

PRESEK

#4

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO



**RAZPOLOVITEV
PRISEKANE
PIRAMIDE**

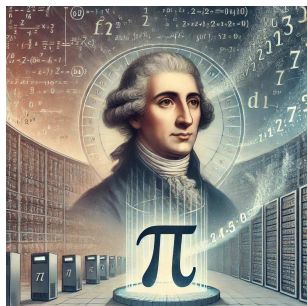
**ZAPOREDJA PO
ŠVICARSKO**

**DVOJNO
NIHALO PO
DOMAČE**

**16. DRŽAVNO
TEKMOVANJE
IZ
ASTRONOMIJE**

Koliko decimalnk števila π poznate?

↓↓↓



→ Število π , s katerim označimo razmerje med obsegom in premerom kroga, je iracionalno število, zato ima njegov decimalni zapis neskončno število decimalnk brez ponavljajočega vzorca. Iz zgodovinskih virov je mogoče razbrati različne preproste približke, ki so jih uporabljale starodavne civilizacije, starogrški matematik Arhimed pa je prvi opisal sistematično geometrijsko metodo za oceno števila π . V 18. stoletju se je leta 1789 v zgodovino rekorderjev vpisal tudi matematik slovenskega rodu Jurij Vega z lastnim izračunom 140 decimalnk. Kljub napaki, zaradi katerih je bilo pravih 126 decimalnk, je Vegov rekord zdržal skoraj 50 let.

Danes je eden izmed najučinkovitejših algoritmov za izračun decimalnk števila π algoritem bratov Chudnovsky, objavljen leta 1988. Algoritem temelji na iterativni metodi Gaussa in Legendrea, ki uporablja neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino, in na prilagojeni Ramanujanovi formuli

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)! (k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}.$$

Zadnji objavljeni rezultat skupine StorageReview iz 28. junija 2024 navaja 202.112.290.000.000 izračunanih decimalnk z izračunom, ki je trajal 103 dni. Čeprav poznavanje večjega števila decimalnih števk števila π nima neposredne praktične vrednosti, je iskanje novih decimalnk pomembno za testiranje računalniških zmogljivosti in razvoj novih matematičnih metod in algoritmov. Število π ostaja simbol matematične natančnosti in raziskovalnega duha človeštva.

Več informacij na naslovu:
http://www.numberworld.org/y-cruncher/news/2024.html#2024_6_28

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
 letnik 52, šolsko leto 2024/2025, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2024/2025 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2025 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Koliko decimalk števila π poznate?

UVODNIK

- 4-5 Čas za astronomska opazovanja
(*Andrej Guštin*)

MATEMATIKA

- 6-7 Razpolovitev prisekane piramide
(*Marko Razpet*)
- 8-10 Zaporedja po švicarsko
(*Hugo Trebše*)

FIZIKA

- 11-15 Dvojno nihalo po domače
(*Andrej Likar*)
- 18 Emisije in kurilna vrednost ogljikovodikov
(*Simon Čopar*)

ASTRONOMIJA

- 19-22 16. državno tekmovanje iz astronomije
(*Vid Kavčič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 23-26 Vrnitev k programiranju:
Od Pascala do dvojnega nihala
(*Aleš Mohorič*)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 5, 28 Križne vsote
- 26 Barvni sudoku
- 27-28 Naravoslovna fotografija -
Suša ali oseka?
(*Domen Lisjak*)
- 29 Naravoslovna fotografija -
Svetlobna pahljača nad Fakulteto za
matematiko in fiziko
(*Manca Vertačnik*)
- 30 Bilo je nekoč v reviji Presek -
Oblikovna prenova revije Presek
v letu 2004/05

SLIKA NA NASLOVNICI: Polarni sij nad Ljubljano

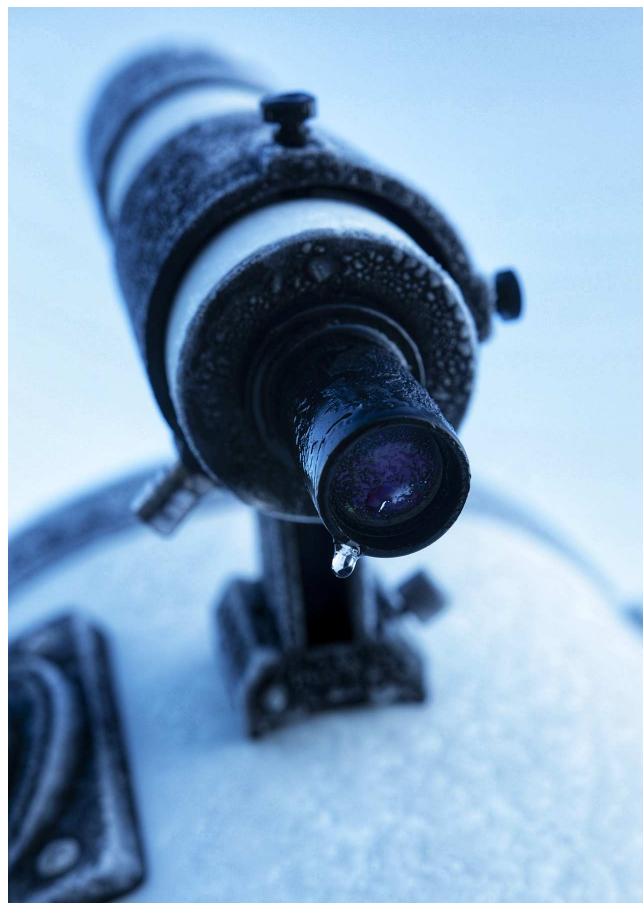
10. maja lani je bil nad Slovenijo viden zelo svetel polarni oziroma severni sij. Tako je bil svetel, da ga je bilo mogoče občudovati tudi nad svetlobno zelo onesnaženo slovensko prestolnico. Taki dogodki so v srednjih zemljepisnih širinah redki, ne glede na to, da je lani in letos višek cikla aktivnosti Sonca. Morda se vam zdijo barve na fotografiji nekoliko nenaravne. To najbrž velja predvsem za tiste, ki ste pojav opazovali. Fotoaparati in oko delujeta precej drugače pri zaznavi barv, kar močno velja v območju rdeče svetlobe, še posebej, če je ta relativno šibka. Občutljivost čipa fotoaparata je v rdečem zelo velika, poleg tega pa je bil čas osvetlitve 8 sekund, zato je lahko svetlobno tipalo zaznalo več svetlobe kot oko. Fotografija je tudi bila posneta z modificiranim fotoaparatom, iz katerega smo odstranili ultravijolični in infrardeči filter, ki preprečuje dostop svetlobe iz tega spektralnega območja na tipalo. Tako predelan fotoaparat zaznava še UV-svetlobo do približno 230 nm in infrardečo svetlobo do 1500 nm. Procesor fotoaparata mora zato razširjeno zaznavo stisniti v barvo paleta vidne svetlobe, zato lahko pride do velikih odstopanj v barvi. Fotografija: Andrej Guštin

Čas za astronomska opazovanja

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN, UREDNIK ZA ASTRONOMIJO

Leta 2009 je bilo Mednarodno leto astronomije in takrat je na pobudo Zorka Vičarja uspela akcija »Teleskop za vsako šolo«. Ministrstvo za šolstvo in šport RS je financiralo ali sofinanciralo teleskope in drugo astronomsko opremo v višini nekaj več kot 500 evrov na šolo, če se prav spomnim. Pravzaprav je bila akcija več kot uspešna, saj se je za astronomsko opremo odločilo več kot 80 odstotkov vseh slovenskih šol. Nekatere šole so, v glavnem tiste, kjer so že obstajale astronomske aktivnosti od krožkov do izbirnega predmeta, še same primaknile dodaten denar za boljše teleskope in stojala. V tem primeru je bilo tistih 500 evrov Ministrstva kot zagonsko sredstvo. Lahko bi rekli, da se je za ceno enega računalnika šolstvu odprl pogled v vesolje. Z nabavo je bilo usklajeno tudi mesijansko izobraževanje učiteljic in učiteljev za uporabo teleskopov, za kar pa je kasneje zmanjkalo denarja in najbrž tudi zagona. Kakšni so bili učinki tega čudovitega uspeha kolega Vičarja in skupine zanesenjakov, ki je pod taktirko Andreje Gomboc izpeljala Mednarodno leto astronomije? V preteklih 15 letih sem veliko sodeloval s šolami po vsej Sloveniji in izvedel sem številne astronomske delavnice ter izobraževanja. Ponekod so teleskope iz leta 2009 uporabljali, večinoma pa so nabirali prah, pogosto tudi v samo enkrat odprtih originalnih škatlah. Ti niso bili niti prašni. Težave šolske opazovalne astronomije so večplastne. KomPLICIRANO, naporno in čas jemajoče je organizirati večerna in nočna astronomska opazovanja. V okolici šole še nekako gre, za kaj resnejšega pa se je treba odpeljati v kak temen kraj in potem postanejo zadeve res zapletene. Astronomija se pretežno dogaja zunaj šolskega urnika in se ne pokorava terminom za krožke, prostim popoldnevom itd. Tu je še nagajivo vreme. Poleg tega bi morala biti astronomska opazovanja vsebinsko organizirana kot pouk in ne samo nekajsekundno kukanje skozi cev.



SLIKA 1.

Foto: Andrej Guštin

Morda pa je največja ovira uporabe teleskopov v šolah »strah« pred opremo. Učitelj/učiteljica mora biti pri tem suveren/a in si ne more privoščiti, da bi eno uro postavljaj/a teleskop pred nestrpnimi učenci in učenkami, ki bi se med tem zabavali po svoje, najbrž s prstnimi vajami na zaslonih pametnih telefonov. To je tako, kot bi potrebovali vso šolsko uro, da bi zagnali računalnik za projekcijo izobraževalnega filma ali se vso uro pred razredom ubadali s postavitvijo fizikalnega poskusa, ki na koncu niti ne bi uspel. Seveda se to kdaj zgodi, vendar v šoli vedno obstaja rešitev, ki je pod milim nebom ni. Rešitve? Izobraževanja učiteljev in učiteljic na področju praktične astronomije. Pa ne samo tistih, ki vedno pridejo na izobraževanja in jih že sedaj ni prav nič »strah«. Spodbujanje ljubezni do te čudovite dejavnosti med pedagoškimi delavci, saj je pedagoška strast tista, ki žene šolstvo. Tudi marsikateri teleskop se je od leta 2009 »postaral« ali je samo preskromen, zato je morda čas za posodobitev. Danes so cene primernih teleskopov, na primer Dobsonov, nizke. In še kaj. Ne mislite, da je Slovenija izjema. Pred nekaj leti je bila Mednarodna astronomska olimpijada na Madžarskem in organizatorji so nakupili za cel kontejner solidnih teleskopov na dobrih stojalih. Po olimpijadi so madžarski astronomi hoteli teleskope razdeliti med šole, da bi dvignili standarde astronomije po državi. Da bi šola dobila tak teleskop, je bilo potrebno le to, da bi se eden od učiteljev s šole udeležil zastonskega izobraževanja. Ali uganete, koliko učiteljev z vse Madžarske se je javilo? Eden.

× × ×

www.presek.si
www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Križne vsote

↓ ↓ ↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	17	14	
13			
			4
14			
	8		

↓ ↓ ↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

1	7		
3	2	6	
	5	8	

× × ×

Razpolovitev prisekane piramide

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ V prispevku bomo obravnavali nalogo, kako razdeliti poljubno prisekano piramido z ravnino, vzporedno z njenima osnovnima ploskvama, na prostorninsko enaka dela.

