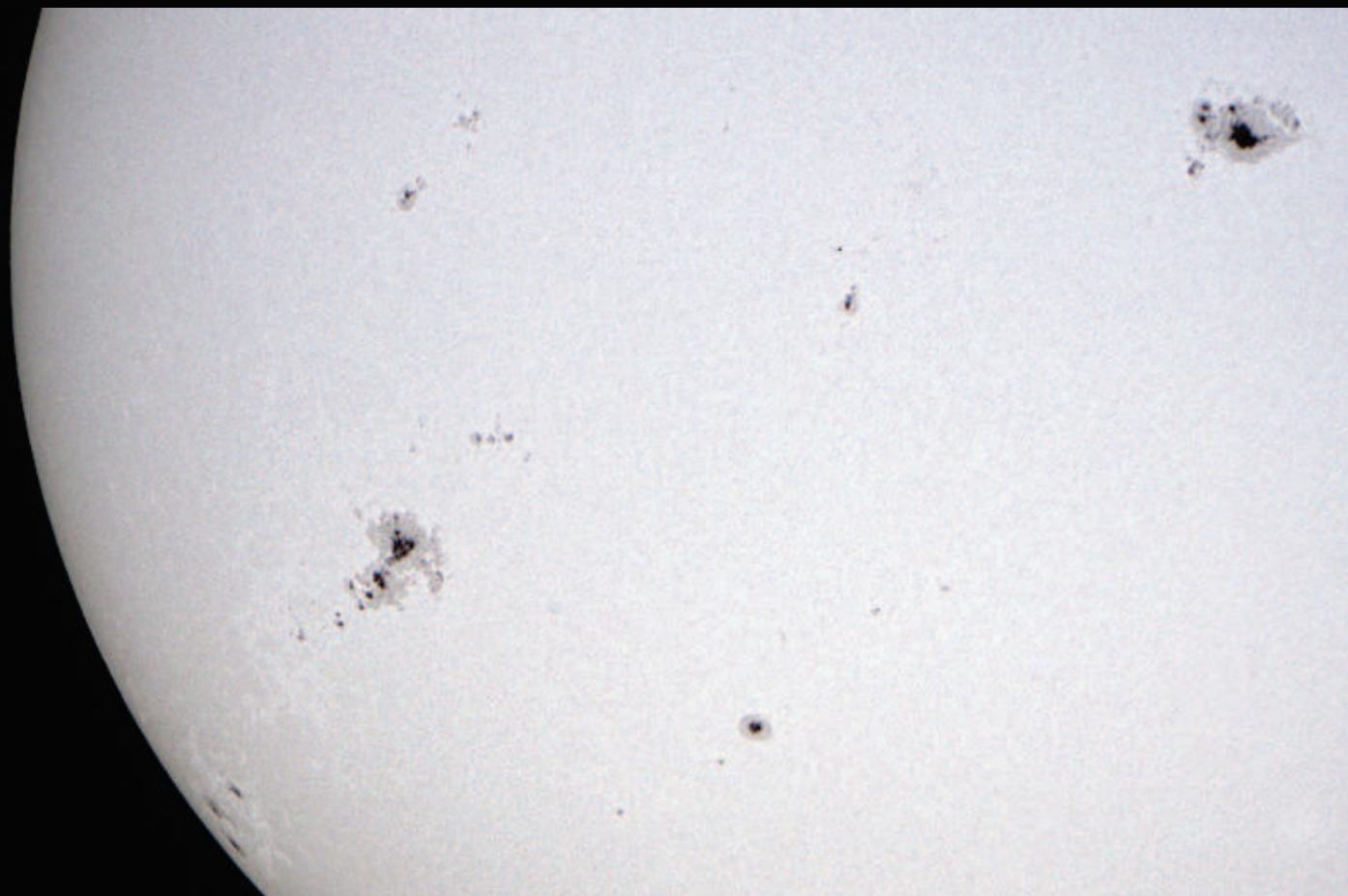


PRESSEK

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO

#1



REŠEVANJE
KUBIČNIH
ENAČB

INTERFERENCA
VALOV ZA
PLOVILI

POJAV
SONČEVEGA
HALOJA

FONETIČNI
ALGORITMI

Srebrna olimpijska medalja za umetno inteligenco

↓↓↓

Trenutni splošni sistemi za umetno inteligenco, kot je npr. ChatGPT, se kljub osupljivim odgovorom na splošna vprašanja običajno grdo spotaknejo že ob zelo preprostih matematičnih vprašanjih. Znanstveniki pa že razvijajo nove sisteme, ki se bodo, kot kaže, kmalu uspešno spopadli tudi z najzahtevnejšimi matematičnimi problemi. Skupini znanstvenikov pri podjetju Google DeepMind, ki razvijata sistema AlphaProof in AlphaGeometry, sta preizkusili učinkovitost svojih orodij na šestih nalogah letošnje Mednarodne matematične olimpijade. Sistem AlphaProof trenira sam sebe pri dokazovanju matematičnih trditev. Ko prejme opis problema v formalnem jeziku Lean, ustvari kandidate za rešitev in jih dokaže ali ovzrže s preizkušanjem možnih korakov dokaza, uspešne dokaze pa uporabi za bodoče zahtevnejše trditve. Pri tem uporablja algoritem učenja AlphaZero, s katerim so se računalniki že izmogli pri igrah šah in go. Za pripravo na olimpijado so sistem trenirali več tednov z vnosom milijonov problemov različnih zahtevnosti. AlphaProof je rešil dve letošnji olimpijski nalogi iz algebre in eno iz teorije števil, tako da je določil odgovor in dokazal njegovo pravilnost. To je vključevalo najzahtevnejšo nalogo letošnje olimpijade, ki jo je sicer rešilo le 5 tekmovalcev. Nekoliko drugače deluje sistem AlphaGeometry 2, ki je uspešno rešil letošnjo geometrijsko nalogo, medtem ko sta obe nalogi iz kombinatorike ostali nerešeni. Prevedeno v tekmovalne točke, s popolno rešitvijo 4 problemov bi umetna inteligenca letos osvojila 28 točk od 42 možnih na letošnji mednarodni matematični olimpijadi in le za 1 točko zgrešila zlato medaljo. Zdi se, da ji pri tej hitrosti razvoja prihodnje leto zlata medalja ne more uiti. Po spletni strani <https://deepmind.google/discover/blog/ai-solves-imo-problems-at-silver-medal-level/> povzel BK. × × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 52, šolsko leto 2024/2025, številka 1

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2024/2025 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2024 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Srebrna olimpijska medalja
za umetno inteligenco

UVODNIK

- 4-6 Zvezdnato nebo in izjemno olimpijsko
poletje 2024
(Boštjan Kuzman)

MATEMATIKA

- 7-10 Reševanje kubičnih enačb
(David Gajser)
- 11-13 Konstrukcije z označenim ravnilom
(Tadej Staršič)

FIZIKA

- 14-15, 18-19 Interferenca valov za plovili
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 20-23 Pojav Sončevega haloja
(Vid Kavčič)

RAČUNALNIŠTVO

- 24-28 Fonetični algoritmi 1. del - Soundex
(Mladen Borovič, Jani Dugonik)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 28-29 MaRS 2024-še en sijajen matematični
poletni teden
(Izak Jenko)
- 30 Bilo je nekoč v reviji Presek –
40. matematična olimpijada

SLIKA NA NASLOVNICI: Fotografija Sonca v beli svetlobi, posneta 13. 8 2024. Bližamo se višku Sončeve aktivnosti, zato je v njegovi fotosferi veliko peg. V zunanjih plasteh naše zvezde pa so pogosti izbruhi in nekateri med njimi občasno v ozračju prižgejo polarni sij, ki je viden tudi iz naših krajev. Tak posnetek naredimo tako, da pred objektiv kateregakoli teleskopa pritrdimo filter iz folije mylar in na mesto okularja pritrdimo fotoaparatus. Ker je svetlobe kljub filtru dovolj, občutljivost fotoaparatus nastavimo na najmanjšo vrednost, v našem primeru 80 ISO. Čas osvetlitve je med 1/3000 in 1/4000 sekunde. Fotografija: Andrej Guštin

Zvezdnato nebo in izjemno olimpijsko poletje 2024

↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

Ko pišem ta uvodnik, se avgust izteka. Olimpijske igre v Parizu so mimo in Perzeidi na nočnem nebu niso več vidni, šolske počitnice so v zadnjih izdihljajih. Medtem ko je večina slovenskih srednješolk in srednješolcev med poletnimi počitnicami matematiko in fiziko povsem odklopila, pa so se jima nekateri med njimi v tem času še bolj posvetili.

V angleškem mestu Bath se je sredi julija z zaključno slovesnostjo in slavnostno podelitvijo medalj končala 65. Mednarodna matematična olimpijada. Gre za najstarejše in najprestižnejše mednarodno tekmovanje v znanju, na katerem tekmovalci dva dni zapored rešujejo po 3 naloge iz tradicionalnih področij matematike (teorija števil, geometrija, kombinatorika, algebra, ...). Udeležba na takšnem

tekmovanju je nepozabno doživetje, ki udeležence zaznamuje za vse življenje. Olimpijada v Združenem kraljestvu je bila odlično organizirana, zaznamovali pa so jo tudi odlični vabljeni predavatelji, med njimi trije Fieldsovi nagrajenci Terence Tao, Timothy Gowers in Maryna Viazovska, avtor priljubljenih YouTube matematičnih videov Grant Sanderson (3blue1brown), avtor poljudnoznanstvenih knjig Simon Singh (Knjiga šifer, Zadnji Fermatov izrek, ...) ter Thang Luong (Google Deep Mind), eden od avtorjev AI programa AlphaGeometry za reševanje geometrijskih problemov.

Nekoliko drugačno, bolj orientalsko kulturo, so srečali mladi člani slovenske ekipe za fizikalno olimpijado, ko so se letos udeležili Evropske fizikalne



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na 65. Mednarodni matematični olimpijadi. Nace Hranjec (ŠC Ravne na Koroškem) je osvojil srebrno medaljo, Luka Urbanc (Gimnazija Bežigrad) pa bronasto. Olimpijade so se udeležili še Žiga Oštir (Gimnazija Bežigrad), Nives Gošnjak (ŠC Velenje, Gimnazija) in Patricia Király (Gimnazija Bežigrad), ki so prejeli pohvale, ter Matic Pogorelec (II. gimnazija Maribor). Ekipo sta spremljala dr. Gregor Dolinar in Luka Horjak.

olimpijade v gruzijskem mestu Kutaisi, zaradi političnih napetosti pa izpustili Mednarodno fizikalno olimpijado v Iranu. Evropska fizikalna olimpijada daje velik poudarek problemskim in eksperimentalnim nalogam. Naloge na tekmovanju izhajajo iz realističnih raziskovalnih situacij in nudijo veliko možnosti za ustvarjalne rešitve, tekmovanje pa je ločeno na teoretični del (5 ur) in eksperimentalni del (5 ur). Tako so tekmovalci v torek reševali eksperimentalno nalogo z dvema kroglicama in piezo kristalom, v sredo pa reševali teoretične naloge, pri katerih je hokejski pak drsel ob polkrožni steni, Bob in Alica sta si z relativistično gibajočih se vesoljskih ladij pošiljala darilca, laserska svetloba pa je interferirala v nič v Fabry-Perotovem interferometru.



SLIKA 3.

Na 8. Mednarodni ekonomski olimpijadi sta srebrni medalji osvojila Špela Gačnik (Gimnazija Bežigrad) in Benjamin Gašperin (Gimnazija Kranj), bronasti medalji pa Andraž Plut (Ekonomška šola Novo mesto) in Borja Ranzinger (II. gimnazija Maribor). Olimpijade se je udeležila še Maruša Gorkič (Sr. ekonomska šola in gimnazija Maribor), tekmovalce pa sta spremljala dr. Tomaž Košir in dr. Aleš Toman.



SLIKA 2.

Zlato medaljo na Evropski fizikalni olimpijadi je že drugo leto zapored osvojil Peter Andolšek (Gimnazija Bežigrad), srebro Enej Jauk (Gimnazija Bežigrad), bron pa Aljaž Erman (Gimnazija Kranj). Olimpijade sta se udeležila še Benjamin Gašperin (Gimnazija Kranj) in Tine Rožen (ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija), tekmovalce pa sta spremljala dr. Jurij Bajc in Mitja Zidar.

Šele nekaj let pa se slovenski dijaki udeležujejo tudi Mednarodne ekonomske olimpijade za srednješolce. Ta je bila letos osma po vrsti in je letos potekala v Hong Kongu. Tekmovalci so se na olimpijadi pomerili v treh preizkušnjah: individualnih tekmovanjih iz ekonomije in iz finančne pismenosti ter skupinskem tekmovanju v pripravi študije poslovnega primera

Zadnje od velikih mednarodnih tekmovanj, pri ka-

terem sodelujejo slovenski tekmovalci in tekmovalke pod okriljem DMFA Slovenije, je bila Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike. Tudi ta je potekala na drugem koncu sveta – v Braziliji, v znamenitem mestu Rio de Janeiro. Na tej olimpijadi se tekmovalci pomerijo v teoretičnem in praktičnem delu. Slednji je sestavljen iz opazovanj z uporabo osnovnih astronomskih instrumentov, ter analize podatkov, pri kateri tekmovalci analizirajo pripravljene astronomske podatke. Slovenska, ki je na tem tekmovanju v preteklosti že dosegla nekaj izjemnih mejnikov, je tokrat meje prestavila v bržkone nepovnljive višave.

Mednarodna tekmovanja tega nivoja izrazito presegajo zahtevnost in obseg srednješolskega kurikula, zato dajejo mladim navdušenkam in navdušencem odlično motivacijo, da se najprej ob samostojnem delu in podpori šolskih mentorjev, kasneje pa na skupnih pripravah v manjših skupinah o sodelovanju bivših tekmovalcev in strokovnih sodelavcev z različnih fakultet zares poglobijo v nove znanstvene izzive. V Sloveniji imamo očitno neverjetno srečo, saj imamo kar nekaj neverjetnih talentov. Pa ne le



SLIKA 4.

