

PRESSEK

#2

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO



POSEBNA
RAZPOLOVITEV
KROGA IN
KROGLE

FOTOGRAFSKA
ZENICA

DNEVNO IN
LETNO
NAVIDEZNO
GIBANJE
SONCA

MARSOVSKI
ESTIMATHON

Praštevílo, dolgo 41 milijonov števk

↓↓↓

12. oktobra 2024 je Luke Durant iz ZDA s pomočjo projekta GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search) odkril novo največje praštevílo. Števílo z oznako M136279841 je definirano kot

$$2^{136279841} - 1$$

in ima več kot 41 milijonov števk v decimalnem zapisu, torej kar 16 milijonov števk več kot doslej znano največje praštevílo. Pri iskanju tega praštevíla se je Durantov računalnik povezal v oblak z več tisoč strežniki v 17 državah in več kot eno leto na izbranem kandidatu izvajal Fermatov verjetnostni test, po potrditvi tega testa pa še eksaktni Lucas-Lehmerjev test, ki je v enem dnevu dokončno potrdil praštevílskost.

Praštevíla oblike $p = 2^q - 1$ so znana pod imenom Mersennova praštevíla, po francoskem menihu iz 17. stoletja. Novo odkrito praštevílo je šele 52. doslej znano Mersennovo praštevílo. Takšna praštevíla so zaradi njihove zveze s popolnimi števili proučevali že v antični Grčiji, kjer pa so poznali le prva štiri: $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$ in $127 = 2^7 - 1$. Z njimi so se nato ukvarjali še številni znameniti matematiki, od sredine devedesetih let pa so pobudo pri njihovem iskanju prevzeli internetni navdušenci, ki so si na računalnike namestili program GIMPS, ki je prosti procesorski čas na njihovih računalnikih porabil za testiranje primernih kandidatov. Na ta način so bila od leta 1996 do 2018 sedaj odkrita vsa nova Mersennova praštevíla od 35. do 51. V zadnjih nekaj letih pa se je z razvojem novih grafičnih procesorskih enot (GPU) izjemno razvila zmožnost vzporednega računanja, kar poleg razvoja umetne inteligence omogoča tudi bliskovit napredek matematičnih in drugih znanstvenih raziskav. To je omogočilo tudi odkritje novega, 52. Mersennovega praštevíla.

Po novici na spletni strani <https://www.mersenne.org/primes/?press=M136279841> povzel BK.

× × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 52, šolsko leto 2024/2025, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2024/2025 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2024 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštivilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Praštevilo, dolgo 41 milijonov števk

UVODNIK

- 4 Premislek pred odločanjem
(Aleš Mohorič)

MATEMATIKA

- 5-8 Posebna razpolovitev kroga in krogle
(Marko Razpet)

TEKMOVANJA

- 9-12 Mednarodna matematična olimpijada 2024
(Luka Horjak)

FIZIKA

- 13-15, 18 Fotografska zenica
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 19-21 Dnevno in letno navidezno gibanje sonca
(Karel Šmigoc)

- 22-25 Projekt GoChile: spodbujanje učenja in
ustvarjalnosti
(Jure Japelj)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)

- 25 Križne vsote

- 26-27 Marsovski estimathon
(Matija Likar)

- 28-29 Naravoslovna fotografija –
Sončev steber: optični pojav na nebu
(Aleš Mohorič)

- 30 Bilo je nekoč v reviji Presek –
Trideset let Društva matematikov, fizikov
in astronomov SR Slovenije

SLIKA NA NASLOVNICI: Komet Tsuchinshan-ATLAS z uradno oznako C/2023 A3 so astronomi odkrili v začetku leta 2023. Ko se je septembra letos približal osrednjemu delu Osončja, se je okoli 10 kilometrov velikega jedra pojavila bleščeča koma, komet pa je razvil svetel rep. Iz naših krajev smo komet lahko opazovali v drugi polovici oktobra nad zahodnim delom obzorja. Komet izhaja iz Oortovega oblaka, skrajnega roba Osončja. Čeprav je v bližino Sonca zavandral že pred približno 80 000 leti, je zaradi gravitacijske interakcije s telesi v notranjosti Osončja njegova orbita postala hiperbolična, kar pomeni, da nas komet v prihodnosti ne bo več obiskal. Fotografijo na naslovnici s kometom C/2023 A3 je posnela Maruša Žerjal. Lokacija: Mirador de Ayosa (razgledna točka Ayosa) v Narodnem parku Teide na otoku Tenerife. Na levi je viden vulkan Teide (najvišji vrh Španije, 3715 m), za njim zahaja Venera. Pod oblaki se vidita mesti Puerto de la Cruz in La Orotava. Pokrajino osvetljuje Luna. Posneto s 35-mm objektivom pri f/1,4, ISO 1600, čas osvetlitve 1 sekunda. Foto: Maruša Žerjal

Premislek pred odločanjem



ALEŠ MOHORIČ, ODGOVORNI UREDNIK

V sodobni demokratični družbi je aktivno državljanstvo eno najpomembnejših orodij za sooblikovanje skupne prihodnosti. A s tem, ko se vse pogostejše soočamo z zahtevnimi odločitvami, se odpira vprašanje, ali smo kot posamezniki in družba pripravljeni na odgovornost, ki jo takšno odločanje prinaša. (Ne)referendum o gradnji novih jedrskih elektrarn v Sloveniji je bil poveden primer, kako ključnega pomena so kritično mišljenje, informiranost in premissljenost pri sprejemanju odločitev.

Jedrska energija, kot ena od možnosti za obvladovanje podnebnih sprememb in zagotavljanje energetske stabilnosti, odpira številne razprave. Podporniki pogosto poudarjajo nizkoogljično naravo proizvodnje električne energije ter možnost dolgoročne energetske neodvisnosti. A ob teh argumentih ne smemo spregledati tudi druge plati: vprašanja o varnosti, odlaganju jedrskih odpadkov, stroških gradnje in tveganjih nesreč. Tehtanje koristi in tveganj ni preprosto, še posebej, ker so posledice teh odločitev dolgoročne in jih bo nosilo več generacij.

Tu pride do izraza vloga kritičnega mišljenja. Kritično mišljenje ne pomeni le iskanja argumentov za ali proti določeni odločitvi, temveč sposobnost analize, ocenjevanja informacij in razumevanja širšega konteksta. Številni posamezniki se o takih vprašanjih pogosto odločajo na podlagi čustev, osebnih prepričanj ali mnenj, ki jih posredujejo drugi, namesto da bi se sami poglobili v temo. A ravno pri tako kompleksnih vprašanjih je ključno, da si vzamemo čas za izobraževanje in pridobivanje informacij iz zanesljivih virov. Če teh virov ne poznamo ali nismo prepričani v svoje znanje, se moramo vprašati, kdo so ljudje ali organizacije, ki jim zaupamo, in zakaj.

V sodobni družbi, kjer aktivizem pogosto zamegli objektivno razpravo, moramo biti posebej previdni. Aktivisti – ne glede na to, ali so za ali proti – imajo pogosto jasno začrtane cilje, ki temeljijo na njihovih vrednotah ali interesih. A vrednote enega posameznika ali skupine niso nujno skladne z dolgoročnimi interesi celotne družbe. To ne pomeni, da je akti-

vizem sam po sebi škodljiv, pomeni pa, da moramo biti kot državljani previdni in kritični do virov informacij, ki jih aktivisti ponujajo. Prevečkrat se zgodi, da se mnenja oblikujejo pod vplivom karizmatičnih posameznikov ali glasnih skupin, ne pa na podlagi dejstev in razumnih argumentov.

Odločanje o jedrskih elektrarnah ni zgolj vprašanje energetske strategije, temveč tudi zrelosti naše družbe. Smo pripravljeni prevzeti odgovornost za posledice naših odločitev, pozitivne in negativne? Smo sposobni videti onkraj trenutnih koristi in razumeti dolgoročne vplive? Da bi to dosegli, potrebujemo poglobljeno razpravo, v kateri so slišani vsi argumenti, in družbo, ki ceni premissljenost bolj kot hitre rešitve.

Na koncu gre pri aktivnem državljanstvu za več kot zgolj glasovanje. Gre za odgovornost, da se izobražujemo, premissljujemo in delujemo v dobro skupnosti, ne glede na osebna nagnjenja ali vplive okolice. Šele takrat bomo resnično pripravljeni na odločitve, ki oblikujejo našo prihodnost.



SLIKA 1.



Posebna razpolovitev kroga in krogle

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ V prispevku bomo najprej obravnavali razdelitev kroga na ploščinsko enaka dela, toda ne s premico, ampak s krožnico, ki ima središče na robu danega kroga. Nato se bomo lotili še analogne naloge v prostoru, in sicer razdelitve krogle na prostorninsko enaka dela s sfero, ki ima središče na robu krogle.

1. Prva naloga je precej stara. Objavljena je bila leta 1894 v The American Mathematical Monthly [1], kjer je formulirana popolnoma geometrijsko. V [3] je ista naloga zapisana bolj poljudno.

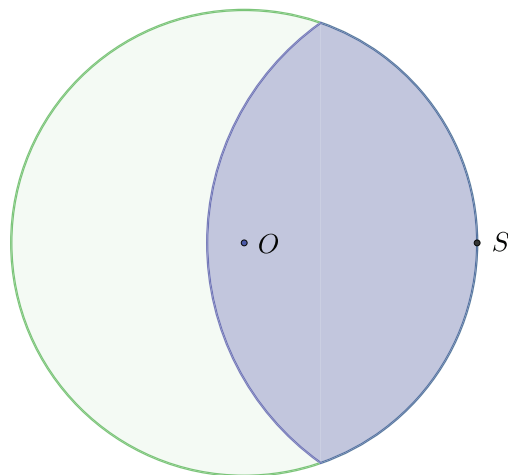
Imamo okrogel travnik in na njegov rob z neraztegljivo vrstico privežemo kožo, tako da se lahko pase po travniku. Kako dolga mora biti vrstica, da bo koža lahko popasla natanko polovico travnika?

Očitno naloga zahteva, da poiščemo polmer krožnega loka, ki krog razdeli na ploščinsko enaka lika in ima središče S na obodu kroga (slika 1). Lik, ki ima obliko Luninega krajca, naj ima ploščino p_1 , lečasti lik ploščino p_2 , krog pa ploščino p . Naloga zahteva, da je $p_1 = p_2$ oziroma $p = \pi r^2 = 2p_2$. Rešitev naloge dobimo z računom, ki ne spada ravno med najpreprostejše.

Dani krog naj ima središče v točki O in polmer r , krožni lok pa središče v točki S na obodu kroga in polmer R . Očitno mora R biti med r in $2r$. Zaradi simetrije glede na premico skozi O in S je dovolj, da preštudiramo zgornjo polovico lečastega lika na sliki 2.

Znano je, da je ploščina krožnega izseka enaka polovičnemu produktu kvadrata polmera in središčnega kota, izraženega v radianih. Prav tako vemo, da je ploščina trikotnika enaka polovičnemu produktu stranic in sinusa kota med njima.

Oba krožna loka se sekata v točki A , trikotnik OSA



SLIKA 1.

Razpolovitev kroga s krožnim lokom s središčem na obodu kroga.

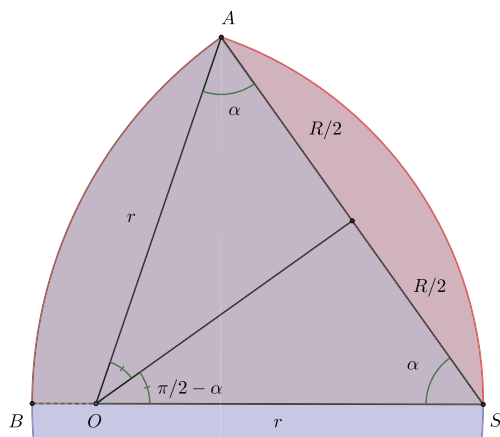
je enakokrak s kotom α ob njegovi osnovnici AS , ki ima dolžino R . Podaljšek kraka SO seka iskani krožni lok v točki B .

Ploščina $p_2/2$ lika med obema krožnima lokoma nad daljico BS je enaka vsoti ploščine krožnega izseka BSA , to je $R^2\alpha/2$, in ploščine krožnega odseka nad tetivo AS , to se pravi $r^2(\pi - 2\alpha)/2 - r^2\sin(\pi - 2\alpha)/2$. To pomeni:

$$\frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}R^2\alpha + \frac{1}{2}r^2(\pi - 2\alpha) - \frac{1}{2}r^2\sin(\pi - 2\alpha).$$

Po poenostavitvi dobimo $p_2 = R^2\alpha + \pi r^2 - 2r^2\alpha - r^2\sin 2\alpha$. Z upoštevanjem zahteve $\pi r^2 = 2p_2$ mora veljati $\pi r^2 = 2R^2\alpha + 2\pi r^2 - 4r^2\alpha - 2r^2\sin 2\alpha$. Ker v enakokrakem trikotniku OSA za polovico osnovnice





SLIKA 2.

K izračunu ploščine $p_2/2$.

velja $R/2 = r \cos \alpha$, se zgornja enačba poenostavi najprej v $8\alpha \cos^2 \alpha + \pi - 4\alpha - 2 \sin 2\alpha = 0$, nato pa z upoštevanjem enakosti $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ v $4\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha + \pi = 0$. Nazadnje uvedemo še novo neznanko $\xi = 2\alpha$ in zanjo dobimo transcendentno enačbo

$$\blacksquare \quad 2\xi \cos \xi - 2 \sin \xi + \pi = 0. \quad (1)$$

Enačbo lahko rešimo le numerično. Opazujemo graf funkcije $f(\xi) = 2\xi \cos \xi - 2 \sin \xi + \pi$ in ugotovimo, da je ena rešitev enačbe (1) med 0 in $2\pi/3$ (slika 3).