Prisekana piramida nastane iz dane prave piramide, če tej odrežemo manjšo piramido z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo te piramide. Prisekana piramida ima dve osnovni ploskvi, ki imata ploščini S_1 in S_2 . Pri tem bomo privzeli, da je $S_1 > S_2$. Osnovni ploskvi sta si podobna večkotnika. Njuna medsebojna razdalja je višina v .

Izpeljimo obrazec za prostornino V prisekane piramide. V ta namen vpeljemo višino z omenjene odrezane piramide, ki ima prostornino V_2 . Prvotna piramida ima prostornino V_1 in višino $v + z$. Očitno je

$$\blacksquare V = V_1 - V_2 = \frac{(v+z)S_1}{3} - \frac{zS_2}{3} = \frac{vS_1}{3} + \frac{z(S_1 - S_2)}{3}.$$

Iz zadnjega izraza moramo izločiti z . Uporabimo znano pravilo, ki pove, da sta ploščini S_1 in S_2 obeh osnovnih ploskev v istem razmerju kot kvadrata oddaljenosti njunih ravnin nosilk od vrha P začetne piramide:

$$\blacksquare \frac{S_1}{S_2} = \frac{(v+z)^2}{z^2}.$$

Iz tega razmerja takoj dobimo

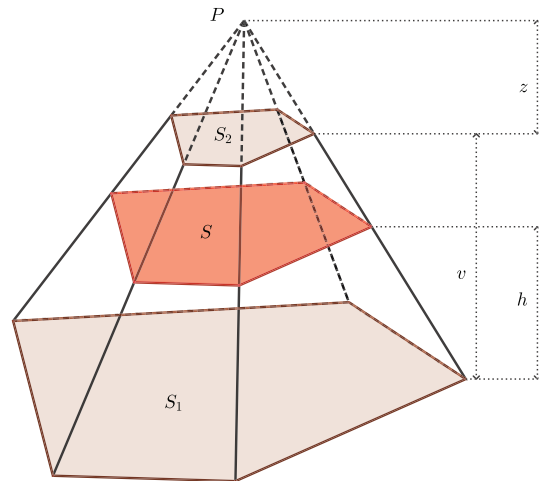
$$\blacksquare z = \frac{v\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}. \quad (1)$$

Zato je

$$\blacksquare V = \frac{vS_1}{3} + \frac{v\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \cdot \frac{S_1 - S_2}{3}.$$

Po poenostavitvi, v kateri uporabimo enakost

$$\blacksquare S_1 - S_2 = (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}),$$



SLIKA 1.

K razpolovitvi prisekane piramide.

imamo

$$\blacksquare V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2). \quad (2)$$

Prisekano piramido presekajmo z ravnino, ki je vzporedna njenima osnovnima ploskvama. Presek izvedimo na višini h nad večjo osnovno ploskvijo. Dobimo dve prisekani piramidi (slika 1). Pri katerem h imata enaki prostornini? Ploščina preseka naj bo S . Nastavimo enačbo, v kateri dvakrat upoštevamo (2):

$$\blacksquare \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S} + S) = \frac{v-h}{3}(S + \sqrt{S S_2} + S_2). \quad (3)$$

V njej sta neznanki S in h . Iz razmerja

$$\blacksquare \frac{S_1}{S} = \frac{(z+v)^2}{(z+v-h)^2}$$

najdemo po kratkem računu, v katerem uporabimo (1), izraza

$$\blacksquare h = \frac{v(\sqrt{S_1} - \sqrt{S})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

in

$$\blacksquare v - h = \frac{v(\sqrt{S} - \sqrt{S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Vstavimo v nastavljen enačbo (3), okrajšamo in dobimo:

$$\blacksquare (\sqrt{S_1} - \sqrt{S})(S_1 + \sqrt{S_1 S} + S) = (\sqrt{S} - \sqrt{S_2})(S + \sqrt{S_2 S} + S_2).$$

Zmnožimo in poenostavimo:

$$\blacksquare 2S\sqrt{S} = S_1\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2}.$$

Ploščina S presečnega lika, ki deli prisekano piramido na prostorninsko enaka dela, je

$$\blacksquare S = \sqrt[3]{\left(\frac{S_1\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2}}{2}\right)^2} \quad (4)$$

in leži na višini

$$\blacksquare h = \frac{v(\sqrt{S_1} - \sqrt{S})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \quad (5)$$

nad večjo osnovno ploskvijo prisekane piramide.

Rezultat lahko uporabimo tudi za običajno piramido, ki ima ploščino osnovne ploskve O in višino v . Tedaj vzamemo $S_1 = O$ in $S_2 = 0$. Brez težav izračunamo:

$$\blacksquare S = \frac{O\sqrt[3]{2}}{2}, h = \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)v.$$

Prav tako lahko dobljeni rezultat uporabimo za prisekani stožec. Denimo, da imata njegovi osnovni ploskvi polmera r_1 in r_2 , višina stožca pa naj bo v . Tedaj v (4) postavimo $S_1 = \pi r_1^2$ in $S_2 = \pi r_2^2$. Krog, ki prostorninsko razpolavlja tak stožec, ima polmer

$$\blacksquare r = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 + r_2^3}{2}} \quad (6)$$

in je na višini

$$\blacksquare h = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_2}v$$

nad osnovno ploskvijo stožca.

Opazimo, da imata na desni strani v (4) in (6) podobni obliki, če ju prepisemo v

$$\blacksquare S = \left(\frac{S_1^{3/2} + S_2^{3/2}}{2}\right)^{2/3}, r = \left(\frac{r_1^3 + r_2^3}{2}\right)^{1/3}.$$

Pri tem veljata relaciji $S_2 < S < S_1$ in $r_2 < r < r_1$. To pomeni, da sta S in r neke vrste sredini S_1 in S_2 oziroma r_1 in r_2 . Desni strani v (4) in (6) sta oblike

$$\blacksquare M_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}, \quad (7)$$

kjer sta a in b pozitivni števili, $p \neq 0$ pa realno število. Izkazuje se, da (7) leži med a in b , torej je neke vrste sredina števil a in b , pogosto ji pravijo potenčna sredina stopnje p . Posplošiti se jo da na več pozitivnih števil:

$$\blacksquare M_p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Za $p = 1$ dobimo iz (7) aritmetično, za $p = -1$ harmonično, za $p = 2$ kvadratično, za $p = 3/2$ polkubično in za $p = 3$ kubično sredino števil a in b . Za $p = 3/2, a = S_1, b = S_2$ dobimo iz (7) S , za $p = 3, a = r_1, b = r_2$ pa r .

Kako pa je s prepovedanim primerom $p = 0$? Izkazuje se, da strema $M_p(a, b)$ proti geometrijski sredini števil a in b , to je proti $\sqrt{ab}$, ko p gre proti 0.

Naloga. Prisekana piramida ima za osnovni ploskvi kvadrata s stranicama a in b . Kolikšna je stranica kvadrata, ki je vzporeden z osnovnima ploskvama in to piramido deli na prostorninsko enaka dela?

Literatura

- [1] B. von Pape, *Makro-Mathematik, Jenseits von Algebra und Analysis: Algorithmen*, Books on Demand, Norderstedt 2016.

× × ×

Zaporedja po švicarsko

↓↓↓

HUGO TREBŠE

→ Med 16. in 21. februarjem letošnjega leta je v švicarskem alpskem mestecu Les Diablerets potekal mednarodni EDMO kamp, ki pripravlja tekmovalke na Evropsko dekliško matematično olimpijado, ki bo letos potekala v Prištini na Kosovu od 11. do 17. aprila. Poleg ekip iz Bolgarije, Francije, Italije, Nemčije, Španije ter Švice so se priprav udeležile tudi slovenske matematičarke Tifani Bergel (Gimnazija Jesenice), Tadeja Bone (Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina), Sara Ferreira (Gimnazija Škofja Loka), Ekaterina Chizhova, Particia Király ter Anja Završki (vse Gimnazija Bežigrad). Spremljevalec ekipe ter predavatelj je bil Hugo Trebše.

Vsak dan sta bili na sporedu dve triurni matematični predavanji, ki so jih praviloma sestavili spremljevalci ekip. Poleg olimpijskih tem so imele tekmovalke privilegij poslušati predavanji dveh prejemnikov Fieldsove medalje: prof. Maryne Viazovske ter prof. Stanislava Smirnova. Profesorica Viazovska je s tekmovalkami delila misli o svojih najljubših matematičnih filmih ter komentirala njihovo matematično vsebino, prof. Smirnov pa je predstavil osnovne rezultate o tlakovanjih ravnine.

Kot spremljevalec slovenske ekipe sem pripravil predavanje o zaporedjih. Poudarek je na reševanju nalog z elementarnimi, a ne preprostimi, metodami – znanje limit tako ni potrebno. Naloge praviloma z rekurzivno zvezo definirajo neko zaporedje, nato pa od tekmovalca zahtevajo, da pokaže neko lastnost definirane zaporedja. Obravnavane naloge so zbrane iz različnih tekmovanj in jih na tem mestu



SLIKA 1.

Ekipa v snegu.

ponujam v reševanje tudi bralkam in bralcem Preseka. V pomoč naj jim bodo naslednji nasveti:

- Definiraj pomožno zaporedje.
- Ugani kakšno lastnost zaporedja.
- Opazuj ekstremne elemente (če obstajajo).

V mislih imejte tudi dejstvo, da so celoštevilška zaporedja dosti krotkejša od zaporedij racionalnih ali realnih števil. Eden izmed razlogov za to je, da so razlike med zaporednimi členi precej velike; zaporedna člena sta namreč bodisi enaka, bodisi se razlikujeta za vsaj 1, kar očitno ne velja za zaporedja racionalnih ali realnih števil.



SLIKA 2.

Med predavanjem prof. Smirnova.

1. Naloge

1.1 Naloga (APMO 1995)

Določi vse nize realnih števil $\{a_1, \dots, a_{2025}\}$, za katere velja

$$\blacksquare \quad 2 \cdot \sqrt{a_n - n + 1} \geq a_{n+1} - n + 1$$

za vse $1 \leq n \leq 2024$ ter $2 \cdot \sqrt{a_{2025} - 2024} \geq a_1 + 1$.

Rešitev

Zaradi definiranosti korenov sklepamo, da so vsi elementi niza pozitivna realna števila.

Prisotnost faktorja 2 ter kvadratnega korena v izrazu spominja na neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino v primeru dveh spremenljivk. Za vse $1 \leq n \leq 2024$ velja

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (a_n - n + 1) + (1) &\geq \\ &\geq 2\sqrt{(a_n - n + 1) \cdot 1} \geq a_{n+1} - n + 1 \\ &\implies a_n \geq a_{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Prav tako velja

$$\blacksquare \quad (a_{2025} - 2024) + (1) \geq 2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geq a_1 + 1.$$

Sledi

$$\blacksquare \quad a_1 \geq a_2 - 1 \geq \dots \geq a_{2025} - 2024 \geq a_1.$$

Sledi, da so vse neenakosti pravzaprav enakosti

$$\blacksquare \quad a_1 = a_2 - 1 = a_3 - 2 = \dots = a_{2025} - 2024.$$

Z lahkoto preverimo, da niz $\{a_1, \dots, a_{2025}\}$, kjer za vse $1 \leq n \leq 2025$ velja

$$\blacksquare \quad a_n = a_1 + n - 1$$

izpolni pogoj naloge natanko tedaj, ko je $a_1 = 1$, kar poda edino rešitev.

1.2 Naloga (Nemška državna olimpijada 2025)

Definirajmo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je $a_1 = 1$ ter za vse indekse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\blacksquare \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(3a_n + \sqrt{5a_n^2 + 20} \right).$$

Pokaži, da so vsi členi zaporedja naravna števila.