Na 17. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike sta zlato medaljo osvojila Peter Andolšek in Žan Arsov, srebrno Aleš Rus (vsi Gimnazija Bežigrad) in Žiga Vučajnk (I. gimnazija v Celju), pohvalo je prejela Patricia Király (Gimnazija Bežigrad). Tekmovalce sta spremljala Vid Kavčič in Dunja Fabjan.

talentov, z nadarjenimi mladimi na področjih matematike, fizike in astronomije v slovenskih šolah kljub kadrovski krizi še vedno delajo nekateri kvalitetni profesorji in profesorice, v prostem času zunaj šol pa izjemni entuziasti, bivši tekmovalci, študentje in pedagogi s fakultet z ustreznim strokovnim znanjem.

V uredništvu revije Presek vsem tekmovalcem in tekmovalkam, njihovim mentorjem in mentoricam ter strokovnim sodelavcem tekmovalnih ekip pri DMFA Slovenije iskreno čestitamo za letošnje izjemne uspehe. Čudovito je, da lahko v novi letnik revije Presek vstopimo s tako lepo popotnico. Daljše prispevke o olimpijadah in olimpijskih nalogah bomo objavili še v naslednjih številkah in upamo, da jih boste bralci z veseljem prebrali in morda pokazali še svojim sorodnikom in sosedom, skupaj z drugimi zanimivimi prispevki, ki jih pripravljamo v letošnji sezoni. Že vnaprej pa se zahvaljujemo tudi vsem bralcem in bralkam za vašo podporo naši reviji in upamo, da lahko nanjo računamo tudi letos!



SLIKA 5.

Peter Andolšek je na MOAA še drugo leto zapored osvojil absolutno prvo mesto, dodatno pa še nagrado za najboljši teoretični del tekmovanja. Postal je tudi prvi tekmovalec v zgodovini MOAA, ki je osvojil 4 zlate medalje.

× × ×

Reševanje kubičnih enačb

↓↓↓

DAVID GAJŠER

→ Enačbam oblike

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so a, b, c in d realna števila ter $a \neq 0$, pravimo kubične enačbe. V tem prispevku bomo rešili nekaj primerov takih enačb in se seznanili s formulo za izračun rešitve ter njeno uporabo. Preprost primer kubične enačbe ($a = 1$, $b = c = 0$, $d = -2$) je

$$x^3 - 2 = 0.$$

Hitro opazimo, da je edina realna rešitev te enačbe $\sqrt[3]{2}$. Malo kompleksnejša kubična enačba je

$$64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = 0. \quad (1)$$

Najprej opazimo, da nobeno celo število ne more biti rešitev te enačbe. Za vsako celo število x je namreč število $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$ liho, saj je za ena manjše od vsote sodih števil $64x^3$, $-48x^2$ in $12x$, torej ni enako 0, ki je sodo število. Dijaki zaključnih letnikov gimnazij bi znali naštet vse možne kandidate za racionalne rešitve, mi pa na tem mestu uganimo, da je ena rešitev $\frac{1}{4}$. To pomeni, da mora biti $4x - 1$ faktor izraza $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$ in zaključni letniki gimnazij bi znali poiskati preostale faktorje (mi pa uganimo) $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = (4x - 1)^3$. Sledi, da je $\frac{1}{4}$ edina rešitev enačbe 1. Nadaljujmo z enačbo

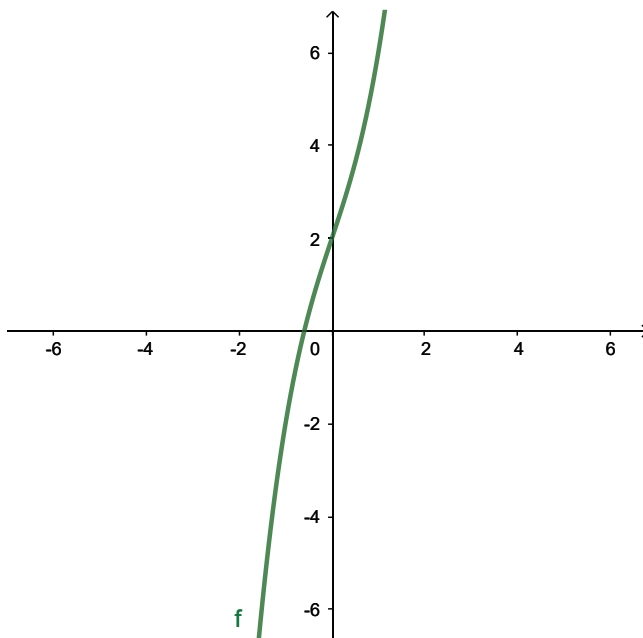
$$64x^3 - 48x^2 + 12x + 1 = 0, \quad (2)$$

ki je zelo podobna prejšnji. Ali nam lahko to dejstvo kako pomaga pri reševanju? Opazimo $64x^3 - 48x^2 + 12x + 1 = (4x - 1)^3 + 2$, torej je naša enačba ekvivalentna enačbi $(4x - 1)^3 = -2$, od koder sledi, da je $4x - 1 = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, torej je $x = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{4}$ edina realna rešitev enačbe 2. Nadaljujmo s še zahtevnejšo

enačbo

$$x^3 + 3x + 2 = 0. \quad (3)$$

Tokrat je rešitev precej težko uganiti: $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$. Bralca vabimo, da rešitev preveri tako, da jo vstavi v enačbo in da razmisli, zakaj enačba nima drugih realnih rešitev. Slednje je moč storiti tako, da dokažemo, da je funkcija $f(x) = x^3 + 3x + 2$ naraščajoča. To lahko storimo, recimo, s pomočjo odvoda ali z analizo preoblikovanega izraza $x^3 + 3x + 2 = x(x^2 + 3) + 2$, kjer ločimo primera $x \geq 0$ in $x < 0$.



SLIKA 1.

Graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x + 2$. Funkcija f je naraščajoča in njen graf seka x -os pri $x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \doteq -0,6$.

Rešitev enačbe 3 smo torej uganili. Morda pa obstaja formula, ki bi nam pomagal pri reševanju? Ide



alno bi bilo, da bi formula delovala za vsako kubično enačbo in se posledično več ne bi rabili zanašati na ugibanje. Kot bomo videli v nadaljevanju, formula obstaja, a je precej komplicirana že za razumeti, pa tudi za uporabo. Preden pa zagrizemo vanjo, si oglejmo dva preprostejša primera sorodnih enačb in njunih rešitev. Začnimo z linearno enačbo

$$\blacksquare \quad ax + b = 0,$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Bralec je gotovo v glavi že izrazil rešitev kot $x = -\frac{b}{a}$, ki velja, če je $a \neq 0$. Linearna enačba ima torej zelo preprosto formulo za izračun rešitve. Nadaljujmo s kvadratno enačbo

$$\blacksquare \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$. Pri tej enačbi bomo uporabili trik, ki nam bo prav prišel tudi kasneje pri kubični enačbi: preoblikovali jo bomo tako, da bo koeficient kvadratnega člena enak 1, linearni člen pa bo izginil. Najprej enačbo delimo z a . Tako dobimo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Prva dva člena na levi strani enačbe dopolnimo do popolnega kvadrata, tako da dobimo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$. Če sedaj uvedemo novo neznanko $y = x + \frac{b}{2a}$ in oznako $K = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, vidimo, da smo začetno kvadratno enačbo preoblikovali v $y^2 - K = 0$, ki ima koeficient pred y^2 enak 1, linearni člen pa v enačbi ne nastopa. Tako enačbo je zelo preprosto rešiti. Opazimo, da realna rešitev obstaja natanko tedaj, ko je $K \geq 0$ in da so v tem primeru vse rešitve $y = \pm\sqrt{K}$. Ko upoštevamo $y = x + \frac{b}{2a}$ in $K = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, dobimo slavno formulo za izračun rešitev kvadratne enačbe

$$\blacksquare \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ta formula se, za razliko od formule za rešitev kubične enačbe, v srednjih šolah ogromno uporablja. Uporaba ni pretirano zahtevna.

Podobo kot smo uvedli novo neznanko pri kvadratni enačbi, lahko naredimo za kubično enačbo

$$\blacksquare \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so a, b, c in d realna števila in $a \neq 0$. Najprej delimo z a , nato pa prva dva člena dopolnimo do popolnega kuba. Dobimo $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} =$

$(x + \frac{b}{3a})^3 - \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Ko uvedemo novo neznanko $y = x + \frac{b}{3a}$ in poenostavimo, dobimo enačbo oblike

$$\blacksquare \quad y^3 + py + q = 0, \tag{4}$$

kjer sta p in q neki realni števili. Zainteresiranega bralca vabimo, da p in q izrazi z a, b, c in d . Nova enačba je videti preprosteje kot prvotna, saj na levi nima kvadratnega člena, koeficient pred y^3 pa je 1. Ta trik z novo neznanko je že dovolj, da lahko bralec brez ugibanja reši enačbi (1) in (2). Iz rešitev poenostavljene enačbe (4) lahko hitro dobimo rešitve splošne kubične enačbe; le $\frac{b}{3a}$ jim moramo odšteti. Zato se bomo od tod naprej posvetili le reševanju enačbe (4). Formula za rešitev take enačbe je

$$\blacksquare \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$

kjer je $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$

Pravimo ji Cardanova formula. Ideja izpeljave te formule je sicer preprosta, a za dobro razumevanje izpeljave je potrebno zelo dobro poznavanje kompleksnih števil, zaradi česar se bomo izpeljavi v tem prispevku odrekli. Žal pa tudi pri uporabi Cardanove formule ne bo šlo povsem brez kompleksnih števil in to dejstvo zelo oteži njeno uporabo. O čem govorimo? Ali ni treba le vstaviti ustrezna p in q in poračunati?

Najprej formulo uporabimo za najtežji primer enačbe z začetka sestavka, enačbo (3):

$$\blacksquare \quad x^3 + 3x + 2 = 0.$$

Opazimo, da je koeficient pred x^3 enak 1 in da ni kvadratnega člena, torej lahko uporabimo Cardanovo formulo za $p = 3$ in $q = 2$. Izračunamo $\Delta = 2$, torej je rešitev $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$. Nič lažjega! Poglejmo še kak lažji primer enačbe, recimo

$$\blacksquare \quad x^3 - x = 0. \tag{5}$$

Za ta primer sploh ne potrebujemo Cardanove formule, saj je $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$, torej so vse rešitve enačbe 0, 1 in -1. Vseeno pogledjmo, kako do istih rešitev pridemo s Cardanovo formulo. V našem primeru je $p = -1$ in $q = 0$,

zato je $\Delta = -\frac{1}{27}$. Negativno? Kako pa naj Δ korenimo, kot zahteva Cardanova formula? Ali na tem primeru (in podobnih) Cardanova formula odpove? Odgovor je NE, a se moramo sprijazniti z uporabo korenov negativnih števil. To je zelo čudno, kaj bi sploh pomenilo $\sqrt{-1}$?

Podobna vprašanja so si zastavljali italijanski matematiki v 15. in 16. stoletju, ko so odkrivali formulo [2]. Takrat je na Univerzi v Bologni aritmetiko učil Scipione del Ferro [6], za katerega se je govorilo, da zna reševati kubične enačbe. Kako dobro jih je znal reševati, pa ni znano zaradi pomanjkanja virov iz tistega obdobja. K pomanjkanju je gotovo pripomoglo dejstvo, da so takrat matematiki občasno izzvali drug drugega na dvoboje in s tem dokazovali svoje matematično znanje. In če je neki matematik poznal metodo za reševanje kubičnih enačb, ki jih drugi niso znali rešiti, je imel veliko prednost. To je bil gotovo pomemben razlog, da del Ferro svoje metode ni želel objaviti. Je pa skrivnost tik pred svojo smrtjo posredoval učencu Antoniu Fiorju. Slednji je svoje znanje želel izkazati na matematičnem dvoboju z Niccolom Fontano Tartaglijo [5], ki je prav tako trdil, da zna reševati težke kubične enačbe. Dvoboj je trajal 30 dni, v tem času pa je vsak moral rešiti kubične enačbe, ki jih je predlagal (in znal rešiti) nasprotnik. Zmagal je Tartaglia. Novica o zmagi se je hitro razširila in dosegla tudi takrat že uveljavljeneega matematika Gerolama Cardana, ki je Tartaglijo prepričal, da mu je izdal svojo metodo. Cardano je formulo za rešitev kubične enačbe kasneje objavil in je tako poimenovana po njem. Zgoraj smo videli, da je Cardano v svoji knjigi moral omeniti tudi korene negativnih števil, saj pri uporabi formule naravno nastopijo. Ker takrat teorija kompleksnih števil še ni obstajala, je delo s takimi števili opisal kot »mentalno mučenje« [1].

Izvedimo sedaj to »mentalno mučenje« za rešitev enačbe (5) s Cardanovo formulo. Iz $\Delta = -\frac{1}{27}$ sledi, da so rešitve oblike $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$. Kvadratni koren iz -1 označimo z i , torej ima i lastnost $i^2 = -1$. Dodatno znamo poenostaviti $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Torej lahko zapišemo

$$\blacksquare x = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt[3]{i} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt[3]{i}. \quad (6)$$



SLIKA 2.

Portret Gerolama Cardana, po katerem je poimenovana formula za rešitev kubične enačbe (4).

