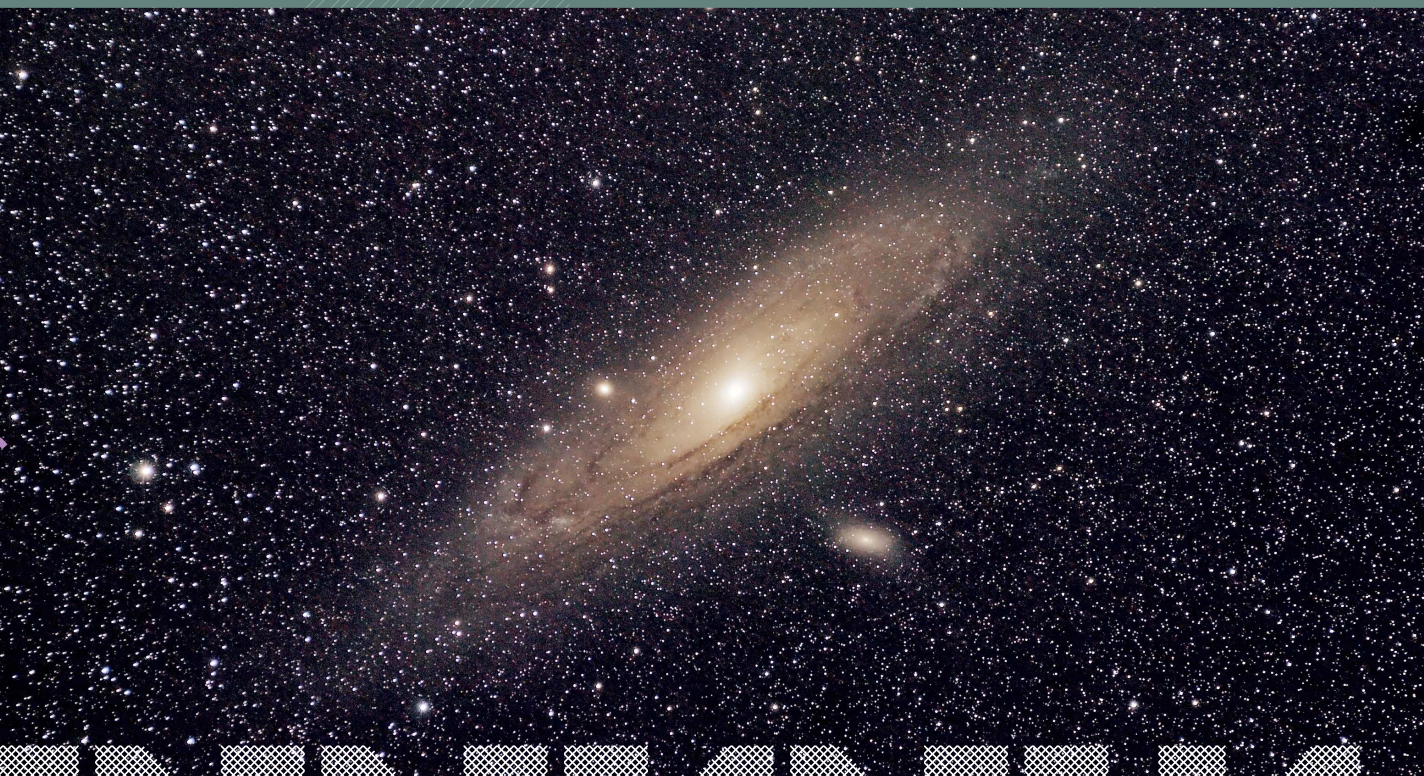
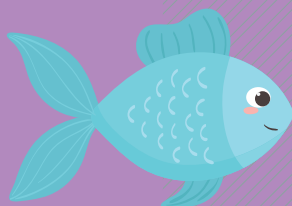




PRESEK LETNIK 51 (2023/2024) ŠTEVILKA 6



PRESEK



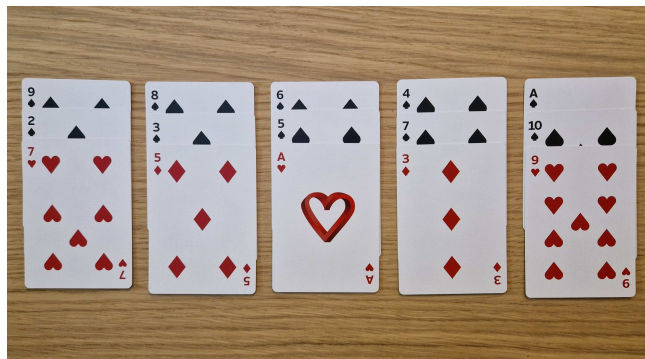
- DVAKRAT SKORAJ 2^n
- VALOVNI VOZLI NA KVADRATNI OPNI
- ASTRONOMSKA ANEKDOTA

ISSN 0351-6652



9 770351 665166

Trik s kartami številka 25



Poletne počitnice so idealen čas za kak nov trik s kartami, ki vsebuje ščepec matematike. Naslednjega smo opazili na YouTube kanalu Numberphile. Iz kompleta igralnih kart izberimo 10 kart od pikovega asa do pikove desetice. Posebej na listek napišemo še število 25 in ga shranimo v kuverto. Prostovoljcu ponudimo, da premeša ponujenih 10 kart in jih razdeli na dva dela po 5. Karte iz prvega dela položi v vrsto od največje do najmanjše vrednosti. Preostalih 5 kart pa položi nekoliko nižje na prejšnje karte v obratnem vrstnem redu od najmanjše do največje. Tako imamo pred seboj 5 parov kart. Za vsak par označimo razliko med številoma na karti z rdečo karto ustrezne vrednosti, nato seštejmo vrednosti na rdečih kartah. Presenečenje: dobili smo število z listka v kuverti!

Je rezultat res presenetljiv? Če razlage trika ne najdete sami, jo lahko poiščete nekje v reviji. Katero število pa bi dobili, če bi 10 kart nadomestili z 2024 lističi s števili od 1 do 2024, jih naključno razdelili v dva kupčka, jih z nasprotno ureditvijo razvrstili v pare in sešteli dobljene razlike?

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

www.presek.si



KOLOFON



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 51, šolsko leto 2023/2024, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2023/2024 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2024 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem viš-jih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo ošte-vilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (co-pyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsti-cami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu re-cenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, po-tem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo ob-javo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Trik s kartami številka 25

UVODNIK

- 4-6 Dežela Bistroumov
(Boštjan Kuzman)

MATEMATIKA

- 7-10 Dvakrat skoraj 2^n
(Terezija Krečič in Pija Kapš)

TEKMOVANJA

- 11-13 Celoletne priprave za mednarodna matematična tekmovanja v letu 2023/24
(Luka Horjak)

FIZIKA

- 14-15, 18-20 Valovni vozli na kvadratni opni
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 22-27 Astronomska anekdota
(Vid Kavčič)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 21 Veter, voda, jadranje in malo fizike
- 28 Rešitev nagradne križanke Presek 51/4
(Marko Bokalič)
- 29-31 Igra(n)je z matematiko ob Mednarodnem dnevu matematike
(Nežka Mramor Kosta in Jasna Prezelj)

SLIKA NA NASLOVNICI: Andromedina galaksija skozi gozd zvezd v naši Galaksiji. Fotografija: Andrej Guštin

Dežela Bistroumov



BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

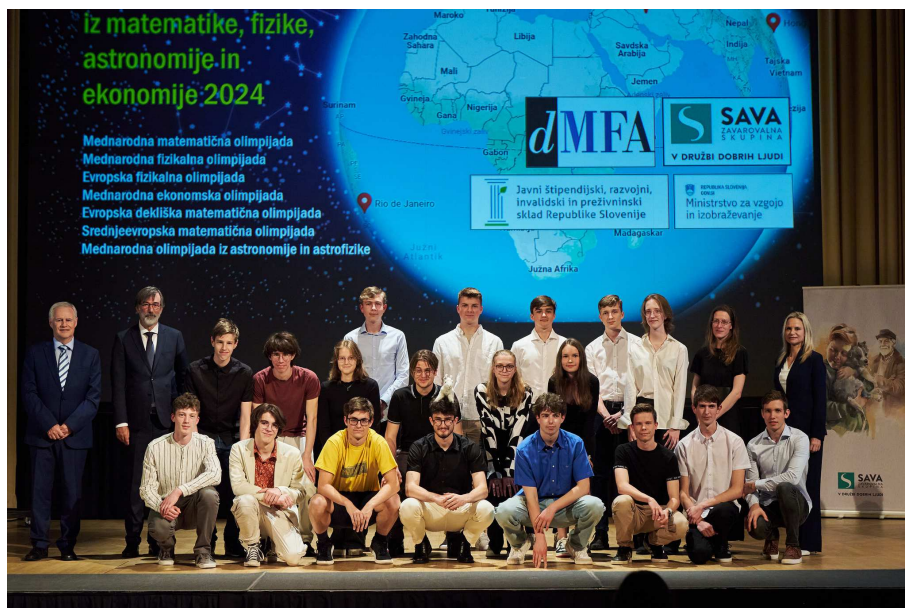
Tokratni uvodnik pišem poln vtisov dan po prireditvi Bistroumi – slavnostni podelitvi nagrad najboljšim na tekmovanjih iz znanja matematike, fizike in astronomije, zato mi, bralke in bralci, prosim ne zamerite, če je malo navijaški. V dneh, ko se ves svet čudi izjemnim uspehom kolesarja Pogačarja in košarkarja Dončiča iz majhne Slovenije, sem kot scenarist prireditve zbiral in pregledoval lanske novice o uspehih slovenskih dijakov in dijakinj na mednarodnih tekmovanjih iz znanja matematike, fizike in astronomije v zadnjem letu. Osupnil sem nad neverjetno bogato bero:

- Na 7. Evropski olimpijadi iz fizike junija 2024 v Hannovru, Nemčija, sta **Alexander Gaydukov** in **Peter Andolšek** osvojila zlati medalji, **Miha Perpar**, **Aljaž Erman** in **Enej Jauk** pa pohvale. Ob tem je **Alexander Gaydukov** prejel tudi posebno nagrado za najboljšo rešitev prve teoretične naloge.
- 64. Mednarodna matematična olimpijada je lani potekala v mestu Chiba na Japonskem. Od slovenske šesterice se je najbolje izkazal **Matija Skrt** z osvojeno bronasto medaljo, vsi preostali tekmovalci, **Erik Červek Roškarič**, **Katarina Grilj**, **Kaja Rajter**, **Hugo Trebše** in **Lenart Dolinar**, pa so



SLIKA 1.

Izjemna bera medalj slovenskih tekmovalcev v zadnjem letu dni.



SLIKA 2.

Člani slovenskih ekip za mednarodna tekmovanja v letu 2024 (foto J. Jocić)

osvojili pohvale.