Rešitev

Pogoj je ekvivalenten enakosti

$$\blacksquare (2a_{n+1} - 3a_n)^2 = 5a_n^2 + 20$$

oziroma

$$\blacksquare a_{n+1}^2 - 3a_{n+1}a_n + a_n^2 - 5 = 0.$$

Sledi, da je a_{n+1} ničla polinoma

$$\blacksquare X^2 - 3a_nX + a_n^2 - 5 = 0.$$

Podobno lahko sklepamo za a_{n-1} , saj velja enakost

$$\blacksquare (2a_n - 3a_{n-1})^2 = 5a_{n-1}^2 + 20,$$

katero na enak način pretvorimo v

$$\blacksquare a_n^2 - 3a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 - 5 = 0.$$

Sledi, da sta a_{n+1} ter a_{n-1} obe ničli polinoma

$$\blacksquare X^2 - 3a_nX + a_n^2 - 5 = 0.$$

Po Vietovih formulah sledi, da je $-3a_n = -a_{n+1} - a_{n-1}$. Če sta a_{n-1} ter a_n celi števili tako sledi, da je tudi a_{n+1} celo število.

Računsko preverimo, da je $a_2 = 4$. Induktivno zaključimo, da je a_{n+1} celo število za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker pa so vsi členi zaporedja pozitivna realna števila (zaporedje je namreč naraščajoče) tako sledi, da so vsi členi zaporedja naravna števila.

1.3 Naloga (MMO 2014)

Naj bo $a_0, a_1, \dots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Pokaži, da obstaja natanko en $n \in \mathbb{N}$, za katerega velja

$$\blacksquare a_n < \frac{a_0 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Rešitev

Neenakost pretvorimo v ekvivalentno obliko

$$\blacksquare n \cdot a_n < \sum_{i=0}^n a_i \leq n \cdot a_{n+1}.$$

V iskanju simetrije odštejemo $a_1 + \dots + a_n$ od vseh treh členov neenakosti

$$\blacksquare n \cdot a_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n < a_0 \leq n \cdot a_{n+1} - a_1 - a_2 - \dots - a_n.$$

Definirajmo

$$\blacksquare b_k = (a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-2}) + \dots + (a_k - a_1),$$

kar želimo neenakost pretvori v kompaktnejšo obliko

$$\blacksquare b_n < a_0 \leq b_{n+1}.$$

Očitno so elementi zaporedja $\{b_k\}$ cela števila. Sledi račun pokaže, da je zaporedje $\{b_k\}$ strogo naraščajoče

$$\begin{aligned} \blacksquare b_k &= (k-1) \cdot a_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \\ &< k \cdot (a_{k+1} - a_k) + (k-1) \cdot a_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \\ &= k \cdot a_{k+1} - \sum_{i=1}^k a_i = b_{k+1}. \end{aligned}$$

Ker je $\{b_k\}$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil, sledi $1 + b_k \leq b_{k+1}$. Obstoj ter enoličnost $n \in \mathbb{N}$, ki izpolni željeno neenakost

$$\blacksquare b_n < a_0 \leq b_{n+1}$$

je tako na dlani.

Naslednji nalogi prepuščam bralcu v izziv.

1.4 Naloga (Predizbor za MMO 2019)

Naj bo $u_1, \dots, u_{2019}$ niz realnih števil, za katerega velja

$$\blacksquare \sum_{i=1}^{2019} u_i = 0 \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{2019} u_i^2 = 1.$$

Pokaži

$$\blacksquare \min\{u_i\} \cdot \max\{u_i\} \leq \frac{-1}{2019}.$$

1.5 Naloga (Vsesovjetska olimpijada 1968)

Definiramo zaporedje realnih števil, za katerega velja $a_1 = 1$ ter

$$\blacksquare a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Določi celi del a_{100} . Z nekaj znanja analize lahko določiš tudi celi del a_{2025} .

Opomba: celi del realnega števila x je definiran kot največje celo število, ki ne presega x .

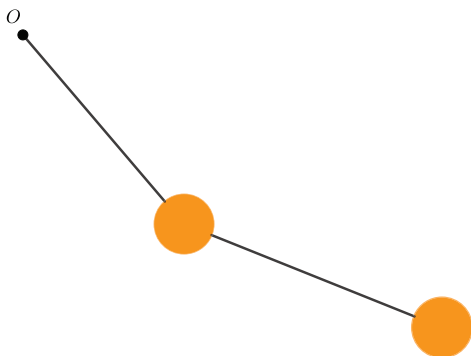
× × ×

Dvojno nihalo po domače

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Dvojno nihalo tvorita dve običajni nihali, povezani, kot bi rekli po električno, zaporedno. Na utež, ki je z zelo lahko in togo palico pritrjena na strop, je prav s tako palico pritrjena druga utež, glej sliko 1. Obe palici sta na uteži in strop pritrjeni vrtljivo brez trenja.



SLIKA 1.

Sestava dvojnega nihala.

Takega nihala ni prav preprosto narediti, a za zdaj lahko namesto togih palic uporabimo kar vrvico, ki povezuje obe uteži. Na sliki 2 smo z vrvico povezali dve matici, ki smo ju prej prevrtali, da smo lažje pritrdili nanju vrvico. Pri ne prevelikih odmikih od navpične lege, kjer tako nihalo obmiruje, sta vrvici ves čas napeti, razdalji med utežema ter zgornjo utežjo in pritrdiščem sta vseskozi enaka. Pozneje, ko bomo obravnavali nihanje z velikimi odmiki, bomo morali namesto vrvice privzeti togi palici.

Slutimo, da bo gibanje nihala pri velikih odmiki zelo zapleteno. Zato se najprej posvetimo nihanju z

zelo majhnimi odmiki. Tudi takrat gibanje ni prav nič preprosto in skoraj nimamo upanja, da bi se ga dalo računsko opisati. A ne obupajmo prezgodaj! Poskusimo najti tako nihanje obeh uteži, kot ga opazimo pri enojnem, to je običajnem nitnem nihalu. Vemo, da le-to niha harmonično, torej se njegov odmik od ravnovesja x_0 da opisati s sinusno ali kosinusno funkcijo časa. Ko izberemo funkcijo kosinus, imamo:

$$\blacksquare x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Pri začetnem času $t = 0$ je nihalo najbolj izmaknjeno iz ravnovesne lege, ta odmik imenujemo amplituda. Hitrost nihala je tedaj enaka nič. Pogostost nihanja meri krožna frekvenca ω , ki je, kot se še spomnimo iz pouka fizike:

$$\blacksquare \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Odmik v navpični smeri je tako majhen, da ga lahko zanemarimo.

Poskusimo najti harmonično nihanje dvojnega nihala z majhnimi amplitudami. Vsaka od uteži naj niha harmonično z enako krožno frekvenco ω , vsaka s svojo amplitudo, denimo x_{01} in x_{02} , torej:

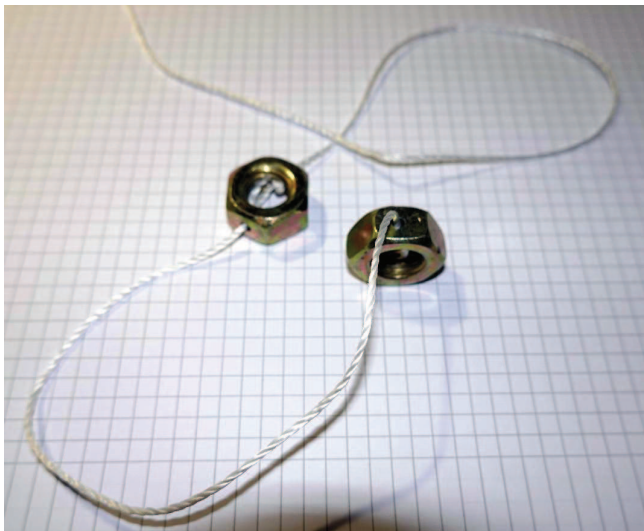
$$\blacksquare x_1(t) = x_{01} \cos \omega t,$$

$$\blacksquare x_2(t) = x_{02} \cos \omega t.$$

V ravnovesni legi sta vrvici napeti z različnima silama, zgornja s silo $F_1 = 2mg$, saj mora nositi obe uteži, za kateri bomo privzeli, da imata enako maso, spodnja s silo $F_2 = mg$, saj nosi le spodnjo utež. Pri majhnih nihanjih bomo privzeli, da sta ti dve sili taki tudi takrat. Ker imamo obe sili v vrvicah, ni težko napisati Newtonovega zakona za obe uteži. Na zgornjo utež poleg zgornje vrvice deluje še spodnja. Komponenta sile na zgornjo utež v vodoravni smeri sta:

$$\blacksquare F_{x1} = -F_1 \sin \vartheta_1 + F_2 \sin \vartheta_2$$



**SLIKA 2.**

Dvojno nihalo. Na prevrtanih maticah sta pritrjeni povezovalni vrvci .

in

$$\blacksquare F_{x2} = -F_2 \sin \vartheta_2 .$$

Tu sta ϑ_1 in ϑ_2 kota, ki ju oklepata vrvci z navpičnico, glej sliko 3.

Sinusa kotov lahko izazimo z odmiki obeh nihala:

$$\blacksquare \sin \vartheta_1 = \frac{x_1}{l} ,$$

$$\blacksquare \sin \vartheta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l} .$$

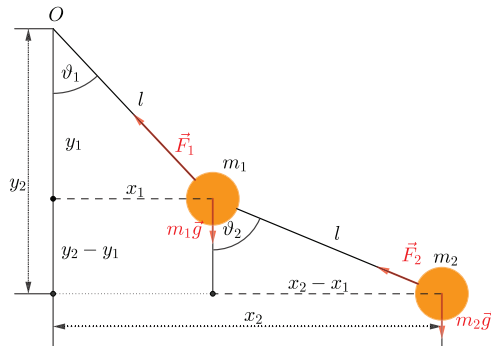
Newtonov zakon za gibanje uteži zapišemo takole:

$$\blacksquare ma_{x1} = F_{x1} = -2mg \frac{x_1}{l} + mg \frac{x_2 - x_1}{l} ,$$

$$\blacksquare ma_{x2} = F_{x2} = -mg \frac{x_2 - x_1}{l} .$$

Sedaj poskusimo s harmoničnim nastavkom za odmika x_1 in x_2 . Pri harmoničnem nihanju je pospešek uteži sorazmeren z odmikom:

$$\blacksquare a = -\omega^2 x .$$

**SLIKA 3.**

Spremenljivke dvojnega nihala.

Zgornji enačbi sta potem:

$$\blacksquare -\omega^2 x_{01} \cos \omega t = -2g \frac{x_{01}}{l} \cos \omega t + g \frac{x_{02} - x_{01}}{l} \cos \omega t ,$$

$$\blacksquare -\omega^2 x_{02} \cos \omega t = -g \frac{x_{02} - x_{01}}{l} \cos \omega t .$$

Vidimo, da se $\cos \omega t$ pojavi na obeh straneh enačb, torej je harmonično nihanje dvojnega nihala možno. Za amplitudi obeh uteži dobimo tile enačbi:

$$\blacksquare (-\omega^2 + 3\frac{g}{l})x_{01} = \frac{g}{l}x_{02} ,$$

$$\blacksquare \frac{g}{l}x_{01} = (-\omega^2 + \frac{g}{l})x_{02} .$$

Enačbama ni mogoče zadostiti pri poljubni krožni frekvenci ω , lahko pa pri povsem določeni. Ko izrazimo razmerji $\frac{x_{01}}{x_{02}}$ iz obeh enačb in ju izenačimo, saj morata biti v obeh enačbah enaki, dobimo tole enačbo za ω^2 :

$$\blacksquare \omega^4 - 4\frac{g}{l}\omega^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0 .$$

Ta enačba za ω^2 ima dve rešitvi:

$$\blacksquare \omega_{I,II}^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}) .$$

Le pri teh dveh kotnih frekvencah bosta uteži dvojnega nihala nihali harmonično. Imenujemo ju lastni frekvenci. Iz enačb za amplitudi x_{01} in x_{02} dobimo njuni razmerji pri teh dveh frekvencah

$$\left(\frac{x_{01}}{x_{02}} \right)_I = -(\sqrt{2} + 1),$$

pri višji frekvenci in

$$\left(\frac{x_{01}}{x_{02}} \right)_{II} = (\sqrt{2} - 1),$$

pri nižji.