Čeprav je videti, da s formulo dobimo le rešitev 0, pa to ne drži. Namreč, s $\sqrt[3]{i}$ smo označili katerokoli rešitev enačbe $y^3 = i$. Slednja ima natanko 3 kompleksne rešitve, ki so $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ in $y_3 = -i$. Bralec lahko s kubiranjem in upoštevanjem $i^2 = -1$ sam preveri, da y_1 , y_2 in y_3 res rešijo enačbo $y^3 = i$. Ker izraz $\sqrt[3]{i}$ lahko predstavlja katerokoli izmed števil y_1 , y_2 ali y_3 , je

$$\blacksquare \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt[3]{i} \in \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i \right\}.$$

Ostane še zadnji korak, izračun razlike (6) dveh števil iz te množice. Čeprav imamo 3 možnosti za zmanjševanec in 3 za odštevanec, pa vsaka izmed 9 možnosti izbire zmanjševanca in odštevanca ne da



→ rešitve enačbe (5). Tu moramo upoštevati še dodatek h Cardanovi formuli, ki smo ga zamolčali, namreč da se izmed vseh parov tretjih korenov $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ in $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ v rešitev enačbe $y^3 + py + q = 0$ seštejejo natanko tisti pari, za katere velja $p = -3uv$. V našem primeru tako dobimo rešitve

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = 1, \\ x_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = -1 \text{ in} \\ x_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = 0, \end{aligned}$$

ki so res iskane rešitve enačbe (5).

Čeprav uporaba Cardanove formule ni zmeraj najlažja pot do rešitve in se pri nekaterih, tudi nezahtevni kubičnih enačbah, kot je enačba (5), moramo »mentalno mučiti«, pa jo dejstvo, da lahko z njeno pomočjo rešimo vsako kubično enačbo, naredi zelo pomembno. Pomembna je tudi zato, ker za njeno uporabo v primeru $\Delta < 0$ potrebujemo korene negativnih števil, kar je bila motivacija za uvedbo kompleksnih števil. Z definicijo teh števil se dijaki srečajo v srednji šoli, kjer pa se kot razlog za uvedbo le redko omenja reševanje kubičnih enačb. Veliko pogostejše se za motivacijo omenja, da kompleksna števila lahko rešijo enačbo $x^2 + 1 = 0$, za katero je očitno, da nima realnih rešitev. Moje mnenje je, da je uporaba Cardanove formule vsaj tako dobra motivacija¹. Izkazuje se namreč, da je pri reševanju kubične enačbe vredno ločiti tri primere: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ in $\Delta < 0$. V prvem primeru je pot do (edine) realne rešitve preprosta, kompleksnih števil ne potrebujemo. Tudi v drugem primeru kompleksnih števil ne potrebujemo, dobimo pa eno ali dve različni realni rešitvi. V tretjem primeru, ko je $\Delta < 0$, pa se kompleksnim številom ne moremo preprosto izogniti, enačba pa ima tri različne realne rešitve.

Za zaključek bralcu ponujamo štiri naloge.

1. Izpeljite, da za p in q iz (4) velja $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ in

¹Motivacijo lahko učitelj poda tudi le informativno, brez prikaza formule in njene uporabe. Uporaba formule je namreč glede na trenutni učni načrt prezahtevna za tipičnega gimnazijca. Vseeno pa se najdejo talenti, kot je bil naš slavniti matematik Josip Plemelj, ki formulo poznajo že v srednji šoli [3].

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

2. Z vpeljavo nove neznanke eliminirajte kvadratni člen iz enačbe $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ in jo rešite. [reš. $x = 1$]
3. Poiščite edino realno rešitev enačbe $x^3 - 3x + 4 = 0$. [reš. $x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$]
4. Poiščite vse tri realne rešitve enačbe $x^3 - 2x = 0$, najprej s pomočjo ugibanja, nato z uporabo Cardanove formule. [reš. $x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$]

Literatura

- [1] A., Ekert. Complex and Unpredictable Cardano. *International Journal of Theoretical Physics*, 47, 2008.
- [2] L., Guilbeau. The History of the Solution of the Cubic Equation. *Mathematics News Letter*, 5(4): 48-12, 1930. dostopno na: <https://doi.org/10.2307/3027812>.
- [3] I., Vidav. *Josip Plemelj: ob stoletnici rojstva*, Državna založba Slovenije, 1973.
- [4] G., Cardano. Stipple engraving by R. Cooper. Wellcome Collection. Public Domain Mark. dostopno na: <https://wellcomecollection.org/works/q737gkxm>, ogled 19. 7. 2024.
- [5] Cubic equation. dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation, ogled 26. 6. 2024.
- [6] Scipione del Ferro. dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro, ogled 26. 6. 2024.

× × ×

www.presek.si

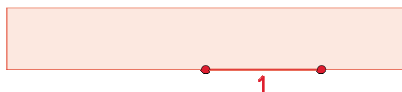
www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Konstrukcije z označenim ravnilom

↓↓↓

TADEJ STARČIČ

→ V osnovni šoli se srečamo s klasičnimi konstrukcijskimi nalogami, pri katerih imamo na voljo šestilo in neoznačeno ravnilo, le-te so popularne vse od časov Evklida². V tem sestavku se bomo ukvarjali z nekoliko drugačnimi konstrukcijami. Uporabljali bomo zgolj posebno ravnilo, ki ima, za razliko od neoznačenega, dve oznaki na razdalji 1 enote. Rečemo mu *označeno ravnilo* (slika 1). Dodajmo, da ga je redno uporabljal že Arhimed³.



SLIKA 1.

Označeno ravnilo.

Dodatno je pri konstrukcijah z označenim ravnilom dovoljeno drsenje oziroma vrtenje roba ravnila ob fiksni točki, vse dokler njegovi oznaki ne pristane na dveh vnaprej izbranih objektih. Prav to omogoča nove možnosti konstruiranja (slika 2). Grki so te konstrukcije imenovali *neusis*, zapisano po grško kot $\nu\epsilon\upsilon\sigma\iota\zeta$, kar po slovensko pomeni »mejiti« ali »vstaviti«.

Lotimo se sedaj treh osnovnih konstrukcij.

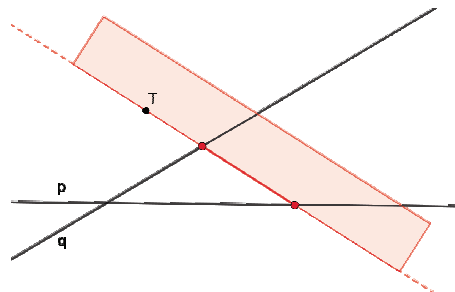
Naloga 1

K dani premici p konstruirajte vzporednico skozi dano točko T .

Dovolj je obravnavati primer, ko je točka od premice

²Evklid (365 p.n.š - okrog 275 p.n.š) je bil starogrški matematik; z znamenito knjigo *Elementi* je postavil temelje geometrije.

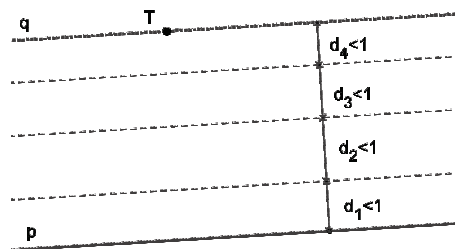
³Arhimed (okrog 287 p.n.š - okrog 212 p.n.š) je bil starogrški matematik, fizik in izumitelj; velja za enega največjih matematikov vseh časov.



SLIKA 2.

Namestitev ravnila ob dani točki T in z oznakama na danih premicah p in q .

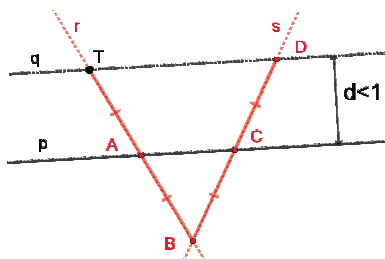
oddaljena manj od 1, saj na splošno konstrukcijo enostavno razdelimo na več takih podprimerov (slika 3). Idejo za konstrukcijo dobimo v Talesovem⁴ izreku o sorazmerjih, iz katerega sledi, da sta na sliki 4 premici p in q vzporedni natanko tedaj, ko sta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle TBD$ podobna. Torej, pri dani točki T in premici p najprej namestimo ravnilo tako, da ena oznaka sovpade s T , druga oznaka pa je na premici p in določa točko A ; velja $|TA| = 1$. Potem na premici skozi A in T označimo točko B tako, da je $|AB| = 1$. Na enak način konstruiramo še C in D tako,



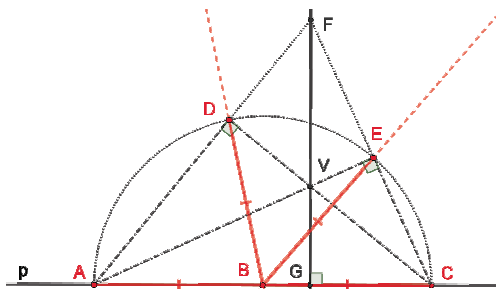
SLIKA 3.

Konstrukcija vzporednice v primeru oddaljenosti točke od premice $d \geq 1$.

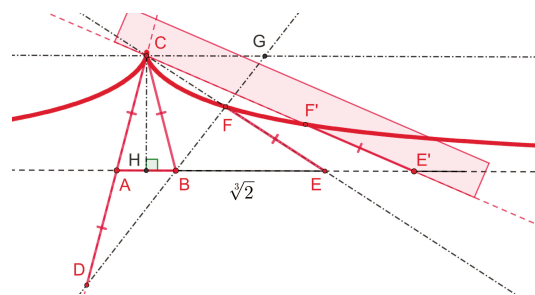
⁴Tales (okrog 624 p.n.š. - okrog 546 p.n.š) je bil starogrški matematik in filozof.



Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$.



Konstrukcija pravokotnice.



Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$.

ki je uporabil to konstrukcijsko tehniko. Na sliki 6 je v GeoGebri predstavljena njegova konstrukcija. Najprej z že osvojenim znanjem konstruiramo enakokraki trikotnik $\triangle ABC$, da je $|BC| = |AC| = 2|AB| = 1$ ter točko D na nosilki AC , da je $|AD| = 1$. Cilj je nato označeno ravnilo namestiti tako, da bo ena oznaka (točka E) ležala na nosilki daljice AB , druga oznaka (točka F) pa bo na nosilki BD ; velja še $|EF| = 1$. Drsenje ravnila okrog fiksne točke C simuliramo tako, da rob ravnila predstavimo z nosilko CE , pri čemer lahko E prosto premikamo po nosilki AB . Povejmo, da pri tem F ob vzklopu sledi izriše eno vejo krivulje, ki se imenuje *konhoida*; pri koordinatnem izhodišču $(0, 0)$ v C in točki $(1, 0)$ v G ima ta krivulja v kartezičnih koordinatah enačbo $(y + 1)^2(x^2 + y^2) = y^2$. Naj se v točki G sekata vzporednica daljice AB skozi C in nosilka BD , s H pa označimo razpolovišče AB . Potem sta podobna para trikotnikov $\triangle ADB \sim \triangle CDG$ (z razmerjem stranic $1 : 2$) in $\triangle CFG \sim \triangle EFB$. Sledi $|CG| = 2|AB| = 1$ in $x := |BE| = \frac{|EF||CG|}{|CF|} = \frac{1}{|CF|}$. Uporabimo še Pitagorov⁷ izrek, malo preuredimo enačbo in pokažimo $x = \sqrt[3]{2}$:

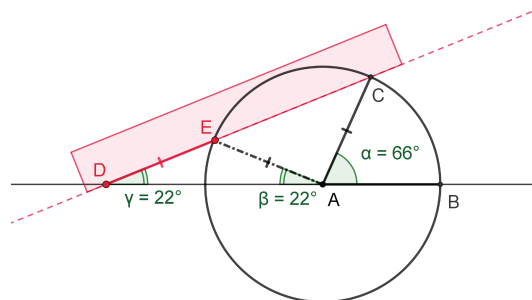
$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (|CF| + |FE|)^2 &= |CE|^2 = |HE|^2 + |HC|^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{2}|AB| + |BE|\right)^2 + \\ &\quad + (|AC|^2 - (\tfrac{1}{2}|AB|)^2) \\ \left(\tfrac{1}{x} + 1\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{4} + x\right)^2 + \tfrac{15}{16} \\ 0 &= 2x^4 + x^3 - 4x - 2 \\ &= (2x + 1)(x^3 - 2). \end{aligned}$$

Naloga 5

Konstruirajte tretjino danega kota.

Tudi ta problem izvira iz Stare Grčije. Na sliki 7 je prikazana Arhimedova konstrukcija, kjer je poleg označenega ravnila uporabljena še enotska krožnica (t.j. z radijem 1). Dani kot $\alpha = \angle BAC$ je kar izsek enotske krožnice, označeno ravnilo pa je z robom ob točki C nameščeno tako, da ena oznaka (točka D) leži na nosilki kraka kota AB , druga oznaka (točka E) pa na krožnici. Opazimo, da sta trikotnika $\triangle DAE$ in $\triangle CEA$ enakokraka. Odtod boste bralci znali sami

⁷Pitagora (okrog 570 p.n.š.–okrog 495 p.n.š.) je bil starogrški matematik, filozof in politik; ustanovil je tudi svojo šolo.



SLIKA 7.

Tretjinjenje kota.

izpeljati $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$. Konstrukcijo brez krožnice najdete v knjigi [1, str. 127].

Za konec poskusite rešiti še nekaj krajših nalog.
Pa veliko uspeha!

Naloga 6

Pri dani krožnici $\mathcal{K}$ in točki T konstruirajte tako točko P na $\mathcal{K}$, da bo $|TP| = 1$. (Ustrezno namestite ravnilo.)

Naloga 7

V GeoGebri izdelajte orodje, ki bo med dani premici namestilo daljico dolžine 1 tako, da bo šla nosilka daljice skozi vnaprej izbrano točko. (Pomagajte si z nalogo 4 oziroma s krivuljo konhoido.)

Naloga 8

Konstruirajte kvadrat in enakostranični trikotnik.