- Na 53. Mednarodni fizikalni olimpijadi v Tokiu so slovenski dijaki dosegli zgodovinski uspeh, saj so prav vsi osvojili medalje: **Peter Andolšek** zlato, **Alexander Gaydukov** srebrno, **Žan Ambrožič**, **Miha Brvar** in **Samo Krejan** pa bronaste medalje.
- V Volosu v Grčiji so se zbrale ekipe, ki so sodelovale na 6. Mednarodni ekonomski olimpijadi.

Tudi tu so slovenski tekmovalci dosegli izjemen uspeh: zlato je osvojil **Jakob Grmek**, srebro **Špela Gačnik**, **Benjamin Gašperin** in **Žiga Groff**, bron pa **Živa Cvitkovič**. Slovenska ekipa je kot najbolje uvrščena evropska ekipa zasedla tudi odlično 6. mesto v skupni razvrstitvi vseh ekip in še boljše 3. mesto v skupnem seštevku točk iz finančne pismenosti.

- 17. Srednjeevropske matematične olimpijade v mestu Strečno na Slovaškem so se udeležili dijaki, ki se niso uvrstili v ekipo za MMO in še niso v zaključnem letniku srednje šole. **Luka Urbanc** je osvojil srebrno medaljo, **Patricia Király**, **Zara Barbarić**, **Nejc Sušnik** in **Žiga Oštir** pa pohvale.
- 15. Mednarodna astronomska olimpijada je potekala avgusta v mestu Katowice na Poljskem. Zlato slovenski dijak **Peter Andolšek** je osvojil absolutno prvo mesto in zmagal tudi v dveh od treh kategorij, v astronomskih opazovanjih in obdelavi astronomskih podatkov. Izkazali so se tudi drugi: **Žan Ambrožič** in **Miha Brvar** sta osvojila srebrno, **Žan Arsov** bronasto medaljo, **Marija Judež** pa pohvalo.
- Decembra je v Kolumbiji potekala 20. Mednarodna mladinska naravoslovna olimpijada. **Primož Markovič** je osvojil zlato odličje, **Andraž Čadež**, **Niko Habinc**, **Aleksander Jotanović** in **Izadora Kopač** so osvojili srebro, **Lea Hrvatin** pa bron. S



SLIKA 3.

Častna gostja prireditve Bistroumi 2024 je bila dr. Zala Lenarčič, nekdanja tekmovalka, danes pa izjemno uspešna znanstvenica na področju kvantne fizike (foto J. Jocić)



SLIKA 4.

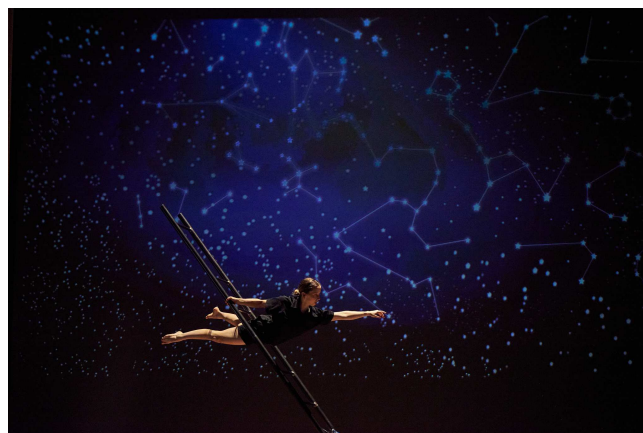
Izjava Petra Andolška v imenu letošnjih olimpijcev (foto J. Jocič)

6 medaljami je bila Slovenija tretja najuspešnejša izmed evropskih ekip.

- In nazadnje, aprila letos je bila v Gruziji že izvedena 13. Mednarodna dekliška matematična olimpijada, na kateri je **Ekaterina Chizhova** osvojila srebrno, **Nives Gošnjak**, **Patricia Király** in **Zara Barbarić** pa bronaste medalje.

V zadnjem letu dni torej 6 zlatih, 12 srebrnih in 10 bronastih medalj, pa še absolutni zmagovalci olimpijade v astronomiji (in to že drugi v 15-letni zgodovini olimpijade)! Zares osupljivo za tako majhno državo, v kateri nam zadnja leta hudo primanjkuje učiteljev in učiteljic matematike in fizike, toda očitno še vedno imamo šole, v katerih se mladi pri šolskih mentorjih in mentoricah lahko naučijo vseh potrebnih osnov. Prav tako imamo peščico entuziastov, ki kljub skromni podpori države izjemno kvalitetno dodatno delajo s tekmovalci in jih pripravijo na izzive mednarodnih tekmovanj. Med temi so bili v zadnjih letih gotovo fizika **Jure Bajc** in **Barbara Rovšek**, astronomi **Andrej Guštin**, **Dunja Fabjan**, **Andreja Gomboc**, matematiki **Gregor Dolinar**, **Aleš Toman**, **Tomaž Košir** in vrsta študentov, bivših tekmovalcev, od katerih bi izpostavil **Vida Kavčiča**, **Luko Horjaka** in **Jakoba Jurija Snoja**, vsem ostalim pa se bi opravičil, ker sem jih izpustil.

Ker smo tik pred volitvami in se bližajo poletne počitnice, raje ne bom na glas razmišljal, kaj vse bi



SLIKA 5.

Umetniška točka kolektiva Fabla na prireditvi Bistroumi 2024 (foto J. Jocič)



SLIKA 6.

Prireditve Bistroumi 2024 se je udeležilo več kot 150 prejemnikov nagrad in pohval letošnjih tekmovanj (foto J. Jocič)

lahko država z razmeroma skromnimi sredstvi še ponudila tako tekmovalcem in mentorjem kot tudi društvu DMFA Slovenije, ki vsa ta leta skrbi za tekmovanja in popularizacijo znanosti. Hvala vsem, ki podpirate mlade, pa tudi vsem, ki v času interneta še vedno prelistate tudi našo revijo. Ostanite še naprej z nami!

× × ×

Dvakrat skoraj 2^n



TEREZIJA KREČIČ IN PIJA KAPŠ

→ Bi znali nadaljevati zaporedje 2, 4, 8, ...? Če ste kot odgovor podali geometrijsko zaporedje potenc števila 2, to seveda ni edina rešitev. Rešitev je tudi zaporedje, kjer se razdalja med sosednjima členoma povečuje za 2 (2, 4, 8, 14, 22, 32, ...); po navljajoče se zaporedje 2, 4, 8, 2, 4, 8, 2, ...; naključno zaporedje 2, 4, 8, 15, -3, ...; in še bi lahko naštevati – v resnici je rešitev neskončno.

Res je, da se potence števila 2 pogosto pojavljajo pri številnih problemih, vendar nas lahko včasih prehitro sklepanje tudi zavede. Predstavili bomo dva problema, pri katerih nas nekaj začetnih členov hitro napelje na splošno formulo. Toda v enem primeru se sklepanje izkaže za pravilno, v drugem pa ne, zato moramo biti pri delanju zaključkov pozorni, da vedno preverimo, ali naše domneve držijo tudi na splošno.

1. Število potez za premik hanojskega stolpa

Začnimo z legendo: V nekem indijskem mestu stoji velik tempelj. Pod njegovo kupolo je bronasta plošča, na kateri stojijo tri diamantne igle. Na eno teh igel je bilo ob nastanku sveta položenih – od največjega na dnu do najmanjšega na vrhu – 64 obročev iz čistega zlata. Brahmani, menihi hindujskega božanstva Brahme, dan in noč neutrudno predstavljajo obroč z ene igle na drugo po naslednjih dveh pravilih: (1) **premakne se lahko po en obroč naenkrat** in (2) **večji obroč ne sme biti položen čez manjšega**. Ko bodo vsi obroči v celoti prestavljeni na tretjo iglo, bo po starodavnem izročilu nastopil konec sveta. Le kdaj se bo to zgodilo?

Problem je zelo znan in ste ga bralci verjetno že srečali ali pa ga celo imate v svoji škatli z igračami. To zanimivo matematično sestavljanke je leta 1883 izumil francoski matematik Édouard Lucas in jo poimenoval *hanojski stolpi*¹. Obstaja še več drugih poimenovanj, na primer *brahmanski stolpi* (po božanstvu iz legende). Ni pa znano, ali si je avtor sam izmislil legendo ali ga je le navdahnila.



SLIKA 1.

Radi bi izračunali, kdaj bi po legendi nastopil konec sveta. Recimo, da menihi za vsako potezo potrebujejo eno sekundo. Zdaj moramo izračunati še število potez za premik stolpa iz 64 obročev. Pa začnimo z manjšim številom obročev, ki ga označimo z n , in si oglejmo sliko 2:

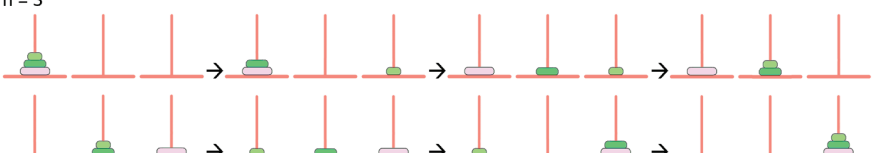
Pri $n = 3$ lahko že opazimo vzorec:

1. na srednjo palico premaknemo stolp iz vrhnjih dveh obročev (za kar potrebujemo število potez pri $n = 2$, torej tri),

¹Hanoj je glavno mesto Vitenama, blizu katerega dejansko obstaja starodavna razvalina nekega budističnega svetišča.





	število potez
n = 1 	1
n = 2 	3
n = 3 	7

SLIKA 2.
Najmanjše število potez za 1, 2 in 3 ploščice.

2. največji obroč premaknemo na tretjo palico (ena poteza)
3. spet premaknemo stolp iz manjših dveh obročev, tokrat na tretjo palico (zopet tri poteze za $n = 2$)

Skupaj res opravimo $3 + 1 + 3 = 7$ potez.

Zapišimo še vzorec z oznakami za splošni n . Naj bo S_n **najmanjše število potez, potrebnih za premik hanojskega stolpa iz n obročev**. Kot prej opazimo, da stolp iz n obročev premaknemo tako, da najprej vrhnji stolp iz $n - 1$ obročev premaknemo na srednjo palico, nato največji obroč na tretjo, čezenj pa zopet stolp iz srednje palice (gl. sliko 3).