Za rešitev pride v poštev tak ξ , za katerega je $R = 2r \cos(\xi/2)$ med r in $2r$, kar je za ξ med 0 in $2\pi/3$ izpolnjeno. Rešitev dobimo z eno od numeričnih metod, na primer z Newtonovo tangentno metodo. Začnemo na primer z začetnim približkom $\xi_0 = 1,2$ in nato naslednje približke računamo s formulo

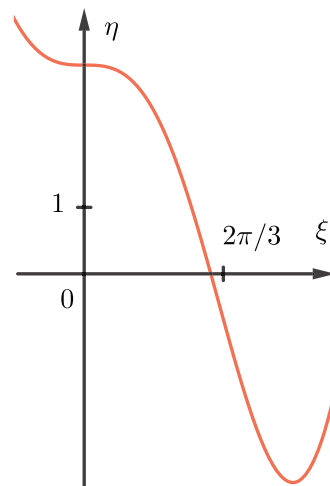
$$\blacksquare \quad \xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}.$$

Oznaka f' pomeni odvod funkcije f . V našem primeru je $f'(\xi) = -2\xi \sin \xi$. Po nekaj korakih najdemo

$$\blacksquare \quad \xi \doteq 1,90569, \quad 2 \cos \alpha = 2 \cos(\xi/2) \doteq 1,15873.$$

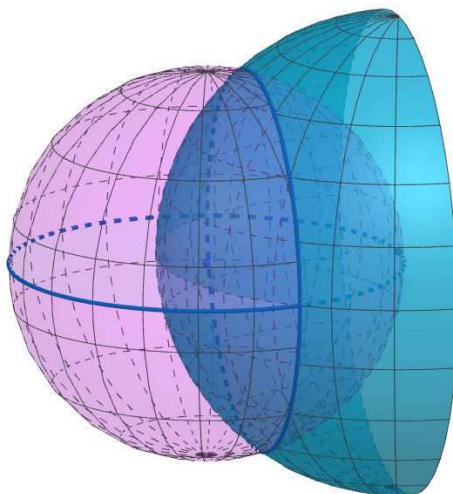
Rešitev naloge je:

$$\blacksquare \quad R \doteq 1,15873 r.$$



SLIKA 3.

Del grafa funkcije f .



SLIKA 4.

Razpolovitev krogle s poloblo.

2. Nič manj zanimiva ni naslednja analogna prostorska naloga.

Na površju krogle s polmerom r je središče S poloble, ki dano kroglo razdeli na dve prostorninsko enaki telesi. Polobla naj ima polmer R , ki ga je treba izračunati.

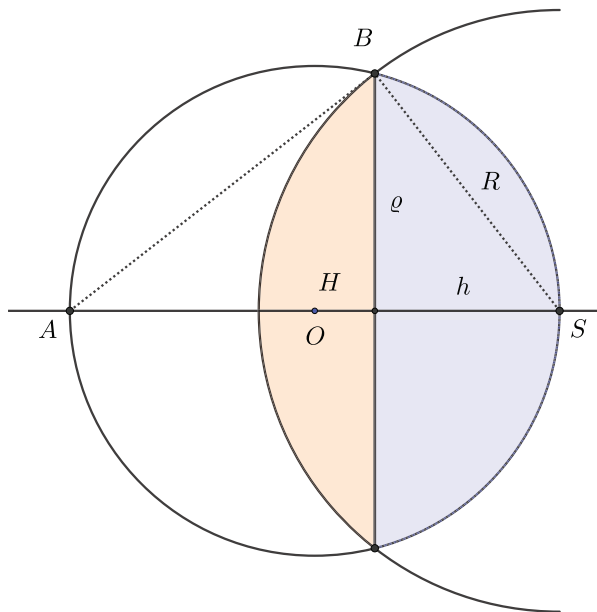
Nalogo najdemo v [2]. Rešitev je tam izvedena bolj na kratko. Tu pa ji bomo posvetili malo več pozornosti.

Očitno je iskani polmer R med r in $2r$. Polobla preseka dano kroglo vzdolž krožnice s polmerom ϱ . Presek z ravnino skozi središče O krogle in središče S poloble sta krog in krožni lok (slika 5).

Polmer R je treba določiti tako, da bo prostornina V' lečastega telesa, ki je omejeno s krogelnima kapi-cama, enaka polovici prostornine krogle V . Lečasto telo lahko razdelimo na krogelna odseka: prvi ima višino h in pripada krogli s polmerom r , drugi pa višino H in pripada krogli s polmerom R . Po znanih formulah za prostornino krogelnih odsekov je prostornina lečastega telesa enaka

$$\blacksquare \quad V' = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi H^2}{3}(3R - H).$$

Upoštevali bomo še zvezi $R = h + H$ in $2rh = R^2$. Drugo dobimo po Evklidovem izreku v pravokotnem



SLIKA 5.

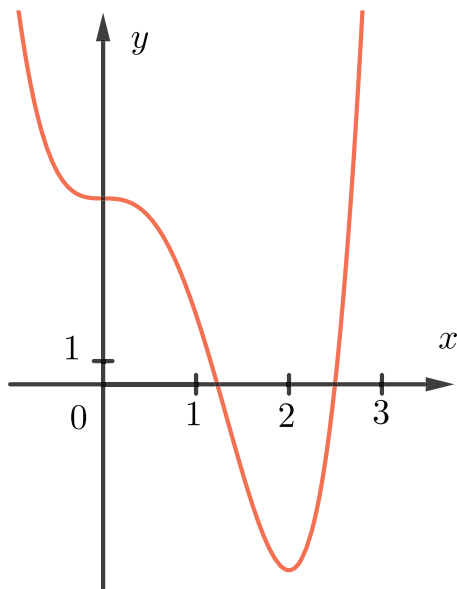
Presek krogle in poloble.



trikotniku ASB . Iz zahteve $2V' = V = 4\pi r^3/3$ dobimo po poenostavitvi enačbo $h^2(3r - h) + H^2(3R - H) = 2r^3$. Vanjo vstavimo $h = R^2/(2r)$ in $H = R - h = R - R^2/(2r)$ in dobimo enačbo $3R^4 - 8rR^3 + 8r^4 = 0$, v kateri je R neznanka. Vpeljemo novo neznanko x z relacijo $R = xr$ in pridemo do polinomske enačbe

$$3x^4 - 8x^3 + 8 = 0, \quad (2)$$

ki ima dve realni in dve konjugirano kompleksni rešitvi. Izražata se precej zapleteno z osnovnimi računskimi operacijami ter kvadratnim in kubičnim korenom.



SLIKA 6.

Del grafa polinoma p .

Z opazovanjem grafa polinoma $p(x) = 3x^4 - 8x^3 + 8$ ugotovimo, da ima enačba (2) rešitvi med 1 in 2 ter med 2 in 3 (slika 6). To potrjuje tudi račun:

$p(1) = 3, p(2) = -8, p(3) = 35$. V poštev seveda pride rešitev med 1 in 2. Z Newtonovo tangentno metodo zaporednih približkov najdemo prvih pet decimalnih rešitve v treh korakih. Začnemo na primer z začetnim približkom $x_0 = 1,2$ in nato naslednje približke računamo s formulo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

Oznaka p' pomeni odvod polinoma p . V tem primeru je $p'(x) = 12x^2(x - 2)$. Približna rešitev je $x \doteq 1,22854$, iskani polmer pa

$$R \doteq 1,22854r.$$

Prvo nalogo smo začeli s kozo na vrvici. Kako bi slikovito formulirali drugo?

Literatura

- [1] C. E. Myers, *Problem 30*, The American Mathematical Monthly, Vol. 1, št. 4 (apr., 1894), str. 132.
- [2] B. von Pape, *Makro-Mathematik, Jenseits von Algebra und Analysis: Algorithmen*, Books on Demand, Norderstedt 2016.
- [3] M. Petković, *Zanimljivi matematički problemi*, Naučna knjiga, Beograd 1985.

× × ×



SLIKA 12 K FIZIKALNEMU ČLANKU.

Mehanizem zasklenke. Listici so vrtljivo pritrjeni na fiksnem notranjem obroču (desno), vrtimo jih z zunanjim obročem (levo).

× × ×

Mednarodna matematična olimpijada 2024



LUKA HORJAK

→ Kot se spodobi za leto, katerega letnica je deljiva s štiri, smo tudi letos poleti lahko spremljali olimpijske igre. Že pred tem pa so slovenski dijaki na olimpijadi osvojili dve medalji. S tem seveda ne mislim na olimpijske igre v Parizu, temveč na Mednarodno matematično olimpijado, ki je potekala med 14. in 22. julijem v angleškem mestu Bath. Gre za največje tovrstno tekmovanje v znanju, ki neprekinjeno (z eno izjemo) poteka vsako leto od prve izvedbe leta 1959 v Romuniji.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na 65. Mednarodni matematični olimpijadi.

Na olimpijadi je letos sodelovalo 609 tekmovalcev iz 108 držav. V slovensko ekipo so se po celoletnem zahtevnem izbirnem procesu uvrstili Nives Gošnjak (ŠC Velenje), Nace Hranjec (ŠC Ravne na Koroškem), Patricia Király, Žiga Oštir in Luka Urbanc (vsi Gimnazija Bežigrad) ter Matic Pogorelec (II. gimnazija Maribor). Po uvrstitvi v ekipo so dijake čakale intenzivne priprave, najprej en teden v Nemčiji z nemško,

avstrijsko in švicarsko ekipo, nato pa še en teden v Portorožu, kamor smo na tradicionalne priprave povabili Švitarje.

Ves ta trud se je tudi poplačal – Nace si je namreč z okroglim 100. mestom prisvojil srebrno, Luka pa je z uvrstitvijo med prvo polovico tekmovalcev dobil bronasto medaljo. Uspeh so dopolnili še Nives, Patricia in Žiga, ki so prejeli pohvalo za v celoti pravilno rešeno nalogo. Do te je le malo manjkalo Maticu, ki je sicer rešil dve nalogi, a je na vsaki izgubil eno točko. Naj omenim še, da so vsi udeleženci na Mednarodni matematični olimpijadi letos sodelovali prvič, zato je uspeh še toliko večji.

Z zgoraj naštetimi individualnimi rezultati se je slovenska ekipa po štirih letih znova uvrstila v prvo polovico držav po skupnem številu točk. Na vrhu te lestvice se je letos sicer zgodil preobrat, saj je po petih zaporednih zmagah Kitajska letos končala na drugem mestu za ZDA. Na tretjem mestu je končala Južna Koreja, najboljša evropska država pa je tokrat bila Belorusija z osvojenim 5. mestom.

Olimpijado sestavljata dva tekmovalna dneva. Na vsakem imajo dijaki 4 ure in pol časa, da rešijo 3 naloge, ki so praviloma urejene po težavnosti. Za še posebej težki sta se izkazali 3. in 6. naloga, saj je vsako rešilo manj kot 10 tekmovalcev, kar se je nazadnje zgodilo leta 2007. Za udeležence pa sta običajno najpomembnejši nalogi srednje težavnosti, saj uspešnost na teh praktično določi prejemnike medalj in njihove barve. Oglejmo si torej rešitvi 2. in 5. naloge, ki sta ju predlagala predstavnik Indonezije in Hong Konga.

Naloga 2

Določi vse pare (a, b) naravnih števil, za katere obstajata naravni števili g in N , tako da velja

$$\blacksquare D(a^n + b, b^n + a) = g \quad (1)$$

za vsa naravna števila $n \geq N$.





SLIKA 2.

Nace Hranjec in Luka Urbanc z medaljama.

Rešitev 2. naloge

V dani enačbi opazimo dve stvari – vsebuje namreč največji skupni delitelj dveh števil in eksponente. Za analizo obojega lahko uporabimo nekaj standardnih metod teorije števil. Zanimajo nas torej skupni faktorji obeh števil, da si delo poenostavimo, pa se za zdaj omejimo samo na praštevila. Naj torej velja $p \mid g$. Tedaj za vse dovolj velike n velja $p \mid a^n + b$. Posebej, velja tudi $p \mid a^{n+1} + b$, in posledično p deli tudi njuno razliko

$$(a^{n+1} + b) - (a^n + b) = a^n \cdot (a - 1). \quad (2)$$

Tako sledi, da $p \mid a$ ali $p \mid a - 1$. Analogen razmislek lahko naredimo tudi za število b , torej $p \mid b$ ali $p \mid b - 1$. Ker pa $p \mid g$, ni težko videti, da $p \mid a$ natanko tedaj, ko $p \mid b$. V nasprotnem primeru pa je

$$0 \equiv a^n + b \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{p}, \quad (3)$$

zato je $p = 2$.

Na tej točki je velik del udeležencev olimpijade nadaljeval z analizo eksponentov praštevil v razcepu števila g . To jim je težko očitati, saj lahko z elementarnimi pristopi dokažemo, da mora veljati $g = D(a, b)$ ali pa $g = 2 \cdot D(a, b)$, kar lahko bralci poskusite preveriti sami. To je na prvi pogled zelo obetavna ugotovitev, saj smo se znebili ene izmed

neznank v nalogi. Žal pa se izkaže, da si s tem nismo bistveno poenostavili naloge, in vsak nadaljnji poskus v tej smeri ni vodil do rešitve.

Vrnimo se torej na začetek. Nismo še zares uporabili eksponentov v enačbi, z izjemo povečanja za 1. Tu pride na vrsto mali Fermatov izrek, ki pravi, da za vsako praštevilo p in naravno število a velja $a^p \equiv a \pmod{p}$. Tako sledi, da je

$$\begin{aligned} 0 &\equiv a^n + b \equiv a^{n-(p-1)} + b \\ &\equiv a^{n-2(p-1)} + b \equiv \dots \pmod{p} \end{aligned} \quad (4)$$

za vsak praštevski faktor p števila g . Posledično lahko na omejitve $n \geq N$ skoraj pozabimo, saj mora po zgornjem razmisleku tak p deliti tudi $a^n + b$ za $n < N$, in obratno – če p deli $a^n + b$ in $b^n + a$ za nek $n < N$, za $m = k \cdot (p - 1) + n$ velja

$$0 \equiv a^n + b \equiv a^m + b \quad (5)$$

in analogno za $b^m + a$. Če k izberemo tako, da je $m \geq N$, sledi $p \mid g$.