Na naslednji sliki (slika 4) sta prikazana oba načina harmoničnega nihanja tega nihala. Ko vemo za ti dve nihanji, lahko vsakršno gibanje dvojnega nihala z majhnimi amplitudami sestavimo iz njiju. Če je začetna hitrost uteži enaka nič, velja:

$$x_1(t) = x_{01,I} \cos \omega_I t + x_{01,II} \cos \omega_{II} t,$$

$$x_2(t) = x_{02,I} \cos \omega_I t + x_{02,II} \cos \omega_{II} t.$$



SLIKA 4.

Hitri (I – levo) in počasni način (II – desno) harmoničnega nihanja dvojnega nihala.

Nihalo niha hkrati z obema lastnima frekvencama ω_I in ω_{II} . Razmerji med $x_{01,I}$ in $x_{02,I}$ in $x_{01,II}$ ter $x_{02,II}$ morata biti taki, kot smo omenili zgoraj, pri tem pa amplitudi $x_{01,I}$ in $x_{01,II}$ določimo iz začetnih odmikov uteži od ravnovesne lege.

Do tu se je o dvojnem nihalu dalo kar precej povedati matematično. Sedaj pa se ne bomo več omejevali na majhna nihanja. Pustili bomo, da sta odmika uteži velika. Vrvici, ki povezujeta uteži in pritrdišče, nista več vedno napeti, ju moramo nadomestiti z lahkima in togima palicama. To je lažje reči kot storiti. V nekaterih šolah sicer premorejo tako izvedbo dvojnega nihala, vendar ga doma zelo težko sami izdelamo. Ker bomo opazovali gibanje uteži z zelo velikimi odmiki in hitrostmi, moramo nihalo izvesti tako, da se obe uteži lahko vrtita za polna kroga okrog pritrdišča in se pri tem ne ovirata. Zato bomo gibanju uteži sledili z računalnikom. Potrebujemo le Newtonov zakon in sile, ki delujejo na uteži. Potem bomo z računalnikom izračunavali hitrosti in legi obeh uteži.

Newtonov zakon za gibanje uteži v x smeri smo že zapisali:

$$ma_{x1} = F_{x1} = -F_1 \sin \vartheta_1 + F_2 \sin \vartheta_2,$$

$$ma_{x2} = F_{x2} = -F_2 \sin \vartheta_2.$$

Pri velikih odmikih uteži od ravnovesne lege so sile povezovalnih palic drugačne, kot smo privzeli pri majhnih odmikih, kjer sta to pot F_1 in F_2 neznani sili, s katerima palici delujeta na uteži. Pri velikih nihanjih ne moremo zanemariti dvigov uteži v navpični smeri. S slike 3 pridemo hitro do sil, ki delujejo na uteži v navpični smeri:

$$ma_{y1} = F_{y1} = -mg + F_1 \cos \vartheta_1 - F_2 \cos \vartheta_2,$$

$$ma_{y2} = F_{y2} = -mg + F_2 \cos \vartheta_2.$$

Funkcije kotov ϑ_1 in ϑ_2 , izražene s koordinatami uteži, spet razberemo s slike 6:

$$\sin \vartheta_1 = \frac{x_1}{l},$$

$$\sin \vartheta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l},$$





$$\cos \vartheta_1 = -\frac{y_1}{l},$$

$$\cos \vartheta_2 = -\frac{y_2 - y_1}{l}.$$

Za računalnik to ne zadošča. Sil F_1 in F_2 ne poznamo. Palici sta lahko bodisi stisnjeni bodisi napeti. A kako naj pridemo do njiju? Vse, kar vemo o teh dveh silah, je to, da sta posledici togih palic, se pravi, da palici ohranjata svojo dolžino. Prav zaradi te zadrege so v preteklosti iznašli zelo zvit način, kako se izogniti neznanima silama palic. Ta način je znan pod imenom Lagrangeev pristop. Ker tega pristopa ne poznamo, se moramo iz težave izviti po svoje.

Rekli smo, da sta palici togi, torej imata ves čas enako dolžino ne glede na sili, s katerima sta napeti ali stisnjeni. Takih palic v naravi seveda ni. Palica se pod vplivom sile nekoliko raztegne ali skrči, ne zelo, malo pa. S prostimi očmi morda teh sprememb ne opazimo, saj sile pri našem poskusu niso prav velike, kljub temu jih ne bomo zanemarili. Privzeli bomo torej, da za palici velja dobro znani Hookov zakon:

$$F = k\Delta s.$$

Tu je F sila, s katero je napeta ali stisnjena palica, Δs pa njen rastezek ($\Delta s > 0$) ali skrček ($\Delta s < 0$). S k smo označili koeficient raztezka. Hookov zakon torej določa sili palic na uteži:

$$F_1 = k \left(l - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right),$$

$$F_2 = k \left(l - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right).$$

Za koeficient k bomo postavili poljubno, a dovolj veliko vrednost. Pri povsem togih palicah bi bil ta koeficient neskončno velik.

Sedaj imamo vse pripravljeno, da gibanje uteži izračunavamo. Kako? Algoritem je prav preprost. Pospešek je po definiciji razmerje spremembe hitrosti v danem času Δt in tem časom, torej:

$$a(t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Ker bomo računali spremenljivke nihala korak po koraku, vsak korak bo za Δt kasneje v času, bomo ustrezno označili tudi spremenljivke, in sicer:

$$a(t) \rightarrow a_n,$$

$$v(t) \rightarrow v_n,$$

$$v(t + \Delta t) \rightarrow v_{n+1}.$$

Newtonove zakone za gibanje obeh uteži bomo potem napisali takole

$$v_{x1,n+1} = v_{x1,n} + (-f_{1,n} \sin \vartheta_{1,n} + f_{2,n} \sin \vartheta_{2,n}) \Delta t,$$

$$v_{y1,n+1} = v_{y1,n} + (-g - f_{1,n} \cos \vartheta_{1,n} - f_{2,n} \cos \vartheta_{2,n}) \Delta t,$$

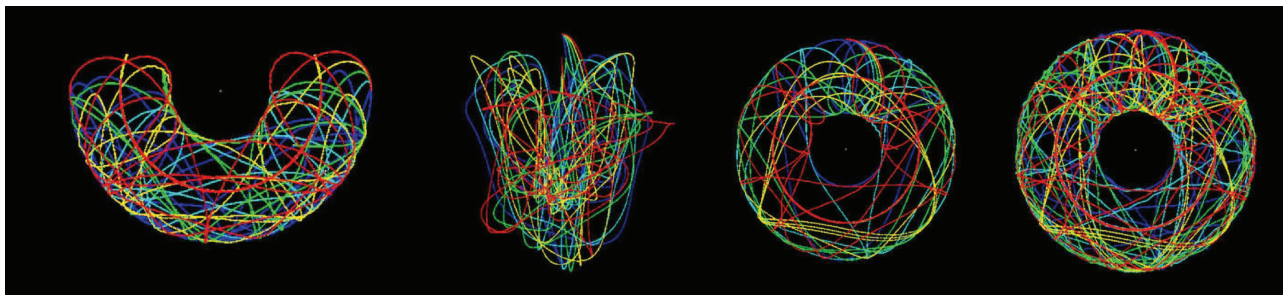
$$v_{x2,n+1} = v_{x2,n} + (-f_{1,n} \sin \vartheta_{2,n}) \Delta t,$$

$$v_{y2,n+1} = v_{y2,n} + (-g + f_{2,n} \cos \vartheta_{2,n}) \Delta t.$$



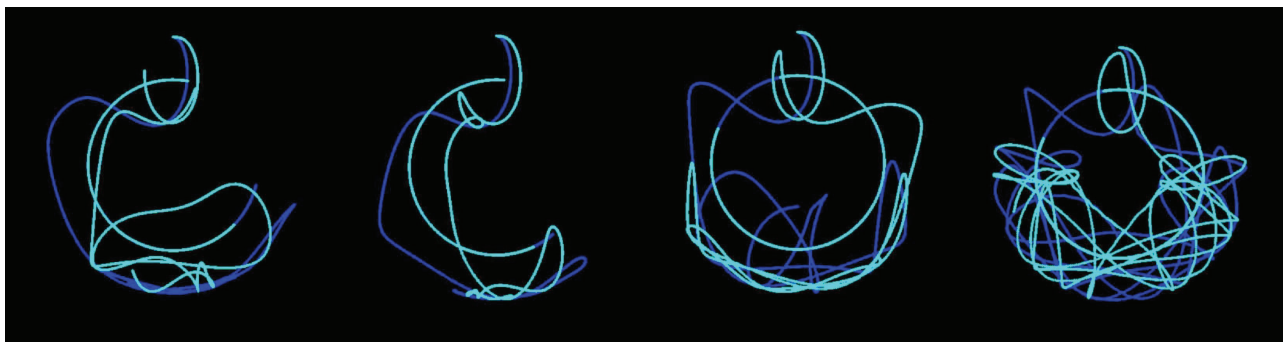
SLIKA 5.

Tira uteži pri dvojnem nihalu. Obe uteži sta na začetku za 120° dvignjeni iz mirovne lege. Njuna začetna lega je označena s povezovalnimi palicami.



SLIKA 6.

Dvojno nihalo, postavljeno v navpično lego, torej na glavo - tiri pri različnih začetnih pogojih



SLIKA 7.

Dvojno nihalo - tiri pri dveh različnih, navpično postavljenih nihala pri različnih začetnih hitrostih zgornje uteži (modro in turkizno)

Zgoraj smo namesto za sil F pisali $F = mf$, da se v enačbah izognemo pogostim ulomkom $\frac{F}{m}$. Funkcije kotov $\vartheta_{1,n}$ in $\vartheta_{2,n}$ določamo iz enačb že podanih zgoraj, kjer uporabimo koordinate $x_{1,n}$, $y_{1,n}$ in prav tako $x_{2,n}$, $y_{2,n}$.

Do koordinat obeh uteži potem pridemo preprosto z

$$\blacksquare \quad x_{1,n+1} = x_{1,n} + v_{x1,n+1} \Delta t$$

in na enak način do preostalih treh koordinat. Mimogrede omenimo, da lahko v zgornjem algoritmu brez večjih sprememb obravnavamo tudi dvojna nihala s poljubno dolžino med utežema in različnima masama uteži.

Na sliki 5 smo prikazali tira obeh uteži pri enem nihaju zgornje uteži. Vidimo, da spodnja utež divje opleta okrog zgornje.

V računalniškem programu določimo začetne lege in hitrosti uteži in nadaljujemo korak za korakom do

izbranega končnega časa t , oziroma končnega $n + 1$. Algoritem je na prvi pogled morda zapleten, a ga je prav lahko programirati. V našem programu smo sproti risali tir obeh uteži, točko za točko. Tir je pri velikih odmikih zelo nepredvidljiv in ga je zabavno gledati. Zgornja utež se sicer zelo omahuje giblje po krožnici, spodnja pa opleta okrog nje. Oglejmo si nekaj tovrstnih slik.