Dobimo rekurzivno formulo $S_n = 2S_{n-1} + 1$ pri

čemer je $S_1 = 1$. Izrazimo še eksplicitno formulo:

■ $S_n = 2S_{n-1} + 1 =$

$= 2(2S_{n-2} + 1) + 1 = 2^2S_{n-2} + 2 + 1 =$

$= 2^2(2S_{n-3} + 1) + 2 + 1 =$

$= 2^3S_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 =$

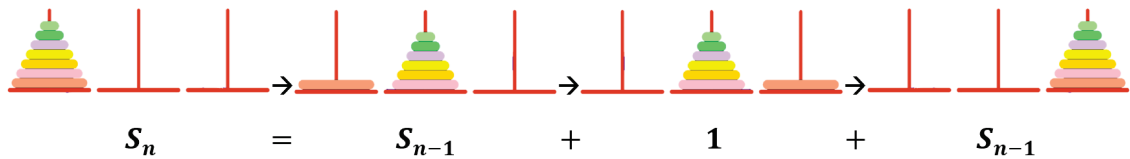
$= \dots =$

$= 2^{n-1}S_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1 =$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 =$

$= 2^n - 1$

Z dobljeno formulo sedaj izračun, koliko časa se premika 64 obročev (ena sekunda na premik), prepusimo bralcu. Za ovrednotenje rezultata dodajmo podatek, da je Zemlja stara približno 4,5 milijard



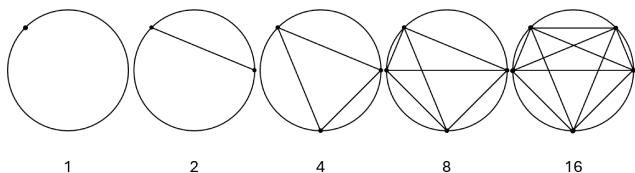
SLIKA 3.
Najmanjše število potez za n obročev.

let, vesolje pa 13,8 milijard let. Poleg tega ima naše Sonce še približno 5 milijarde let življenjske dobe.

Za konec še opozorilo: kljub lahkem izračunu najmanjšega števila potez pa samo premikanje pri večjem številu obročev ni enostavno in zahteva več koncentracije. Bralcu prepuščamo tudi premislek, na katero palico je treba postaviti najmanjši obroč, da bo končni stolp res stal na tretji palici.

2. Moserjev problem delitve kroga

Imejmo krožnico, na katero na poljubnem mestu postavimo točko. Krog je ostal cel, nerazdeljen. Na krožnico dodamo še eno točko ter jo povežemo s prejšnjo, kot je prikazano na spodnji sliki 4. Krog smo s tem razdelili na dva dela oziroma na dve območji. Dodamo še tretjo točko in ju povežemo s prejšnjima. Tako dobimo krog, ki je razdeljen na štiri območja. Postopno dodajamo točke in jih povezujemo z vsemi prejšnjimi. Zanima nas, koliko območij največ lahko dobimo, ko je na krožnici n točk. Ta problem iskanja števila območij v odvisnosti od števila točk na krožnici imenujemo tudi *Moserjev problem delitve kroga*. Poglejmo si, kaj se zgodi, ko dodamo še četrto in peto točko. Ko dodamo četrto točko, dobimo osem območij, ko dodamo peto točko pa 16 območij.

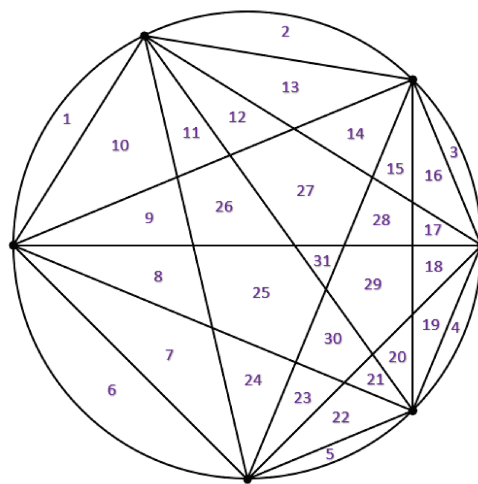


SLIKA 4.

Število območij pri delitvi kroga z 1, 2, 3, 4 oz. 5 točkami na krožnici.

Iz prvih petih primerov bi lahko sklepali, da je zaporednje števila območij, ki jih dobimo, če na krožnico dodajamo točke in jih povežemo s prejšnjimi, enako zaporedju z eksplisitno formulo $a_n = 2^{n-1}$. Preverimo dobljeno eksplisitno formulo še na primeru s šestimi točkami. Po formuli bi morali dobiti 32 območij, saj je $a_6 = 2^5 = 32$. Če se malo po-

trudimo in res dodamo šesto točko, jo povežemo z vsemi preostalimi in preštejemo dobljena območja, kot je prikazano na sliki 5, opazimo, da smo dobili le 31 območij. Očitno smo iz začetnih petih členov prehitro sklepali na lastnosti zaporedja.



SLIKA 5.

Primer s šestimi točkami.

Poskusimo sedaj poiskati pravilno eksplisitno formulo, ki bi nam povedala, koliko območij dobimo, ko imamo na krožnici razporejenih n točk. Na tem mestu moramo le opozoriti, da razporeditev točk na krožnici ni popolnoma poljubna. Neustrezna je vsaka razporeditev točk, ki privede do situacije, ko se tri ali več kot tri, daljice sekajo v isti točki. To se zgodi le v redkem primeru, ko so točke na krožnici razporejene preveč simetrično, kar lahko preprečimo z naključnim razporejanjem točk na krožnico.

Ker z naraščanjem n -ja čedalje težje razporejamo točke na krožnico in štejemo območja, bomo poskusili prešteti kaj drugega, kar nam bo morda pomagalo pri določanju števila območij. Na primerih, ki smo jih že narisali, preštejemo, koliko daljic smo narisali pri posameznem primeru ter v koliko presečiščih znotraj kroga se te daljice sekajo. Preštete vrednosti vpišemo v tabelo 1.

Morda bi daljice in presečišča znali prešteti tudi v





število točk	število daljic	število presečišč	število območij
1	0	0	1
2	1	0	2
3	3	0	4
4	6	1	8
5	10	5	16
6	15	15	31

TABELA 1.
Prvih šest primerov.

splošnem primeru, ko imamo na krožnici razporejenih n točk. Vsaka daljica določa natanko en par točk na krožnici in vsak par točk določa natanko eno daljico. Iz tega sledi, da je število daljic enako številu možnih parov točk, torej $\binom{n}{2}$. S podobnim premislekom lahko pridemo tudi do števila presečišč. Število presečišč je enako številu možnih četveric točk med n točkami, torej $\binom{n}{4}$.

Razmislimo, kako bi lahko s pomočjo števila daljic in presečišč prešteli vsa območja v primeru z n točkami. Na začetku je krog sestavljen iz enega območja, ko narišemo prvo daljico, se krog razdeli na dve novi območji. Vsaka nova daljica, ki jo narišemo, razdeli eno staro območje na dve novi območji. Če nova daljica seka še kakšno drugo že narisano daljico, z vsakim takim presekom seka še eno dodatno območje, ki ga razdeli na dve novi območji. Začnemo torej z enim območjem in z vsako daljico, ki jo narišemo, dobimo novo območje. Prav tako z vsakim presečiščem dobimo novo območje. Lahko zaključimo, da je skupno število območij enako

▪ $1 + \text{št. daljic} + \text{št. presečišč} =$

$$= 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} =$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} =$$

$$= \dots =$$

$$= \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

Namesto pričakovane eksponentne funkcije smo torej dobili polinom četrte stopnje.

Moserjev problem delitve kroga je samo eden od primerov, ki nas uči, da se pri zaporedjih ne smemo zanašati le na lastnosti začetnih členov in iz njih sklepati na lastnosti celega zaporedja. Pomembno je, da ne delamo prehitrih zaključkov in se ne zadovoljimo z opazovanjem lastnosti na večjem številu začetnih členov. Če želimo z gotovostjo trditi, da za zaporedje velja neka lastnost, je nujno, da jo dokažemo.

Prispevek je nastal pri predmetu Matematika za nadarjene za študente programa Pedagoška matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

[2] https://www.puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03_hanoi.htm

[3] C. Petr, *Posplošitev klasičnega problema hanojskih stolpov*, magistrsko delo, IZUM, Maribor, 1998. Dostopno na: <http://cirilpetr.com/papers/magisterij.pdf>

[4] G. Sanderson, *Moser's circle problem*, [ogled 25. 1. 2024] dostopno na <https://www.3blue1brown.com/lessons/moser-reboot>.



Celoletne priprave za mednarodna matematična tekmovanja v letu 2023/24



LUKA HORJAK

→ V letošnjem šolskem letu se slovenski dijaki in dijakinje v organizaciji DMFA Slovenije udeležujejo treh mednarodnih matematičnih tekmovanj – to so Mednarodna matematična olimpijada (MMO), Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO) in Srednjeevropska matematična olimpijada (SMO). Proces za uvrstitev v katerokoli izmed teh ekip je zelo zahteven in poteka že od samega začetka šolskega leta. Za uspešen nastop na takem tekmovanju namreč ne zadošča samo znanje matematike, ki ga pridobimo v šoli. Naloge na olimpijadah so zahtevnejše, od tekmovalcev zahtevajo veliko mero iznajdljivosti, poleg tega pa tudi znanje izrekov in strategij, ki niso del učnega načrta za gimnazije. Vsako leto tako izvajamo celoletne priprave, ki služijo tako dopolnitvi znanja tekmovalcev kot tudi grajenju intuicije za reševanje zapletenih problemov.

Tako kot v prejšnjih letih smo priprave tudi letos v glavnem vodili študenti, ki smo tudi sami v svojih srednješolskih letih sodelovali na zgoraj omenjenih tekmovanjih. Priprave so večinoma potekale v živo na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, zainteresirani pa so lahko predavanja spremljali tudi na daljavo preko spleta. Teme 4-urnih predavanj na osnovni oziroma višji ravni (označene z *) so bile naslednje:

- KOMBINATORIKA (13.10.2023): *Preštevanja, načelo vključitev in izključitev, Dirichletov princip* (Jaka



SLIKA 1.