Sedaj lahko preverimo nekaj specifičnih vrednosti števila n . Na primer, če $p \mid a + b$, to ustreza ravno primeru $n = 1$, zato $p \mid g$. Če $p \mid a + 1$ in $p \mid b + 1$, kar ustreza ravno pogoju pri $n = 0$, podobno sledi $p \mid g$.

Sledi glavna ideja v rešitvi te naloge – za n si lahko izberemo tudi -1 . Bolj formalno, za neko praštevilo p vzemimo $n \equiv -1 \pmod{p-1}$, pri čemer je $n \geq N$. Če $p \nmid a$, od tu namreč sledi

$$a \cdot (a^n + b) = a^{n+1} + ab \equiv 1 + ab \pmod{p} \quad (6)$$

in

$$b \cdot (b^n + a) = b^{n+1} + ab \equiv 1 + ab \pmod{p}. \quad (7)$$

Če torej velja $p \mid ab + 1$, sledi

$$p \mid a \cdot (a^n + b), \quad (8)$$

ker pa je p očitno tuj a , dobimo kar $p \mid a^n + b$. Simetrično tudi $p \mid b^n + a$, zato $p \mid g$. Ker pa je p tuj a , po (3) sledi $p = 2$. To velja za vsak faktor števila $ab + 1$, zato lahko sklepamo, da je $ab + 1 = 2^k$ za neko naravno število k .

Sedaj smo nalogo že skoraj rešili. Če je $k = 1$, sledi $ab = 1$, torej $a = b = 1$, kar je res rešitev, saj je izraz

v navodilu naloge za vsak n enak 2. V nasprotnem primeru pa je

$$\blacksquare ab = 2^k - 1 \equiv 3 \pmod{4}, \quad (9)$$

zato je brez škode za splošnost $a \equiv 1 \pmod{4}$ in $b \equiv 3 \pmod{4}$. Za lihe vrednosti števila n tako dobimo

$$\blacksquare a^n + b \equiv 1 + 3 \equiv 0 \equiv b^n + a \pmod{4}, \quad (10)$$

zato $4 \mid g$. Za sode vrednosti števila n pa velja

$$\blacksquare b^n + a \equiv 3^n + 1 \equiv 2 \pmod{4}, \quad (11)$$

kar ni mogoče, saj g deli zgornji izraz za vsak dovolj velik n . Tako sledi, da je edina rešitev $a = b = 1$.

Naloga 5

Polž Turbo igra igro na plošči z 2024 vrsticami in 2023 stolpci. Na 2022 poljih plošče so skrite pošasti. Na začetku polž Turbo za nobeno od pošasti ne ve, na katerem polju se nahaja, ve pa, da je v vsaki vrstici, razen v prvi in zadnji, natanko ena pošast in da je v vsakem stolpcu največ ena pošast.

Polž Turbo se trudi v več poskusih priti od prve do zadnje vrstice. Pri vsakem poskusu začne na katerokoli polju v prvi vrstici, za katerega se odloči, nato pa se premika s polja, na katerem se nahaja, na katerokoli sosednje polje, s katerim ima to polje skupno stranico. (Lahko se vrne tudi na polje, ki ga je že obiskal.) Če pride na polje, na katerem je pošast, se njegov poskus konča in je transportiran v prvo vrstico, da začne nov poskus. Pošasti se ne premikajo, polž Turbo pa si za vsako od polj, ki ga je obiskal, zapomni, ali je na polju pošast ali ne. Če polž Turbo pride na katerokoli polje v zadnji vrstici, se njegov poskus konča in igra je končana.

Določi najmanjšo vrednost števila n , za katero ima polž Turbo strategijo, ki zagotavlja, da bo prišel do zadnje vrstice v n poskusih ali manj, ne glede na to, kje se pošasti nahajajo.

Rešitev 5. naloge

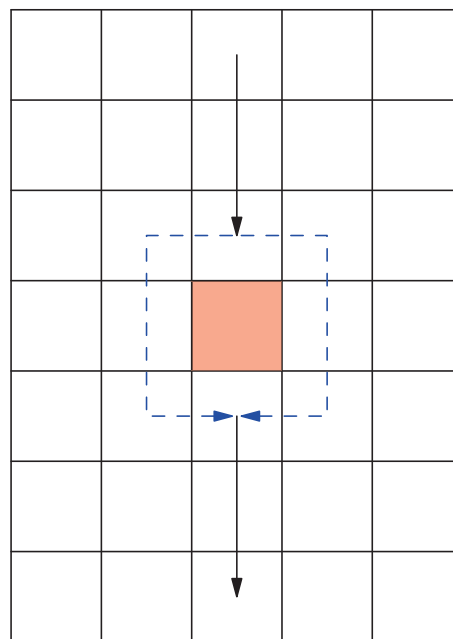
Zgornja naloga je za Mednarodno matematično olimpijado precej neobičajna. Njena rešitev namreč ne vsebuje pravzaprav nobenih matematičnih konceptov, ki jih uporabljamo za reševanje nalog na takih tekmovanjih. Prav zato veliko število tekmovalcev iz

tradicionalno zelo uspešnih držav te nalogo ni rešilo, rešil pa jo je tudi marsikateri član »šibkejših« ekip. Preden preberete rešitev priporočam, da se naloge lotite tudi sami.

Najprej poskusimo najti kako strategijo za polža. Eno uspešno strategijo je zelo enostavno najti – Turbo lahko v vsaki potezi izbere en stolpec in se po njem splazi do zadnje vrstice. V najslabšem primeru bo sicer potreboval 2023 poskusov, a bo zagotovo prišel do konca.¹ To najbrž ne bo najboljša strategija, saj pri strategiji ne uporabimo informacije o pošastih, ki smo jih že odkrili.

Denimo, da smo na nekem polju našli pošast. To pomeni, da nobeno drugo polje v tem stolpcu ne vsebuje pošasti, zato se lahko po njih Turbo prosto premika. To mu omogoči, da se po stolpcu sprehodi do pošasti, nato pa jo obide po eni ali drugi strani, kot je prikazano na sliki 3.

To je mogoče vedno, razen kadar na obeh straneh

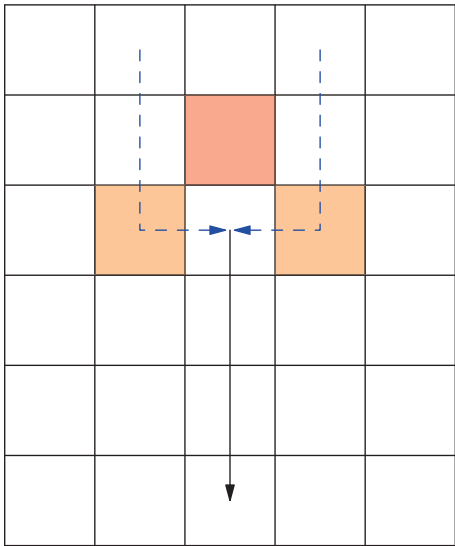


SLIKA 3.

Obhod pošasti.

¹Mimogrede, če programu ChatGPT podamo navodilo naloge, nas bo poskusil prepričati, da je to iskana vrednost števila n .





SLIKA 4.
Pošast se nahaja na kvečjemu enem oranžnem polju, zato je ena izmed modrih poti varna.

naleti na pošast. Naš cilj bo torej poiskati pošast, za katero to ne bo veljalo.

Na tej točki je ogromno izkušenih tekmovalcev takoj pomislilo na bisekcijo, s katero bi število potez omejili na približno $\lceil \log_2(2023) \rceil = 13$. Kako ne bi? Bisekcija se zdi dovolj zapletena strategija za 5. nalogo, logaritemske ocene pa so se na olimpijadi v preteklosti že pojavile (pravzaprav je en tak primer ravno lanska 5. naloga). Poleg tega je število 13 tako majhno, da je zelo lahko verjeti, da z manj potezami ne moremo priti do cilja, sploh, ker ta naloga

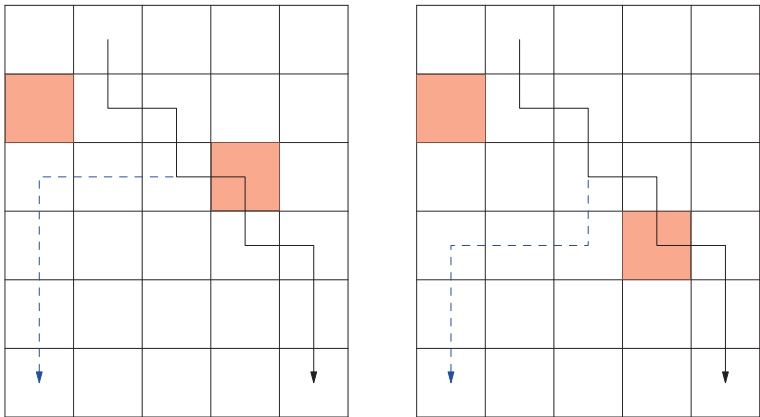
ne spada med lažje na tekmovalcu.

S takimi intuitivnimi razmisleki si tekmovalci pogosto izbirajo strategijo reševanja. Žal pa je ravno letos bila izbrana naloga, ki takih tekmovalnih izkušenj ne nagraduje. Pravilni odgovor je namreč še bistveno manjši.

Vrnimo se k sliki 3. Razmislili smo, da varnih obhodov ne moremo zagotoviti, saj lahko imamo tri pošasti na zaporednih diagonalnih poljih. Pri tem pa smo zgrešili en robni primer – če je pošast v 2. vrstici, v prejšnji vrstici ni pošasti, zato mora eden izmed obhodov biti varen. Če najdemo pošast v drugi vrstici, lahko tako do cilja pridemo v treh poskusih – v prvem prehodimo celo 2. vrstico, da v njej najdemo pošast, nato pa poskusimo z obema obhodi.

Seveda ima tudi ta strategija robni primer – pošast v 2. vrstici je lahko na robu vrstice. A tudi v tem primeru lahko do cilja pridemo v samo dveh dodatnih potezih. Najprej se sprehodimo po diagonalni, če na njej odkrijemo pošast pa temu primerno prilagodimo strategijo tako, da se premaknemo v robni stolpec, v katerem smo že našli pošast v 2. vrstici. Strategija je prikazana na sliki 5.

Seveda moramo premisliti še, zakaj ni do cilja mogoče priti v dveh potezih. Na srečo je ta razmislek zelo preprost – ne glede na našo strategijo se nam lahko zgodi, da že v 2. vrstici naletimo na pošast. Po tem se pošasti izognemo, da pridemo v 3. vrstico, a se nam lahko z nekaj nesreče spet ne glede na strategijo zgodi, da se ravno na tistem polju nahaja nova pošast. S tem smo uporabili že dva poskusa, nismo pa prišli do zadnje vrstice. Rešitev je torej res $n = 3$.



SLIKA 5.
Prilagoditev strategije po odkritju pošasti na diagonalni.

Fotografska zenica

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Oko ima zenico, ki se prilagaja na svetlobne razmere. V temi so zenice povsem odprte, pri zelo svetlem dnevu pa se zožijo, da v očesu vidimo le drobno črno piko. Nekatere živali nimajo okroglih, temveč podolgovate zenice. Mački imajo ob svetlih dneh zenici v obliki tankih črt, skozi kateri prodre le malo svetlobe do občutljive mrežnice. Ponoči pa se zenice tako razširijo, da postanejo okrogle in zavzamejo kar celo oko, glej sliko 1 in sliko 2.



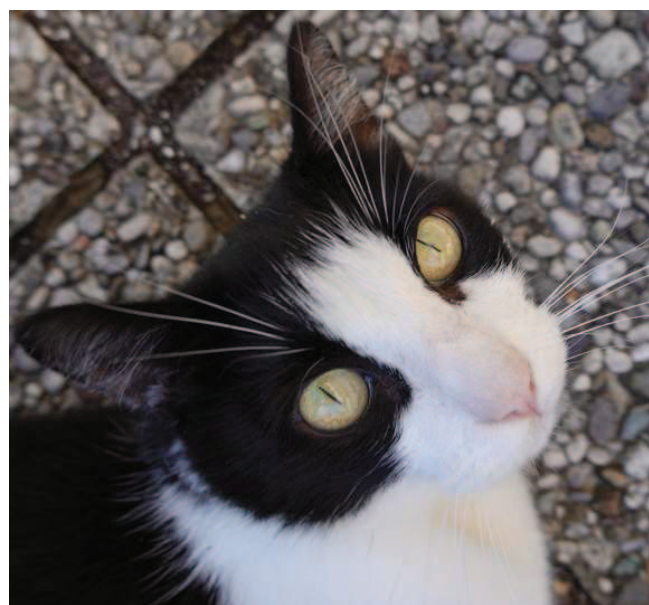
SLIKA 2.

Mačji zenici v mraku.

zor z dalj časa trajajočo osvetlitvijo filma, takrat pač privijemo zenico, da je polje manj osvetljeno. Zenica pa ima pri fotografiji še dodatno vlogo. Pri dovolj priprti zenici so slike predmetov ostre tudi zunaj z lečami nastavljene razdalje, kamor izostrimo sliko. Včasih pa zenico na široko odpremo, če želimo prikazati ostro le del predmeta. Tej vlogi zenice pravijo fotografi "globinska ostrina". Na sliki 3 vidimo dve fotografiji gruče kristalov pirita. Na levi je bila zaslonka priprta, na desni pa povsem odprta. Podrobnosti na desni sliki, ki so bolj oddaljene, so videti zabrisane. To se najboljše vidi pri tkanini, na kateri je gruča, ki je na desni fotografiji povsem nejasna.

Premer zenice v fotografskih aparatih se mora torej mehanično spreminjati. Pred slikanjem jo moramo tako ali drugače nastaviti. Moderni digitalni fotoaparati imajo možnost, da nastavimo bodisi čas osvetlitve ali pa premer zenice. Elektronika v aparatu potem glede na svetlobne pogoje prilagodi premer zenice ali čas osvetlitve. Vse bolj so priljubljeni aparati, ki oboje nastavijo kar sami glede na najpogostejšo rabo.