Naloga 9

*Kako bi konstrukcijo v nalogi 5 simulirali v GeoGebri?
(Ena od oznak ravnila naj potuje po nosilki kraka da-
nega kota ali po krožnici.)*

Literatura

- [1] G. E. Martin, Geometric Constructions, Springer, 1998.
- [2] R. C. Yates, The Angle Ruler, the Marked Ruler and the Carpenter's Square, National Mathematics Magazine, Vol. 15, No. 2, 61-73, 1940.

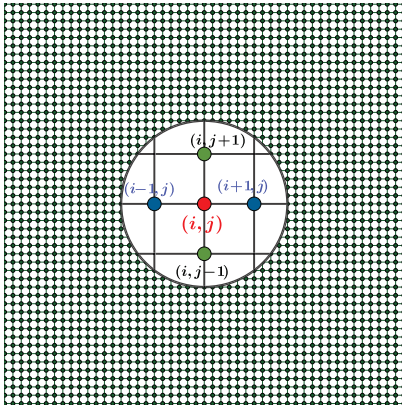
Interferenca valov za plovili

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ V zadnji številki Preseka smo obravnavali nihanje kvadratne mreže kroglic, povezanih z elastično vrvico. Opazovali smo vozle pri stojećih valovih.

Valovno enačbo za mrežo, glej sliko 1,



SLIKA 1.

Kvadratna mreža elastično spetih kroglic. Prikazana je izbrana kroglica i, j in njene najbližje sosedice.

smo napisali takole:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{i,j}^m &= 2\mathcal{Y}_{i,j}^{m-1} - \mathcal{Y}_{i,j}^{m-2} \\ &+ \frac{F_0 \Delta t^2}{Md} [(\mathcal{Y}_{i-1,j}^{m-1} - 2\mathcal{Y}_{i,j}^{m-1} + \mathcal{Y}_{i+1,j}^{m-1}) \\ &+ (\mathcal{Y}_{i,j-1}^{m-1} - 2\mathcal{Y}_{i,j}^{m-1} + \mathcal{Y}_{i,j+1}^{m-1})]. \end{aligned}$$

V mreži ima vsaka kroglica dva indeksa, i, j , da vemo, kje natančno je. Časovni korak m smo zapisali nad indeksa, kjer je sicer običajno mesto za eksponent. Ker ga pri odmikih ne bomo potrebovali, ga zaradi preglednosti žrtvujemo za ta namen. V faktorju $\frac{F_0 \Delta t^2}{Md}$ se skrivajo sila F_0 , s katero so napete vrvice med kroglicami, masa M posameznih kroglic, razdalja med najbližjimi kroglicami d in časovni korak Δt pri računanju naslednje lege kroglic v času $m\Delta t$, ko

poznamo njihove lege v časih $(m-1)\Delta t$ in $(m-2)\Delta t$, torej v dveh prejšnjih korakih.

Pri opazovanju valovnih vozlov smo mrežo vzbujali tako, da smo s harmonično silo delovali le na srednjo kroglico. Sedaj bomo vzbujali različne kroglice v izbranem vrstnem redu, a le z rahlim trkom. Valovni enačbi zgoraj bomo dodali vzbujevalni člen takole:

$$\mathcal{Y}_{i,j}^m = 2\mathcal{Y}_{i,j}^{m-1} - \mathcal{Y}_{i,j}^{m-2} + \dots + f_{i(m-1),j(m-1)}$$

Zadnja enačba sledi iz Newtonovega zakona $F_{i,j}^m = Ma_{i,j}^m$ za kroglico (i,j) , kjer smo pospešek $a_{i,j}^m$ izrazili z odmiki v različnih časih:

$$a_{i,j}^m \approx \frac{\mathcal{Y}_{i,j}^m - 2\mathcal{Y}_{i,j}^{m-1} + \mathcal{Y}_{i,j}^{m-2}}{\Delta t^2}$$

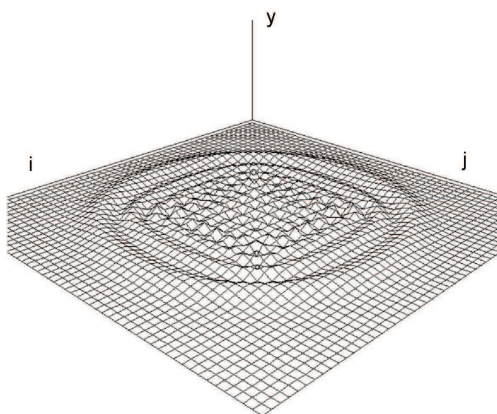
Sila $F_{i,j}^m$ v času $m\Delta t$ je sedaj vsota sil elastičnih vrvic na kroglico in zunanje sile $F_{z,i,j}$ v času $m\Delta t$. Dodani vzbujevalni člen f , je tako

$$f = \frac{F_z \Delta t^2}{M}.$$

Z mrežo kroglic kar dobro ponazorimo valovanje na vodni gladini. Le-to je za fizika eno najzahtevnejših valovanj. Podroben opis terja zapletene valovne enačbe, česar v Preseku ne moremo obravnavati. Videli pa bomo, da je naša kvadratna mreža kar primeren »peskovnik«, kjer z računalnikom sestavimo zanimive igrice, pri katerih se spotoma naučimo še nekaj fizike.

Najprej si oglejmo, kako se mreža odzove ne en sam trk izbrane kroglice. Tak trk ponazarja razmere, ko v vodo vržemo kamen. Od mesta pljuska se širijo koncentrični valovi. Značilnost teh valov je, da se daljši valovi širijo nekoliko hitreje kot krajši. Pogled na sliko 2 pokaže, da se pri kvadratni mreži valovi širijo podobno. V podrobnostih sicer opazimo razlike, a le-te bomo tu spregledali.

Sedaj si oglejmo, kako se mreža odziva na zaporedne trke. Ti naj ponazarjajo premo vožnjo ladje s konstantno hitrostjo, ki je večja od hitrosti širjenja valovanja. Pričakujemo značilen klin valov za ladjo,

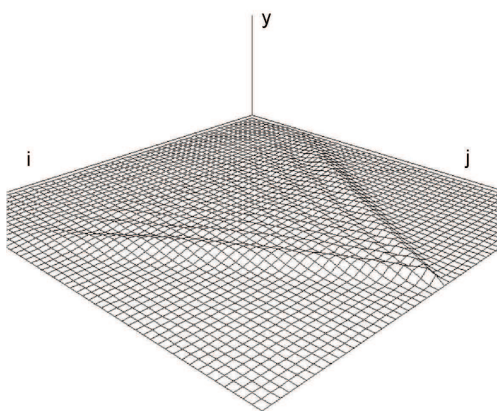


SLIKA 2.

Odziv mreže na sunek na srednjo kroglico.

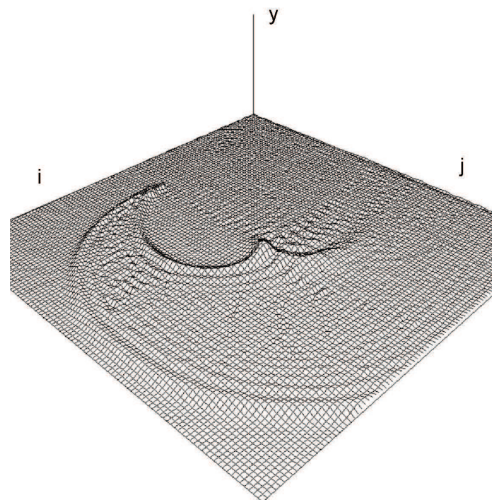
kar se res lepo vidi na sliki 3. Na gladini globoke vode je klin za plovili manj pregleden, ker je hitrost širjenja valov odvisna od valovne dolžine (glej prispevek v Preseku letnik 39 (2011/2012), številka. 1). Valovanje na mreži je pač drugačno od valovanja na vodni gladini. Bolj je podobno valovanju na gladini plitve vode, kjer hitrost valovanja ni dosti odvisna od valovne dolžine. Voda je za nas plitva, če je valovna dolžina valov za red velikosti (za faktor ≈ 10) večja od njene globine.

Kako pa vidimo valove za našo ladjo, ki se po mre-



SLIKA 3.

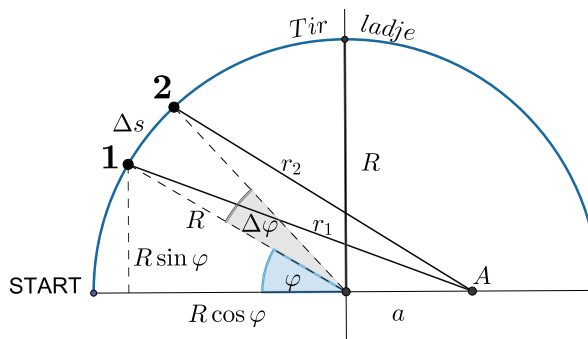
Odziv mreže na zaporedno vzbujanje kot pri plovilu.



SLIKA 4.

Valovi pri vožnji ladje v krogu.

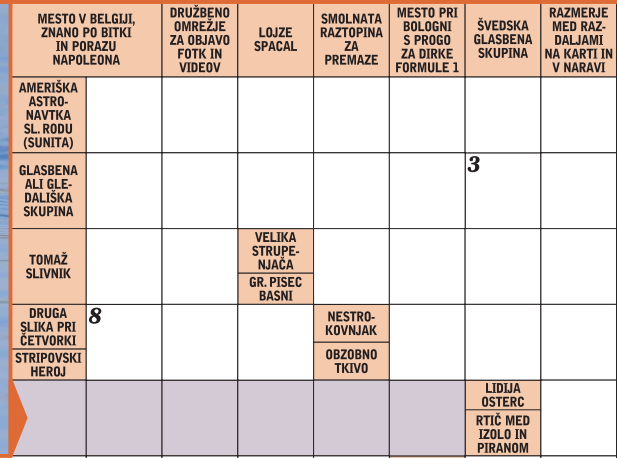
ži vozi v krogu? Pričakujemo ojačitev blizu središča krožnice zaradi interference bočnih valov. Na sliki 4 se ojačitev res jasno vidi. Ob tem se vprašamo, kako naj vozi ladja po krožni poti, da bo interferenčni vrh na izbranem mestu kar se da velik. Ob tem vprašanju nam nekaj računanja ne uide.



SLIKA 5.

Razmere pri krožnem tiru ladje s spremenljivo hitrostjo – skica ob izpeljavi

Na sliki 5 je prikazan tir ladje in izbrana točka A, kjer naj bo interferenčni vrh kar se da velik. Očitno interferenčni vrh ne more nastati v središču krožne poti, saj bi se v tem primeru morala ladja gibati zelo hitro, da bi vzbudila bočne valove na celotni krožnici

A wooden ruler is shown horizontally, with a small metal ball resting on its surface. The ruler has a scale from 0 to 30 centimeters. The ball is positioned at approximately 2.5 centimeters.

NAŠ IGRALEC, KOMIK IN IMITATOR (KLEMEN)



PRIPADNIK VIŠOKE DRUŽBE

IGRALKA GARDNER

JUŽNO-AMERIŠKI PTIČ, TEKAČ

SMUČARSKO DRUŠTVO

ASTRID LINDGREN
RAZBOJNIŠKA HČI
PREZRAČ. LUKNJA

SLOVESNA JAVNA OBLJUBA

BODIČAST RASTLINSKI IZRASTEK SOCIOLOG MOČNIK

KRAJ POD POHORJEM LETOVIŠČE V BOKI KOTORSKI

PEVEC SMOLAR DELOVNA, KONTROLNA, DOMAČA ?

ODPORNOST ZLITINA ŽELEZA IN NIKLJA

NAJVEČJE TURŠKO JEZERO

IBSENOVA DRAMA

PODROČJE VIŠJE MATE MATIKE

KROŽNO POTOVANJE Z NASTOPI V RAZLIČ. KRAJIH

ČEŠKI KRALJ ZDRAVILLO, KI ZAVIRA KISLOST

REŽISER FILMOV O KEKCU (JOŽE)

TURŠKO IME REKE ARAKS

TENISU PODOBEN ŠPORT

ČAS ČLANSTVA

AM. PIŠEC GROZILJIVK (JOHN)

IGRALEC BEATTY

VW ELEKT. RIČNI AVTO

SPLETNA DOMENA RUSIJE

VENEC SONČEVE ATMOSFERE

SUNKOVIT DOTIK

SOPHIA LOREN

INDIJANCI IZ SREDNJE AMERIKE

STARODAVNO MESTO V BABILONIJI

PRAVOKOTNA PROJEKCIJA ODSEKA NORMALE NA ABSCISNO OS

ŠTEFAN PO FRANCOŠKO

SUŠEC

ALEŠ MOHORIČ

MESTO NA JUŽNI OBALI PORTUGALSKE

OSVEŽILNA PIVAČA Z OKUSOM POMARANČE

NATANČNO OMEJENO TRAJANJE

SVETLOBA SIGNALNA NAPRAVA V PROMETU

JAPONSKI MOJSTER LESOREZA (KITAGAVA)

ETIOPSKA DENARNA ENOTA

IRS. IGRALLEC (LIAM)

AMERIŠKA IGRALKA (SHARON)

ŠUMEVEC IN SIČNIK

NAŠ ARHITEKT (EDVARD)

10

12

OZVEZDJE ZODIAKA

JEKLEN PREDAL ZA DENAR

GORA V SOSEŠČINI TRIGLAVA

9

6

11

13

2

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do 15. oktobra 2024, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli knjižno nagrado.