Med reševanjem 3. izbirnega testa na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

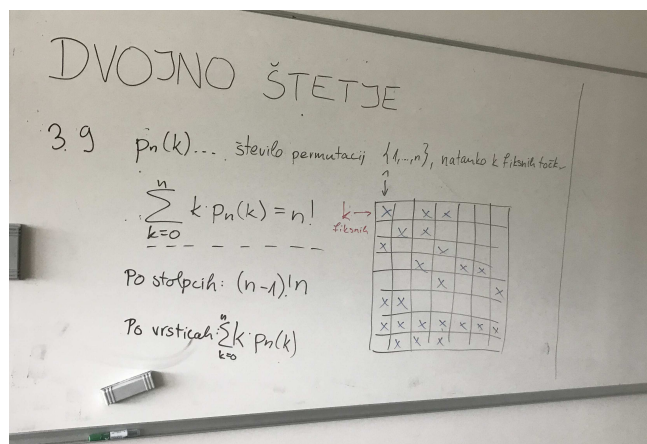
- Vrhovnik), **Teorija grafov* (Luka Horjak)
- GEOMETRIJA (27.10.2023): *Usmerjeni koti* (Kaja Rajter), **Inverzija* (Matija Skrt)
- TEORIJA ŠTEVIL (10.11.2023): *Modularna aritmetika* (Katarina Grilj), **Lema o dvigu eksponenta* (Hugo Trebše)
- INDUKCIJA / GEOMETRIJA (24.11.2023): *Indukcija* (Luka Peruš), **Projektivna geometrija* (Matija Skrt)
- ALGEBRA (8.12.2023): *Funkcijske enačbe* (Luka Horjak), **Funkcijske enačbe* (Lovro Drofenik)
- GEOMETRIJA (12.1.2024): *Potenca točke na krožnico* (Luka Horjak), **Sučni razteg* (Matija Skrt)
- ALGEBRA (26.1.2024): *Polinomi* (Jan Pantner), **Rodovne funkcije* (Luka Horjak)
- KOMBINATORIKA (7.2.2024): *Kombinatorne igre, rekurzija in bijekcije* (Jaka Vrhovnik), **Uporaba linearne algebre v kombinatoriki* (Marko Čmrlec)
- TEORIJA ŠTEVIL (20.3.2024) *Diofantske enačbe* (Hugo Trebše), **Kvadratni ostanki, Vietovi skoki* (Marko Čmrlec)





- GEOMETRIJA (3.4.2024): *Menelajev, Cevov in Pascalov izrek, homotetija* (Lovro Drofenik), **Splošne strategije reševanja nalog* (Luka Horjak)
- KOMBINATORIKA (8.5.2024): *Invariante in dvojno štetje* (Kaja Rajter)

Na pripravih so lahko tako novi tekmovalci spoznali vse temeljne koncepte, ki se pogosto pojavljajo v rešitvah olimpijskih nalog, izkušeni tekmovalci in tekmovalke pa so lahko svoje znanje še poglobili z zahtevnejšimi temami. Svoje znanje so oboji utrjevali še z reševanjem domačih nalog, ki so bile prav tako eden izmed pogojev za uvrstitev v slovensko ekipo za katero od mednarodnih tekmovanj.



SLIKA 2.

Reševanje naloge z Mednarodne matematične olimpijade z uporabo dvojnega štetja.

Ekipe, ki zastopajo Slovenijo na mednarodnih tekmovanjih, določamo na podlagi treh izbirnih testov skupaj z državnim tekmovanjem srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja. Na izbirnih testih je letos sodelovalo 44 dijakov srednjih šol. Največ prijavljenih je dijakov ljubljanskih srednjih šol, sledijo pa Maribor, Celje in Škofja Loka. Od tega je približno tretjina deklet, vendar se v zadnjih letih v ekipi za MMO in SMO uvrščajo pretežno fantje. To ne velja samo za naš izbirni proces – v zadnjih letih je med tekmovalci na Mednarodni matematični olimpijadi le okoli 10 % deklet, poprej pa je bil ta delež še manjši.

Prav s tem namenom sodelujemo na Evropski dekliški matematični olimpijadi, saj ta k sodelovanju na tovrstnih tekmovanjih posebej spodbuja dekleta. Letošnja EDMO je kot običajno potekala aprila, zato smo za uvrstitev v ekipo upoštevali le dva izmed izbirnih testov, slovenske tekmovalke pa so dosegle najboljše rezultate doslej. Več o tem ste lahko prebrali v prejšnji številki Preseka. Med poletnimi počitnicami pa bosta potekali še Mednarodna matematična olimpijada in Srednjeevropska matematična olimpijada. V času pisanja tega prispevka rezultati 3. izbirnega testa in končnega izbora še niso bili znani, obe ekipi pa poleti pred potovanjem čakajo še intenzivne priprave. Posebej naj izpostavim, da bomo v tednu pred Mednarodno matematično olimpijado v Portorožu gostili švicarsko ekipo, s katero imamo že dolgoletno tradicijo skupnih priprav na tekmovanje.

Za konec si oglejmo še dve nalogi iz letošnjega 2. izbirnega testa.

Naloga 1. Naj bosta n in k naravni števili, pri čemer velja $n \geq k$. Podanih je n kroglic in k škatel. Ana in Bor igrata naslednjo igro. Najprej Ana razdeli vse kroglice v škatle, pri čemer nobene ne pusti prazne. Nato izmenično izbereta neprazno škatlo in iz nje odstranita eno kroglico, pri čemer začne Ana. Če igralec vzame zadnjo kroglico iz škatle, dobi eno točko. Določi največje število K , za katerega lahko Ana dobi K točk ne glede na Borove poteze.

Rešitev 1. naloge Igralcema je skupaj na voljo toliko točk, kot je škatlic, torej k . Pri reševanju naloge moramo biti pozorni, da je naloga sestavljena iz dveh delov – določiti moramo K , za katerega lahko Ana dobi K točk, poleg tega pa dokazati, da Ana ne more dobiti $K + 1$ (ali več) točk.

Z obravnavo majhnih primerov vidimo, da je smiselno ločiti dva primera. Naj bo število kroglic n sodo. Tedaj lahko z začetno porazdelitvijo, v kateri je v $k - 1$ škatlah po ena kroglica, v zadnji pa preostale kroglice, Ana dobi $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ točk, in sicer tako, da na vsaki potezi (dokler lahko) izbere škatlo z eno kroglico.

To je tudi iskan maksimum. Vzemimo namreč poljubno porazdelitev kroglic v škatle. Če ima na Borovi potezi katera izmed škatel natanko eno kroglico,



SLIKA 3.

Optimalna porazdelitev za $n = 6$ in $k = 4$.

Bor izbere to škatlo, sicer pa izbere poljubno škatlo z lihimi številom kroglic (ki gotovo obstaja zaradi predpostavke, da je n sodo število). Če Ana na katerikoli potezi (razen prvi) dobi točko, to pomeni, da je v eni izmed škatel bila le ena kroglica. To zaradi Borove strategije pomeni, da Bor svoje kroglice ni vzel iz te škatle. To pa pomeni, da jo je vzel iz neke druge škatle, v kateri je prav tako bila le ena kroglica, in tako dobil točko. Ker je dobil tudi zadnjo točko, je torej dobil vsaj polovico točk. Sledi, da je res $K = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Sedaj si oglejmo še lihe n . Če je $n \geq 2k - 1$, lahko Ana v vse razen ene škatle da 2 kroglici. Na vsaki potezi nato izbere škatlo, ki vsebuje liho število kroglic. Ker bo Bor na svoji potezi vedno moral izbrati škatlo s sodim številom kroglic, ne bo dobil nobene točke in je tako $K = k$ (več kot k točk Ana očitno ne more dobiti).



SLIKA 4.

Optimalna porazdelitev za $n = 9$ in $k = 4$.

Preostane še možnost, ko je $n < 2k - 1$. Pokažimo, da v tem primeru velja $K = \frac{n+1}{2}$. To Ana doseže tako, da v vsako škatlo da kvečjemu 2 kroglici, in v vsaki potezi izbere škatlo z natanko eno kroglico (to lahko stori, saj vedno obstaja škatla z lihimi številom kroglic). Tako na vsaki potezi dobi točko, teh pa naredi natanko $\frac{n+1}{2}$. Jasno je, da več točk ne more dobiti.

Naloga 2. Naj bo $Q(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom s celoštevilskimi ko-

eficienti. Za vsako praštevilo $p > 2$ označimo

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad Q_p(x) &= a_{2024}^{p-2}x^{2024} + a_{2023}^{p-2}x^{2023} + \dots + \\ &\quad + a_1^{p-2}x + a_0^{p-2}. \end{aligned}$$

Denimo, da za neskončno praštevil $p > 2$ velja, da

$$\blacksquare \quad p \mid Q_p(x) - Q(x)$$

za vsa cela števila x . Določi največjo možno vrednost $Q(2024)$.

Rešitev 2. naloge Predpostavimo, da Q ni ničelni polinom. Oglejmo si praštevila p , ki ne delijo nobenega izmed neničelnih a_i . Deljivost lahko v tem primeru z uporabo malega Fermatovega izreka zapišemo kot

$$\blacksquare \quad p \mid \sum_{a_i \neq 0} (a_i - a_i^{-1}) x^i,$$

kjer so a_i^{-1} multiplikativni inverzi po modulu p . Da odpravimo inverze, celotno deljivost pomnožimo z najmanjšim skupnim večkratnikom L števil a_i . Tako dobimo

$$\blacksquare \quad p \mid \sum_{a_i \neq 0} \left(a_i \cdot L - \frac{L}{a_i} \right) x^i.$$

Sedaj označimo

$$\blacksquare \quad P(x) = \sum_{a_i \neq 0} \left(a_i \cdot L - \frac{L}{a_i} \right) x^i.$$

To je seveda polinom, ki pa ima po definiciji L celoštevilске koeficiente. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{Z}$. Ker za neskončno praštevil p velja, da $p \mid P(x)$, sledi $P(x) = 0$. Tako dobimo, da je P kar ničelni polinom. Za vsak a_i torej velja $a_i = 0$ ali $a_i - \frac{1}{a_i} = 0$ oziroma $a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Vsi taki polinomi zadoščajo pogoju, saj v tem primeru velja $a_i^{p-2} = a_i$ oziroma $Q_p(x) = Q(x)$.

Vrednost števila $Q(2024)$ bo tako največja, ko bo veljalo $a_i = 1$ za vsak i . Tako dobimo

$$\blacksquare \quad Q(2024) = \sum_{i=0}^{2024} 2024^i = \frac{2024^{2025} - 1}{2023}.$$

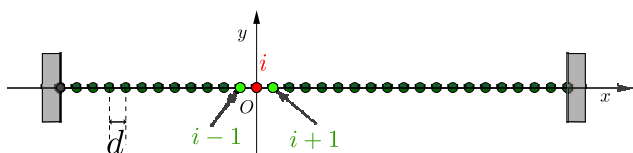
× × ×

Valovni vozli na kvadratni opni



ANDREJ LIKAR

→ Na poti do velike fizikalne predavalnice so postavili začasno pregrado - med količka so napeli tanjšo verigo. Nisem si mogel kaj, da je pri hoji ne bi rahlo udaril ob količku in opazoval val, ki se je širil vzdolž verige, se na oddaljenemu koncu odbil in prihitel nazaj. Valovanje je pač pojav, ki nas vedno znova prevzame. Ko pa se zavemo, da so svetloba, vseh vrst drugih elektromagnetnih valov, zvok v zraku in snoveh, seizmično gibanje zemeljske skorje, pojavi na vodni gladini in skrivnostno gibanje mikroskopskih delcev snovi tudi valovanja, se zavemo, da valovanje ni le zanimivo, je v jedru fizike. Pa se poigrajmo z valovanjem na nizu in v mrežo medsebojno povezanih kroglic. Poskusi s praviimi kroglicami bi bili prezahtevni, zato bomo v igro pritegnili računalnik.