Pravo merilo za osvetljenost slike, ki pade na po-



SLIKA 1.

Mačji zenici v svetlem dnevu.

Tudi fotografski aparati in kamere imajo nastavljivo zenico. Pri fotografskem aparatu bi sicer shajali le z reguliranjem časa osvetlitve svetlobno občutljivega filma ali danes v digitalnih fotoaparatih polja elektronskih senzorjev. Kljub temu nastavljava zenica pri tem pomaga, saj pogosto želimo posneti pri-

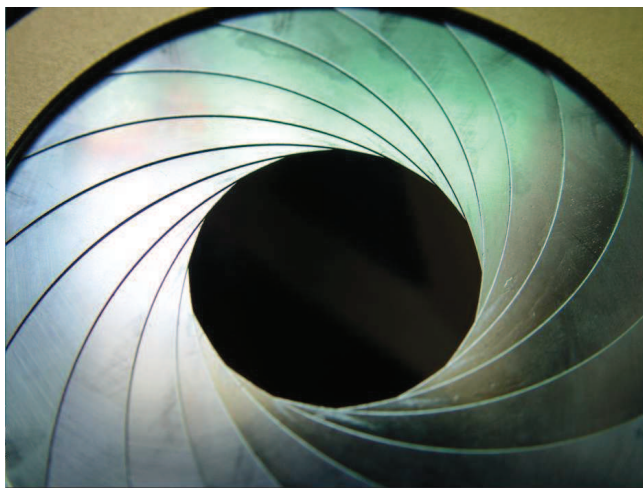


SLIKA 3.

Premjer zenice vpliva na globinsko ostrino fotografije. Na levi fotografiji je bila zenica povsem priprta ($A = 8$), na desni pa povsem odprta ($A = 2$). Raster tkanine, na kateri leži gruča, je na desni povsem zabrisan.

lje, pa ni samo premer zenice. Pri objektivih z daljšo goriščno razdaljo je slika na filmu večja in zato manj osvetljena kot slika, dobljena z objektivom s krajšo goriščno razdaljo. Pravi podatek je razmerje med premerom zenice in goriščno razdaljo objektiva. Na objektivu spreminjamo razmerje $A = \frac{f}{2r}$, denimo od 1,4 do 32 po korakih, ki naraščajo geometrijsko s faktorjem $\sqrt{2}$. Tako naslednji korak razpolovi ploščino zenice in s tem razpolovi svetlobni tok skozi.

Zenico pri fotografskih objektivih tvori venec iz zaslonskih lističev, glej sliko 4. Pogled v lečje objektiva razkrije zgradbo zaslonke, glej sliko 5. Z enakim nagibom vseh lističev se premer zenice spreminja.



SLIKA 4.

Mehanična zenica iz prekrivajočih se lističev.

Pri ravnih lističih ima zaslonka obliko večkotnika, glej sliko 6. Če je število lističev v vencu dovolj veliko, je zenica skoraj okrogla. Nekateri proizvajalci objektivov zgradijo zenico iz šestih ali celo le petih lističev. Na slikah z neizostrenimi svetlimi točkami v ozadju slike lahko obliko zenice tudi vidimo.



SLIKA 5.

Pogled v lečje objektiva razkrije zgradbo zenice, v tem primeru s šestimi krožnimi lističi.

Pri ravnih lističih je zveza med polmerom mnogokotniku včrtanega kroga in zasukom lističev prepro-



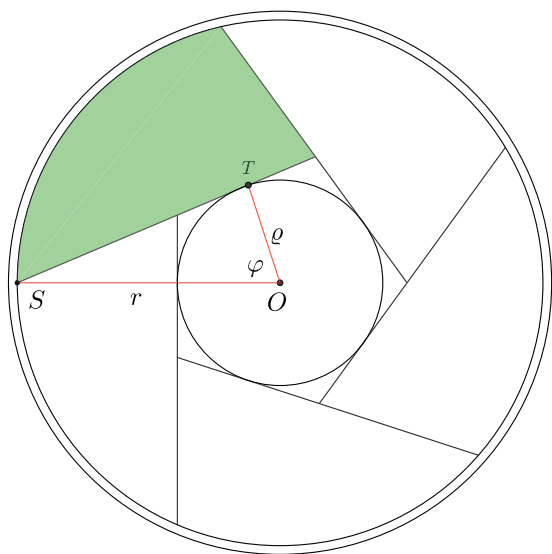
SLIKA 6.

Zenice iz ravnih prekrivajočih se lističev. Nekateri objektivni imajo šest ali celo le pet lističev.

sta. Razberemo jo s slike 7, saj je v pravokotnem trikotniku SOT :

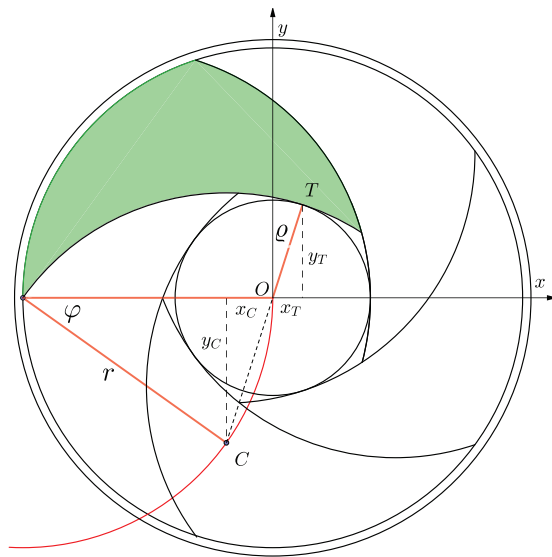
$$\varrho = R \cos \varphi.$$

Večina fotoaparátov in kamer pa uporablja krožno oblikovane lističe s polmerom r največje odprtine zenice. Pri krožnih lističih je pot do zgornje zveze nekoliko daljša. Na sliki 8 so krožni lističi zasukani za kot φ od lege, kjer je zenica povsem odprta. Sre-



SLIKA 7.

Zveza med velikostjo zenice ϱ in zasukom lističev φ pri ravni lističih.



SLIKA 8.

Zveza med velikostjo zenice ϱ in zasukom lističev φ pri krožnih lističih.

dišče krožnice, ki se prilega označenemu lističu, se tudi zavrti in je torej v točki C s koordinatama:

$$x_C = r(\cos \varphi - 1),$$

$$y_C = -r \sin \varphi.$$

Za izračun polmera včrtanega kroga ϱ vidimo, da sta vektorja $\vec{\varrho}$ in vektor od C do T v isti smeri, saj sta oba pravokotna na tangento krožnice v točki T . Iz tega takoj sledi:

$$\frac{x_T}{y_T} = \frac{x_T - x_C}{y_T - y_C},$$

kar se poenostavi v :

$$\frac{x_T}{y_T} = \frac{x_C}{y_C}.$$

Ker je točka T na krožnici:

$$(x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)^2 = r^2,$$

dobimo po krajšem računu:

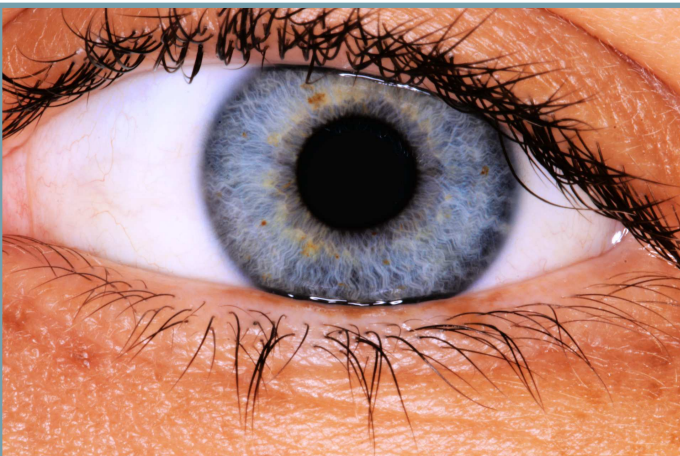
$$\frac{x_T}{x_C} = \frac{y_T}{y_C} = 1 - \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}},$$



A black 8-ball with the number 8 in white, resting on a reflective surface against a teal background.

PRESLIČAVOST VSAKEMU ELEMENTU ENE MNOŽICE PRIREDI ELEMENT IZ DRUGE MNOŽICE	ČEŠKI FILMSKI REŽISER (MILOŠ)	DRŽAVA V OSREDNJI AFRIKI	PRIBOR ZA REZANJE	POTONCI SPANCEV V LATINSKI AMERIKI	SREDIŠČE	RUSKI SLIKAR REPIN	NAJBOLJI NOTRANJA IZMED VELIKIH LUN JUPITRA	AVSTRISKA DEŽELA ZMES BITUMNA IN PESKA
PORJAVELOST KOŽE OD SONCA								
PRIPIRAVA ZA PEKO NAD ŽERJAVICO	1						ANGLEŠKI FIZIK (MICHAEL) MAJHNO NASELJE	
ZAPOREDNI CRKI			TRAVA DRUGE KOŠNJE IGRALEC HARRIS					
ANGLEŠKA PEVKA						ZVEZDA OB MIZARJU V VELIKEM MEDVEDU, JAHAC		
TOČKA NASPROTI ZENITA, POD- NOŽIŠČE						ARISTO- TELOV ROJSTNI KRAJ NA HALKIDIKI		

AVTOR MARKO BOKALIČ	STANJE DUŠEVNE ZMEDI-NOSTI, BLEDEŽ	PESNIŠKA FIGURA, PONOVITEV NA KONCU VERZOV	ZNANILEC OGNJA	STARO IME ZA TOKIO	OSREDNJA ZVEZNA DRŽAVA V ZDA	MATE-MATIK VIDAV	NEAKTIV-NOST	PISATELJ JANČAR
NEMŠKI MATE-MATIK (RICHARD)								
ANTIČNO PRISTAN. MESTO NA SV PELO-PONEZA				6				
NARAVNA PLJACA IZ CITRUSOV								
ČE PO ANGLEŠKO			SPOLNE ZLEZE	ZIMSKA PADAVINA				
KAZIMIR TRATNIK				LUKA LAVTAR				
						NORVEŠKI PISATELJ NESBJ		
						KOREJSKI AVTO		
								TELEVI-ZIJKA CETINSKI
KOLEŠAR TRATNIK				AMERIŠKI SKLADA-TELJ (CHARLES)				
KAZALNI ZAIMEK				BIVALIŠČE ADAMA IN EVE	ANGLEŠKI REŽISER (ADRIAN)			
		STOCK-HOLMSKO LETALIŠČE			9			
	MEJNI VELETOK MED ZDA IN MEHIKO	JADRAN PO ANG.				PEPELASTA TRTNA PLESEN		8
						OTO VRHOVNIK		
OSNOVNA ZAMIS-LJENOST PROJEKTA								
NAPUŠČ								
		7	POSPEŠITEV SMRTI NE-OZDRAVLJIVO BOLNEGA					
			SOSEDI ČRKE S	VZHODNI KRAK HALKIDIKE				
					OBSEŽNA PRIPO-VEDNA PESNITEV	OBČINA SEVERNO OD LJUBLJANE	POSMEH-LJIVEC	POTOPLJE-NA CELINA POLJSKI PISATELJ (STANISLAW)
OZNAKA ZA DELO		FINSKI PISATELJ PAASILINNA	UGOVORNIK DRUŽBENIM NORMAM					
			NAŠ PESNIK (FRANCE)					
OSREDNJI PROSTOR GRškeGA TEMPLJA, CELA					DOZDEVA			
					ROMARSKO MESTECE V PROVANSI			
TEK ČEZ ? IN STRN				DEPARTMA V VZHODNI FRANCIJI	2			KNJIŽNI IZRAZ ZA JAREM
				OLIMPIJ-SKE IGRE				
PREBI-VALCI DRŽAVE V VZHODNI AFRIKI								MUZEJSKI USLUŽ-BENEC
KRITIČNA PRIPOMBA, NEPRIJETNA ZA TISTEGA, KI MU JE NAMENJENA								BABILON. BOGINJA LJUBEZNI IN PLODNOSTI



PLOD		STRAHO- PETNOST, BOJEČNOST	LATINSKI VEZNIK	INDUS- TRIJSKO OBLIKO- VANJE	TEHNIČNA NAPRAVA	BRALNO- PISALNI POMNILNIK	OD CELOTE LOČEN DROBEČ LESA	NOGOMETNI KLUB			PREŠER- NOVA PESEM								
	NEUMNOST, TRAPARIJA									POŽREŠ- NICA								PRIDOBI- VANJE ZNAJNA	AMERIŠKI IGRALEC (KARL)
	"SLATANJE" AZIJSKA TEHNIKA BARVANJA TKANIN						4			FIZIK JOULE			VROČ. SUH PUŠČAVSKI VETER				11		
			SUBSTI- TUCIJA										DUHOVNO BITJE						
DVIGNJEN ZAD. DEL KRME ZA ČASTNIKE			SIAMSKA MAČKA										RUSKA POČITNIŠKA HIŠA						
OČALA						NEMŠKI MATE- MATIK (BERNHARD)							MESTO NA FIDŽIJU					PRENA- SALEČ SPOROČIL EVROPSKI VELETOK	
	3					POSTOPEK UGOTAV- LJANJA ZNAJNA KANDIDATA	ORGANI- ZIRANA SKUPINA S SKUPNIMI CILJI	PRIPADNIK PLEMENA VZHODNIH SLOVANOV	ANGLEŠKI SKLADA- TELJ (EDWARD)				12					NEODIM	
									POJEDENJE POKOJNI ČESKI UM. DRSALEČ NEPELA									NUŠA DERENDA	
	JANEZ MARKELJ				MAJHEN OKROGEL ALI OGLAT DELEC					MAKEDON. PRAZNIK									
	NAZIV ETIOPSKIH KRALJEV				ŠOLSKI LITERARNI SESTAVEK					KEMIČARKA CURIJE MLAJŠA									
				IME PRVIH SOVJET. UMETNIH SATELITOV															
				SUNEK VETRA					DOKTOR										
				MADŽARSKI PISATELJ JOKAI					SATELIT. MESTO NA JZ BUDIM- PESTE				GLAVNO MESTO SOSEDNJE DRŽAVE						
			AVSTRILJSKI PISATELJ (FELIX)						5										
			TANTAL																
				10															
						NEKDANJA ŠVIČARSKA SMUČARKA SCHNEIDER													
					GRAFIČNO OBLIKO- VANJE, MATEVŽ BOKALIČ	ODKUP BLAGA ALI ODVZEM ENERGIJE													

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite osebni podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. januarja 2024** ob 12. uri, da se lahko izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **letno nagrado**.