Na zgornjih slikah so tiri narisani z različnimi barvami, različnim barvam pripadajo različni začetni pogoji. Na sliki 6 je začetna lega nihala v navpični legi, ki je za 180° zasukana mirovna lega, ali kot pravimo, nihalo postavimo na glavo in narahlo sunemo zgornjo utež. Začetne hitrosti se od leve proti desni spreminjajo. Pri posameznih slikah se pri tirih, prikazanih z modro in turkizno, začetni pogoji le malo razlikujejo. Kljub temu tira kmalu po startu kreneta vsak svojo pot.

× × ×

↓↓↓

Nagradna križanka



								FRANCOSKI PESNIK, PREDHODNIK PARNASOVCEV (THEOPHILE)	NEMŠKI KANCLER V 60. LETIH 20. STOL. (LUDWIG)	JUHI PODOBNA MESNA ENO-LONCNICA	IZSTRE-LJEALEC MIN	LATINSKI VEZNIK	POSAMEZNO STEBLO VINSKE TRTE	DELOVNI POMNILNIK RAGU-NALNIKA	PRIMORSKA DIŠAVNICA, OZEPEK
								PODROČJE MATE-MATIKE							
								IZVAJALEC ARBIT-RAŽNIH ZADEV							
								UŠESNI NAKIT				LEPLJIV DREVESNI IZCEDEK KINE-MATIKA			4
								IGRA S KARTAMI					MEDNARODNO ZDRU-ŽENJE KNJIZEVNIKOV		
								NAROPANO BLAGO					NEMŠKA IGRALKA (KARIN)	NAJVEČJE NOVOZEL-MESTO	
															NEJČ ZNIDARČIČ ŠPORTNA PLEZALKRA KRAMPL
SIEMENSOV PRIMESTNI ELEKTROMOTORNIPOTNIŠKI VLAK	LASTNO IME GORE ALI DRUGAČNE VZPETINE	ČAS VRTLJAJA PLANETA OKOLI SVOJE OSI	SPIEL-BERGOV VESOLJCEK	DELČEK	GLAVNO MESTO KAZAH-STANA	SEDMA GRŠKA ČRKA	VODA V TRDNEM STANJU RAZPRAVA, DISKUŠIJA			MISELNOST, KI NE DOPUŠČA ODSTO-PANJA					
TELO, KI GA OMEJUJE 12 SKLAD-NIH PET-KOTNIKOV									PIHA OB MORJU ZARADI TEMPERAT. RAZLIK	OBDOBJE KENOZOIKA STARA DOLŽINSKA MERA					
PO NJEM SE IMENUJE SITO ZA ISKANJE PRAŠTEVIL	5									3			BANJA ENERGIJSKO POLJE, KI OBDAJA ŽIVO BITJE		
ENOTA ZA GLASNOST, IZPELJANA IZ FONA				POVELJ-NIŠKI ORGAN OSCAR FREIRE			VOJAŠKI POHOD NA VEČJO RAZDALJO	POOSEB-LJEN HUDIČ V HEBREJ. BIBLIJI					2	VELIKO ITALIJAN. MESTO, SREDIŠČE PIEMONTA	
VEZNIK			FILM VLADA ŠKAFARJA PRVA SAMO-GLASNIKA			ALEŠ MOHORIČ SAMARIJ		ANALOG, USTREZNIK ŠKODA, KI NASTANE MED PLOVBOM							
NEMŠKA REŽISERKA IN FOTO-GRAFINJA (LENI)									FR. FIZIK, ZNAN PO TERMODIN. KROŽNI SPREMEMBI						
STARA MATI, BABICA, NONA				NAJVEČJI JEMENSKI OTOK V RDEČEM MORJU					TOBAČNI IZDELEK	TEMNO MODER AROMAT. IZOMER NAFTALENA	NASLOV				
												SEVERNODALMATIN. OTOK, SOSED SILBE	FLAVTISTKA GRAFENAUER HAZARDNA NAPOVED IZIDA		
								UVODNA GLASBA K REDNI RADIJSKI ODDAJI			1		MATERIJA ASTRONO-MICAL JOURNAL		
								NAPRAVA, KI URAVNAVA DELOVANJE							
								SOSEDNJA DRŽAVA							NEKDANJI BELORUSKI TELOVADEČ (IVAN) ZAPČRKI
								NAŠA ONKO-LOGINJA IN RADIO-TERAPEVT-KA (BERTA)					ISTRSKO LETOVIŠČE		
								ODMAKNJENA KATALONSKA DOLINA OB MEJI S FRANCIJO					NEKDANJA JAPONSKA PRESTOL-NICA	OPLOV AVTO	

VISOKA GOZDNA DIVJAD

ESTETSKI UREJEJ-VALEC



AVTOR MARKO BOKALČIČ

GASILSKI STROJ ZA GAŠENJE Z VODO

ZAVAROVANO OBMOČJE NARAVE

VRHOVNI POVELJNIK JANI-ČARJEV

SMUČARSKA SKAKALKALKA PREVC

IZTOK MLAKAR

VELIKA ENOTA RIMSKE VOJSKE

NASELJE V BAŠKI GRAPI IN PRITOK BACE

PRVO VRATNO VRETNICE, NOSAČ

OBRAMBNA IGRALKA

STAR IZRAZ ZA VOJAŠKO ENOTO POLK

IZRAELSKI OČAK, OČE JAKOBA IN EZAVA

ZORAN ERCEG

SIMBOL DRŽAVE ALI MESTA

RIM. BOGI-NJA JUTRA-NJE ZARJE

PRAVILA OBNAŠANJA

PROSOJNA POLTRONA SNOV

IGRALEC ULAGA

REKA V ITALIJI

OTOKI NA JUGU ISTRE

GR. MIT. JUNAK

IZHODIŠČNA STOPNJA PRIDEVNIKA

UŽITNO SEMENCE PINIJE

KNJIŽNI IZRAZ ZA IVJE

MATEMAT. KONSTANTA

STOTINA ŠVIČAR. FRANKA

KOSITER

AMERIŠKA ZNAMKA TELE-SKOPOV

BOHINJSKA VAS

DELANJE SNEGA IZ BELJAKOV

SREBRENJE LAS NA STAROST

MORSKI SESALEC

SEVERNO-ATLANTSKI PAKT

UBRANO, MIRNO STANJE V NARAVI

POKOJNI BOSANSKI PEVEC MONTENO

ALUMINIJ

OSTER SEVERNI VETER V SREDO-ZEMLJU

ENAKOST OBLIKE

NASILEN USTRAHOVALEC

SOSEDNI PLANET

SOJ

NASTA-JANJE OTEKLINE JEMENSKA LUKA

ST. PLOŠČ. MERA, JOH

OBRAT KOTNE FUNKCIJE

NEKD. IZR. GENERAL (MOŠE)

SLIKARKA REMEC

GL. MESTO ŠVICE

ENOTA JA-LOVE MOČI EL TOKA

NEMŠKO MESTO VZHOD. OD STUTTGARTA IZVOR

RIBA IZ DRUŽINE KRAPOVCEV

HELIJ

IZGINJANJE VODE ZARADI SUŠE

KROV STAVBE

9

6

7

8

dMFA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka ter ga oddajte do 25. april 2025, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli knjižno nagrado.

× × ×

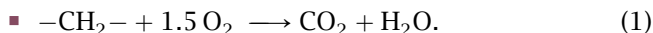
Emisije in kurilna vrednost ogljikovodikov

↓↓↓

SIMON ČOPAR

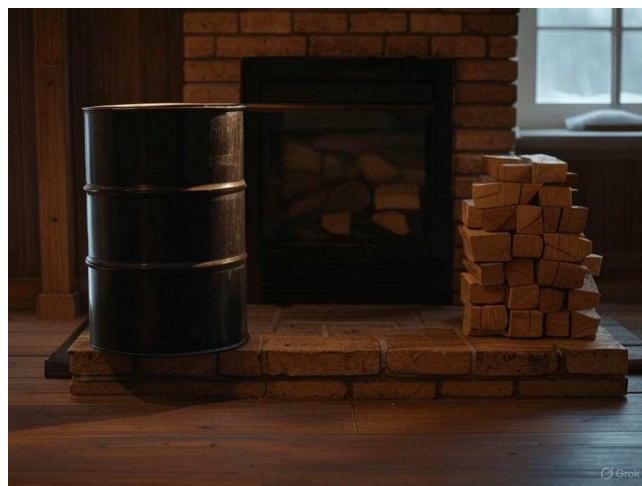
→ Po direktivah Evropske unije mora promocijski material za vozila na motor z notranjim zgorevanjem vsebovati informacijo o emisijah CO₂, prav tako pa je običajno navedena povprečna poraba goriva v litrih na sto kilometrov ob tipičnih voznih razmerah. Oglejmo si, kaj stoji za podatki, ki jih najdemo v drobnem tisku vsakega oglasa za nov avtomobil.

Ogljikovodiki so dolge, po navadi razvejane, alifatske verige enot CH₂. Če zanemarimo, kaj se dogaja na krajiščih molekule, je zgorevanje videti takole:



Molekulska masa enote CH₂ je 14, CO₂ pa 44, torej je razmerje med maso emisij CO₂ in maso goriva kar $\frac{22}{7} \approx \pi$, ne glede na gorivo. Ker pa se poraba navaja v litrih, ne kilogramih, bo dizel zaradi višje gostote (830 – 950 kg/m³) imel večjo emisijo na liter kot bencin (700 – 800 kg/m³), kar pa ne pomeni, da proizvede več ogljikovega dioksida, le da ga gre več v posodo. Navajanje emisij v promocijskem materialu pomaga k primerjavi vozil z različnim tipom goriva, isto bi pa dosegli, če bi navajali porabo goriva v kilogramih na 100 km.

Podobnost med gorivi se ne konča pri emisijah CO₂. Ker večino energije dobimo iz trganja vezi C–C in C–H na račun močnejših vezi s kisikom, imajo goriva zelo podobno kurilno vrednost. Najbližje idealni neskončni verigi [CH₂]_n je polietilen, katerega kurilna vrednost znaša 46,3 MJ/kg, iz česar preko molekulske mase izvemo, da iz avogadrovega števila enot CH₂ dobimo okrog 650 kJ energije. Ogled seznama kurilnih vrednosti nam pokaže, da res v isto območje od 42 MJ/kg do 49 MJ/kg padejo precej raznolika goriva, kot so propan, butan, bencin, dizel, kerozin, biodizel, parafinski vosek in različne plastike, tudi živalska maščoba in čebelji vosek nista



SLIKA 1.

daleč stran. Malenkost višjo kurilno vrednost imajo lažji plini – za metan in etan, ki sta glavni sestavini zemeljskega plina, približek z verigo CH₂ ni tako dober.

Skratka, vsak kilogram goriva zgori v približno π kilogramov ogljikovega dioksida in ne zgrešimo veliko, če za namen hitrih ocen enačimo vsa ogljikova goriva in jim pripišemo nekje med 40 in 50 MJ/kg. Razen čistega vodika in nekaterih bolj eksotičnih izjem, je to največ, kot lahko iztisnemo iz kemijskih vezi.

Literatura

- [1] <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SL/TXT/HTML/?uri=CELEX:01999L0094-20081211>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_density (ogled 6. april 2023)

× × ×

16. državno tekmovanje iz astronomije

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ V soboto, 11. januarja, je potekalo 16. državno tekmovanje iz astronomije. Tekmovanja, ki sta ga v letošnjem šolskem letu organizirala DMFA Slovenije in Zavod Cosmolab, se je na petih lokacijah v Sloveniji udeležilo skupaj 377 učenk in učencev predmetne stopnje osnovnih šol ter dijakinj in dijakov srednjih šol. Čeprav so bile naloge tudi tokrat izjemno zahtevne, so nas, sploh najmlajši, ponovno presenetili s svojim bogatim astronomskim znanjem. Zaradi tega vsem tekmovalkam in tekmovalcem iskreno čestitamo za izkazano znanje in vrhunske uvrstitve na državnem tekmovanju. Uradni rezultati tekmovanja so objavljeni na spletnih straneh tekmovanj iz astronomije. Slavnostna podelitev priznanj najboljšim pa bo v nedeljo, 1. junija 2025, v Ljubljani.