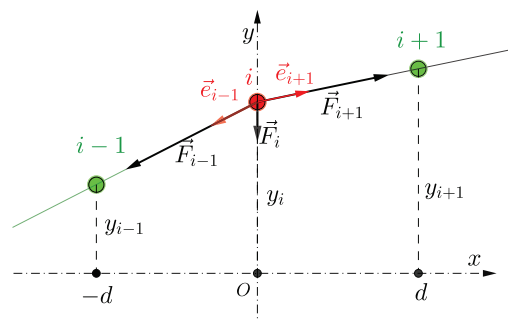


SLIKA 1.

Niz elastično spetih kroglic med nepremičnima stenama.

Enako velike kroglice v mislih povežemo v niz z elastično vrvico. Razdalja d med sosednjima kroglicama naj bo povsod enaka. Niz nekoliko napnemo in krajiščni kroglici pritrdimo med nepremični steni, glej Sliko 1. Teža niz nekoliko upogne, a to bomo zanemarili. Sedaj nekaj kroglic malo zmotimo, izmaknemo jih navpično iz ravnotežne lege in pustimo,

da se gibljejo po svoje. Kako se bodo kroglice v nizu odzvale na to motnjo?



SLIKA 2.

K izpeljavi zakona gibanja kroglic v nizu.

Če želimo ponazoriti gibanje kroglic v nizu z računalnikom, moramo poznati enačbo njihovega gibanja. Ta bo seveda sledila iz Newtonovega zakona, ki pravi, da je pospešek izbrane kroglice sorazmerno vsoti vseh sil, ki nanjo delujejo. Na Sliki 2 je prikazana izbrana, denimo i -ta kroglica, ter njeni sosedi z oznakama $i-1$ in $i+1$. Edino ti dve sosedi preko elastične vrvice delujeta na izbrano kroglico i . Vsote njunih sil s slike ni težko določiti. Enotska vektorja (vektorja brez enote in dolžino 1, nakazujeta le smer) od kroglice i proti sosedama sta:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{i-1} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}} (-d, y_{i-1} - y_i)^T, \\ \vec{e}_{i+1} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} (d, y_{i+1} - y_i)^T. \end{aligned}$$

Odmike kroglic v navpični smeri smo označili z y_{i-1} , y_i in y_{i+1} , T pa je znak za transpozicijo vrstice v

stolpec. Normirna faktorja:

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}}$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

poskrbita, da sta $\vec{e}_{i-1}$ in $\vec{e}_{i+1}$ res enotska vektorja. Poenostavimo ju, saj so odmiki y majhni, njihove razlike pa še veliko manjše in jih zanemarimo, zato je ta faktor kar enak d^{-1} . Sili na kroglico i sta torej preprosto

$$\vec{F}_{i-1} = F_0(-1, \frac{y_{i-1} - y_i}{d})^T,$$

$$\vec{F}_{i+1} = F_0(1, \frac{y_{i+1} - y_i}{d})^T.$$

S F_0 smo označili velikost sile, s katero napnemo kroglični niz. Razdalje med sosednjimi kroglicami so zaradi njihovih odmikov iz ravnovesne lege sicer nekoliko večje kot d , a to tudi zanemarimo. Njena vsota je torej enaka:

$$\vec{F} = F_0(0, \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{d})^T.$$

Vsota sil ima od nič različno le navpično komponento, ki ima velikost

$$F_i = \frac{F_0}{d}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}).$$

Ko poznamo silo na kroglico, lahko določimo njen pospešek:

$$a_i = \frac{F_i}{M} = \frac{F_0}{Md}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}). \quad (1)$$

Z M smo označili maso kroglice.

Gibanju kroglic bomo sledili v zaporednih trenutkih $t_m = m\Delta t$ s časovnim presledkom med njimi Δt . Odmik kroglice i v času t_m bomo označili takole:

$$y_i(t_m = m\Delta t) \equiv y_i^m.$$

Sposodili smo si mesto, kjer sicer postavimo eksponent, ker eksponentov pri odmikih ne bomo potrebovali. Za določitev pospeška potrebujemo zaporedni

hitrosti kroglice v časih t_{m-1} in t_{m-2} . Hitrost kroglice izračunamo iz zaporednih odmikov v sosednjih časih. Tako v času

$t_{m-2} = (m-2)\Delta t$ uporabimo odmika y_i^{m-1} in y_i^{m-2} :

$$v_i^{m-2} = \frac{y_i^{m-1} - y_i^{m-2}}{\Delta t},$$

v času $t_{m-1} = (m-1)\Delta t$ pa odmika y_i^m in y_i^{m-1} :

$$v_i^{m-1} = \frac{y_i^m - y_i^{m-1}}{\Delta t}.$$

Pospešek pa je potem:

$$a_i^{m-1} = \frac{v_i^{m-1} - v_i^{m-2}}{\Delta t}$$

Zapisano z odmiki je pospešek:

$$a_i^{m-1} = \frac{y_i^m - 2y_i^{m-1} + y_i^{m-2}}{(\Delta t)^2}. \quad (2)$$

Sedaj imamo vse potrebno, da zaporedoma izračunavamo lege kroglic y_i^m iz njihovih prejšnjih dveh leg in leg sosednjih kroglic. Osnovno Newtonovo enačbo:

$$a_i^{m-1} = \frac{F_i^{m-1}}{M},$$

zapišemo z odmiki y iz enačb (1) in (2) :

$$y_i^m = 2y_i^{m-1} - y_i^{m-2} + \frac{F_0\Delta t^2}{Md}(y_{i-1}^{m-1} - 2y_i^{m-1} + y_{i+1}^{m-1}). \quad (3)$$

Tako so na desni strani enačbe vse lege znane. Ko izračunamo za vse kroglice lege y_i^m , $i = 1, 2, \dots, K$, potisnemo m za ena dalje in ponovno izračunamo novo lego y_i^{m+1} v času t_{m+1} . Odmikom najpregledneje sledimo, če si vsako naslednjo izračunano lego izrišujemo na zaslon, prejšnjo lego pa zberemo.

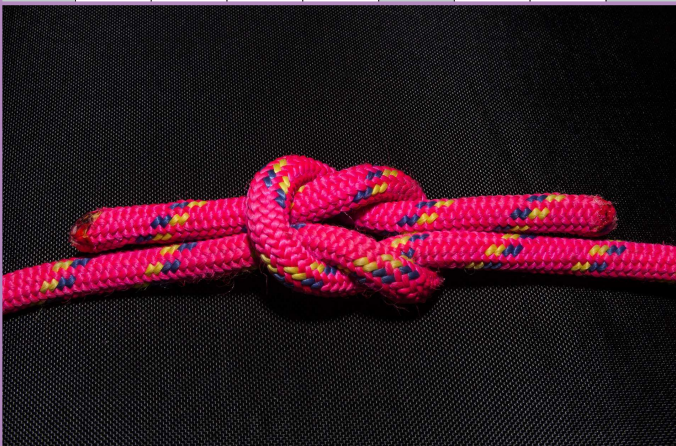
Po mili volji se lahko igramo in opazujemo odmike kroglic v zaporednih časih, potem ko smo nekatere nekoliko odmaknili od njihove ravnovesne lege. Vidimo, da se motnja širi proti obema stenama. Opisani račun zelo dobro opiše valovne pojave na nizu kroglic, zato lahko mirno rečemo, da je enačba (3) "valovna enačba". Z manjšanjem razdalje d med kroglicami in ustreznim manjšanjem njihove mase M se





Nagradna križanka



					AVTOR MARKO BOKALIČ	FRIZERSKI POSTOPEK, ONDULACIJA	PRIROČNIK ZA OPRAVLJANJE OBREDOV	AMERIŠKA IGRALKA RYAN	PREČNI NOSILEC VOZILA	NAŠ IGRALEC (BORIS)	ZUNANJA TRGOVINA	KRETSKI KRALJ IN POVELJNIK MOZARTOVA OPERA	HUMANITARNI AKTIVIST KRIŽNAR
					OPERACIJA V MNOŽICI FUNKCIJ, SESTAVA FUNKCIJ								
					SMUČARSKI SKAKALNI CENTER V NEMČIJI								
					MOČNO TRESENJE TELES					BABICA, NONA	6		
					DO, ?, MI			GUVERNER ILIRSKIH PROVINCE		DEL POSTELJNINE			
					NAJVIŠJA TOČKA LJUBLJAN. OBČINE			EVROPSKI VELETOK				IGOR EMRI	
												IMA GA KOMPLEKS. ŠTEVILO	
GRAFIČNO OBLIKOVANJE, MATEVŽ BOKALIČ	PODZEMNA VOTLINA	IZDELOVALEC OBLAČIL IZ ZIVAL. KOZUHOV	ČLEN ZA PODKREPITEV ALI POTRDITEV IZREČENEGA	JUŽNO-AFRIŠKA IGRALKA (CHARLIZE)	NAŠA ROKOMETNA REPREZENTANTKA (TJAŠA)	ADVENTNI, POROČNI ?	ŽUPANJA PARIZA HIDALGO		KRVNI SORODNIK PO OČETOV STRANI V PRAVU	OPERACIJA MED MNOŽICAMI			
KRATEK, REZEK, ZVOK, RESK					PRAŠIČJE MESO					VEDA O KRVI			
					MATEMATIK VIDAV					NAČIN VODENJA SKUPNOSTI			
PREZGODAJ ROJEN OTROK						7			NEGATIVNA KRITIKA				
								SOSEDI CRKE N					
IZZAREVANJE								GIMNASTICAR	ONEGA			ITALIJAN. DIRIGENT (ALBERTO)	HRIBOVITOST
									SVARILO				ANG. FARMAKOLOG (JOHN R.)
NARAVNI LOGARITEM			POHORSKA VAS NAD FRAMOM				NAŠ SEIZMOLOG (MIHA)			1			
			POLONIJ				IGRALKA ULLMANN						
VRSTA POLETNIH NATIKAČEV									AVTOKRACIJA				
									HRV. SKLADATELJ (MILKO)				
STAREJŠI MOJZEŠOV BRAT, ELEAZARJEV OČE										NAŠ LEKSIKOGRAF (LUC)			
					OKEJ		HRVAŠKO NASELJE OB DONAVI			STARA PREDVIGNICA		PEDIATER (BOGDAN)	5
											ST. ENOTA ZA DOZO SEVANJA		
												PROSTOR NA PRSIH	
							STARA USPEŠNICA DOMENICA MODUGNA					ANG. MODNA KREATORKA QUANT	
							BORIŠČE V AMFITEATRU					DOLŽINA ODDAJE V MINUTAH	
											NEZNANKA V ENACBI		
							ZNANILEC OGNJA			VOJSKOVODJA ALEKSANDRA VELIKEGA			
										NATRIJ			
							TELEVIZIJA BATISTA STADER				OGENJ, KI SE KURI NA PREDVEČER PRAZNIKA		
							OBMOČJE, PREDEL, PAS				NAJVEČJI SEVERNOFRIZJSKI OTOK		
													

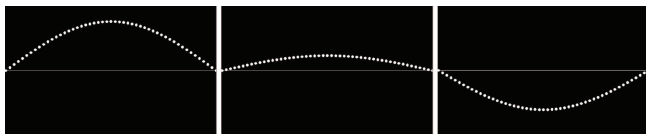
NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. avgusta 2024**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



15

nadaljevanje
s strani

SLIKA 3.