NAGRADNI RAZPIS

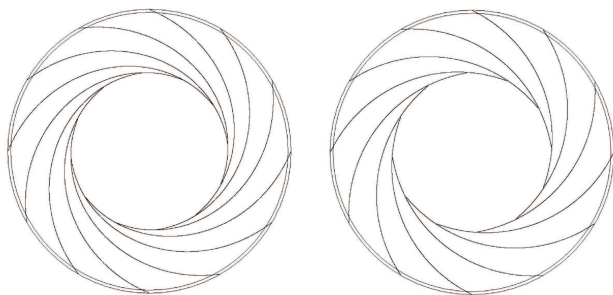
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. januarja 2024**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



15

nadaljevanje
s strani

SLIKA 9.

Zenica z lističi, ki se jim ukrivljenost spreminja (levo) in s krožno oblikovanimi lističi.

odtod pa

$$\varrho = r(1 - 2 \sin \frac{\varphi}{2}).$$

Zenica se torej povsem zapre pri:

$$\varrho = r(1 - 2 \sin \frac{\varphi_0}{2}) = 0,$$

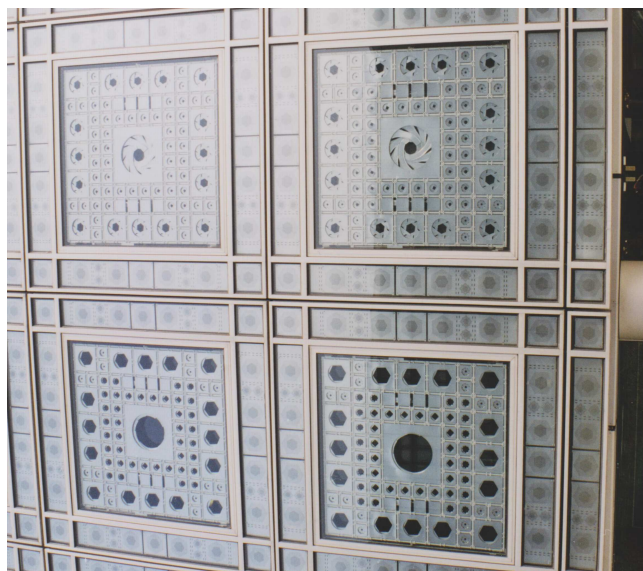
torej pri:

$$\varphi_0 = 60^\circ.$$

Pri ravni lističih ima zaslonka obliko mnogokotnika. Pri krožnih ima ta mnogokotnik krožne stranice. Pri fotografskem objektivu podrobna oblika zenice ni pomembna. Kaj pa, če bi želeli imeti kar se da okroglo zenico ne glede na njen premer? Morali bi izdelati lističe, ki ne bi bili povsem krožni, pač pa bi se morala spreminjati ukrivljenost. Na sliki 9 smo za primerjavo prikazali zenico pri lističih s spremenljivo ukrivljenostjo in le-to pri krožnih lističih. Zenica na levi sliki je opazno bolj okrogla. Morda bi kdo od bralcev znal predlagati potek ukrivljenosti, da bi bila zenica okrogla v čim širšem intervalu njenih premerov?

Listična zgradba pa ni omejena le na fotografske zenice. Uporabljajo jo tudi pri lesenih notranjih oknih, kjer okno odpremo in zapremo tako kot fotografsko zenico. V stavbi Arabskega Svetovnega Instituta v Parizu imajo na fasadi zenična okna, ki se odpirajo in zapirajo glede na osvetljenost stavbe, slika 10. Celo kuhinjsko cedilo za kuhanje zelenjave v pari ima listično zgradbo, slika 11.

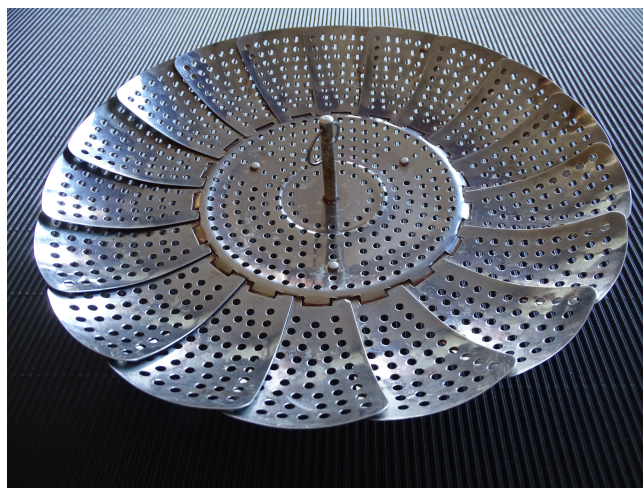
Še beseda o mehanizmu zaslonke. Lističi se morajo gibati sinhrono. Gibljejo se okoli osi na fiksnem



SLIKA 10.

Zenice na fasadi zgradbe L'Institut du Monde Arabe (Arabskega Svetovnega Instituta) v Parizu.

notranjem obroču, vrti pa jih zunanji obroč, kot je prikazano na sliki 12 (str. 8). Za zabavo lahko izdelamo zaslonko iz papirja.



SLIKA 11.

Zenična zgradba kuhinjskega cedila.

× × ×

Dnevno in letno navidezno gibanje sonca

↓↓↓

KAREL ŠMIGOC

→ Najstarejša naprava za merjenje opoldanske višine Sonca in merjenja časa je pokončna palica, ki jo osvetljuje Sonce. Imenuje se gnomon. Ko se med letom spreminja opoldanska višina Sonca nad obzorjem, se spreminja tudi dolžina sence palice. Pri dnevnem navideznem gibanju Sonca od vzhoda proti zahodu se spreminja tudi smer sence palice. Na osnovi dnevnega spreminjanja smeri sence gnomona so nastale sončne ure, letno spreminjanje njene dolžine pa je bilo povezano z nastankom prvih koledarjev. Današnji pomen sončnih ur je drugačen, kot je bil v preteklosti. Namesto navpičnih sončnih ur, ki so služile merjenju časa, se pojavljajo okrasne vodoravne sončne ure na vrtovih, v parkih, na raznih dvoriščih, ki povečajo zanimivost okolice. V šolah se pri astronomskih krožkih učenci seznanjajo tudi z izdelovanjem sončnih ur. Namen prispevka je vzpodbuditi učence in ljubitelje astronomije za izdelovanje zanimivih sončnih ur, posebej takih, na katerih bo razvidna tudi letna navidezna pot Sonca.

Vsak dan Sonce vzhaja na vzhodnem delu obzorja, se dviga čez obzorje, zahaja na zahodnem delu obzorja in ponoči dopolni krožno gibanje okrog osi, ki poteka skozi severni in južni nebesni pol. Navidezno dnevno gibanje Sonca nastane zaradi vrtenja Zemlje okoli njene osi od zahoda proti vzhodu. Sonce ima hkrati z dnevnim tudi letno navidezno gibanje, ki je posledica kroženja Zemlje okoli Sonca. V 365 dneh napravi Sonce en obrat za 360° in se dnevno premakne približno za 1° proti vzhodu po tiru, ki ga



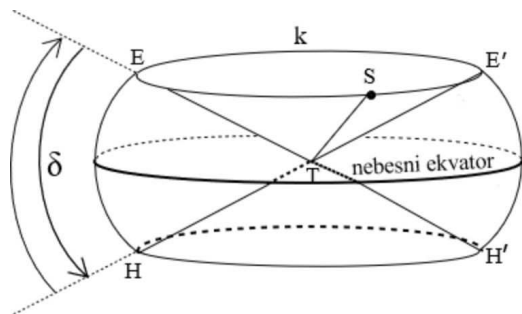
SLIKA 1.

Krivulje deklinacije – hiperbole na vodoravni sončni uri ob zimskem, letnem solsticiju ter ob spomladanskem in jesenskem enakonočju (Gallusova ulica Šmarje pri Jelšah).

imenujemo ekliptika. Ker oklepa ravnina ekliptike z ravnino nebesnega ekvatorja kot $23,50$, se spreminja kotna razdalja Sonca od ekvatorja. To razdaljo imenujemo deklinacija. Največji odmik Sonca od nebesnega ekvatorja proti severu je na dan letnega Sončevega obrata ali letnega solsticija, ko je deklina-



→ cija Sonca 23,50; ob zimskem solsticiju je $-23,50$ in nič stopinj na ekvatorju ob spomladanskem in jesenskem enakonočju. Dnevno in letno navidezno gibanje Sonca je med seboj povezano in ga lahko ponazorimo s sliko 2.



SLIKA 2.

Povezava med dnevnim in letnim navidezno gibanjem Sonca.
 k - dnevno navidezno gibanje Sonca δ - deklinacija Sonca

Predstavljajmo si Zemljo v središču nebesne krogle in na njej poljubno točko T. Okoli osi, ki poteka skozi pol nebesne krogle, kroži navidezno Sonce S. Zveznica ST predstavlja Sončev žarek, ki dnevno opiše plašč stožca z vrhom v točki T na nebesnem ekvatorju. Ko se spreminja deklinacija Sonca, se spreminja tudi odprtina stožca. Pri deklinaciji 0° preide plašč stožca v ravnino in pri negativni deklinaciji je stožec pod nebesnim ekvatorjem z vrhom v točki T in dopolnjuje s stožcem nad ekvatorjem dvojni stožec. Prestavimo točko T na vrh pokončne palice – gnomona. Sončni žarki, ki potekajo skozi točko T, opišejo na nasprotni strani gnomona tudi plašč stožca. Nastane dvojni stožec, po njegovem plašču se navidezno giblje Sonce med letom. Pri preseku plašča dvojnega stožca z ravnino, ki poteka skozi nožišče gnomona, nastanejo različne krivulje: krožnica, parabola, elipsa in hiperbola, odvisno od medsebojnega kota med ravnino in proti severnemu nebesnemu polu usmerjene osi pokončnega stožca. V našem primeru je ta krivulja hiperbola. Marijan Prosen je v reviji Presek objavil prispevek z naslovom Kako do enačbe sence, v katerem je zapisana enačba plašča dvojnega stožca, po katerem se giblje Sonce med letom [1].

$$\square (x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta \quad (1)$$

Enačba je zapisana za primer, ko je izhodišče prostorskega koordinatnega sistema na vrhu gnomona z višino v , os x je usmerjena proti severu, os y je usmerjena proti zahodu, os z pa proti zenitu. Kot φ je zemljepisna širina in δ je deklinacija Sonca. Presek plašča dvojnega stožca z ravnino $z = -v$ je krivulja hiperbola, po kateri se premika konec sence gnomona določenega dne na vodoravni ravnini. Če v enačbi (1) zapišemo koordinato $z = -v$, dobimo enačbo iskane krivulje. Ker želimo krivuljo zapisati na vodoravni sončni uri, na kateri je senčnik usmerjen proti severnemu nebesnemu polu, zamenjamo koordinatni osi x in y , tako, da os y kaže proti severu; zamenjamo še člen $x \cos \varphi$ v oklepaju s členom $y \cos \varphi$ in po zamenjavi dobimo enačbo krivulje, ki jo opiše konec sence gnomona na vodoravni ravnini:

$$\square (y \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta. \quad (1')$$

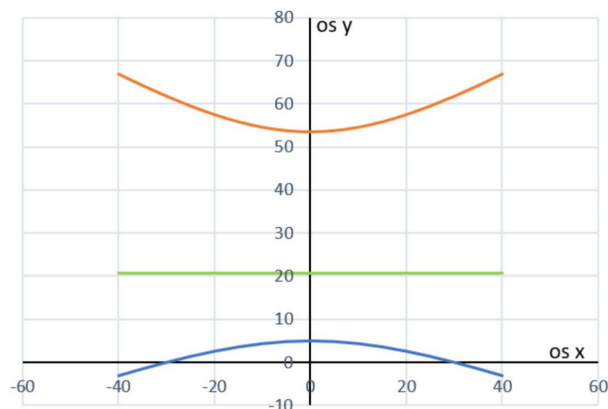
Po kvadriranju leve strani enačbe (1') in združevanju členov, dobimo kvadratno enačbo $ay^2 + by + c = 0$ z rešitvijo $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, v kateri pomenijo konstante a, b, c in $D = b^2 - 4ac$ naslednje izraze:

$$\begin{aligned} \square a &= (\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi), \\ b &= 2v \sin \varphi \cos \varphi, \\ c &= x^2 \sin^2 \delta + v^2 (\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi) \text{ in} \\ D &= 4 \sin^2 \delta (x^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + v^2 \cos^2 \delta). \end{aligned}$$

Dobljene izraze za konstante a, b, c in D vstavimo v rešitev kvadratne enačbe $y = f(x)$, upoštevamo pozitiven predznak pred korenem in dobimo enačbo krivulje – hiperbole, po kateri se premika konec sence od sonca osvetljene palice – gnomona pri dani deklinaciji δ , zemljepisni širini φ in višini gnomona v :

$$\square y = \frac{\sin \delta \sqrt{(x^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + v^2 \cos^2 \delta)}}{\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi} - \frac{v \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi}. \quad (2)$$

Izhodišče koordinatnega sistema je v vznožju gnomona z osjo x proti vzhodu, z osjo y v smeri poldnevnic in osjo z proti zenitu. Ko vstavimo v enačbo (2) za deklinacijo Sonca že omenjene vrednosti ob zimskem, letnem solsticiju in enakonočju, dobimo pri zemljepisi širini 46° in višini gnomona $v = 20$ cm krivulje hiperbole, ki jih opiše konec sence

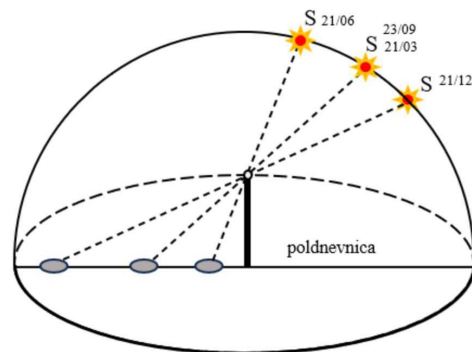

SLIKA 3.