15

nadaljevanje
s strani

skoraj istočasno, da bi pripotovali hkrati do središča krožnice. Zato smo izbrali točko A nekoliko stran od središča na premici, ki gre skozi središče krožne poti in startno mesto ladje. Da dobimo izrazito interferenco bočnih valov, morajo le-ti priti do izbrane točke sočasno. Trenutno lega ladje podaja kot φ , pot, ki jo mora bočni val prepotovati do izbrane točke, pa je

$$\blacksquare \quad r_v = \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR \cos \varphi}, \quad (1)$$

kar hitro razberemo s slike in uporabimo Pitagorov izrek. Polmer krožne poti smo označili z R , oddaljenost točke A od središča krožnice pa z a . Val bo za to pot porabil čas:

$$\blacksquare \quad t_v = \frac{r}{c},$$

kjer je c hitrost valovanja. Na sliki vidimo dve bližnji legi ladje, denimo legi 1 in 2. V legi 1 ladja vzbudi valovanje, ki potuje k izbrani točki in jo doseže v času $t_{v,1}$. Za pot Δs od lege 1 do lege 2 potrebuje ladja čas Δt , ki je

$$\blacksquare \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{R\Delta\varphi}{v}$$

V legi 2 ladja spet vzbudi valovanje, a val ima odto krajšo pot do izbrane točke, zato jo doseže v krajšem času $t_{v,2}$. Razlika časov $t_{v,1}$ in $t_{v,2}$ mora biti enaka času Δt , če želimo sočasni prihod obeh valov do izbrane točke. Ta pogoj določa hitrost ladje na krožni poti:

$$\blacksquare \quad t_{v,1} - t_{v,2} = \Delta t = \frac{R\Delta\varphi}{v}.$$

Da pridemo do hitrosti ladje v iz te enačbe moramo izračunati $t_{v,1} - t_{v,2}$, to pa dobimo iz razlike poti $r_{v,1} - r_{v,2}$, ki ju opravita vala, saj velja:

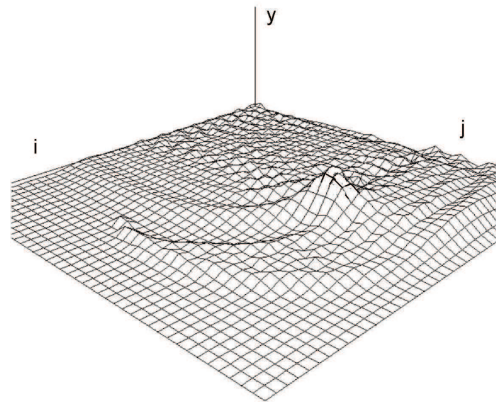
$$\blacksquare \quad t_{v,1} - t_{v,2} = \frac{r_{v,1} - r_{v,2}}{c}.$$

Za kvadrat poti smo zgoraj (enačba (1)) dobili:

$$\blacksquare \quad r_v^2 = R^2 + a^2 + 2aR \cos \varphi,$$

Izračunali bomo razliko kvadratov poti, kar je preprosteje, saj velja

$$\blacksquare \quad r_{v,1}^2 - r_{v,2}^2 = (r_{v,1} - r_{v,2})(r_{v,1} + r_{v,2}) \approx 2r_v(r_{v,1} - r_{v,2}). \quad (2)$$



SLIKA 6.

Valovi pri vožnji ladje v krogu s predpisano hitrostjo. Po polovici poti je ladja tangencialno pospešila, njeni bočni valovi ne prispevajo več k interferenčnemu maksimumu.

Z r_v smo označili srednjo vrednost med $r_{v,1}$ in $r_{v,2}$. Razlika kvadratov poti je:

$$\blacksquare \quad r_{v,1}^2 - r_{v,2}^2 = 2aR(\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)). \quad (3)$$

Račun se bo poenostavil za majhne $\Delta\varphi$. Spomniti se moramo adicijskega izreka za funkcijo $\cos$ in dejstva, da je sinus majhnega kot kar enak kotu (merjenem v radianih).

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} \cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi) &= \cos \varphi - (\cos \varphi \cos \Delta\varphi - \sin \varphi \sin \Delta\varphi) \\ &\approx \sin \varphi \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Pri majhnih $\Delta\varphi$ lahko namreč privzamemo $\cos \Delta\varphi \approx 1$ in $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Iz enačb (2) in (3) sledi

$$\blacksquare \quad 2r_v(r_{v,1} - r_{v,2}) = 2aR \sin \varphi \Delta\varphi.$$

Za razliko časov $t_{v,1}$ in $t_{v,2}$ smo končno dobili

$$\blacksquare \quad t_{v,1} - t_{v,2} = \frac{Ra \sin \varphi}{r_v c} \Delta\varphi.$$

Hitrost ladje se mora spreminjati takole:

$$\blacksquare \quad v = \frac{c\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra \cos \varphi}}{a \sin \varphi},$$

Na začetku poti mora biti hitrost zelo velika, ker sta poti valov iz 1 in 2 do A skoraj enaki. Start zato

premaknemo nekoliko naprej po krožnici, prav tako ladja ne more voziti dovolj hitro pri kotu blizu π iz enakega razloga. Na sliki 6 je prikazano valovanje za ladjo, ki se giblje na dobljeni način.

Po kakšnem tiru pa naj vozi ladja s konstantno hitrostjo? To pot bomo postavili izhodišče v točko A, kjer naj se valovanje zbere. Kot φ je sedaj argument, od katerega je odvisna razdalja ladje od točke A. Iz slike 7 razberemo, da velja

$$\Delta s^2 = (\Delta r)^2 + (r\Delta\varphi)^2.$$

Iz tega po deljenju obeh strani z $(\Delta r)^2$ in korenjenju takoj sledi:

$$\Delta s = \Delta r \sqrt{1 + \left(\frac{r\Delta\varphi}{\Delta r}\right)^2}.$$

Pogoj za sočasnost vzbujenih valov v točki A je slej kot prej:

$$\frac{\Delta r}{c} = \frac{\Delta s}{v},$$

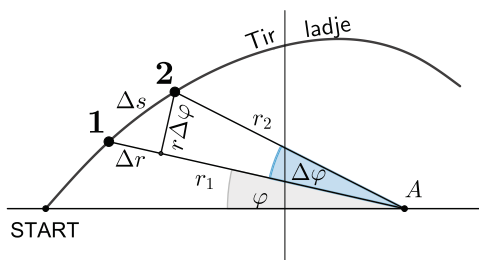
le da se sedaj hitrost v ne spreminja. Iz tega pogoja sledi;

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 + \left(\frac{r\Delta\varphi}{\Delta r}\right)^2.$$

Končno imamo:

$$\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}} = \alpha.$$

Relativna sprememba $\frac{\Delta r}{r}$ je sorazmerna s spremembo kota $\Delta\varphi$. Zaporedno povečevanje kota za $\Delta\varphi$



SLIKA 7.

Razmere pri gibanju ladje s konstantno hitrostjo – skica ob izpeljavi

zmanjšuje radij v geometrijskem zaporedju. Naj omenimo, da je v takem primeru, ko se koti $\Delta\varphi$ manjšajo proti nič, radij r povezan s kotom φ takole:

$$r = r_0 e^{-\alpha\varphi}.$$

Te zveze pri računanju sicer ne bomo uporabili. Potrebujemo še zvezo med časom in kotom. Ker velja

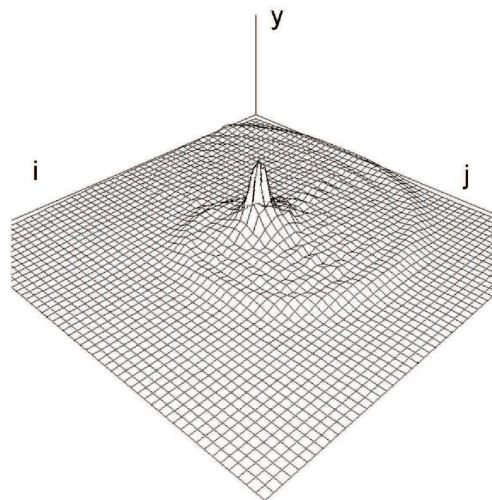
$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v},$$

dobimo to zvezo, in sicer kot:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{r} \sqrt{v^2 - c^2}.$$

Hitrost ladje v mora biti večja od hitrosti valovanja c .

Sedaj imamo vse povezave, ki omogočijo računanje tira ladje. Na sliki 8 je prikazano valovanje, ko se ladja giblje s konstantno hitrostjo po predpisanem tiru.



SLIKA 8.

Valovi pri vožnji ladje s konstantno hitrostjo po predpisanem tiru. K interferenčnemu vrhu prispevajo vsi bočni valovi ladje, vrh je zato še posebej izrazit.

× × ×

Pojav Sončevega haloja

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ Vsakdo med nami je že nič kolikokrat na nebu opazoval mavrico in se vsakič znova predal očarljivosti tega čudovitega naravnega pojava. Zato ne preseneča, da je mavrica v preteklosti navdihovala različne kulture in da nanjo naletimo v pravljicah, mitih in legendah.

A čeravno mavrica ne izhaja iz kotla zlatnikov v temnem gozdu in čeravno današnjemu sleherniku pomeni vsekaj drugega kot most med Zemljo in onstranstvom, ostaja zanimanja vreden pojav. Mavrica nastane, ko skozi deževno oblačje v ozračju posije Sonce. Opazujemo jo lahko, če smo s hrbtom obrnjeni proti Soncu.

Mavrica pa je samo najprepoznavnejša predstavnica družine optičnih pojavov, ki jih lahko opazujemo v našem ozračju. Nekatere med njimi lahko opazujemo še pogosteje. V članku se bomo posvetili pojavu Sončevega haloja. Dotaknili se bomo še nekaterih drugih optičnih pojavov v ozračju, ki pogosto spremljajo pojav Sončevega haloja, denimo sosonca, tangencialni loki in Sončevi stebri.

1. Sončev halo

Sončev halo je videti kot svetel obroč okoli Sonca (Slika 1). Pojav opazimo, ko visoki prosojni in mrzli oblaki (cirusi) zastrejo Sonce. Take oblake sestavljajo ledeni kristalčki. Veliki so od nekaj stotink do nekaj desetink milimetra in imajo obliko pravilne šeststrane prizme. Pojav nastane zaradi loma Sončeve svetlobe na teh kristalčkih.

Med vsemi haloji je najpogostejši in najizrazitejši



SLIKA 1.

Sončev halo s polmerom 22° lahko opazimo, ko se visoki oblaki razprostrejo preko Sonca. Vir fotografije: [2].

halo s polmerom 22 stopinj, ki mu pravimo tudi **mali halo**. Ta nastane pri prehodu svetlobe skozi stranske ploskve kristalčkov (Slika 2). Zaradi dvakratnega loma svetlobe na površini kristalčka (ob vstopu vanj in izstopu iz njega) se smer potovanja svetlobe spremeni. Pravimo, da se žarek svetlobe odkloni. Odklon svetlobe opišemo s kotom med vstopnim in izstopnim žarkom, ki mu pravimo **odklonski kot**. V članku bomo odklonski kot označili z δ .

Za prizmo je značilno, da je odklonski kot najmanjši takrat, ko je prehod žarka skozi simetričen. V tem primeru je lomljeni žarek v kristalu vzporeden s stranico šestkotnika (Slika 2). Če kristal zavrtimo za nekaj stopinj v eno ali drugo smer glede na smer žarka z najmanjšim odklonskim kotom, se smer izstopajočega žarka le malo spremeni.

Ko svetloba pada na kristalčke, ki so v zraku sicer usmerjeni naključno, se halo pojavi v smeri, kamor se lomi največ svetlobe. Premislimo lahko torej, da mora biti najmanjši odklonski kot enak ravno 22° . V naslednjem razdelku bomo ta rezultat podkrepili še z računsko izpeljavo.

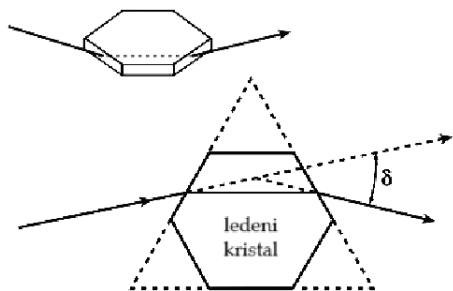
2. Izračun polmera haloja

Izračunajmo polmer malega Sončevega haloja. Pri izračunu bomo vzeli, da je lomni količnik ledu za vidno svetlobo približno $n = 1,31$, in upoštevali, da je lomni količnik zraka enak $n_0 = 1$.

Kot smo že omenili, mali halo nastane, ko je odklonski kot δ žarkov svetlobe na kristalčkih v obliki pravilne šeststrane prizme kar najmanjši. V tem primeru sta vpadni kot pri vstopu v prizmo in lomni kot pri izstopu iz nje enaka, kar pomeni, da mora biti žarek svetlobe v kristalu vzporeden s stranico šestkotnika.

Pri izpeljavi si pomagamo s skico na Sliki 3. Na njej sta z α in β označena vpadni in lomni kot pri prvem lomu. Zaradi že prej omenjene simetrije je lomljeni žarek vzporeden z osnovno in eno stransko ploskvijo prizme, zato je vpadni kot pri drugem lomu enak kar β , lomni kot pa α .

Podaljšajmo dve stranici šestkotnika, kot je to prikazano na skici. Ker je šestkotnik pravilen, se črtkani premici sekata pod kotom $\gamma = 60^\circ$. S tem premislimo, da odklon svetlobe na pravilni šeststrani prizmi dejansko ni prav nič drugačen od odklona na pravilni tristrani prizmi.



SLIKA 2.

Sončev halo nastane zaradi prehoda svetlobe skozi ledene kristalčke v obliki pravilne šeststrane prizme, na katerih se zaradi dvakratnega loma svetlobe žarki svetlobe odklonijo za kot δ .

S skice razberemo, da velja $\beta + \beta = \gamma$. Pri prvem (levem) lomu se žarek odkloni za kot $\alpha - \beta$, pri drugem lomu pa ponovno za kot $\alpha - \beta$. To pomeni, da je skupni odklonski kot δ enak

$$\delta = 2\alpha - 2\beta = 2\alpha - \gamma.$$

Iz znanega podatka o lomnem količniku ledu za vidno svetlobo lahko s pomočjo s lomnega zakona izračunamo kot α . Pri tem upoštevamo, da je $\beta = \gamma/2 = 30^\circ$ in da je lomni količnik zraka $n_0 = 1$. Velja

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{n_0} = n, \quad \sin \alpha = n \sin \beta,$$

iz česar izračunamo $\alpha = 40,9^\circ$. Od tod hitro določimo še številčno vrednost odklonskega kota

$$\delta = 2\alpha - \gamma \simeq 22^\circ.$$

S tem smo se prepričali, da je polmer krožca najmanjšega in najizrazitejšega haloja res 22° .