Osnovni način nihanja kroglic v nizu - tri časovno zaporedne slike.

približujemo razmeram, ki jih opažamo na med stenama napeti struni.

Da je to res, si oglejmo stoječe valove, ki so značilni za strune. Kroglice bomo izmaknili iz ravnovesnih leg tako, kot so odmaknjene v amplitudni legi pri stoječem valovanju:

$$y_i^0 = A \sin \frac{\pi i d}{L}.$$

Tu je $L = Kd$ dolžina niza s kroglicami $i = 0, 1, 2, \dots, K$, A pa odmik na sredi niza. Pri pritrjenih kroglicah na obeh koncih, torej pri kroglici $i = 0$ in kroglici $i = K$, je odmik enak nič, na sredini pa največji. Pravimo, da je tam hrbet stoječega vala. Tudi prejšnja dva odmika izberemo tako, torej $y_i^{-1} = y_i^{-2} = y_i^0$. Sedaj prepustimo računalniku, da izračunava lege v poznejših časih. Kroglice res nihajo tako, da na nizu vidimo stoječe valovanje, glej Sliko 3. Poskus lahko ponovimo še za druge stoječe valove z več hrbti:

$$y_i^0 = A \sin N \frac{\pi i d}{L}, \quad N = 2, 3, 4, 5, \dots,$$

ne le z enim z $N = 1$. Na Sliki 4 je prikazano stoječe valovanje s tremi hrbti ($N = 3$) v treh različnih trenutkih. Na zaslonu jasno vidimo, da imajo različni stoječi valovi različno frekvenco nihanja, večji ko je N , z večjo frekvenco nihajo.



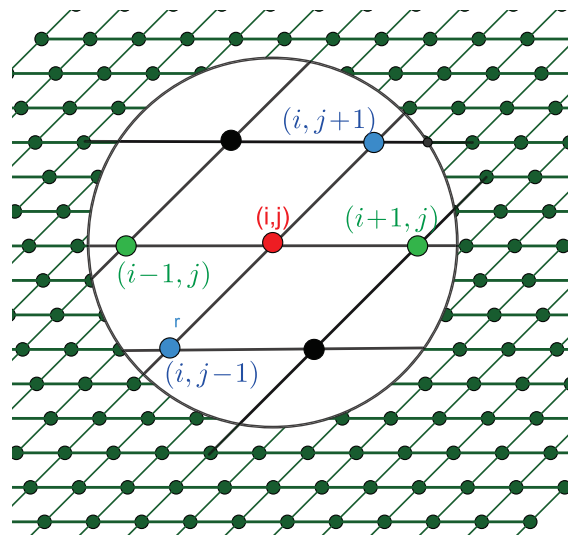
SLIKA 4.

Lastno nihanje niza s tremi hrbti ($N = 3$) - tri zaporedne slike.

Pri stoječih valovih so na nizu ali na struni posebno lepo vidni "vozli". To so mesta, kjer kroglice ali delčki strune mirujejo. Še lepše se vidijo vozli pri nihajočih opnah. Našo valovno enačbo za niz lahko hitro razširimo, da bo opisala odmike pri kvadratni mreži kroglic, kjer ima vsaka kroglica, ki ni na robu, štiri sosede, s katerimi je povezana, glej Sliko 5. Če je povezovalna vrstica za vse enaka in enako napeta, ni treba ponovno izpeljevati valovne enačbe, na enak način kot prej dodamo silo dveh novih kroglic in dobimo:

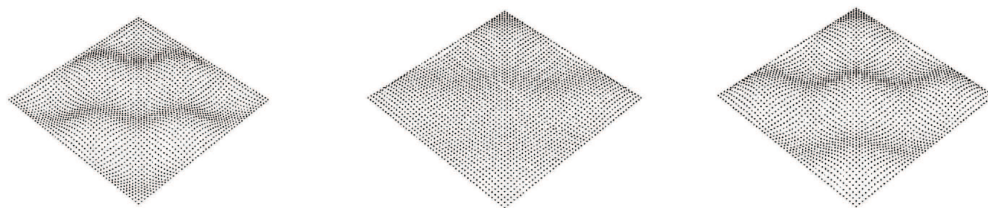
$$\begin{aligned} y_{i,j}^m &= 2y_{i,j}^{m-1} - y_{i,j}^{m-2} + \\ &+ \frac{F_0 \Delta t^2}{Md} [(y_{i-1,j}^{m-1} - 2y_{i,j}^{m-1} + y_{i+1,j}^{m-1}) + \\ &+ (y_{i,j-1}^{m-1} - 2y_{i,j}^{m-1} + y_{i,j+1}^{m-1})]. \end{aligned}$$

V mreži dobi sedaj vsaka kroglica dva indeksa, i, j , da vemo, kje natančno je. To je podobno kot opredelitev točke $T(x,y)$ v koordinatnem sistemu, kjer moramo za njeno lego podati obe koordinati. Računalnik ima to pot nekaj več dela, da izračuna odmike $y_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, K$, torej za vsako kroglico v mreži. Stoječi valovi na mreži so bolj zanimivi



SLIKA 5.

Mreža elastično spetih kroglic. Prikazana je izbrana kroglica i, j in njene najbližje sosede.



SLIKA 6.

Mreža elastično spetih kroglic v lastnem nihanju $N_1 = N_2 = 3$.

od tistih na nizu. Na podoben način kot prej lahko preizkusimo zgornjo enačbo z različnimi začetnimi odmiki kroglic, ki jih opišemo takole:

$$\mathcal{Y}_{i,j}^0 = A \sin N_1 \frac{\pi i h}{L} \sin N_2 \frac{\pi j h}{L},$$

$$N_1, N_2 = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Res vse kroglice nihajo z enako frekvenco Ω_{N_1, N_2} , torej takole:

$$\mathcal{Y}_{i,j}^m = S \sin N_1 \frac{\pi i h}{L} \sin N_2 \frac{\pi j h}{L} \cos(\Omega_{N_1, N_2} m).$$

Če vstavimo ta izraz za $\mathcal{Y}_{i,j}$ v valovno enačbo (3), dobimo po nekoliko daljšem računu tudi ustrezne krožne frekvence Ω_{N_1, N_2} :

$$\Omega_{N_1, N_2} = \frac{\pi \alpha}{K} \sqrt{N_1^2 + N_2^2}.$$

Vpeljali smo $\alpha = \frac{F_0 \Delta t^2}{M d}$. Tako smo prišli do, kot to imenujemo, "lastnih nihanj" opne, kjer vse kroglice nihajo z enako krožno frekvenco.

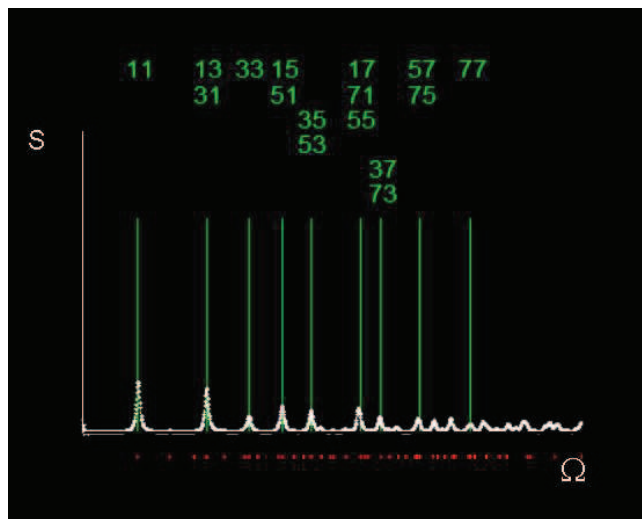
Sedaj, ko smo seznanjeni z valovno enačbo, lahko poskusimo našo mrežo vzbuditi drugače, kot smo to delali zgoraj. Mrežo bomo vzbujali z zunanjo harmonično silo, to je silo, ki niha takole:

$$F_{i,j} = f_{i,j} \cos(\Omega m)$$

Vsako kroglico i, j lahko vzbudimo s svojo amplitudo sile $f_{i,j}$. To silo preprosto dodamo desni strani valovne enačbe za mrežo. V nadaljevanju tega prispevka bomo poganjali le srednjo kroglico v mreži:

$$F_{i,j} = f \delta_{i=K/2, j=K/2} \cos(\Omega m)$$

Tu je $\delta_{i,j}$ tako imenovani Kroneckerjev simbol, ki je enak ena za dana i, j , za vse preostale pa je enak nič. V našem primeru je $\delta = 1$ le, ko sta $i = j = K/2$, za vse druge i, j pa je $\delta = 0$.

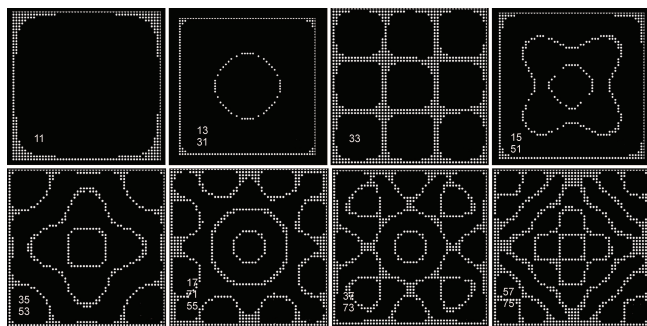


SLIKA 7.

Resonance kroglic na mreži. Na absciso je nanesena krožna frekvenca Ω , na ordinato pa amplituda S odmika srednje kroglice po daljšem času. Številke nad resonancami (za $N_1, N_2 < 9$) povedo, katera lastna nihanja smo hkrati vzbudili. Ker vzbujamo le srednjo kroglico, sta N_1 in N_2 le lihi števili. Pri sodih je kroglica na sredi v vozlu in takih nihanj ne moremo vzbuditi. Zelene črte označujejo frekvence Ω_{N_1, N_2} z lihimi N_1 in N_2 , ki sledijo iz valovne enačbe.