Krivulje deklinacije hiperbole: rdeča krivulja - ob zimskem solsticiju, zelena črta - ob spomladanskem in jesenskem enako-nočju, modra krivulja - ob letnem solsticiju.

gnomona med letom slika (1 in 3). Hiperbolo lahko dobimo tudi za poljuben dan v letu, ki je pomemben v našem življenju, ustrezno deklinacijo za ta dan najdemo v reviji Naše nebo, ki jo vsako leto izdaja DMFA Slovenije. Tako nastane poenostavljen Sončev koledar. Pri vodoravni sončni uri kaže čas senca palice - senčnika, ki je usmerjen pod kotom zemljepisne širine φ proti severnemu nebesnemu polu. Če je dolžina senčnika l , je gnomon enak $l \sin \varphi$. V primeru, ko je senčnik hipotenuza pravokotnega trikotnika, ki je pravokoten na ravnino, je gnomon enak dolžini katete, ki je pravokotna na številčnico [2]. Enačbo (2) poenostavimo, če jo zapišemo pri $x = 0$, $y = \frac{\sin \delta \cos \delta - \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \delta - \cos^2 \varphi} v$, ki po daljšem spreminjanju preide v obliko:

$$y = v \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \quad (3)$$

Tudi v enačbi (3) pomeni y dolžino sence gnomona - pokončne palice z višino v , pri deklinaciji δ in zemljepisni širini φ . Ko je deklinacija nič, to je ob enakonočju, lahko na preprost način določimo zemljepisno širino kraja: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{v}$. Še bolj zanimiv primer uporabe enačbe (3) je določanje začetkov letnih časov. Ker poznamo deklinacije Sonca ob zimskem solsticiju, letnem solsticiju in ekvinokciji, lahko na primernem mestu označimo dolžine senc gnomona in tako določimo začetke letnih časov slika 4 [3].


SLIKA 4.

Letno spreminjanje dolžine sence pokončne palice lahko uporabimo kot koledar, posebno zanimivo je tudi na ta način določanje začetka letnih časov.

Dodajmo še eno zanimivost. Najbolj poznan obelisk - gnomon je na trgu Svetega Petra v Rimu z višino 35,5 m. Obelisk so pripeljali iz egiptovskega mesta Heliopolisa leta 32. Na današnje mesto v Rimu so ga postavili leta 1586 [4]. Zanimiva je tudi ugotovitev, da imamo v Sloveniji 302 sončnih ur. Opis teh ur s fotografijami najdemo v knjigi Jožice Šmid Svetloba Sonca in njegove sence [5]. Hvala avtorici knjige za zanimivo in pomembno delo, ki nas seznaja z bogato dediščino Slovenije na področju sončnih ur.

Literatura

- [1] Prosen, M. *Kako do enačbe sence?*, Presek 29, 2001/02, 3, 144-148.
- [2] Kilar, B. *Vodoravna sončna ura*, Spika 7, 1999, 3, 140-142
- [3] Prosen, M. *Zanimiva opazovanja z gnomonom*, Presek 15, 1987/88, 5, 294-297.
- [4] Bura, N. *Istorija merjenja vremena*, Teovid, Beograd, 2002.
- [5] Šmid, J. *Svetloba Sonca in njegove sence*, Sončne ure po Sloveniji, Radovljica, 2014.

x x x

Projekt GoChile: spodbujanje učenja in ustvarjalnosti



JURE JAPELJ

→ Septembra je projekt GoChile vstopil v četrto šolsko leto. Ko so sodelavci Univerze v Novi Gorici in astronomske revije Spika aprila 2021 na observatoriju El Sauce v Čilu postavili teleskop GoChile, prvi slovenski teleskop na tej imenitni lokaciji, so imeli v mislih predvsem mlade uporabnike in uporabnice. Od takrat je prek projekta svoje astronomske veščine pililo več kot sto dijakov in dijakinj iz devetnajstih srednjih šol. V tem prispevku se omejimo na aktivnosti preteklega leta, pri čemer bomo še posebej izpostavili natečaj GoChile: Zvezdne ptice južnega neba in poletno šolo astronomije GoChile.

Pravzaprav v Čilu stojita dva teleskopa na skupni montaži (slika 1). GoT1 je zrcalni teleskop tipa Ritchey-Chrétien s premerom glavnega zrcala 40 cm, goriščnim razmerjem $f/6,5$ in vidnim poljem približno tako velikim kot je velika Luna na nebu. Poleg astrofotografije ga uporabljamo za izvajanje različnih meritev, med drugim za spremljanje spremenljivih zvezd in opazovanje prehodov eksoplanetov. Manjši teleskop GoT2 je lečni s premerom leče 7,2 cm, goriščnim razmerjem $f/5,6$ in vidnim poljem $3,4 \times 2,2$ stopinje. Ta teleskop je primeren predvsem za astrofotografijo.

Teleskopa sta postavljena na observatoriju El Sauce, ki leži na južnem delu puščave Atacama. Na višini okoli 1500 m, stran od svetlobnega onesnaženja in z več kot tristo lepimi nočmi na leto je to ena izmed najboljših lokacij na svetu za astronomska opazovanja. Slabše vreme je strnjeno predvsem v zimске mesece, torej takrat, ko je pri nas poletje. Lokacija je ugodna tudi zaradi časovne razlike; razlika med Slovenijo in kontinentalnim Čilom znaša med 4 in 6 ur, torej lahko dobršen del čilske noči opazu-



SLIKA 1.

Teleskopa GoT1 in GoT2 na opazovalni ploščadi observatorija El Sauce. Vir: arhiv projekta GoChile

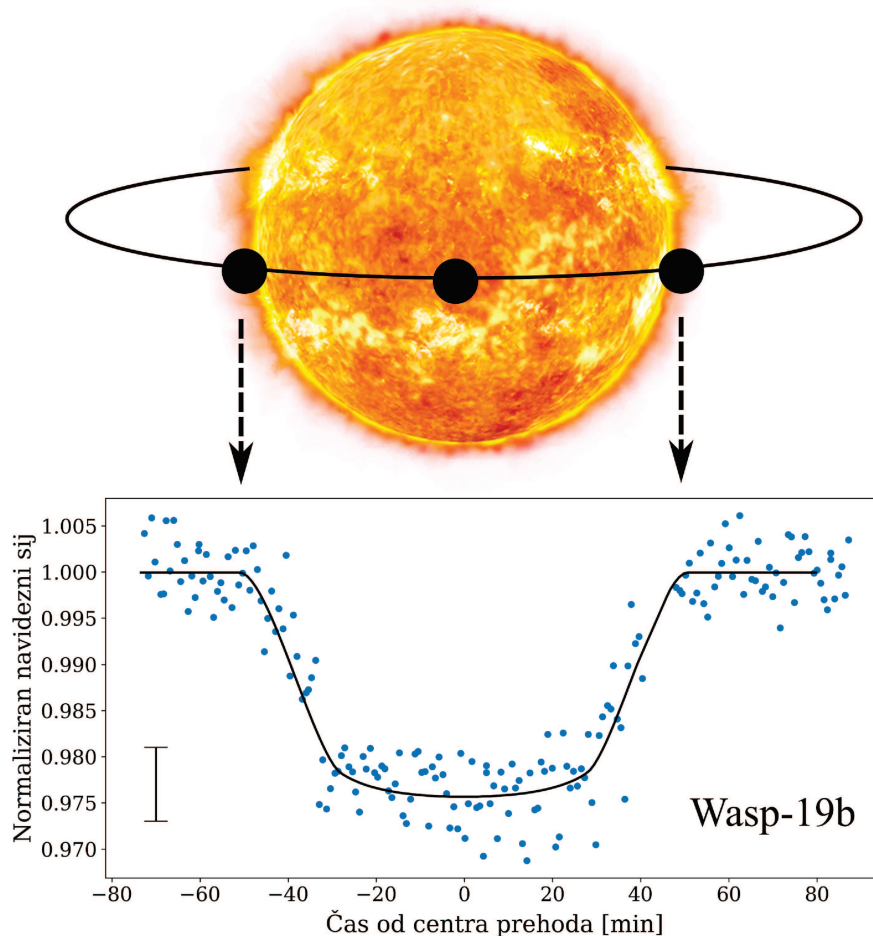
jemo, ko je pri nas dan.

Opazovanje poteka na daljavo. Na lastnem računalniku uporabimo aplikacijo, s katero se povežemo na računalnik Vega v Čilu in praktično od doma krmilimo teleskop in slikamo južno nebo. Običajno podatke obdelamo na Vegi, astrofotografi si lahko na Vegi pomagajo tudi z nekaterimi profesionalnimi programi za obdelavo slik, preostala analiza pa po-

teka kar na domačem računalniku, na katerega si opazovalci in opazovalke prenesejo podatke.

Za astronoma začetnika je opazovanje na terenu s šolskimi teleskopi seveda nenadomestljiva izkušnja. Projekt GoChile je zato namenjen predvsem tistim, ki osnove opazovalne astronomije že poznajo, pa bi radi delali z opremo, ki si je sami ne morejo privoščiti. GoChile je tudi odličen most med ljubiteljsko in profesionalno astronomijo–predvsem s teleskopom GoT1 lahko mladi izvajajo številne meritve in se spoznajo z znanstvenimi metodami. Za čim boljšo izkušnjo pri projektnem delu poskušamo slediti željam mladih, zato je tudi nabor opravljenih projektov na

teleskopu pester. Dijaki in dijakinje vsako leto naredijo eno ali več raziskovalnih nalog v okviru razpisa Mladi raziskovalci Zveze za tehnično kulturo Slovenije. Najbolj navdušeni povratniki svoja opazovanja strnejo v koledarje. Posebej je treba omeniti Nika Vintarja, učenca 9. razreda osnovne šole Hajdina, in njegovega mentorja učitelja Damjana Kobaleta, ki sta svoja opazovanja in izkušnje predstavila ob različnih priložnostih, med drugim sta imela samostojno razstavo slik v Centru vesoljskih tehnologij Noordung Vitanje. Teleskop smo za noč ali dve posodili tudi več astronomskim taborom.



SLIKA 2.

Prehod eksoplaneta Wasp-19b, ki smo ga opazovali s teleskopom GoT1. Avtor: Jure Japelj



SLIKA 3.

Žana Verbič in Jošt Senič sta posnela sled asteroida Cichocki.

Raznolika astronomska znanost na poletni šoli

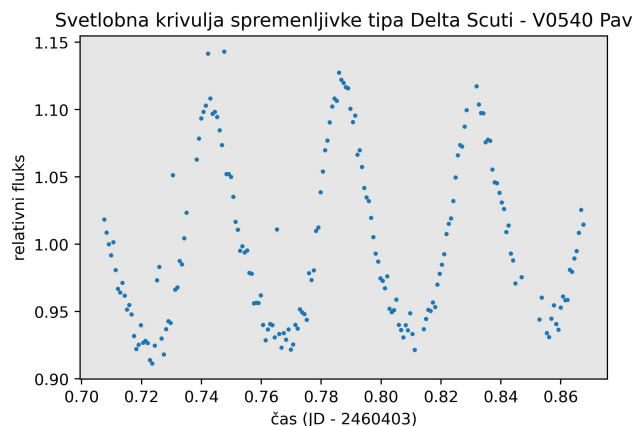
Letos smo dijake in dijakinje že tretjič povabili na poletno šolo astronomije GoChile, ki jo je organizirala Fakulteta za naravoslovje Univerze v Novi Gorici. Zadnji teden avgusta se je šestnajst dijakov in dijakinj skupaj z mentorji, sodelavci fakultete in Zavoda Cosmolab, zbralo v Ajdovščini. Dijaki so poslušali predavanja, se družili ter v parih opravili zahtevnejši opazovalni projekt s teleskopom GoT1. Za boljšo predstavbo, kaj lahko s teleskopom počnemo, sledi podrobnejši opis nekaterih projektov.

Dva projekta sta bila posvečena zvezdi BX Kiparja. Gre za spremenljivo zvezdo tipa SX Feniksa. Tako kot za klasične kefeide tudi za zvezde tipa SX Feniksa obstaja povezava med njihovim izsevom in periodo, s katero se jim spreminja izsev. Če izmerimo navidezni sij in periodo spreminjanja sija zvezde tega tipa, lahko iz že v naprej poznane povezave izračunamo razdaljo do te zvezde—in to je ena skupina tudi naredila. Nato pa smo se vprašali, ali je perioda zvezde zares konstantna. Nekaterim zvezdam tega tipa se namreč na dolgi rok perioda spreminja. Di-jakinji sta uporabili arhivska opazovanja zvezde in jih združili z novimi opazovanji ter poskušali izmeriti spremembo periode. Žal jima je pri opazovanjih ponagajalo vreme, zato kljub dobri analizi podatkov

meritve nista mogli izvesti z dovolj veliko natančnostjo.

Ena skupina se je lotila opazovanja prehoda eksoplaneta. Recimo, da opazujemo zvezdo z eksoplanetom. Če eksoplanet pri potovanju okoli zvezde potuje med nami in zvezdo, za trenutek deloma zvezdo zakrije, kar opazimo v začasni delni potemnitvi zvezde, čemur pravimo prehod eksoplaneta (slika 2). Z GoT1 lahko opazujemo predvsem velike eksoplanete tipa vroči Jupiter, saj manjši planeti zakrijejo premajhen del zvezde, da bi to lahko opazili s 40-centimetrskim teleskopom. Poleg tega je teleskop primeren za opazovanje že znanih eksoplanetov in ne za odkrivanje novih (lahko pa bi ga uporabili za potrditev eksoplanetov, za katere astronomi že sumijo, da obstajajo).