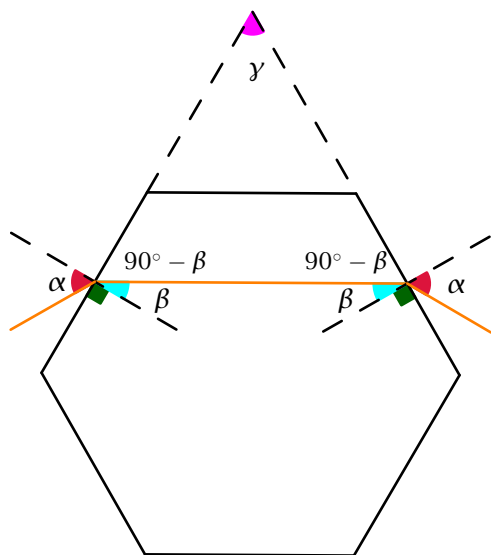
3. Sosonce in tangencialni lok

Za nastanek 22-stopinjskega haloja morajo biti ledeni kristalčki na nebu usmerjeni naključno v vseh možnih smereh. V vsakem delu haloja morajo namreč biti kristalčki usmerjeni tako, da lomijo svetlobo do našega očesa. Če imajo kristali obliko šestkotnih ledenih ploščic, najraje padajo v legi, v kateri sta osnovni ploskvi približno vodoravni – podobno kot padanje listja. Zaradi tega 22-stopinjski halo ni enako izrazit v vseh smereh.

Do najprikladnejšega loma pride na ledenih ploščicah na območju haloja, ki se nahajajo neposredno levo oziroma desno od Sonca. Na teh območjih haloja nastaneta okrogli lisi, ki sta svetlejši od preostalih delov haloja (Slika 4). Vsaka od lis je videti kot manjše Sonce, zato se je za pojav uveljavilo naravnost prikupno ime – **sosonce**. Pojav imenujemo tudi **parhelij** ali **pasonce**. Bralko in bralca naj v isti sapi opozorimo, da besede *parhelij* nikakor ne smemo zamenjati z na videz sorodno besedo *perihelij*. Perihelij je namreč točka tira telesa, ki kroži okoli Sonca, v kateri je to telo Soncu najbližje.

Če kristalčki niso ploščate šestkotne oblike, temveč stebričaste paličice, v ozračju prav tako zasedejo svoj priljubljeni položaj – v tem primeru je simetrijska os kristala približno v vodoravni legi, kar spominja na padanje travnate bilke. Pri takšni usmerjenosti kristalčkov se lomljena svetloba zbira predvsem v zgornjem oziroma spodnjem delu obroča haloja. Pojav vidimo v obliki loka, ki se dotika haloja, zato mu pravimo **zgornji** oziroma **spodnji tangencialni lok**. Oblika tangencialnega loka je odvisna od višine Sonca nad obzorjem.





SLIKA 3.

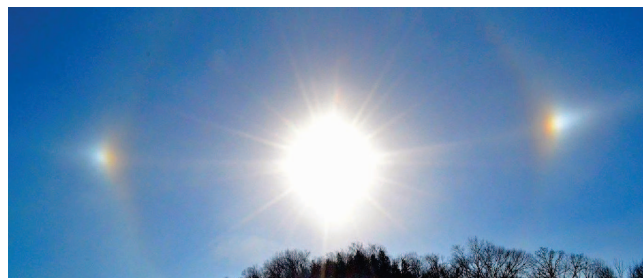
Prerez značilnega ledenega kristalčka v obliki pravilne šeststrane prizme, ki botruje nastanku haloja. Zaradi simetrije sta kota ob vstopu in izstopu iz kristala enaka (α), prav tako pa tudi lomni kot pri lomu na levi stranici in vpadni kot pri lomu na desni stranici (β). Prizma je pravilna šeststrana, zato je kot med stranicama, na katerih se žarek lomi, enak $\gamma = 60^\circ$.

4. Mavrične barve haloja

Pri opazovanju sosonca ne moremo zgrešiti **mavričnih barv**, ki so sicer značilne tudi za halo, vendar so pri sosoncu veliko izrazitejše. Del sosonca, ki je bližje Soncu, je rdečkast, medtem ko je od Sonca bolj oddaljeni del modrikast (Slika 4). Prav tako je rdeče obarvan notranji kolobar haloja, zunanji kolobar pa modro, zato pojav marsikoga spominja na mavrico. K temu gre pridati zanimivo dejstvo, da je pojav Sončevega haloja veliko pogostejši od mavrice.

Razlog za obarvanje je preprost. Kot smo že pojasnili, sta halo in sosonci posledica dvakratnega loma svetlobe na ledenih kristalih v obliki pravilne šeststrane prizme. Ker je lomni količnik odvisen od valovne dolžine svetlobe, tako kot pri običajni prizmi pride do pojava **razklona svetlobe**, kar pomeni, da se svetloba različnih barv odkloni pod rahlo različnimi koti.

Ker je lomni količnik za rdečo svetlobo manjši od



SLIKA 4.

Fotografija Sončevega haloja z madžarskega observatorija Pisz-késettő. Levo in desno od Sonca opazimo dve izraziti sosonci. V sosoncu lahko opazimo mavrične barve; del sosonca, ki je bližje Soncu, je rdečkast, oddaljeni del pa modre barve. Vir fotografije: osebni arhiv.

lomnega količnika za modro svetlobo, je lomni kot rdeče svetlobe pri prvem lomu večji od lomnega kota modre svetlobe. Sledi, da je vpadni kot rdeče svetlobe pri drugem lomu manjši kakor vpadni kot modre svetlobe, zato je tudi lomni kot rdeče svetlobe ob drugem lomu manjši kakor lomni kot modre svetlobe. To pomeni, da je odklonski kot za rdečo svetlobo manjši kot za modro svetlobo, zato je rdeče obarvan predel sosonca bližje Soncu kot modrikasti.

5. Drugi haloji

Poudarili smo, da je 22-stopinjski halo najizrazitejši, kar pa ne pomeni, da ni edini, ki ga lahko opazujemo. Omenimo naj **halo s polmerom 46 stopinj**, ki ga imenujemo tudi **veliki halo**. Ta je šibkejši od 22-stopinjskega haloja, zato ga je težje opaziti. Izjemno redek je **9-stopinjski halo**, prav tako so redki tudi haloji eliptičnih oblik.

Podobno kot mali halo tudi veliki halo nastane zaradi loma svetlobe na kristalčkih v ozračju, vendar s pomembno razliko. Medtem ko mali halo nastane pri prehodu svetlobe skozi dve stranski ploskvi prizme, veliki halo nastane pri prehodu svetlobe skozi eno od stranskih ploskev in osnovno ploskvijo kristalčka. Veliki halo je skoraj nemogoče zasačiti v celoti, saj se razteza čez 92° stopinj veliko območje na nebesni sferi – imeti bi morali veliko srečo, da bi naleteli na primerno redko in enakomerno oblačno kopreno, ki bi omogočala vidnost takšnega haloja.


SLIKA 5.

Fotografija, na kateri je Sonce zasenčeno, je bila posneta v bližini raziskovalne postaje na Zemljinem južnem polu. S Sonca se v navpični smeri razteza Sončev steber. Sonce in sosonce povezuje svetel obsončni obroč. Vir fotografije: [4].

6. Drugi pojavi

Svetloba se na ploskvah ledenih kristalčkov ne le lomi, temveč tudi odbija. Omenimo še dva pojava, ki nastaneta zaradi odboja svetlobe. **Sončev steber** opazimo kot svetel steber v navpičnici skozi Sonce.


SLIKA 6.

Pojav 22-stopinjskega haloja lahko opazujemo tudi pri Luni. Fotografijo je bila posneta na ameriškem Narodnem observatoriju Kitt Peak. Vir fotografije: [2].

Svetloba se odbija od osnovnih ploskvic ploščkov, ki padajo približno vodoravno usmerjeni. Pojav opazimo pozimi ob nizkem Soncu. **Obsončni obroč** nastane zaradi odboja svetlobe od ploskvic kristalčkov, ki so v taki legi, da se obnašajo kot pokončna zrcalca. Pojav vidimo kot svetlo vodoravno črto na višini Sonca nad obzorjem. Čudovita primerka Sončevega stebra in obsončnega obroča prikazuje Slika 5.

7. Zaključek

Članka ne smemo zaključiti, ne da bi omenili, da se halo iz enakih razlogov pojavi tudi okoli Lune. Tudi v mesečini lahko opazimo 22-stopinjski halo, "soluni" in Lunin steber. Lunin halo prikazuje Slika 6. Ob dovolj hladnem vremenu lahko halo opazimo tudi ob uličnih svetilkah.

Sicer pa opisani haloji in spremljajoči pojavi na nebu nikakor niso izjemno redki. Slehernika bi presenetilo dejstvo, da je pogostost pojavljanja halojev večja kot za mavrice. Zlasti pozimi je vsaj nekaj dni v letu takih, da katerega od omenjenih pojavov opazimo, tako pri Soncu kot tudi pri Luni.

Literatura

- [1] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2007). *Fundamental astronomy, fifth edition*. Helsinki : Springer.
- [2] *Halo*, Wikipedija, dostopno na: [https://sl.wikipedia.org/wiki/Halo_\(optika\)](https://sl.wikipedia.org/wiki/Halo_(optika)), ogled 1. 8. 2024.
- [3] *Optični pojavi v atmosferi, Kvarkadabra*, dostopno na: <https://kvarkadabra.net/1994/06/optika-atmosfera/>, ogled 25. 7. 2024.
- [4] *Parhelic circle*, Wikipedija, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Parhelic_circle, ogled 1. 8. 2024.
- [5] *Parhelij*, Wikipedija, dostopno na: <https://sl.wikipedia.org/wiki/Parhelij>, ogled 1. 8. 2024.
- [6] *Sun dog*, Wikipedija, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Sun_dog, ogled 1. 8. 2024.

× × ×

Fonetični algoritmi 1. del – Soundex

↓↓↓

MLADEN BOROVIČ, JANI DUGONIK

→ Na področjih informacijskega poizvedovanja, spletnih iskalnikov in obdelave naravnega jezika imamo pogosto opravka z besedili. Algoritmi, pristopi in orodja, ki se pojavljajo na teh področjih, največkrat besedilo obdelajo in iz njega izluščijo pomen z namenom uporabe za spletno iskanje. V tem primeru se naš iskalni niz primerja z obstoječimi deli besedil in z izračunom podobnosti se vrne seznam najbolj ustreznih iskalnih zadetkov. Slednji so lahko besedila, deli besedil ali pa kar celi dokumenti. Podobnost med nizi znakov lahko izračunamo na več načinov. Uporabimo lahko na primer razdalje urejanja, med katere spadata Levenshteinova [7] in Jaro-Winklerjeva razdalja [9]. Obstaja pa tudi drug način primerjave, ki se osredotoča na fonetični zapis oziroma izgovarjavo niza znakov. V tem primeru govorimo o fonetičnih algoritmihi. Ti algoritmi nize znakov preoblikujejo v posebno obliko, ki predstavlja njihove fonetične lastnosti.

V tem prispevku bomo predstavili algoritem Soundex, ki spada med osnovne fonetične algoritme. Na primerih bomo pokazali delovanje algoritma, ki zajema predvsem preoblikovanje vhodnega niza v posebno obliko. Z algoritmi kot je Soundex lahko ugotavljamo podobnost med nizi znakov, ki imajo podobno izgovarjavo. Ker obstajajo tudi drugi, naprednejši fonetični algoritmi, jih bomo podrobneje predstavili v naslednjem delu prispevka.

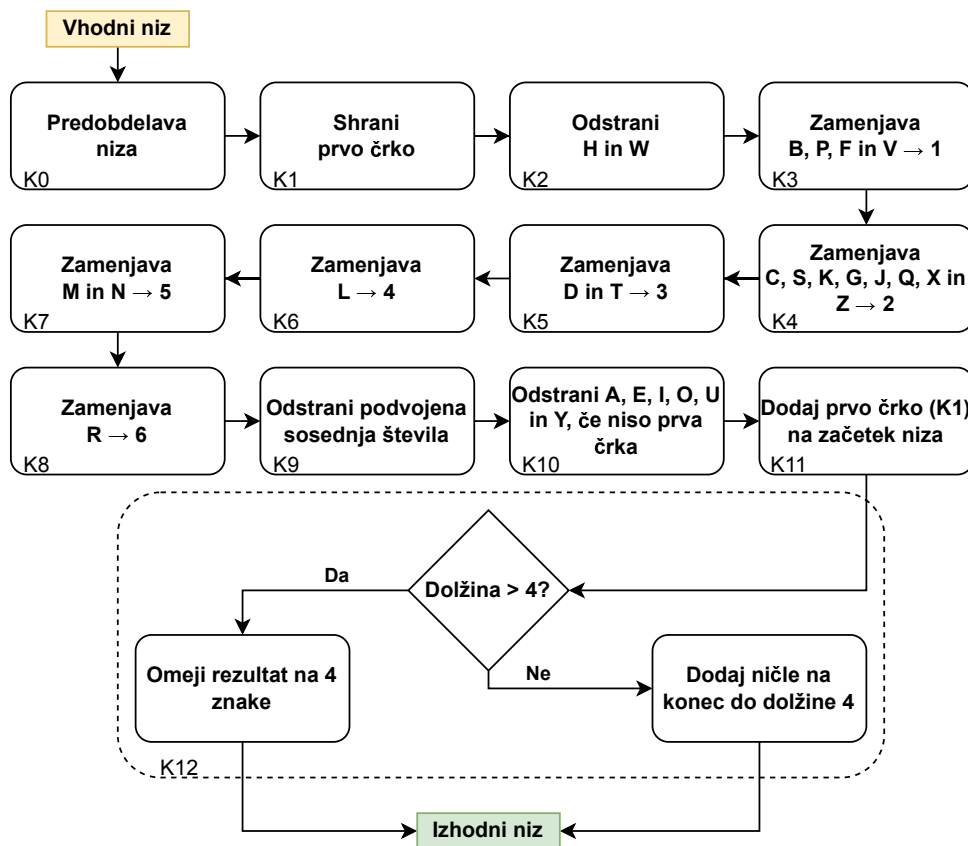
Fonetični algoritmi so v splošnem uporabni pri nalogah, kot so popravljanje pravopisnih napak, ujemanje imen, razpoznavanje govora, deduplikacija podatkov, strojno prevajanje in informacijsko poizvedovanje. Največkrat se uporabljajo z namenom izboljšave razumevanja besedila s pomočjo fonetičnih lastnosti, ki rešujejo problem različnih naglasov, različnega črkovanja in napak v besedilu.