Zanimalo nas je, kako se kroglice v mreži odzivajo na tako vzbujanje. Opazovali smo, kolikšna je amplituda srednje kroglice po daljšem času, ko vse kroglice nihajo harmonično s to frekvenco. Na Sliki 7 je prikazana amplituda odziva gnane kroglice na sredi mreže v odvisnosti od frekvence Ω . Vidimo resonančne vrhove natančno pri frekvencah Ω_{N_1, N_2} stoječih valov na mreži. Vozelne črte nihajočih kroglic pri teh frekvencah so prikazane na Sliki 8. Večina vozelnih črt ni ravna. Ko namreč vzbudimo lastno nihanje, denimo z $N_1 = 1, N_2 = 5$, vzbudimo tudi

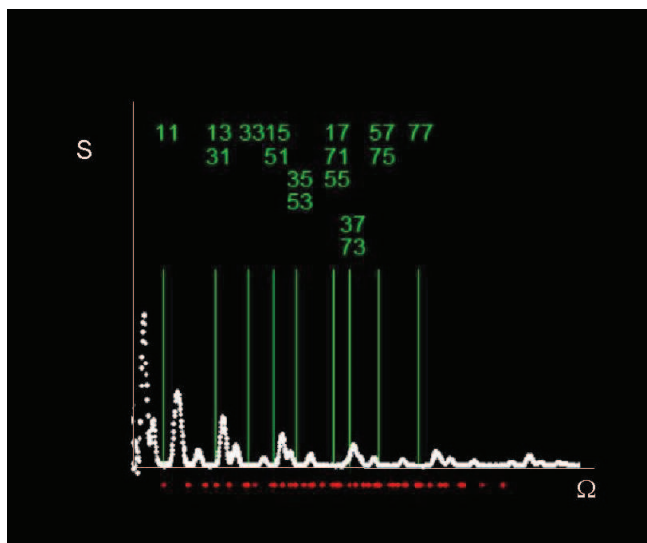




SLIKA 8.

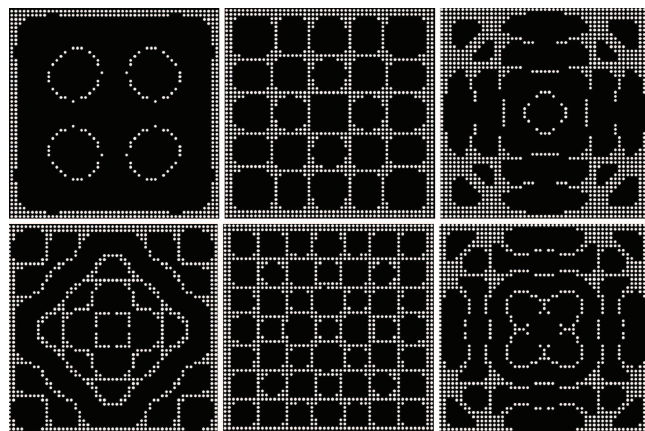
Vozelne črte pri vzbujanju mreže. V levem spodnjem kotu posameznih slik so izpisani N_1, N_2 lastnih nihanj, ki smo jih vzbudili; od leve proti desni zgoraj (11), (13,31), (33) in (15,51), in spodaj (35,53), (17,71,55), (37,73) in (57,75).

nihanje z $N_1 = 5, N_2 = 1$. Skupno nihanje ukrivi vozne črte. Pri vzbujanju nihanja z $N_1 = 1, N_2 = 7$ pa vzbudimo poleg tistega z $N_1 = 7, N_2 = 1$ tudi nihanje z $N_1 = N_2 = 5$. Le pri $N_1 = N_2 = 3$ vzbudimo eno samo lastno nihanje.



SLIKA 9.

Resonance Chladnijske plošče ne sovpadajo z resonancami mreže (zelene črte).



SLIKA 10.

Vozelne črte pri kovinski plošči.

Če so krožne frekvence Ω_{N_1, N_2} znane, čemu smo jih potem iskali z vzbujanjem? To je bila le vaja za naslednji računalniški poskus vzbujanja kovinskih plošč. Poskusili smo poiskati vozne črte pri kovinskih ploščah, s katerimi je njega dni zaslovel Ernst Chladni (1756–1827). Na sredini pritrjene pravokotne kovinske plošče je z drgnjenjem z violinskim lokom po njenem robu vzbujal resonance. Vodoravno ležečo ploščo je posipal z drobnim suhim peskom, ki se je nabiral na vozelnih črtah in so bile zato dobro vidne. Za kovinsko ploščo ne velja naša valovna enačba, zanjo ni lahko izračunati resonančnih frekvenc in najti oblike stojećih valov na njej. Mi smo pri ustrezni enačbi, ki je tu ne bomo navajali, poiskali resonance, kot smo to opisali zgoraj, glej Sliko 9. Vidimo, da so resonance pri plošči povsem drugače kot pri mreži. Resonancam ustrezne vozne črte so prikazane na Sliko 10.

Na spletu najdete mnogo presenetljivih vozelnih vzorcev na kovinskih ploščah kvadratne oblike, pa tudi različnih drugih oblik, ki so jih našli predvsem s poskusi. S simulacijo, ki temelji na enostavnih računih za niz kroglic povezanih z napetimi elastičnimi vrvicami, se lahko poigrate tudi na spletu, npr. <https://phet.colorado.edu/en/simulations/wave-on-a-string>.

× × ×

Veter, voda, jadranje in malo fizike

ŠTEVILKA 4, LETNIK III (1975/76)

↓↓↓

→

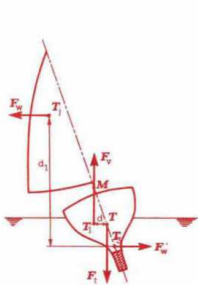
Kdo izmed nas še ni postal ob bregu jezera ali morja in se zazrl za jadrnico, ki se vozi sem in tja, zdaj skoraj proti vetru, pa spet z vetrom, ali še kako drugače. Morda smo se že kdaj vprašali, kako je sploh mogoče, da se jadrnica giblje v skoraj vseh smereh, veter pa piha ves čas v isti smeri? S temi mislimi se začne članek o fiziki jadrnanja, objavljen v reviji Presek pred skoraj 50 leti. Od osmih strani članka tu objavljamo le eno - radovedni bralec lahko celoten članek poišče v arhivu na spletni strani presek.si. Avtor članka je nedavno preminuli slovenski fizik *prof. dr. Zvonko Trontelj* (1937–2024), izjemni pedagog in znanstvenik na področju jedrske magnetne in kvadrupolne resonance ter magnetizma, pa tudi dolgoletni dejavni član DMFA Slovenije. Ohranili ga bomo v najlepšem spominu.

Poglejmo sedaj „uravnovešeno“ jadrnico med enakomerno vožnjo. Ponavadi je jadrnica nagnjena; zasukana je okrog vzdolžne osi, ki gre skozi težišče jadrnice. Sl. 4 kaže presek jadrnice z ravnino, ki je pravokotna na vzdolžno os skozi težišče. V tej ravnini naj bodo prijemališča vseh sil. Za prečno ravnotežje jadrnice so pomembne sile ali komponente sil, ki so v ravnini preseka. V ravnotežju sta komponenta sile vetra F_w s prijemališčem v T_2 (ta komponenta povzroči tudi uhajanje iz smeri pri „neuravnovešeni“ jadrnici), in sila vode F_v s prijemališčem v točki T_3 . Sila vode F_v se pojavi med vožnjo pri nagnjeni jadrnici na podoben način kot prečna sila pri gibajočem se letalskem krilu.

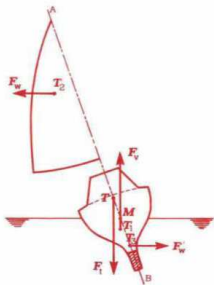
Iz slike 4 vidimo, da se pri nagnjeni jadrnici premakne težišče izpodrinjene vode. Navor dvojice sil F_w in F_v uravnoveša navor dvojice F_w in F_v , zato velja:

$$F_w d_1 = F_v d_2$$

Ko se spreminja hitrost vetra, se spreminjata sili F_w in F_v , ter lega težišča izpodrinjene vode, pa tudi razdalji d in d_1 .



Sl. 4 Prečni presek jadrnice v vožnji in sile, ki leže v prečni ravnini. Težišče jadrnice je pod metacentrom.



Sl. 5 Prečni presek jadrnice v vožnji in sile, ki leže v prečni ravnini. Težišče jadrnice je nad metacentrom.

180



Astronomska anekdota



VID KAVČIČ

→ V davnih mračnih koronskih časih se je na nekem mednarodnem astronomskem tekmovanju pojavila nadvse zanimiva in morda tudi nenavadna naloga, tako imenovana *astronomska anekdota*. Naloga temelji na resnični anekdoti, objavljeni na spletni strani <https://www.anekdot.ru/id/1010360/>.

V prispevku si bomo ogledali rešitev naloge, ki pa jo bomo nekoliko obogatili z dodatnimi opombami in komentarji, saj želimo predstaviti čim bolj celosten pogled na zastavljeni problem.

Za vse matematične duše, ki si bodo morda vendarle drznile malce prelistati pričujoči članek, naj posebej izpostavim dejstvo, da na tekmovanju uporaba žepnega računalu ni bila dovoljena. Zaradi tega bomo v članku predstavili poskus rešitve, pri kateri si poskusimo z ustreznimi približki olajšati računanje »na roko«. Zato seveda opozarjam, da naloga ne temelji na natančnih izračunih, temveč na približnih ocenah, ki pa povsem zadostujejo za rešitev naloge.

Famozna astronomska anekdota

Zvečer s sestro stojiva na ulici in občudujeva Sirij, najsvetlejšo zvezdo na nočnem nebu.
Jaz: "Pojdiva bližje, da jo bova bolje videla."
In sva šla. Po 30 sekundah se je sestri posvetilo.

Denimo, da sva bila na zemljepisni širini $+28^\circ$ in se je to dogajalo na novo leto ob polnoči. Pešci se gibljejo s hitrostjo 1 m/s . Oцени spremembo navideznega sija Sirija v anekdoti. Nebesne ekvatorialne

koordinate Sirija so $\alpha = 6^{\text{h}}45^{\text{min}}$, $\delta = -17^\circ$.

Rešitev

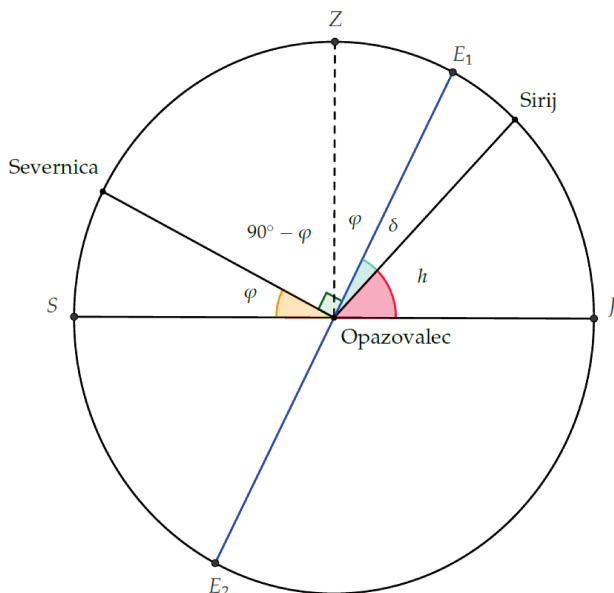
Da rešitev naloge ne bo zgolj prevod suhoparne uradne rešitve naloge, se bomo pri vsakem koraku v rešitvi zaustavili nekoliko dlje in še kaj zanimivega dodali.