V tokratnem članku predstavljamo izbor nalog, s katerimi so se na državnem tekmovanju za osnovne šole spopadli mlade astronomke in astronomi.

1.6 Neznano nebesno telo

Oglej si zvezdno kopico na sliki 1 in odgovori na spodnja vprašanja.

1. Kako imenujemo tak tip zvezdnih kopic?
2. Zvezdna kopica nosi oznako M 45. Kako jo imenujemo bolj domače?
3. V katerem ozvezdju leži ta zvezdna kopica?
4. Oznaka M 45 se nanaša na katalog nezvezdnih nebesnih teles, v katerem je skupaj 110 nebesnih te-



SLIKA 1.

Neznano nebesno telo.

les. Kako imenujemo ta katalog?

5. Primerjaj oddaljenost te zvezdne kopice od Zemlje z oddaljenostjo Andromedine galaksije in z oddaljenostjo Kuiperjevega pasu. Obkroži pravilno izbiro.

- (i) Zvezdna kopica na fotografiji je od nas BOLJ / MANJ oddaljena kot Andromedina galaksija.
- (ii) Zvezdna kopica na fotografiji je od nas BOLJ / MANJ oddaljena kot Kuiperjev pas.

6. Približno koliko zvezd sestavlja to zvezdno kopico? Obkroži.

- (A) 10.
- (B) 1000.
- (C) 100 000.
- (D) 10 000 000.





1.7 Karta neba

Oglej si spodnjo karto neba in odgovori na vprašanja.

1. Na fotografiji obkroži tri zvezde, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik, in zraven vsake zvezde napiši njeno ime.
2. Na fotografiji poišči 6 ozvezdij in k vsakemu od njih na karto pripiši njegovo ime.
3. Na fotografiji poišči Severnico in jo označi z majhnim $\times$.

1.8 Članek o Jupitru

Svetlana je v učiteljičinem kabinetu našla star zaprašen izvod revije Presek in z zanimanjem prebrala krajši članek o Jupitru, vendar je na porumenelih li-

stih nekaj besed obledelo. Dopolni besedilo z manjkajočimi besedami.

Jupiter je _____ planet v Osončju in po oddaljenosti od Sonca _____ planet po vrsti. Jupiter je _____ velikan. V to skupino planetov sodijo tudi Saturn, _____ in _____. Jupitrova masa je več kot dvakrat večja kot masa vseh drugih planetov skupaj.

Jupiter ima danes potrjenih 95 lun, najbrž pa jih je še veliko več. Približno 50 od njih je zelo majhnih in imajo manj kot pet kilometrov v premeru. Štirim največjim Jupitrovim lunam pravimo _____ lune. Ime so dobile po italijanskem astronomu, ki jih je prvič opazoval v začetku 17. stoletja.

_____ je največja luna v Osončju, poleg tega



SLIKA 2.

pa je tudi večja od planeta Merkurja. Vulkani na luni _____, ki je najbolj vulkansko aktivno telo v Osončju, bruhaajo oblake rumenega žvepla vse do 500 kilometrov visoko. Pod zmrznjenim pokrovom lune _____ se morda skriva tekoči ocean. Znanstveniki verjamejo, da bi v tem oceanu lahko obstajalo preprosto življenje. Jupitrova druga največja luna _____ je od znamenitih štirih lun najbolj oddaljena od Jupitra.

Jupiter lahko opazujemo tudi brez uporabe teleskopa, saj je tretje najsvetlejše nebesno telo na nočnem nebu. Samo Luna in planet _____ sta svetlejša. Če pa se opazovanja Jupitra lotimo s teleskopom, lahko ob dobrih pogojih na Jupitrovem površju občudujemo _____, ki je gromozanska nevihta v Jupitrovi atmosferi.

1.9 Naloge z vrtljivo zvezno karto

S pomočjo vrtljive zvezdne karte odgovori na vprašanja. Čase določi z natančnostjo ± 20 minut.

1. Kdaj 11. januarja vzide zvezda Sirij?
2. Kdaj se 11. januarja začne astronomska noč?
3. Koliko časa za zvezdo Aldebaran zaide zvezda Poluks?
4. Zvezda Regul vzhaja, Sonce pa v istem trenutku zahaja. Kateri dan v letu je to?
5. Katere zvezde tvorijo asterizem Zimski šestkotnik?
6. Kolikšna je kotna oddaljenost med Kapelo in severnim nebesnim polom?
7. Dne 30. decembra 2024 je bil Lunin mlaj. Kdaj Luna na ta dan vzide?
8. Na katerih zemljepisnih širinah je Vega nadobzorniška zvezda?

1.10 Mars v opoziciji

Astronomi merijo oddaljenost Marsa od Zemlje z odbojem radijskih valov. To naredijo tako, da pošljejo radijski signal proti Marsu in izmerijo čas, do prejema od Marsa odbitega signala. Astronomi so tako meritev izvedli, ko je bil Mars v opoziciji s Soncem. Čas med pošiljanjem in prejemom odbitega signala je bil 500 sekund. Zemlja je od Sonca oddaljena 1 astronomsko enoto, ki znaša 150 milijonov kilometrov. Radijski signal potuje s hitrostjo 300 000 km/s.

1. Izračunaj oddaljenost Marsa od Zemlje v času meritve. Odgovor izrazi v kilometrih.

2. Izračunaj oddaljenost Marsa od Sonca v času meritve. Odgovor izrazi v kilometrih.

3. Čez koliko dni bo Mars ponovno v opoziciji z Zemljo? Obhodni čas Marsa je 687 dni. Predpostavi, da Zemlja in Mars okoli Sonca krožita po krožnicah.

1.11 Venera v največji elongaciji

Zvezdana je opazovala Venero v največji zahodni elongaciji. Izmerila je, da je takrat kotna oddaljenost med Venero in Soncem enaka 45 stopinj. V nadaljevanju predpostavi, da se Zemlja in Venera okoli Sonca gibljeta po krožnicah.

1. Kako drugače imenujemo Venero v času Zvezdaninega opazovanja?

2. Izračunaj oddaljenost Venere od Zemlje in odgovor podaj v astronomskih enotah.

3. Čez koliko časa bo Venera naslednjič v največji zahodni elongaciji? Obhodni čas Venere okoli Sonca je 225 dni.

4. Čez koliko časa bo Venera naslednjič v največji vzhodni elongaciji?

1.12 Analema z vsenebno kamero

Svetlana je v svojem domačem kraju z vsenebno kamero več dni v letu ob lokalnem poldnevu fotografirala Sonce in posnetke združila v eno fotografijo, ki jo vidiš na sliki 3. Rob fotografije predstavlja matematično obzorje Svetlaninega opazovališča. Svetlana je svojem posnetku opazila krivuljo zanimive oblike.

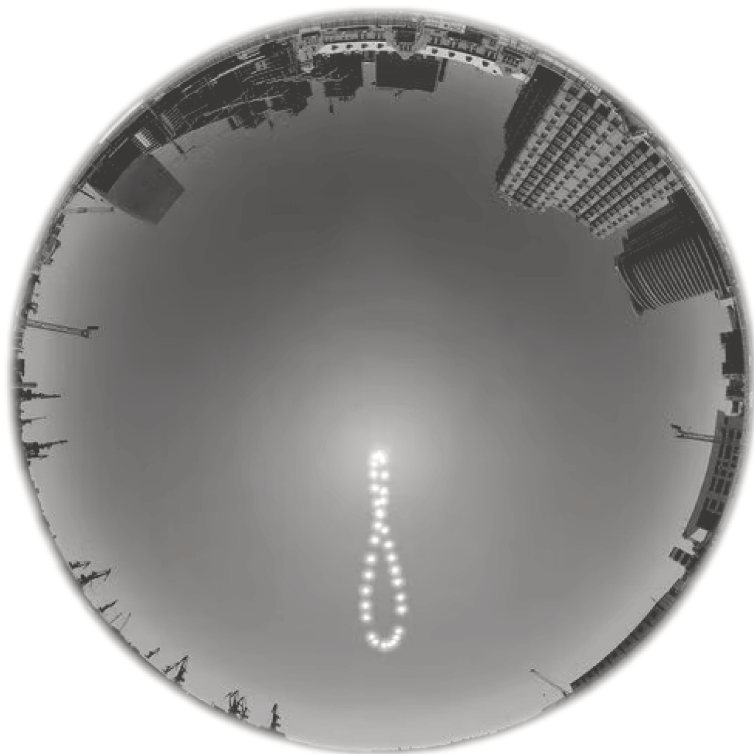
1. Kako imenujemo krivuljo z značilno obliko osmice, ki jo je Svetlana opazila na svojem posnetku?

2. Določi zemljepisno širino kraja, v katerem živi Svetlana. Predpostavi, da je razdalja od roba slike proti središču slike sorazmerna z višino nad obzorjem. Na fotografiji jasno označi meritve, ki jih upoštevša pri izračunu.

1.13 Novi koledar

Cesar Gnamun je v deželi Gnamundiji uvedel nov koledar. V tem koledarju je od vsakih 29 let 7 let prestopnih, preostalih 22 let pa ne. Prestopna leta trajajo 366 dni, ostala pa 365 dni. Oцени, čez koliko let napaka Gnamunovega koledarja znašala en dan. Povprečna dolžina tropskega leta, ki naj bi se v idealnem primeru ujemala s povprečno dolžino koledarskega leta, je 365,24219 dneva.





SLIKA 3.

Fotografija: Tunç Tezel



SLIKA 4.

Sredina delnega Luninega mrka. Avtor fotografije: Lionel Majzik.

1.14 Delni Lunin mrk

Fotografija na sliki 4 v negativu prikazuje sredino delnega Luninega mrka.

1. Na sliko z geometrijskim orodjem načrtaj Zemljino senco.

2. Izračunaj kotni premer Zemljine sence. Podatek o kotnem premeru Lune mlada astronomka oziroma mladi astronom gotovo pozna.

3. Kolikšna bi morala biti oddaljenost Lune od Zemlje, da bi bil kotni premer Lunine ploskvice enak kotnemu premeru, izračunanem pri nalogi **b)**. Oddaljenost Zemlje od Lune v času fotografiranja je bila približno 380 000 km.

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Vrnitev k programiranju: Od Pascala do dvojnega nihala

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Ko sem pred desetletji prvič sedel za računalnik, je bil svet programiranja drugačen. Takrat smo uporabljali jezike, kot sta Pascal in BASIC, in programiranje je bilo natančno delo, pri katerem so morale vse vejice in pike stati na pravih mestih. Programi, kot smo jih imenovali – danes bi jih verjetno označili za aplikacije – so bili orodja, ki smo jih ustvarili z algoritmi, zapisanimi do zadnje podrobnosti. Vsak ukaz je moral biti pravi, ko smo kode prevedli v izvršljive datoteke, ki so nato opravljale, karkoli nam je že uspelo sprogramirati. Če si naredil napako, si moral vse pregledati, popraviti in znova prevesti. To je bil počasen proces, a ne brez svojih nagrad. Potem so prišla Okna in z njimi grafični vmesniki. In jaz – kot številni iz moje generacije – sem izgubil stik s tem svetom. Po mnogih letih nisem več vedel niti kje ali kako začeti.