Fonetični algoritmi

Začetki fonetičnih algoritmov segajo v leto 1918, ko sta Robert C. Russell in Margaret King Odell razvila in patentirala algoritem Soundex [3]. Algoritem so uporabljali v popisnem uradu ZDA za pohitritev obdelave popisnih podatkov. Pri tem je bil algoritem Soundex predvsem koristen pri gručenju priimkov, ki podobno zvenijo. Skozi leta so nastajale tudi izboljšave algoritma Soundex, ki so se večinoma osredotočale na specifične lastnosti priimkov v različnih jezikih. Tako so nastali novi algoritmi, kot so American Soundex [8] (1930, za ameriške priimke), FONEM [6] (1981, za francoske priimke) in Daitch-Mokotoff Soundex [4] (1985, za germanske in slovanske judovske priimke). Fonetični algoritmi se razvijajo še danes, do zdaj pa je nastalo že kar nekaj novih algoritmov. Med te spadajo Metaphone [5] (1990), Caverphone (2004) in BPM (2008 – Beider-Morse Phonetic Matching) [1]. Omenjeni algoritmi se od algoritma Soundex razlikujejo predvsem po načinu preoblikovanja vhodnega niza. Postopek preoblikovanja je najpogostejše prilagojen tako, da upošteva različne značilnosti priimkov v specifičnih jezikih. Ker je takšno preoblikovanje lahko zelo kompleksno, si za začetek pogledajmo delovanje osnovnega algoritma Soundex, kjer je postopek preoblikovanja zelo preprost.

Algoritem Soundex

Postopek izračuna rezultata algoritma Soundex je zelo preprost, saj gre za skupek zaporednih korakov, ki postopoma spremenijo vhodni niz. Rezultat algoritma je nov niz znakov v katerega so vključene fonetične lastnosti vhodnega niza. V osnovi gre za preprosta pravila, ki temeljijo na klasifikaciji črk abecede v fonetične skupine črk s podobno izgovorjavo. Na primer črke B, P, V in F se v več jezikih izgovorijo podobno in so zato del v iste fonetične skupine. Delovanje algoritma Soundex grafično ponazorimo s sliko 1. Prvi korak algoritma Soundex je korak K0, kjer se izvede predobdelava vhodnega



SLIKA 1.
Delovanje algoritma
Soundex.

niza. Predobdelava zajema pretvorbo vseh črk v velike tiskane črke. Po potrebi (recimo za slovenski jezik) lahko v tem koraku izvedemo transliteracijo šumnikov. To pomeni, da vsak šumnik zamenjamo z ustreznim sičnikom (Č → C, Š → S in Ž → Z). V naslednjem koraku (K1) shranimo prvo črko vhodnega niza in jo shranimo v izhodni niz. V tem koraku iz vhodnega niza odstranimo shranjeno prvo črko in preostale korake izvajamo s preostalimi znaki vhodnega niza. Sledi korak K2, v katerem odstranimo črki H in W. V koraku K3 izvedemo zamenjavo vseh pojavitev črk B, P, F in V s številom 1. Podobno v koraku K4 izvedemo zamenjavo vseh pojavitev črk C, S, K, G, J, Q, X in Z s številom 2. Korak K5 zamenja vse pojavitve črk D in T s številom 3. V koraku K6 zamenjamo vse pojavitve črke L s številom 4. Zatem v koraku K7 zamenjamo vse pojavitve črk M in N s številom 5. V koraku K8 izvedemo še zadnjo zamenjavo, kjer vse pojavitve črke R zamenjamo s številom 6. V koraku K9 odstranimo podvojena sosednja števila (npr. 1111 → 1). S korakom K10 odstranimo

vse samoglasnike in črko Y. V koraku K11 združimo shranjeno prvo črko vhodnega niza z nizom, ki smo ga dobili s koraki K2–K10. Zatem v koraku K12 preverimo dolžino združenega niza in izvedemo omejitve niza ali pa dodamo ničle.

Če je niz daljši od štirih znakov, potem ga omejimo na 4 znake. Če je niz krajši od štirih znakov, potem nizu dodajamo ničle na konec niza tako dolgo, da dosežemo dolžino 4. V primeru, ko je niz že dolg 4 znake, v tem koraku ne storimo nič in vrnemo izhodni niz kot rezultat. V spodnjem zgledu si pogledjmo delovanje algoritma Soundex nad različnimi vhodnimi nizi.

Zgled

Imejmo vhodna niza *Janez* in *Jonas*. Če izgovorimo obe imeni slišimo podobnost v izgovarjavi. Obe imeni se začneta s črko J in končata s sičnikom. Izvedimo algoritem Soundex nad obema nizoma in pogledjmo kakšen izhodni niz dobimo.



Niz	J	a	n	e	z		J	o	n	a	s
Korak											
K0	J	A	N	E	Z		J	O	N	A	S
K1	J	A	N	E	Z		J	O	N	A	S
K2		A	N	E	Z			O	N	A	S
K3		A	N	E	Z			O	N	A	S
K4		A	N	E	2			O	N	A	2
K5		A	N	E	2			O	N	A	2
K6		A	N	E	2			O	N	A	2
K7		A	5	E	2			O	5	A	2
K8		A	5	E	2			O	5	A	2
K9		A	5	E	2			O	5	A	2
K10			5		2				5		2
K11	J		5		2		J		5		2
K12	J520						J520				

TABELA 1.

Izvedba algoritma Soundex nad nizoma *Janez* in *Jonas*.

Za niz *Janez* v koraku K0 najprej pretvorimo vse črke v velike tiskane črke. V koraku K1 shranimo prvo črko (J), nad preostalimi črkami v nizu (ANEZ) pa začnemo izvajati preostale korake. Niz se v korakih K2 in K3 ne spremeni, v koraku K4 pa se črka Z pretvori v število 2. Trenutni niz (ANE2) se ne spremeni v korakih K5 in K6. V koraku K7 pride do pretvorbe črke N v število 5. Trenutni niz (A5E2) se v korakih K8 in K9 ne spremeni. V koraku K10 se odstranijo vsi samoglasniki in trenutni niz se spremeni v 52. V koraku K11 se doda shranjena prva črka J na začetek niza in trenutni niz se spremeni v J52. V koraku K12 ugotovimo, da je trenutni niz dolg 3 znake, zato na konec niza začnemo dodajati ničle, dokler ne dosežemo dolžine 4. Dodamo eno ničlo in končamo izvajanje algoritma. Rezultat izvedbe algoritma Soundex nad nizom *Janez* je niz J520. Izvedba algoritma Soundex nad nizom *Jonas* poteka na podoben način. Spremembe se zgodijo v koraku K4, kjer se črka S spremeni v število 2 in v koraku K7, kjer se črka N spremeni v število 5. Koraka K11 in K12 sta enaka kot pri izvedbi algoritma nad nizom *Janez*. Rezultat izvedbe algoritma Soundex nad nizom *Jonas*

je niz J520. Opazimo, da sta dobljena niza enaka kar lahko interpretiramo kot, da imata niza *Janez* in *Jonas* podobno izgovorjavo. Na tem mestu lahko dobljena niza primerjamo z eno izmed razdalj urejanja in izračunamo vrednost, ki predstavlja podobnost. Za primer vzemimo Levenshteinovo razdaljo in izračunajmo vrednost Levenshteinove podobnosti med nizoma *a* in *b*.

▪
$$sim_{lev}(a,b) = 1 - \frac{lev(a,b)}{|a| + |b|}$$
 (1)

V enačbi 1 je $lev(a,b)$ vrednost Levenshteinove razdalje med nizoma *a* in *b*, $|a|$ in $|b|$ pa sta dolžini nizov *a* in *b*. Vrednost Levenshteinove podobnosti je med 0 in 1, pri izračunu pa od 1 odštejemo vrednost normalizirane Levenshteinove razdalje. Levenshteinova razdalja med nizoma J520 (*Janez*) in J520 (*Jonas*) je torej 0, saj sta identična, vrednost Levenshteinove podobnosti pa je enaka 1 po izračunu:

▪
$$sim_{lev}(J520,J520) = 1 - \frac{0}{4 + 4} = 1 - 0 = \underline{1}$$
 (2)

Poglejmo še primer izvedbe algoritma Soundex nad priimkoma *Vindiš* in *Windisch* (slika 3). Tukaj sta izgovorjavi priimkov identični čeprav priimka uporabljata različne črke.

Za niz *Vindiš* v koraku K0 pretvorimo vse črke v velike tiskane črke in izvedemo transliteracijo šumnika Š v sičnik S. Nato v koraku K1 shranimo prvo črko (V), nad preostalimi črkami v nizu (INDIS) pa izvedemo preostale korake. Koraka K2 in K3 ne spremenita niza. V koraku K4 se črka S spremeni v število 2, zatem pa se v koraku K5 črka D spremeni v število 3. Dobimo trenutni niz IN3I2, ki se v koraku K6 ne spremeni. Korak K7 spremeni črko N v število 5 in dobimo trenutni niz I53I2. Koraka K8 in K9 ne spremenita niza. V koraku K10 se odstranijo vsi samoglasniki in dobimo trenutni niz 532. V koraku K11 se na začetek niza doda shranjena prva črka (V) in trenutni niz se spremeni v V532. Ker je trenutni niz že dolg 4 znake, se v koraku K12 ne zgodi nič. Rezultat algoritma Soundex je torej niz V532.

Izvedba algoritma Soundex za niz *Windisch* poteka podobno. V koraku K0 se vse črke pretvorijo v velike tiskane črke, v koraku K1 pa shranimo prvo črko (W). Nad preostankom niza (INDISCH) izvedemo naslednje korake. V koraku K2 odstranimo črko H,

Niz Korak	V	i	n	d	i	š		W	i	n	d	i	s	c	h
K0	V	I	N	D	I	S		W	I	N	D	I	S	C	H
K1	V	I	N	D	I	S		W	I	N	D	I	S	C	H
K2		I	N	D	I	S			I	N	D	I	S	C	
K3		I	N	D	I	S			I	N	D	I	S	C	
K4		I	N	D	I	2			I	N	D	I	2	2	
K5		I	N	3	I	2			I	N	3	I	2	2	
K6		I	N	3	I	2			I	N	3	I	2	2	
K7		I	5	3	I	2			I	5	3	I	2	2	
K8		I	5	3	I	2			I	5	3	I	2	2	
K9		I	5	3	I	2			I	5	3	I	2		
K10			5	3		2				5	3		2		
K11	V		5	3		2		W		5	3		2		
K12	V532							W532							

TABELA 2.
Izvedba algoritma Soundex nad nizoma
Vindiš in Windisch.

korak K3 pa ne spremeni niza. V koraku K4 se črki S in C pretvorita v število 2, v koraku K5 pa se črka D pretvori v število 3. Po izvedbi koraka K5 imamo torej niz IN3I22. Korak K6 ne spremeni niza, korak K7 pa spremeni črko N v število 5 in dobimo niz I53I22. Korak K8 ne spremeni niza, v koraku K9 pa se odstranijo vsa podvojena sosednja števila. Niz se tako spremeni v I53I2. V koraku K10 odstranimo vse samoglasnike in ostane nam niz 532. V koraku K11 dodamo shranjeno prvo črko (W) in dobimo niz W532. Ker je dobljen niz že dolg 4 znake, se v koraku K12 ne zgodi nič. Rezultat algoritma Soundex je niz W532. Preverimo še Levenshteinovo razdaljo in podobnost (enačba 1) za niza V532 (*Vindiš*) in W532 (*Windisch*). Levenshteinova razdalja je enaka 1, saj se niza razlikujeta v enem znaku (V in W). Levenshteinovo podobnost med omenjenima nizoma izračunamo kot:

▪
$$\begin{aligned} sim_{lev}(V532, W532) &= 1 - \frac{1}{4 + 4} = 1 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8} = \underline{0,875} \end{aligned} \tag{3}$$

Rezultat lahko interpretiramo kot, da sta priimka *Vindiš* in *Windisch* 87,5 % podobna po izgovarjavi. Ker je jasno, da sta izgovarjavi obeh priimkov identični, vidimo, da ima izvorni algoritem Soundex ne-

kaj pomanjkljivosti. Zaradi različnih izgovarjav enakih črk ali izgovarjav kombinacij različnih črk v tujih jezikih lahko pride do odstopanj, ki pa niso zaželeni. Odpravljanje takšnih pomanjkljivosti so motivacija za razvoj novih in izboljšanih fonetičnih algoritmov.

