa naj bo vseeno tako majhna, da še seka K v dveh različnih točkah Y' in Y''. (Slika 1)
2. Narišimo v točki Y' krožnico L' polmera $Y'X$. Enako veliko krožnico L'' narišimo tudi v točki Y''. Krožnici L' in L'' se sekata v dveh različnih točkah, v X in Z. (Slika 2)
3. V točki Z narišimo krožnico M s polmerom ZX. Krožnica M seka krožnico K' v točkah D' in D''. (Slika 3)
4. V točki D' narišimo krožnico N' s polmerom $D'X$. Enako veliko krožnico N'' narišimo v točki D''. Krožnici N' in N'' se sekata v dveh točkah X in S. S je iskano središče krožnice K. (Slika 4)

Dokaz, da je S res središče krožnice K: (Slika 5)
Denimo, da to *ni* res, torej da je razdalja OS, kjer je O pravo središče krožnice K, od nič različna. Zaradi simetrije v konstrukciji so točke X, Z, S in O kolinearne. Iz konstrukcije sledi, da sta trikotnika $XD'S$ in $XD'Z$ podobna, ker sta enakokraka in imata skupni kot α v oglišču X. Odtod dobimo zaradi podobnosti razmerje $XS:XD' = XD':XZ$ ali $XS = (XD')^2:XZ$. Iz enakega razloga sta podobna tudi trikotnika $XY'O$ in $XY'Z$ in spet velja razmerje $XO:XY' = XY':XZ$. Odtod dobimo $XO = (XY')^2:XZ$. Iz konstrukcije se spomnimo, da je $XY' = XD'$, zato je $XS = XO$ in tako je $OS = 0$, kar smo želeli dokazati.