Pred kratkim pa me je povleklo nazaj. Razlog? Članek v Preseku [1], ki opisuje gibanje dvojnega nihala – sistema, ki je na prvi pogled preprost, a hitro pokaže kaotično naravo fizike. Avtor je omenil, da simulacija tega pojava zahteva nekaj programerskih veščin, in to me je spodbudilo, da poskusim. Nisem pričakoval, da bom v petih minutah ustvaril delujočo simulacijo, ki bi mi pred tridesetimi leti vzela teden dni trdega dela. To potovanje je bilo zame odkritje – in morda bo tudi za vas, ki ste morda starejši bralci ali pa šele spoznavate, kako daleč je tehnologija napredovala.

V osemdesetih letih prejšnjega stoletja (uh, sem res že tako star?) je programiranje pomenilo pisanje vrstic kode na črnem zaslonu z zelenimi črkami.

Spomnim se, kako sem pisal program za izračun Fibonaccijevih števil. Vsaka zanka, vsak pogoj je moral biti natančno definiran. Ko si končal, si uporabil prevajalnik, ki je tvoj trud spremenil v izvršljivo datoteko. Če je delovalo, si imel občutek, kot da si izumil kolo. A če je šlo kaj narobe, si lahko ure iskal napako – morda manjkajočo piko ali napačno postavljen oklepaj. Takrat ni bilo interneta, ki bi ti pomagal, le priročniki, lastna iznajdljivost ali pa smo si med seboj pomagali prijatelji in sošolci.

Članek v tej reviji me je pritegnil zaradi opisa dvojnega nihala – dveh palic, povezanih z masami, ki se gibljejo na videz naključno, a po natančnih fizikalnih zakonih. Avtor je predlagal simulacijo, da bi bolje razumeli kaos, ki ga opazimo v sistemu. Ker nisem imel pojma, kje začeti, sem vprašal za pomoč – in dobil sem jo od umetne inteligence, ki me je vodila korak za korakom. Na voljo je več prosto dostopnih klepetulj, sam sem se pogovoril z Grokom (<https://grok.com/>). Najprej sem ga vprašal, kako lahko naredim program (če ničesar nimam) in eden od predlogov je bil, naj naredim nekaj s končnico html. Čeprav se pod to končnico načeloma skriva zgolj datoteka, ki v brskalniku prikaže urejeno besedilo s povezavami, pa omogoča tudi izvajanje programa – s skriptnim jezikom. Brskalnik, ki torej izvaja program, pa ima že skoraj vsak računalnik. Ker urejevalnika za html datoteke nimam (npr. Visual Studio Code), sem jo pripravil kar v najbolj osnovnem okenskem besedilnem urejevalniku (Notepad) in končnico txt na koncu spremenil v html. No, nisem sam pripravil vsebine datoteke, umetna inteligenca jo je zame. Ne da bi kakorkoli poznal jezikovna pravila ali ukaze sem se zgolj pogovoril s klepetuljo, nekaj preprostih navodil:

»napiši program v html, ki simulira dvojno nihalo.«





```
<canvas id="canvas" width="600" height="400"></canvas>
<script>
    // Fizika in risanje nihala
</script>
```

SLIKA 1.

Osnovna koda za dvojno nihalo.

V nekaj sekundah je bilo pred menoj besedilo, ki sem ga prekopiral v svojo tekstovno datoteko. Tej sem le spremenil končnico, jo odprl v brskalniku in pred menoj je zanihalo dvojno nihalo.

Prvi rezultat je bil preprost: koda, ki je narisala nihalo na zaslonu in ga animirala z uporabo fizikalnih enačb. Razen fizikalnih podrobnosti, je zelo preprosta (glej sliko 1).

V nekaj minutah sem imel delujočo simulacijo. A želel sem več – drsnike za spreminjanje dolžin palic, gumb za ponastavitev, drsnik za trenje in začetne kote. Vsakič, ko sem dodal novo zahtevo, je koda rasla, a ostala razumljiva. Programiral nisem nič, le v pogovoru povedal, kaj želim. Program je pričarala umetna inteligenca. Končna različica (slika 2) je vključevala vse: večji zaslon, da se nihalo vidi tudi, ko je navpično, dodal pa sem še gumb za sledenje gibanja s pikami in drsnik za interval teh pik. Na ta način enostavno sledim gibanju nihala. Celotna koda je predolga in v njej se skrivajo podrobnosti, ki za njeno delovanje niso pomembne, v celoti pa jo najdete na [2].

Fizika, ki je opisana v prej omenjenem članku, se tudi skriva neke v kodi (slika 3), jo pa umetna inteligenca izbrska iz neke knjižnice algoritmov, ki so jo z leti zgradili programerji po svetu.

Kar me je najbolj presenetilo, je, kako hitro sem dosegel delujoč program brez predhodnih izkušenj z modernimi jeziki, kot je JavaScript. Včasih bi moral razumeti grafične knjižnice, ročno izračunati vsako točko na zaslonu in optimizirati kodo, da bi delovala na starih računalnikih. Danes brskalniki opravi večino dela. Element `<canvas>` omogoči risanje, `requestAnimationFrame` pa gladko animacijo. Fiziko sem prepustil enačbam, ki jih je nekdo drug že preveril – in delovalo je. Rezultat je viden na sliki 5.

Za starejše bralce, ki ste morda programirali v BASIC-u ali Pascalu, je to kot čarovnija. Ni vam treba znati vsega. Potrebujete le idejo in orodje, kot je Visual Studio Code, ki je brezplačno. Odprete datoteko, vtipkate nekaj vrstic, jo shranite kot `.html` in odprete v brskalniku. Brez prevajanja, brez zapletenih namestitev. Če sem jaz, ki nisem pisal kode od devetdesetih, to zmoget v petih minutah, lahko tudi vi.

```
<canvas id="canvas" width="600" height="600"></canvas>
<div class="controls">
    <input type="range" id="length1" min="50" max="200" value="100">
    <button id="reset">Ponastavi</button>
    <button id="toggleDots">Vklopi/izklopi pike</button>
</div>
<script>
    // Fizika, animacija in sledenje pikam
</script>
```

SLIKA 2.

Končna koda z dodatnimi funkcijami; prikazani so ključni deli, podrobnosti pa le nakazane. Program je v celoti daljši od 200 vrstic.

```
function updatePhysics() {
  const num1 = -g * (2 * m1 + m2) + Math.sin(a1);
  const num2 = -m2 * g * Math.sin(a1 - 2 * a2);
  const num3 = -2 * Math.sin(a1 - a2) * m2 * (a2_v * a2_v * r2 + a1_v * a1_v * r1 *
  Math.cos(a1 - a2));
  const denom1 = r1 * (2 * m1 + m2 - m2 * Math.cos(2 * a1 - 2 * a2));
  let a1_a = (num1 + num2 + num3) / denom1;

  const num4 = 2 * Math.sin(a1 - a2) * (a1_v * a1_v * r1 * (m1 + m2) + g * (m1 + m2) *
  Math.cos(a1) + a2_v * a2_v * r2 * m2 * Math.cos(a1 - a2));
  const denom2 = r2 * (2 * m1 + m2 - m2 * Math.cos(2 * a1 - 2 * a2));
  let a2_a = num4 / denom2;

  a1_v += a1_a * dt;
  a2_v += a2_a * dt;
  a1 += a1_v * dt;
  a2 += a1_v * dt;

  a1_v *= friction;
  a2_v *= friction;
}
```

SLIKA 3.

Del programa, ki s fizikalnimi zakoni računa trenutne lege nihalo.

To potovanje me je naučilo, da danes ni več ovir, ki jih je postavljala tehnologija. Če si lahko zamislite nekaj – recimo simulacijo planeta, ki se vrti, ali igro, ki jo igrate z miško – to lahko ustvarite. Orodja so tu, brezplačna in preprosta. Vprašate lahko celo umetno inteligenco, kot sem jo jaz, in dobite odgovor v trenutku. Za starejše, ki smo odraščali z disketami in ukaznimi vrsticami, je to osvobajajoče. Za mlajše, ki ste že vajeni digitalnega sveta, je to morda samoumevno, a še vedno vredno razmisleka.

Vendar moram dodati opozorilo o umetni inteligenci, ki mi je pomagala. Prvič, lahko nas naredi preveč odvisne. Če se zanašamo nanjo za vsako vrstico kode, morda nikoli ne razumemo, kaj počnemo. Drugič, še vedno potrebujemo znanje, da preverimo, ali je koda pravilna – enačbe za nihalo so delovale, a če bi bile napačne, bi to moral opaziti sam. Tretjič, umetna inteligenca deluje znotraj tega, kar že obstaja. Ne bo izumila povsem novega pristopa, če ga ne pozna. Zato je pomembno, da ohranimo radovednost in sposobnost razmišljanja zunaj okvirov, ki jih postavlja tehnologija.

**SLIKA 4.**

Tudi roke in palico golfista lahko obravnavamo kot dvojno nihalo.





1	3	8	4	2	6	5	7
6	5	7	2	1	4	3	8
3	7	4	8	5	1	2	6
2	1	6	5	8	3	7	4
4	8	3	7	6	5	1	2
5	2	1	6	4	7	8	3
7	4	2	1	3	8	6	5
8	6	5	3	7	2	4	1

Suša ali oseka?

↓↓↓

DOMEN LISJAK

→ Predstavljajte si, da se zbudite na obali tropskega otoka, kjer vas pričaka osupljiv prizor: vrsta lesenih čolnov, ki zjutraj ležijo znotraj popolnoma suhega zaliva, čeprav je nekaj ur prej voda segala do njihove palube. Ta vznemirljivi kontrast med plimo in oseko, ujet na fotografiji z Zanzibarja, priča o neverjetni moči Lunine in Sončeve gravitacije ter vplivu geografskih značilnosti na dvigovanje

in upadanje morske gladine. Plimovanje poznamo tudi iz naših krajev, ko poletni dan prebijemo na plaži – čemu se to dogaja in zakaj je ponekod na svetu ta pojav še toliko bolj ekstremen?

Glavni razlog za redno menjavanje plime in oseke je gravitacijska sila Lune (in v manjši meri Sonca) v povezavi z vrtenjem Zemlje. Gravitacijska sila deluje med vsemi telesi v vesolju in s povečanjem razdalje slabi – mi jo najmočnejše občutimo v odnosu



SLIKA 1.