Zaključek

V tem prispevku smo predstavili fonetični algoritem Soundex in njegovo delovanje na primerih. Podrobneje smo si pogledali pristope in pravila za pretvorbo niza znakov v poseben zapis, ki upošteva fonetične lastnosti niza. Primer implementacije algoritma Soundex je na voljo na javno dostopnem repozitoriju GitHub [2].

Skozi predstavitev algoritma Soundex smo opazili nekaj pomanjkljivosti, ki jih rešujejo prilagoditve algoritma in novejši algoritmi. Danes poznamo več fonetičnih algoritmov, ki so specifični za določene jezike. Posledično so ti algoritmi tudi bistveno bolj kompleksni, predvsem pa imajo več pravil za pretvorbo niza znakov v poseben zapis. V naslednjem delu si bomo podrobneje pogledali enega izmed takšnih algoritmov. To je algoritem Caverphone 2.0, ki je se najboljše obnese nad angleškimi imeni in priimki.





Literatura

- [1] A. Beider, S. Morse, *Soundexing and Genealogy*, [ogled 15. 07. 2024], dostopno na <https://stevemorse.org/phonetics/bmpm.htm>.
- [2] M. Borovič, J. Dugonik, *Procesiranje naravnega jezika - GitHub*, [ogled 15. 07. 2024], dostopno na <https://github.com/procesiranje-naravnega-jezika/example-code/>.
- [3] C. J. Fall, C. Giraud-Carrier, "Searching trademark databases for verbal similarities", V: *World Patent Information* 27.2, 2005, str. 135-143, ISSN 0172-2190, DOI <https://doi.org/10.1016/j.wpi.2004.12.002>, dostopno na <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S017221900400153X>.
- [4] G. Mokotoff, *Soundexing and Genealogy*, [ogled 15. 07. 2024], dostopno na <https://www.avotaynu.com/soundex.htm>.
- [5] K. Atkinson, *Lawrence Philips' Metaphone Algorithm*, [ogled 15. 07. 2024], dostopno na <http://aspell.net/metaphone/>.
- [6] A. J. Lait, B. Randell, "An Assessment of Name Matching Algorithms", V: 1996, dostopno na <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17620314>.
- [7] V. I. Levenshtein, "Binary codes capable of correcting deletions, insertions and reversals", V: *Soviet Physics Doklady* 10.8 (feb. 1966). Doklady Akademii Nauk SSSR, V163 No4 845-848 1965, str. 707-710.
- [8] US National Archives, *The Soundex Indexing System*, [ogled 15. 07. 2024], dostopno na <https://www.archives.gov/research/census/soundex>.
- [9] W. E. Winkler, "String Comparator Metrics and Enhanced Decision Rules in the Fellegi-Sunter Model of Record Linkage." V: *Proceedings of the Section on Survey Research*, 1990, str. 354-359.

× × ×

MaRS 2024 - še en sijajen matematični poletni teden



IZAK JENKO

→ Letošnja izvedba matematičnega raziskovalnega srečanja MaRS 2024 je gostovala v ČŠOD Planinka med 14. in 20. julijem na Hočkem Pohorju. Posadki devetih študentov in mentorjev se je pridružilo 22 dijakov s celotne Slovenije. Glavnino dogajanja na MaRSu so kot običajno krojili projekti — individualne delavnice, kjer vsak od mentorjev skupini do treh dijakov predstavi izbrano matematično temo in skupaj z njimi napiše zaključni članek. Nino Cajnkar je vodil projekt o popolnih številih, Jan Genc o centralnem limitnem izreku, Katarina Grilj o različnih neskončnostih, Izak Jenko pa o naravnih številih, ki jih je mogoče zapisati kot vsoto dveh kvadratov. Hammingove kode je predstavil Juš Kocutar, s Kirchhoffovim izrekom so se dijaki ukvarjali pri Matiji Likarju, Tim Milanez je predelal Shorov algoritem, Kaja Rajter je orisala osnove seštevanja neskončnih vrst, Nejc Zajc pa je vodil posadko in poskrbel, da je dogajanje na MaRSu potekalo kot po maslu. Pester urnik so zapolnili še obiski večernih predavateljev. Dr. Jernej Činč je opisal osnove diskretnih dinamičnih sistemov, dr. Matija Pretnar nam je približal kvantno računalništvo, Andreja Čič pa je predstavila modeliranje življenjskih zavarovanj. Osrednjo tridnevno delavnico je letos prevzel dolgoletni znanec MaRSa in nekdanji mentor dr. Nino Bašić z Univerze na Primorskem, ki je razlagal o spektralni teoriji grafov, natančneje o Hücklovi teoriji. Poleg matematičnih vsebin smo se podali še na sredin dopoldanski pohod do Pohorske vzpenjače, organizirali tri družabne programe in teden sklenili s tradicionalno MaRSovsko pustolovščino in zaključnim MaR-


SLIKA 1.

Zaključna predstavitev MaRSovskih projektov

Sovskim piknikom, na katerem so se nam pridružili še nekateri bivši udeleženci tabora. Več o vsem tem dogajanju lahko preberete tudi na spletni strani mars.dmfa.si.

Devetnajsto različico tabora MaRS smo izvedli v sklopu Društva matematikov fizikov in astronomov Slovenije (DMFA) in sponzorstvom s strani Zavarovalne skupine Sava, Jane Street, Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, AF Labs, 3K IT in Dewesoft.


SLIKA 2.

Čokolada za najboljšo ekipo na MaRSovski pustolovščini

Izziv iz MaRSovske pustolovščine 2024

MaRSovska pustolovščina je tradicionalno šaljivo tekmovanje, ki se ga udeleženci tabora MaRS lotijo v skupinah po tri. Poleg orientacijskega dela so za udeležence pripravljeni še dodatni matematični in nematematični izzivi in uganke, s katerimi jih pričakajo mentorji, ki so posejani po trasi. Enega od izzivov, s katerim je dijake letos presenetil Matija, bomo delili z vami. Ime ti je Alfred in skupaj s še dvema prijateljema Barbaro in Cenetom ste soočeni z naslednjim problemom. Imejmo sedem kart iste barve, denimo karo, iz standardnega kupčka kart. Te si v pravilnem vrstnem redu sledijo As, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Karte nato Matija obrne (da se njihovih vrednosti več ne vidi) in jih naključno premeša ter postavi v vrsto. Naloga ekipe je določiti strategijo, s katero boste karte uredili v pravi vrstni red, če so dovoljene samo naslednje poteze:

1. Alfred obrne poljubni dve karti, ju pogleda in obrne nazaj,
2. Barbara izbere dve poljubni karti in ju zamenja (ne da bi ju pogledala),
3. Cene obrne poljubni dve karti, ju pogleda in obrne nazaj,
4. Alfred izbere dve poljubni karti in ju zamenja (ne da bi ju pogledal),
5. Barbara obrne poljubni dve karti, ju pogleda in obrne nazaj,
6. in tako dalje...

Strategijo si ekipa zamisli, preden Alfred naredi prvo potezo. Ko se izvajajo poteze, med udeleženci komunikacija ni dovoljena in med izvajanjem potez tista dva člana ekipe, ki nista na potezi, gledata stran. Ko najdeš pravilno strategijo, se poskusi domisliti še kakšne, pri tem pa poskusi uporabiti čim manj potez. Predloge za rešitve sprejemamo na naslov mars@dmfa.si, najboljše pa bomo nagradili na MaRSu 2025.

× × ×

www.presek.si

40. matematična olimpijada

ŠTEVILKA 3, LETNIK 27 (1999/2000)

↓↓↓

→ V tokratnem prispevku bomo podoživeli 40. matematično olimpijado, ki je leta 1999 potekala v Romuniji. Njegov avtor je dr. Matjaž Željko, tedaj vodja slovenske ekipe, ki je letos poleti za svoj 20-letni prispevek k informacijski podpori tekmovanj junija 2024 prejel nagrado Mednarodne zveze matematičnih tekmovanj WFNMC, za kar mu v uredništvu iskreno čestitamo. Kot član mednarodne tekmovalne

komisije je Slovenijo v Romuniji tedaj predstavljal sedANJI minister za vzgojo in izobraževanje dr. Darjo Felda, v slovenski ekipi pa so v času, ko še ni bilo posebnih dekliških olimpijad, posebej izstopala dekleta, ki so tisto leto osvojile več točk od fantov, največ dijakinja Irena Majcen, ki je leto kasneje osvojila tudi prvo srebrno medaljo za Slovenijo sploh.



Ekipa Slovenije na MMO v Romuniji. Od leve proti desni: Mojca Miklavc, Matjaž Željko (vodja ekipe), Jure Kališnik, Matjaž Urlep (bronasta medalja), Ajda Skarlovnik, Dušan Jan, Irena Majcen (bronasta medalja) in Darjo Felda (član mednarodne tekmovalne komisije).

158

Novice

40. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Gostiteljica jubilejne 40. matematične olimpiade je bila Romunija – država, ki je organizirala prvo matematično olimpiado leta 1959 in gostila mlade olimpijce tudi v letih 1960, 1969 in 1978. V slovenski ekipi so bili tekmovalci: Dušan Jan iz Gimnazije Tolmin, Jure Kališnik in Matjaž Urlep iz Šolskega centra Celje – Splošne in strokovne gimnazije Lava, Irena Majcen in Ajda Skarlovnik iz Gimnazije Bežigrad ter Mojca Miklavc iz Skofjske klasične gimnazije Ljubljana, član mednarodne tekmovalne komisije Darjo Felda s Fakultete za elektrotehniko ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko.

Ekipa je prispela v Bukarešto nekaj dni pred tekmovanjem, zato smo se lahko posvetili tudi spoznavanju kraljestva živali (ščurki). Najbolj pestro je bilo 16. in 17. julija, ko so se tekmovalci spoprijeli z nalogami, med katerimi sta bili tudi naslednji dve:

1. Določi vse končne ravninske množice S z vsaj tremi točkami, ki zadoščajo pogoju:
za poljubni točki A in B iz množice S je simetrala daljice AB hkrati tudi os simetrije množice S .
2. Določi vse take pare (n, p) pozitivnih celih števil, da je p praštevilo, $n \leq 2p$ in število $(p-1)^n + 1$ deljivo s številom n^{p-1} .

Po napornih tekmovalnih dnevih so si tekmovalci ogledali še nekaj lokalnih znamenitosti in se z avtobusi podali na celodnevni izlet na obrobje Transilvanije, kjer v mestu Bran stoji grad grofa Drakule. Na poti so se ustavili še v mestu Sinai, ki je gostilo matematično olimpiado leta 1960.

Logotip matematične olimpiade je običajno povezan z matematiko oziroma državo gostiteljico. Letos se v logotipu skrivajo štiri krožnice, ki jih srečamo v zanimivi in precej stari nalogi romunskega izvora.

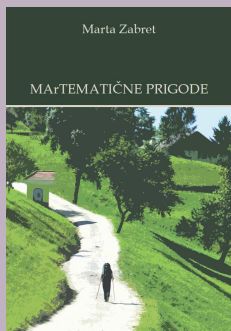


V ravnini ležijo tri krožnice enakih polmerov, ki se sekajo v eni točki. Dokaži, da ostala tri presečišča po dveh krožnic tvorijo trikotnik, katerega polmer očrtane krožnice je enak polmerom danih treh krožnic.

Ekipa Slovenije je tudi tokrat na olimpiadi uspešno sodelovala, saj sta Irena Majcen in Matjaž Urlep osvojila bronasti medalji. Poudariti velja, da je Irena Majcen prva dijakinja iz Slovenije, ki je na MMO prejela kakšno medaljo.

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

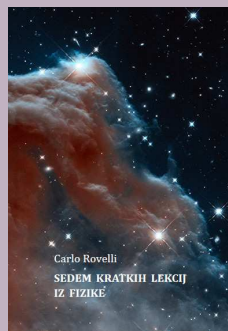


Marta Zabret:

**MATHEMATIČNE
PRIGODE**

148 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

**SEDEM KRATKIH LEKCIJ
IZ FIZIKE**

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



K	O	M	P	O	Z	I	T	U	M	P	O	I	S	S	O	N
O	B	E	R	S	T	D	O	R	F	E	S	K	O	R	T	A
D	R	G	E	T	O	M	A			S	K	A	L	N	I	K
R	E	M	A	R	M	O	N	T		T	A					
J	A	D	R	A	N	J	E	I		K	A	R	T	E	I	Z
A	N	N	E							O	L	A	R	I	J	A
Š	K	R	T		S	V	I	N	J	I	N	A				
P	R	E	H	I	T	E	V	Č	E	K	G	R	A	J	A	
I	Z	S	E	V	A	N	J	E	O	N	E					
L	N	R	A	N	Č	E	T	O	M	A	Ž	E	V	I	Č	
J	A	P	O	N	K	E	L	E	P	T	I	R	A	N	I	J
A	R	O	N		O	K	I	L	O	K	M	E	N	A	S	E
V	O	Z	E	L			D	E	R	Č	P	R	V	A	Č	I
V	O	L	A	R	E		N	E	D	R	J	E				
A	R	E	N	A			M	I	N	U	T	A	Ž	A		
D	I	M					D	I	A	D	O	H				
E	L	E	N				K	R	E	S		Z	E	N	I	N
C	O	N	A				S	Y	L	T		S	C	A	L	A

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 51/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka letnika 51 je **anekdota**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Stanko Gajšek iz Ljubljane, Karel Rankel iz Kranja, Jani Čede iz Petrovč, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×

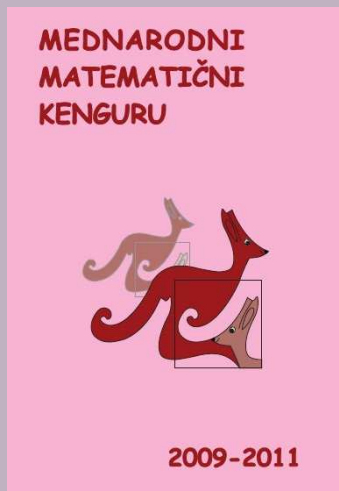
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.