Z zvezdami sta bila povezana še dva projekta. Dijaka sta opazovala razsuto kopico, v njej poiskala zanimive zvezde (na primer mlade in vroče zvezde, dvojnice, sevalce rentgenskega sevanja) ter jih narisala v HR diagram. Druga skupina pa si je pogledala kroglaste kopice in analizirala spremembo svetlosti kopice od središča do roba. Tudi meglice niso izostale. Di-jakinji sta opazovali planetarno meglico in s pomočjo v naprej znane povezave med površinskim navideznim sijem in velikostjo meglic izmerili raz-



SLIKA 4.

Dijakinje Gimnazije Poljane so v okviru natečaja pripravile čudovito slikanico, obenem pa so izmerile svetlobno krivuljo spremenljive zvezde V0540 Pava. Avtorice: Lili Accetto Vranac, Julija Marolt in Lena Štelcer.

daljo do meglice.

Na račun so prišli tudi ljubitelji spremenljivega nočnega neba. Dijakinji sta uspešno slikali galaksijo, v kateri se je nahajala nedavno odkrita supernova. Zadnja skupina pa se je lotila iskanja asteroida Cichocki. Asteroid je zanimiv zato, ker so ga že kar nekaj časa nazaj odkrili in kasneje tudi poimenovali slovenski astronomi. Kljub temu, da se je asteroid nahajal na zvezdami zelo bogatem delu neba in je bil za nameček tudi zelo temen in komaj viden z našim teleskopom, sta ga dijak in dijakinja z nekaj truda našla (slika 3).

V astronomiji je prostor za ustvarjalnost

Da bi dijake in dijakinje še dodatno vzpodbudili za uporabo teleskopa in obenem podžgali njihovo ustvarjalnost, smo med letom organizirali natečaj GoChile: Zvezdne ptice južnega neba. Tekmovalci so morali z GoT1 slikati vsaj dva objekta (npr. posebno zvezdo, galaksijo ali kopico) na južnem nebu, ki se nahajata v enem ali več ozvezdij, poimenovanih po pticah. Slike so morali obdelati in sestaviti v lepo fotografijo, slednjo pa opremiti z zgodbo, pesmijo ali risbo.

Na natečaj se je prijavilo pet skupin in nas presenetilo z zanimivimi in izvirnimi izdelki, med katerimi so bile razburljive zgodbe, prelepe astrofotografske slike in umetniške ilustracije. Najbolj so nas navdušile dijakinje Gimnazije Poljane, ki so opazovale galaksijo Antena in spremenljivo zvezdo V0540 Pava (slika 4) ter vse skupaj strnile v slikanico Utrinek, kam si izginil.

Natečaj je pokazal, da so dijaki in dijakinje željni raznovrstnih izzivov in da je astronomijo tu pa tam možno in celo zaželeno začiniti z umetnostjo. Zanimivo, da so se natečaja v veliki meri udeležila dekleta. Na splošno je zastopanost deklet med uporabniki GoChila visoka; razmerje med spoloma pri izdelovanju raziskovalnih nalog je uravnoteženo, medtem ko je zanimanje za poletno šolo med dekleti celo večje kot fanti.

Projekt GoChile bo torej tudi v letošnjem šolskem letu na voljo dijakom in dijakinjam slovenskih srednjih šol. Predvsem učitelje in mentorje astronomskih krožkov vabimo, da raznesejo glas in k projektu privabijo mlade z željo po raziskovanju vesolja.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	15	19	
15			
			17
22			
		14	

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

8	9		
		14	
6	5	8	
			22
	8	7	
			15
		19	15

× × ×

Marsovski estimathon 2024



IZAK JENKO, MATIJA LIKAR

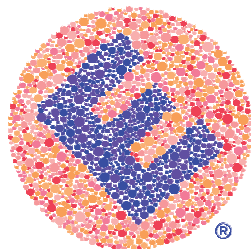
→ Estimathon je razburljiva ekipna igra, ki združuje kviz s hitrim matematičnim razmišljanjem in ocenjevanjem. Cilj igre je v kratkem času čim natančneje oceniti intervale, v katerih leži numerični odgovor na vsako izmed zastavljenih vprašanj. Ekipa so pri tem nagrajene glede na število zadetkov in majhnost ustreznih intervalov, saj večji interval pomeni lažji zadetek. Na letošnjem taboru MaRS smo tekmovanje Estimathon organizirali drugič. Udeležilo se ga je 22 dijakinj in dijakov iz vse Slovenije.

Pravila igre

Tipična izvedba igre Estimathon traja 30 minut, v katerih vsaka od ekip sočasno rešuje 13 ocenjevalnih problemov, ki jih organizator pripravi vnaprej. Vsi problemi imajo točno rešitev, ki je pozitivno realno število, vsaka od ekip pa odgovor odda v obliki intervala s pozitivno zgornjo in spodnjo mejo $[\min, \max]$, za katerega meni, da vsebuje točno rešitev. Pravimo, da je dani interval, ki ga odda ekipa, dober, če vsebuje točen odgovor. Število vseh točk neke ekipe izračunamo s formulo

$$\left(10 + \sum_{\text{dobri intervali}} \left\lfloor \frac{\max}{\min} \right\rfloor\right) \cdot 2^{13 - (\text{št. dobrih intervalov})}.$$

Seštejemo torej spodnje cele dele razmerij zgornjih in spodnjih mej vseh dobrih intervalov. Recimo,



Estimathon

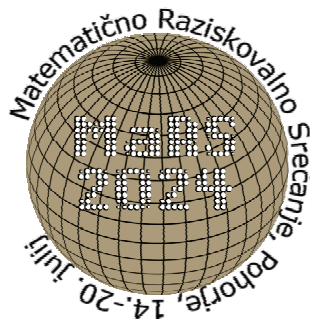
SLIKA 1.

da je pri nekem vprašanju s točnim odgovorom 1234 ekipa podala interval $[1000, 2500]$. Interval je dober, saj vsebuje točen odgovor, in bo k vsoti prispeval $\lfloor 2500/1000 \rfloor = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$. Vsoti nato še prištejemo 10 in na koncu rezultat pomnožimo s tolikšno potenco števila 2, kot je imela ekipa nerešenih nalog ali slabih intervalov. Za vsak prazen ali napačen odgovor, se tako rezultat podvoji. Zmaga ekipa, ki zbere najmanjše število točk.

Za oddajo odgovorov ima vsaka ekipa na voljo 18 listkov, na katere zapiše ime svoje ekipe, številko problema, ki ga ocenjuje, ter krajišči intervala, torej zgornjo in spodnjo mejo svoje ocene rešitve danega problema. Za dani problem lahko tako ekipa odda več listkov z odgovori, vendar pa za rezultat vedno šteje zadnji oddani listek. Listke je možno oddajati tekom celotnih 30 minut igranja. Ves čas tekmovanja je razvidna tudi tabela rezultatov, ki se sproti posodablja. Prepovedana je uporaba računal, telefonov, interneta in ostalih zunanjih pripomočkov. Igra Estimathon je bila zasnovana leta 2013 v podjetju Jane Street. Več o Estimathonu lahko izvemo na povezavi www.estimathon.com.

Vprašanja in odgovori

Letošnji tekmovalci so si razbijali glave z naslednjimi 13 vprašanji, ki smo jih sestavljavci izbrali iz ma-





SLIKA 2.

Udeleženci Estimathona v nestrpnem pričakovanju začetka tekmovanja

tematike, lokalne okolice CŠOD Planinka, popularne kulture in drugod.

1. Koliko kabin ima Pohorska vzpenjača?
2. Koliko je detektorjev dima v CŠOD Planinka?
3. Koliko je bilo uspešnih podaj Slovenije na letošnjem evropskem prvenstvu v nogometu?
4. Kolikšnja je cestna razdalija od krožišča pri cerkvi v Spodnjih Hočah do CŠOD Planinka v enotah dolžine najdaljše stranice čokoladice Mars?
5. Število je perfektno, kadar je vsota njegovih pravih deliteljev enaka številu samemu. Za praštevilo p je Evklid dokazal, da je $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfektno, če je le $2^p - 1$ praštevilo. Kaj je peto perfektno število?
6. Enotni delitelj števila n je delitelj d števila n , za katerega sta d in n/d tuji si števili. Koliko je parov (n, d) , kjer je d enotni delitelj števila n , in je n naravno število med 1 in 100?
7. Koliko je skupno število registriranih avtobusov in miniautobusov v Sloveniji?
8. Koliko je vseh osnovnih šol v občini Maribor?

9. Kolikšnja je zračna razdalija med Plečnikovim spomenikom NOB v domačem kraju nogometaša Benjamina Šeška in vzpetino, ki so jo Rimljani poimenovali Mons Ocra, v kilometrih?
10. Koliko maseljcev piva lahko zlijemo v telo s prostornino enega barela?
11. Koliko ogledov imajo Joker Out Official na YouTube?
12. Koliko ton krompirja je Slovenija pridelala v letu 2023?
13. Koliko znaša vsota emšo treh organizatorjev letošnjega estimathona?

Bralce vabimo, da poskusijo odgovoriti na vseh 13 vprašanj, predno poiščejo rešitve v spodnji tabeli. Zaradi preprostosti so nekateri statistični podatki zaokroženi. Podatki so biti vzeti dne 14. 7. 2024.

vprašanje	1	2	3	4
odgovor	64	49	940	125.263
vprašanje	5	6	7	8
odgovor	33.550.336	359	2.860	25
vprašanje	9	10	11	12
odgovor	93	467	21.202.677	69.000
vprašanje	13			
odgovor	$5,43 \times 10^{12}$			

Rezultati in zaključek

Tekmovalci so se na Estimathonu odrezali nekoliko bolje kot lani. Pri vsakem izmed vprašanj je vsaj ena izmed ekip postavila *dober* interval, vendarle pa nobena izmed ekip ni znala rešiti vseh vprašanj. Najbolje je bilo reševano osmo vprašanje, ki so ga pravilno rešile vse ekipe, štirim pa je uspelo postaviti mejo, kjer je $\lfloor \frac{\max}{\min} \rfloor = 1$. Najtrši oreh je pa predstavljalo deveto, ki sta ga uspešno rešili le dve ekipi.

Lovoriko letošnjega Estimathona si je useplo priboriti ekipi Pak, ki je uspešno rešila 11 problemov in dosegla rezultat 116 točk. Tesno za petami jim je bila ekipa Makaroni in za njimi še Literani Štjerci. Obe ekipi sta pravilno rešili 9 problemov in osvojili 320 oziroma 432 točk. Organizacijsko ekipo letošnjega tekmovanja smo sestavljali Jan Genc, Izak Jenko in Matija Likar.

× × ×

Sončev steber – optični pojav na nebu



ALEŠ MOHORIČ

→ Na prvi novembrski večer sem na zahodu nad Soncem opazil steber svetlobe, kot da bi se tam nahajal močan žaromet, ki bi svetil navpično v nebo (Slika 1). Takoj sem prepoznal pojav, opisan v prejšnjem Preseku [1]. Ta čudovit optični pojav je Sončev steber. Pojav nastane zaradi odboja svetlobe na ledenih kristalih v atmosferi.

Da bi razumeli nastanek Sončevega stebra, moramo najprej spoznati, kaj so ledeni kristali v ozračju in kako vplivajo na svetlobo. Ledeni kristali so zmrznjena voda. Zaradi molekulskih vezi se molekule vode v trdnino običajno združijo v posebni, urejeni strukturi, ki jo imenujemo kristalna struktura, in tvorijo telesa s pravilnimi oblikami in ravnimi ploskvami. Običajno imajo telesa obliko šestkotnih ploščatih prizem in so pogosto prisotna v visokih oblakih, imenovanih cirusi. Nižje nad tlemi je voda običajno tekoča in v kapljicah. Kadar je mraz, pa tudi nižje nad tlemi nastajajo ledeni kristalčki. Ko svetloba prehaja skozi oblak takih kristalov, se na kristalih lomi in odbija. Lom svetlobe pri pojavu stebra nima vloge, odboj pa opiše odbojni zakon. Po tem zakonu je odbojni kot, to je kot med odbitim žarkom in pravokotnico na ploskev, enak vpadnemu kotu, ki ga s pravokotnico oklepa vpadni žarek. Oba žarka in pravokotnica ležijo v isti ploskvi (Slika 2).

V mirnem ozračju so ledene ploščice obrnjene vodoravno in, kadar steber vidimo nad Soncem, se svetloba odbija od spodnjih ploskev. Stebre lahko opazimo ne le nad Soncem, ampak tudi nad drugimi svetlobnimi viri, kot so na primer ulične svetilke. Zato jim na splošno rečemo svetlobni stebri. Pri razlagi nastanka stebra si pomagajmo s skico na sliki 3.

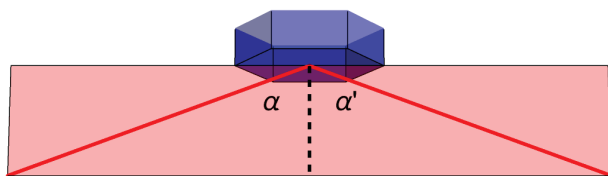
Pot svetlobe od svetila S opišemo z žarki. Žarki so ravni, dokler svetloba ne naleti na oviro. V našem primeru je to kristal K v oblaku O. Na spodnji ploskvi kristala se svetloba odbije. Svetlobo med



SLIKA 1.

Sončev steber nad novembrskim zahajajočim Soncem.

potovanjem skozi oblak lahko doleti različna usoda. Tako žarek A opiše svetlobo, ki se odbije od kristala v tla pred opazovalcem. Žarek B opiše svetlobo, ki jo opazovalec vidi neposredno brez odbojev. Žarka C in D opišeta svetlobo, ki se od kristalov odbije v oči opazovalca. Opazovalec v podaljšku teh žarkov, ki so narisani s črtkano črto, vidi navidezen vir svetlobe, ki se nahaja nad virom svetlobe. Če je v oblaku dovolj kristalov, od katerih se svetloba tako odbije



SLIKA 2.