→ do Zemlje, saj nam je najbližje. Osrednji mehanizem plimovanja si lahko predstavljamo kot razpote-
ganje vodnih mas - na strani Zemlje, ki je Luni bliže,
je gravitacija nekoliko močnejša, na nasprotni strani
pa je nekoliko šibkejša. Navidezno se vodne mase
nekoliko odmaknejo od Zemljinega površja - na eni
strani proti Luni, na drugi pa stran od nje. Povsod
drugje pa voda »odteče« proti izboklinam. Ker se
Zemlja vsak dan vrti okoli svoje osi, se premikamo
skozi območja višje in nižje vodne gladine, ki osta-
jajo usklajena s položajem Lune. Zato približno dva-
krat na dan doživimo maksimum - plimo in dvakrat
na dan minimum - oseko. V Sloveniji, ali širše, v Sre-
dozemskem morju plimovanje običajno ni tako silo-
vito, kot denimo v odprtih oceanih. Razlogov je več:
Sredozemsko morje je razmeroma zaprto, zalivi in
prehodi (npr. Gibraltarska ožina) pa omejuje obseg
premikavanja večjih vodnih mas. Prav tako pa še bolj
očitno razliko naredi to, da je v našem delu sveta po-
gosto bolj strma in manj razsežna obala, zato tudi
ob oseki morska gladina ne »pobegne« tako daleč.
Pri nas se tako višina med plimo in oseko večinoma
spremeni le za nekaj deset centimetrov, izjemoma za
meter ali malo več. Če bi bila obala popolnoma po-
ložna, bi upad gladine za en meter lahko pomenila
več sto metrov obale brez vode. Nekaj podobnega se
zgodí na Zanzibarju. Obala tam je plitva in široka,
otok pa leži ob Indijskem oceanu, kjer imajo valovi in
tokovi več prostora za širjenje. Ko nastopi oseka, se
voda umakne stotine metrov od običajne obalne črte
in razkrije dno, posuto z morskovo travo, školjkami ter
čolni, ki obležijo na suhem. Čeprav se na prvi pogled
zdi, da to otežuje plovbo, v resnici številni domačini
izkoriščajo to obdobje za čiščenje in popravilo plo-
vil, pobiranje morskih sadežev in celo sprotno spo-
znavanje morskega ekosistema. Plima in oseka ni-
sta le astronomska zanimivost, temveč imata ključno
vlogo pri življenju ob obali. Vplivata na ribištvo, tu-
rizem in celo gradnjo pristanišč ali nasipov. Na eni
strani lahko povzroči preglavice ribičem, ki ob oseki
ostanejo na suhem, na drugi strani pa prinaša prilo-
žnost za dostop do morskega dna, ki je sicer skrito
pod vodo. Kot vidimo na primeru Zanzibarja, je velik
vpliv plimovanja posledica splošne lege otoka, oblike
obale ter včasih tudi koristnega izkoriščanja narave
v lokalnih skupnostih.

Križne vsote

↓↓↓
→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s
števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v za-
porednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih
enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na
začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem
morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu)
različne.

	14	11			
9					
			6		
18				18	
		5			11
			12		
			16		

↓↓↓
REŠITEV KRIŽNE VSOTE

7	6				
		16			
4	8	12			
	1	4	5		
		18	2	7	6
			9	4	5
				11	14

Svetlobna pahljača nad Fakulteto za matematiko in fiziko

↓↓↓

MANCA VERTAČNIK

→ Sončna svetloba je nekaj vsakdanjega, vendar se le redko zgodi, da lahko opazujemo posamezne žarke. Po navdihu latinske besede za večerni mrak crepusculum so naši predniki tovrstni interakciji svetlobe z atmosfero nadeli ime kreposkularni žarki. Zaradi očarljivosti in občutka, da vidimo svetlobo samo, so jih pogosto vključili v umetniške upodobitve.

Kreposkularni žarki nastanejo, kadar oblaki delno zastrejo svetlobo tako, da njeni razpršeni žarki prehajajo le skozi odprte vrzeli. Tam zaradi prisotnosti vodnih, prašnih in drugih delcev, na katerih se elektromagnetno valovanje Sonca odbija in sipa, nastanejo svetlobni snopi. Ključno vlogo pri oblikovanju podobe igra perspektivna iluzija. Čeprav so sončni žarki v resnici skoraj vzporedni, se nam zdi, da izhajajo iz ene same točke na nebu. Gre za enak princip, zaradi katerega se železniški tiri na obzorju vizualno stikajo. Vzporedne linije, ki segajo v daljavo, naše oči in možgani interpretirajo kot konvergentne. S tem dobimo vtis, da se svetlobni žarki raztezajo v obliki pahljače. Pri pojavu kreposkularnih žarkov se torej interakcija svetlobe z atmosfero in optični »trik« v naših možganih prepleteta v estetski prizor in na nebu razprostreta čudovito pahljačo.



SLIKA 1.

Fotografija je bila posneta v Ljubljani, blizu FMF fakultete.
avtor: Manca Vertačnik

× × ×

Oblikovna prenova revije Presek v letu 2004/05

↓↓↓

→ Pred dvajsetimi leti, z letnikom 2004/2005, je delo odgovorne urednice revije Presek prevzela Maja Klavžar. Z njenim začetkom dela je revija po dobrih 30 letih izhajanja prvič dočkala tudi obsežno likovno prenovu - nekoliko večji format in več stolpcev, kot ga poznamo še danes, in zelo sodobno računalniško oblikovanje, s številnimi grafičnimi elementi.

Bogata pa ni bila le podoba revije, tudi vsebina je bila zelo pestra, saj so z rednim pisanjem prispevkov nadaljevali številni uveljavljeni avtorji. Za prvo številko so tako članke prispevali Marija Vencelj, Boris Lavrič, Janez Strnad, Sandi Klavžar, Vladimir Batagelj, Vilko Domajnko, Marjan Prosen, Andrej Taranenko, Ciril Dominko in Aleksander Potočnik, posebno novost pa je predstavljal tudi priloženi vložek z nalogami iz matematičnega tekmovanja Kenguru. Celotno revijo v pdf obliki najdete danes na spletni strani presek.si, in velja jo prelistati, saj je marsikateri članek zanimiv in duhovit še dandanes. Vabljeni k branju!



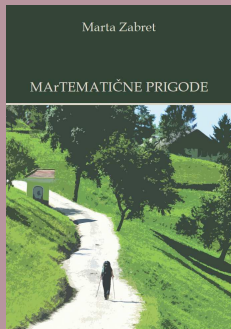
Letnik 32, solsko leto 2004/2005, številka 1

VSEBINA

■ Uvodnik	
■ Nagovor odgovorne urednice	stran 2
1. MATEMATIKA	
■ Koliko prstov imajo na rokah Venerani?	stran 5
■ Trakovi in premice preko kroga	stran 6-8
■ Dopolni račune (Rešitev nagrajne naloge)	stran 9
■ Krog v trikotniku (Rešitev nagrajne naloge)	stran 10
■ Gobelini	stran 11
■ Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859	stran 12-13
■ Pravična delitev	stran 13-14
■ Ulamova spirala	stran 15
■ 40. tekmovanje za Zlato Végovo priznanje	stran 17
2. FIZIKA	
■ Hitrost svetlobe je meja	stran 19-22
■ 42. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije	stran 23-24
■ Najlepše fotografije za leto fizike	stran 25
3. RAČUNALNIŠTVO	
■ Je vaš računalnik staknil virozo?	stran 27-29
4. ASTRONOMIJA	
■ Najdaljše trajanje popolnega sončevega mrka	stran 21-32
■ Marjan Prosen: Imena nebesnih teles	stran 33
KRIŽANKA	
■ Križanka	stran 16-17
PRILOGA	
■ Evropski matematični kenguru	priloga

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

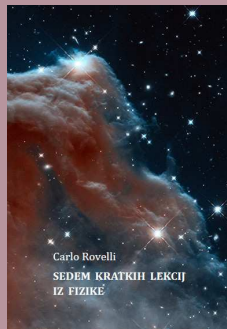


Marta Zabret:

MATeMATIČNE PRIGODE

148 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12×17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



										1 2 3 4																			
										5 6 7 8																			
										9 10 11 12																			
										13 14 15 16																			
										17 18 19 20																			
										21 22 23 24																			
										25 26 27 28																			
										29 30 31 32																			
										33 34 35 36																			
										37 38 39 40																			
										41 42 43 44																			
										45 46 47 48																			
										49 50 51 52																			
										53 54 55 56																			
										57 58 59 60																			
										61 62 63 64																			
										65 66 67 68																			
										69 70 71 72																			
										73 74 75 76																			
										77 78 79 80																			
										81 82 83 84																			
										85 86 87 88																			
										89 90 91 92																			
										93 94 95 96																			
										97 98 99 100																			
										99 100 101 102																			
										103 104 105 106																			
										107 108 109 110																			
										111 112 113 114																			
										115 116 117 118																			
										119 120 121 122																			
										123 124 125 126																			
										127 128 129 130																			
										131 132 133 134																			
										135 136 137 138																			
										139 140 141 142																			
										143 144 145 146																			
										147 148 149 150																			
										151 152 153 154																			
										155 156 157 158																			
										159 160 161 162																			
										163 164 165 166																			
										167 168 169 170																			
										171 172 173 174																			
										175 176 177 178																			
										179 180 181 182																			
										183 184 185 186																			
										187 188 189 190																			
										191 192 193 194																			
										195 196 197 198																			
										199 200 201 202																			
										203 204 205 206																			
										207 208 209 210																			
										211 212 213 214																			
										215 216 217 218																			
										219 220 221 222																			
										223 224 225 226																			
										227 228 229 230																			
										231 232 233 234																			
										235 236 237 238																			
										239 240 241 242																			
										243 244 245 246																			
										247 248 249 250																			
										251 252 253 254																			
										255 256 257 258																			
										259 260 261 262																			
										263 264 265 266																			
										267 268 269 270																			
										271 272 273 274																			
										275 276 277 278																			
										279 280 281 282																			
										283 284 285 286																			
										287 288 289 290																			
										291 292 293 294																			
										295 296 297 298																			
										299 300 301 302																			
										303 304 305 306																			
										307 308 309 310																			
										311 312 313 314																			
										315 316 317 318																			
										319 320 321 322																			
										323 324 325 326																			
										327 328 329 330																			
										331 332 333 334																			
										335 336 337 338																			
										339 340 341 342																			
										343 344 345 346																			
										347 348 349 350																			
										351 352 353 354																			
										355 356 357 358																			
										359 360 361 362																			
										363 364 365 366																			
										367 368 369 370																			
										371 372 373 374																			
										375 376 377 378																			
										379 380 381 382																			
										383 384 385 386																			
										387 388 389 390																			
										391 392 393 394																			
										395 396 397 398																			
										399 400 401 402																			
										403 404 405 406																			
										407 408 409 410																			
										411 412 413 414																			
										415 416 417 418																			
										419 420 421 422																			
										423 424 425 426																			
										427 428 429 430																			
										431 432 433 434																			

Andrej Guštin, Dunja Fabjan, Vid Kavčič, Simon Bukovšek

Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024

Teorija in rešene naloge za srednje šole

Ob 15. obletnici tekmovanj iz astronomije je pri založbi FMF izšla Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj – teorija in rešene naloge za srednje šole.

Poleg več kot **230 rešenih nalog** s šolskih, z državnih in izbirnih tekmovanj za srednje šole prinaša zbirka tudi **povzetke teorije**, ki bodo v pomoč tekmovalkam in tekmovalcem pri pripravi na astronomska tekmovanja. Zbirko bogati več kot **140 skic in fotografij**, ki bralkam in bralcem pomagajo pri razumevanju vsebine.

Zbirka je razdeljena na šest tematskih sklopov: **osnove astronomije**, **nebesna mehanika**, **svetloba in sevanje**, **zvezde in zvezdni sistemi**, **kozmologija** in **optika**. Vsak tematski sklop se začne s povzetkom teoretičnih vsebin, vse od temeljnih pa do zahtevnejših konceptov. Sledi izbor nalog, ki se navezujejo na obravnavano tematiko. Urejene so po težavnosti, hkrati pa je vsaka naloga opremljena tudi z oznako letnice in ravni tekmovanja. Poleg tega zbirka zajema tudi sklope **koristne matematične veze**, **obdelava podatkov** in **vrtljiva zvezdna karta**.

Zbirka predstavlja prvo tovrstno gradivo pri nas, zato je nepogrešljiv pripomoček za mlade astronomke in astronome, ki si želijo boljšega razumevanja in bolj poglobljenega stika z astronomijo. Hkrati pa lahko služi kot odličen pripomoček za pripravo na šolska, državna in izbirna tekmovanja iz astronomije – tako za dijakinje in dijake kot tudi njihove mentorice in mentorje. V veliko pomoč pa bo tudi študentkam in študentom, ki se astronomiji posvečajo v okviru univerzitetnega študija na prvi stopnji.

Poleg omenjene knjige ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



9 770351 665241