Dušan Repovš

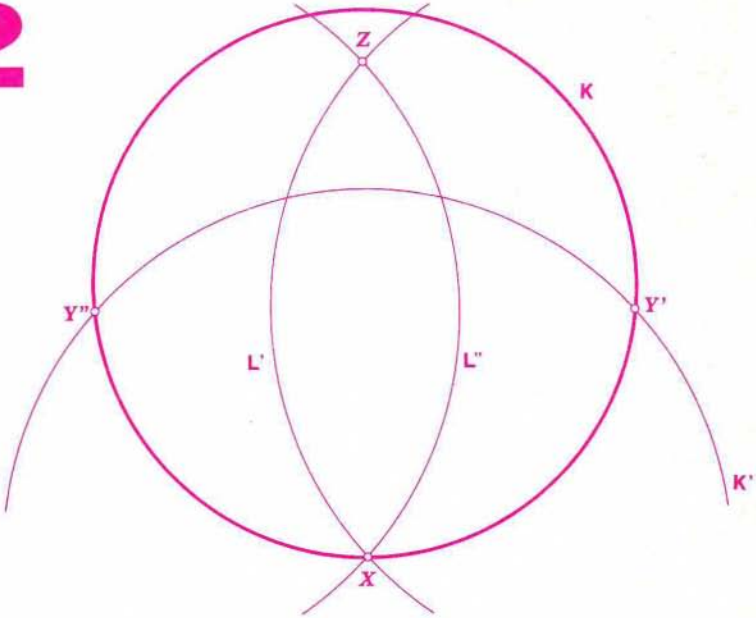
REŠITVE NALOG

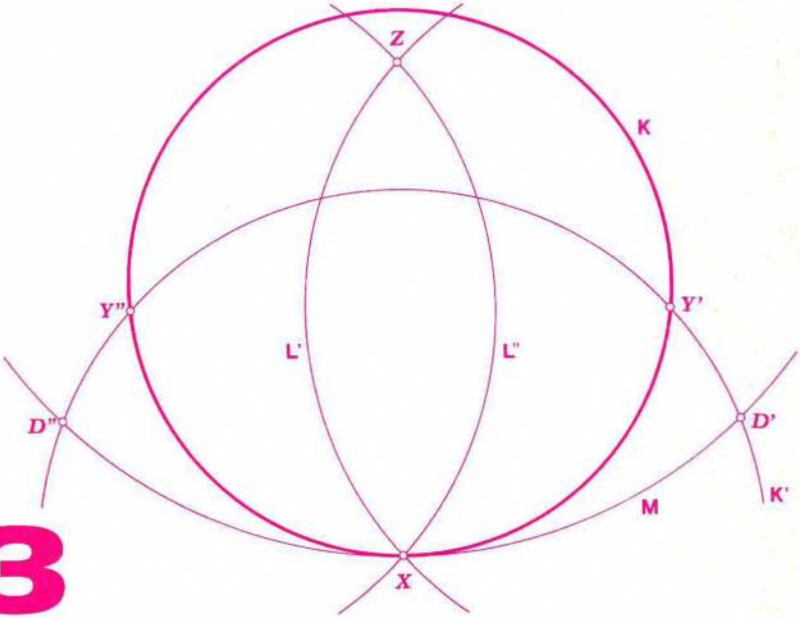




1

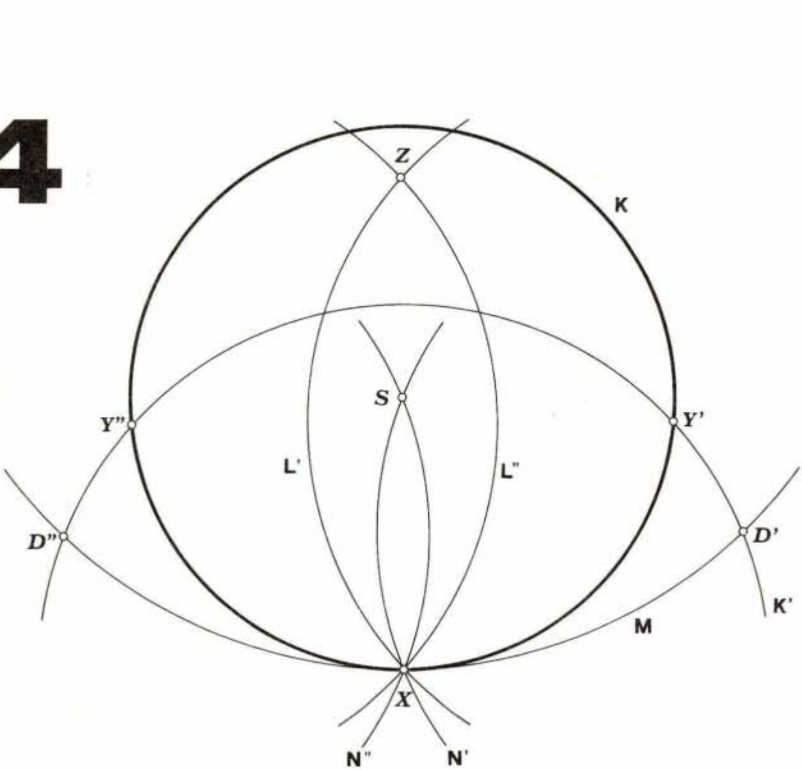
2



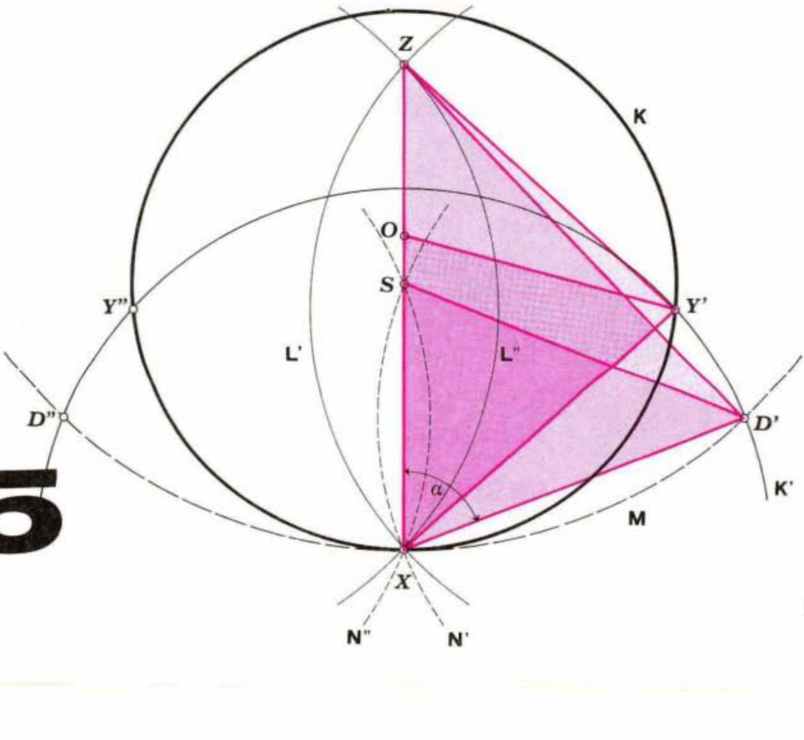


3

4



5



NALOGE Z MAGIČNIM KVADRATOM - odgovori s str. 23

1) Označimo s k magično konstanto. Vse vrstice imajo vsote enake k. Seštejmo te vsote in dobimo

$$nk$$

kar je ravno vsota vseh števil iz magičnega kvadrata. To vsoto izračunamo še drugače. Vemo že, da je

$$(n + 1)n/2$$

formula za vsoto prvih n naravnih števil. Magični kvadrat pa vsebuje prvih n^2 naravnih števil, zato je vsota vseh teh števil enaka:

$$(n^2 + 1)n^2/2$$

To je seveda enako nk, iz dobljene enačbe izračunamo k:

$$k = (n^2 + 1)n/2$$

2) Vse vsote parov simetrično ležečih števil so enake samo v primeru, ko jih zapišemo takole:

$$1 + n^2,\ 2 + (n^2 - 1),\ 3 + (n^2 - 2), \ldots, (n^2 - 1) + 2,\ n^2 + 1$$

od tod že kar preberemo vsoto:

$$n^2 + 1$$

3) Sredinsko polje leži samemu sebi simetrično, torej mora biti vsota

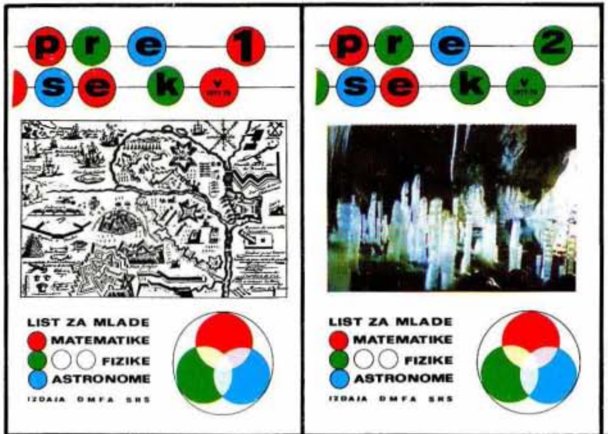
$$s + s$$

enaka katerikoli vsoti iz naloge 2, torej $n^2 + 1$. Kratek račun da:

$$s = (n^2 + 1)/2$$

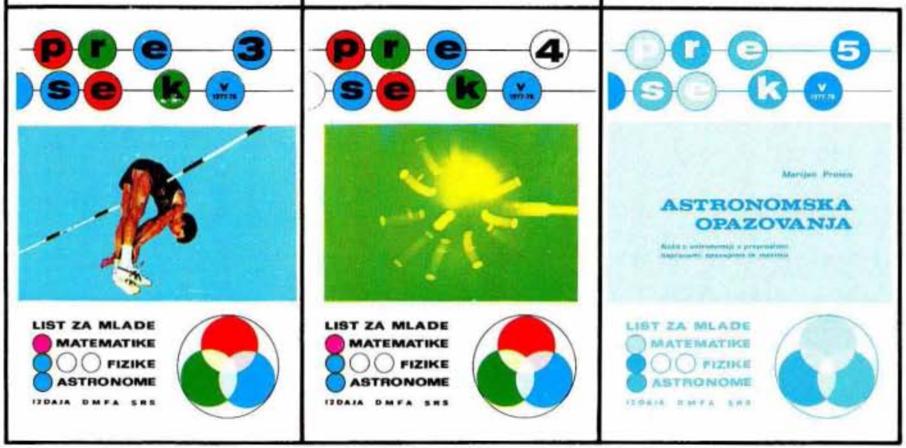
Roman Rojko

REŠITVE NALOG



Presek - list za mlade matematike, fizike in astronome. V lanskem šolskem letu je izšel že peti letnik s štirimi rednimi številkami in peto izredno, ki šteje tudi kot druga knjiga v *Presekovi knjižnici* - . V to zbirko štejeta tudi brošuri o prof. J. Plemlju in zbirka vaj *Tekmujmo za Vegova priznanja*.

Ciril Velkovrh



NOVE KNJIGE

Vsako leto se najboljši srednješolci, mladi matematiki iz mnogih držav zberejo na matematični olimpijadi. Lani je bilo to pomembno tekmovanje že drugič v Jugoslaviji. Ob tej priliki je DMFA SR Srbije izdalo to delo, v katerem so zbrane in rešene vse naloge iz vseh dosedanjih olimpijad. Vsako leto tekmovalci rešujejo po 6 nalog. Ker je bila lanska olimpijada že 19. po vrsti, je tako v knjigi 114 zanimivih nalog, ki bodo prava poslastica za nekatere med vami. V uvodnem delu je prikazana kratka zgodovina teh tekmovanj in uvrstitve naših tekmovalcev. Število držav, ki pošiljajo svoje tekmovalce na matematično olimpijado, se počasi a vztrajno veča. Na prvi olimpijadi so tekmovali predstavniki sedmih držav, lani v Beogradu pa je svoje tekmovalce poslalo že 21 držav. Za konec pa še tale podatek: Jugoslavija pošilja svojo ekipo na to mednarodno tekmovanje

M. Ašić, M. Božić, Lj. Čukić, V. Janković, Z. Kadelburg, V. Mičić, L. Milin, J. Vukmirović, Dj. Vukomanović: Medjunarodne Matematičke Olimpijade; Materijali za mlade matematičare, sv. 11. DMFA SR Srbije, Beograd, 1977. 134.str.

vsako leto od 1963. naprej. Več pa bo bralec zvedel v knjigi sami.

Tomaž Pisanski