Svetloba, ki jo opišemo z rdečim žarkom, ki na skico vstopa z leve, se na kristalu (narisano modro) odbije po odbojnem zakonu, tako da odbiti žarek z vpadno pravokotnico (črtkana črta) oklepa enak kot kakor vpadni žarek. Oba žarka in vpadna pravokotnica ležijo v isti ravnini (narisana rdeče).

proti očem, bo opazovalec imel občutek, da opazuje svetlobni steber.

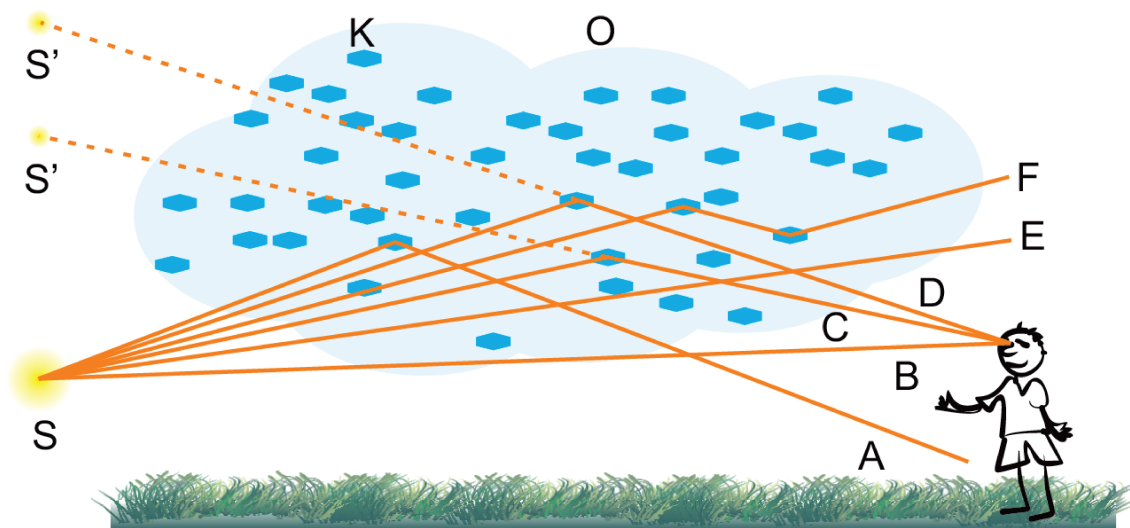
Če je kristalov v oblaku preveč bodisi zaradi velike gostote, bodisi zaradi obsežnosti oblaka, se svetloba na svoji poti do opazovalca lahko odbije velikokrat (žarek F) in takrat je svetlobni steber manj izrazit, dokler ne izgine, če tak pojav prevladuje. Do zdaj smo opis omejili na ravnino, ki jo kaže skica. To ravnino tvorita navpičnica in zveznica svetila in oči. Naš

opis velja za kristale, katerih osnovnica je povsem vodoravna in je pravokotnica nanjo navpična. Če se pravokotnica odkloni iz ravnine skice, potem bo odbiti žarek tudi zapustil ravnino skice in ne bo dosegel očesa. Obratno pa bo od kristalov, ki niso v ravnini skice, svetloba lahko dosegla oko. Zaradi tega se svetlobni steber razširi in ni omejen le na navpičnico nad svetilom. V primeru, da kristali niso večinoma obrnjeni vodoravno, se svetlobni steber razširi toliko, da ne vidimo več stebra, ampak svetlo liso okoli svetila. Za izrazit svetlobni steber torej potrebujemo mirno ozračje, v katerem bodo vsi kristali skoraj vodoravni.

Sončevi stebri so dokaz, kako neverjetna in zapletena je narava svetlobe. Čeprav jih lahko opišemo z enostavnimi fizikalnimi zakoni, njihova lepota ostaja očarljiva. Bodite pozorni na nebo ob jasnih zimskih večerih – morda boste imeli srečo in opazili ta čudovit pojav tudi sami!

Literatura

- [1] V. Kavčič, *Pojav Sončevega haloja*, Presek, 52, 1, 2024.



SLIKA 3.

Skica, ki pomaga pojasniti nastanek svetlobnega stebra.

× × ×

Trideset let Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije

ŠTEVILKA 2, LETNIK 6, ŠOLSKO LETO 1978/79

↓↓↓

→ Ob letošnji 75-letnici ustanovitve DMFA Slovenije smo izbrskali številko revije Presek, ki je bila izdana v letu, ko je društvo praznovalo 30-letnico. V uvo-
dniku je tedanji urednik revije Ciril Velkovrh našte-
val uspehe društva, med katerimi je izpostavil uspe-
šno organizacijo tekmovanj iz matematike in fizike
ter izdajanje revije Presek, ki je imela v šolskem letu
1977/78 menda kar 22500 naročnikov. Danes je obi-
lo matematičnih in fizikalnih zanimivosti zlahka do-
stopnih na spletu, zato smo lahko veseli in ponosni,
da naša revija še vedno obstaja tudi v tiskani obliki.
Vsaj včasih je namreč prijetno o matematiki in fiziki
razmišljati tudi med listanjem pravega papirja ...



UVODNIK

TRIDESET LET DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je ok-
tobra letos imelo v hotelu Radin v Radencih svoj trideseti obč-
ni zbor. Jubilejno leto in občni zbor sta minila za številne
člane in odbornike društva v delovnem vzdušju. Na občnem zboru
so pregledali opravljeno delo od ustanovitve 1949 do letos.
Uspehi so zares veliki.

Med pomembnejšimi dejavnostmi društva so prizadevanja za popu-
larizacijo matematike, fizike in astronomije med mladino pred-
vsem na srednjih in osnovnih šolah. V ta namen prireja društvo
že vrsto let tekmovanja iz matematike in fizike za dijake sred-
njih šol ter tekmovanja iz matematike za učence osnovnih šol za
bronasta, srebrna in zlata Vegova priznanja. Tekmovanja so vsa-
ko leto udeležili več tisoč učencev.

Pomembna je tudi izdajateljska dejavnost. Komisija za tisk je
izdala poleg številnih drugih publikacij tudi več zbirke nalog,
namenjenih tistim, ki jih zanima matematika in fizika. S temi
zbirkami si pomagajo predvsem učenci, ki se pripravljajo za raz-
lična tekmovanja: šolska, občinska, medobčinska, republiška in
zvezna ali za mednarodne matematične olimpijade.

Veliko tega dela pa je prevzela naša najbolj množična akcija:
izdajanje našega PRESEKA - lista za mlade matematike, fizike in
astronome. Naklada prve poskusne številke - imenovali smo jo
PRAPRESEK - je bila komaj 3000 izvodov. Prva redna številka je
izšla najprej v 10000 izvodih, nakar smo morali dotiskati še
2000 izvodov. Od tedaj se je število naročnikov vsako leto po-

večalo za nekaj tisoč. Lani jih je bilo že 22500: okrog 15000
z osnovnih šol, čez 6000 s srednjih šol in nekaj sto posameznikov.
To je nesporen dokaz, da PRESEK zares ugađa mladim bral-
cem in da smo naše delo dobro zastavili in ga dobro nadaljuje-
mo.

Ob svoji tridesetletnici je društvo podelilo priznanja nekate-
rim članom, komisijam in društvenim podružnicam. Priznanje je
dobil tudi uredniški odbor PRESEKA. Tako veliko društveno priz-
nanje si je prislužil v sorazmerno kratkih petih letih. Prva
stran te številke kaže diplomo, ki jo je na občnem zboru spre-
jel sedanji odgovorni urednik PRESEKA. S tem so dobili prizna-
nje tudi vsi, ki so kakorkoli prispevali k velikemu uspehu PRE-
SEKA.

Ciril Velkovrh

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
6. letnik, šolsko leto 1978/79, 2. številka, str. 65 - 128.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (Bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej
Čadež (astronomija), Jože Dover (Premisl in reži), Tonaž Fortuna, Pavel
Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Andrej Kmet (Presekova
knjižnica - matematika), Ljubo Kostrevec, Jože Kotnik, Edvard Kranar (Tekmo-
vanja - naloge), Matilda Lenarčič (Pisna bračev), Mornu Manko-Borštnik
(Presekova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (Naloge bračev),
Tonaž Pisanski (matematika), Tonaž Skulj, Janez Strnad (glavni urednik),
Zvonko Trontelj (odgovorni urednik), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (ured-
nik, nove knjige, novice - znanstvenost).

Rokopis je natiskala Melka Zitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak,
opremila pa sta ga Borut Delak in Viljina Kovačič, slike je narisal Slavko
Lesnjak, karikature Alenka Potnik.

Dopise pošiljajte in list naročite na naslov: Komisija za tisk pri Društvu
matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljub-
ljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, deviz-
ni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-1-0022/6. Naročnina za šolsko
leto je za posamezna naročila 40.-din, za skupninska pa 32.-din; za inozemstvo
3 \$ = 54.-din, 2000Lit, 54.-Asch. Posamezna številka stane 10.-din.

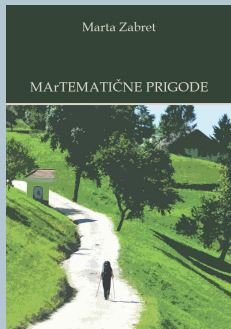
List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobra-
valne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk Zaspisano in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja
štirikrat letno v nakladi 25.000 izvodov.

© 1978 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 354

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

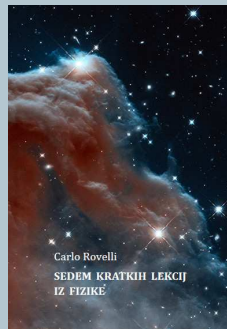


Marta Zabret:

MARTEMATIČNE PRIGODE

148 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

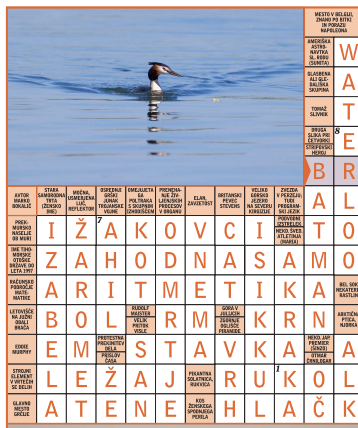
9,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

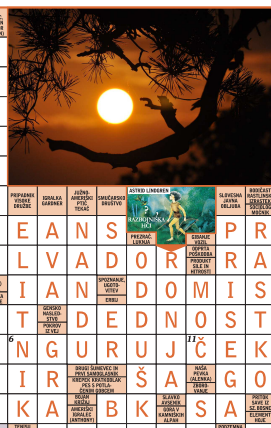
<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.





W	I	L	L	I	A	M	S
A	N	S	A	M	B	E	L
T	S	K	O	B	R	A	
E	T	E	L	A	I	K	
B	R	A	Z	D	A	L	O



S	E	M	A	F	O	R
U	T	A	M	A	R	O
B	I	R	A	R	A	K
N	E	E	S	O	N	
S	O	N	C	E	Ž	C



A	L	G	O	L	R	O	N
J	E	A	N	S	P	R	O
P	R	O	M	E	T		
S	A	L	V	A	D	O	R
I	A	N	D	O	M	I	S
E	L	V	A	N			
K	E	N	G	U	R	J	C
S	A	G	O	T	A		
U	N	A					
S	Q	U	A	S	H	K	R
S	A	U	L	K	O	R	O
A	Z	I	L	A	N	T	
K	O	L	I	N	E	A	R
R	O	T	D	Ž	U	N	G
L	A	K	A	D			

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 52/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka letnika 51 je **kubična enačba**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Izak Pelicon iz Šempasa, Marjetka Pucelj iz Šentvida pri Stični, Eva Šolinc iz Črnuč, ki bodo nagrade prejeli po pošti.



Andrej Guštin, Dunja Fabjan, Vid Kavčič, Simon Bukovšek

Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024

Teorija in rešene naloge za srednje šole

Ob 15. obletnici tekmovanj iz astronomije je pri založbi FMF izšla Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj – teorija in rešene naloge za srednje šole.

Poleg več kot **230 rešenih nalog** s šolskih, z državnih in izbirnih tekmovanj za srednje šole prinaša zbirka tudi **povzetke teorije**, ki bodo v pomoč tekmovalkam in tekmovalcem pri pripravi na astronomska tekmovanja. Zbirko bogati več kot **140 skic in fotografij**, ki bralkam in bralcem pomagajo pri razumevanju vsebine.

Zbirka je razdeljena na šest tematskih sklopov: **osnove astronomije**, **nebesna mehanika**, **svetloba in sevanje**, **zvezde in zvezdni sistemi**, **kozmozologija** in **optika**. Vsak tematski sklop se začne s povzetkom teoretičnih vsebin, vse od temeljnih pa do zahtevnejših konceptov. Sledi izbor nalog, ki se navezujejo na obravnavano tematiko. Urejene so po težavnosti, hkrati pa je vsaka naloga opremljena tudi z oznako letnice in ravni tekmovanja. Poleg tega zbirka zajema tudi sklope **koristne matematične zveze**, **obdelava podatkov** in **vrtljiva zvezdna karta**.

Zbirka predstavlja prvo tovrstno gradivo pri nas, zato je nepogrešljiv pripomoček za mlade astronomke in astronome, ki si želijo boljšega razumevanja in bolj poglobljenega stika z astronomijo. Hkrati pa lahko služi kot odličen pripomoček pripravo na šolska, državna in izbirna tekmovanja iz astronomije – tako za dijakinje in dijake kot tudi njihove mentorice in mentorje. V veliko pomoč pa bo tudi študentkam in študentom, ki se astronomiji posvečajo v okviru univerzitetnega študija na prvi stopnji.

Poleg omenjene knjige ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.