Zvezda Sirij

Sirij je alfa ozvezdja **Veliki pes** in z navideznim sijem okoli $-1,5$ velja za najsvetlejšo zvezdo severnega neba. Zvezda je od Sonca oddaljena okoli $2,64$ parseka in s tem peti Soncu najbližji sistem zvezd. Sirij je pravzaprav **dvozzvezdje**, kar pomeni, da ne gre za eno zvezdo, temveč ga sestavljata dve zvezdi, ki krožita druga okoli druge. Sirij A je z maso okoli dveh mas Sonca in polmerom $1,7$ Sončevega polmera večja zvezda v sistemu. Manjša komponenta Sirij B, ki jo je leta 1844 odkril nemški astronom Friedrich Bessel, pa je **bela pritlikavka** (posmrtni ostanek manj masivne zvezde) z maso približno enako Sončevi in polmerom, primerljivim z Zemljinim. Sirij B velja za eno najbolj masivnih poznanih belih pritlikavk, hkrati pa je zanjo kot tudi za druge bele pritlikavke značilna velikanska gostota, približno $2,4 \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3}$, kar je več kot sto tisočkrat toliko kot gostota osmija, ki velja za najgostejšo snov na Zemlji.

Poleg dejstev, da je Sirij najsvetlejša zvezda severnega neba in tudi dvozzvezdje, ga odlikuje še nadvse zanimiva značilnost, ki poleg bralcev različnih takšnih in drugačnih spletnih portalov prevzame predvsem opazovalne astronome. Sirij namreč na novega leta dan ob polnoči leži približno na **lokalnem nebesnem poldnevniku**, kar pomeni, da leži v najvišji točki, ki jo lahko doseže tekom dnevnega in letnega navideznega kroženja na nebesnem svodu.

In ravno to dejstvo je ključno za prvi korak k razrešitvi naše anekdote – v besedilu pod njo namreč izvemo, da je čas opazovanja ravno novo leto ob polnoči.



SLIKA 1.

Skica od strani prikazuje nebesno sfero, kot jo vidi opazovalec. Znano je, da je višina Severnice v danem kraju enaka zemljepisni širini kraja. Z modro je označen nebesni ekvator. S točkami S , Z in J smo zaporedoma označili sever, zenit in jug. S skico si lahko pomagamo in izrazimo višino Sirija nad obzorjem z geografsko širino kraja in deklinacijo. Pri tem naj opozorimo, da je deklinacija δ negativna, in da je na skici označena zgolj njena velikost.

Od tod lahko izračunamo njegovo kotno višino nad obzorjem v času opazovanja. Pri tem si lahko pomagamo s skico na sliki 1, s pomočjo katere izpeljemo:

$$h = 90^\circ - \varphi - |\delta| = 90^\circ - 28^\circ - 17^\circ = 45^\circ,$$

kjer sta φ in δ zaporedoma geografska širina kraja opazovanja in deklinacija Sirija, podana v nalogi.

Vendar zakaj neki bi bil Sirij po 30 metrih pešačenja v smeri južno svetlejši?

Možni razlogi za spremembo svetlosti

Razmislimo o možnih, čeprav nekoliko sprevrženih, vzrokih za povečanje navideznega sija Sirija.

1. Ker se junaka anekdote premikata v horizontalni smeri, se ob prehojenju razdalji 30 metrov Siriju približata za $30 \cdot \cos 45^\circ \approx 21$ metrov. Ker sta se Siriju približala, to jasno pomeni, da je ta za njiju navidezno svetlejši.
2. Med premikanjem proti Siriju je prišlo do modrega premika, ki ustreza hitrosti $1 \cdot \cos 45^\circ \approx 0,7$ m/s, kar prav tako nekoliko poveča njegovo svetlost.

3. V času gibanja junakov v anekdoti proti jugu se je Sirij pomaknil za nek majhen kot proti zenitu. Znano je, da ena navtična milja, ki meri 1852 metrov, ustreza $1'$ na Zemljinem poldnevniku. Ker sta se junaka premaknila za razdaljo 30 metrov, lahko od tod izračunamo, da se bo Sirij navidezno premaknil za kot $30'/1852 \approx 1''$ navzgor proti zenitu. Zaradi tega premika se bo absorpcija svetlobe v atmosferi zmanjšala, saj bo svetloba prepotovala tanjšo plast atmosfere, kar pa pomeni, da se bo svetlost vnovič povečala.

Poskusimo zdaj oceniti, do kolikšne spremembe v navideznem siju je prišlo pri posameznem od zgoraj predstavljenih razlogov.

1. dejavnik: Približanje

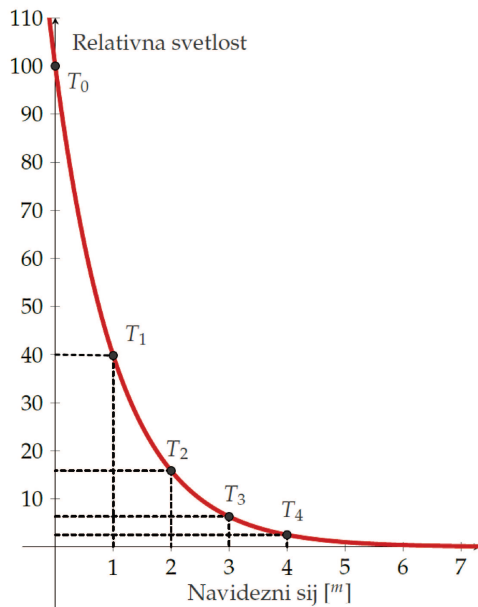
Sirij je ena nam bližjih zvezd, kar je tudi razlog, da je tako svetla. Od nas je oddaljen 2,64 parseka (en parsek je definiran kot razdalja, na kateri bi videli Zemljo in Sonce pod kotom ene ločne sekunde, in meri približno $3,086 \cdot 10^{16}$ m). Za oceno lahko rečemo, da je oddaljen $r_0 = 2 \text{ pc} \approx 6 \cdot 10^{16}$ metrov.

Izračunamo razliko navideznega sija v tem primeru. Pri tem uporabimo definicijo navideznega sija oziroma **Pogsonovo enačbo**. Ta upošteva, da so objekti z nižjim navideznim sijem svetlejši kot tisti z





nižjo (na primer, navidezni sij Sonca je približno -27 , navidezni sij polne Lune pa okoli -13). Hkrati pa je treba poudariti, da je zveza med sijem in gostoto svetlobnega toka (dejansko *svetlostjo*) logaritemska, pri čemer je upoštevano, da je zvezda z za 5 magnitud nižjim navideznim sijem 100-krat svetlejša. Za lažjo predstavo zveze med svetlostjo in navideznim sijem v magnitudah glej sliko 2.



SLIKA 2.

Ovisnost relativne svetlosti in navideznega sija v magnitudah. Graf namiguje na definicijo navideznega sija, ki pravi, da sto-kratna različna svetlost ustreza razliki 5 magnitud. To pa, glede na to, da je zveza eksponentna, tudi pomeni, da razlika ene magnitude ustreza $100^{1/5} \approx 2,5$ -kratni spremembi svetlosti, kar pa je sijajno videti iz grafa. Na primer pri navideznem siju 1 je relativna svetlost približno 40, pri navideznem siju 0 pa 100, kar je ravno za naračunani faktor 2,5-krat toliko.

Kakor koli, pri samem izračunu moramo upoštevati tudi, da je gostota svetlobnega toka obratno sorazmerna s kvadratom oddaljenosti in pravila za računanje z logaritmi.

$$\begin{aligned} \Delta m_1 &= m_0 - m_1 = -2,5 \log \frac{j_0}{j_1} = -2,5 \log \frac{r_1^2}{r_0^2} \\ &= -2,5 \log \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 = -5 \log \frac{r_1}{r_0}. \end{aligned}$$

V enačbi so m navidezni sij, j gostota svetlobnega toka in r oddaljenost Sirija. Indeks 0 se navezuje na začetno vrednost posamezne količine, indeks 1 pa na končno vrednost. Podobne oznake bomo v članku uporabljali tudi v nadaljnjem. Sedaj razpišemo $r_1 = r_0 - \Delta r$, pri čemer je $\Delta r = 21$ m, kot smo izračunali pri točki 1 uvodnega razmisleka. Desetiški logaritem prevedemo v naravnega s pomočjo formule za prehod na novo osnovo, ki jo poznamo iz konca drugega letnika gimnazijske matematike.

$$\begin{aligned} \Delta m_1 &= -5 \log \frac{r_0 - \Delta r}{r_0} = -5 \log \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} \right) \\ &= -\frac{5}{\ln 10} \ln \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} \right) \end{aligned}$$

Za poenostavitev računa upoštevamo, da pri majhnih x velja fizikalna in ne matematična zveza $\ln(1 + x) \approx x$. V našem konkretnem primeru sledi

$$\Delta m_1 = -\frac{5}{\ln 10} \ln \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} \right) \approx \frac{5}{\ln 10} \cdot \frac{\Delta r}{r_0},$$

Vstavimo še številske podatke. Ker je $\ln 10 \approx 2,5$, lahko izračunamo:

$$\Delta m_1 \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 10}{6 \cdot 10^{16}} \approx 7 \cdot 10^{-16}.$$

Seveda opazimo, da je naša razlika navideznega sija izjemno, izjemno majhna. Poglejmo, kaj pokažeta preostali dve možnosti.

2. dejavnik: Dopplerjev premik

Na **Dopplerjev pojav** oziroma **premik** naletimo že v vsakdanjem življenju, ko se sprehajamo po obvoznici in mimo nas švigajo avtomobili in druga prometna vozila. Namreč, ko se nam avtomobil približuje, slišimo *drugačen* zvok kot potem, ko se od nas oddaljuje. Z drugimi besedami, ko se nam približuje, zaznamo zvok z višjo frekvenco kot v primeru, da bi avtomobil miroval. Podobno takrat, ko se od nas oddaljuje, občutimo zvok z nižjo frekvenco. Do enakega učinka pride, če avtomobil kot oddajnik zvoka miruje, mi pa se mu približujemo oziroma oddaljujemo – važno je relativno gibanje oddajnika in sprejemnika.

Kakor koli, s podobnim pojavom se srečamo tudi v astronomiji. Ko se nam zvezde ali galaksije približujejo, pride do povišanja frekvence svetlobe, kar pomeni, da se pomakne proti *bolj modremu delu spektra*. Pojav imenujemo **modri premik**. Podobno pride

pri oddaljevanju zvezd in galaksij do **rdečega premika**, saj se frekvenca svetlobe zniža, s tem pa se pomakne proti *bolj rdečemu delu spektra svetlobe*. Poudarimo naj, da pojava ne gre zamenjati s tako imenovanim **kozmoškim rdečim premikom**, ki je posledica raztezanja vesolja in tako povezan s splošno teorijo relativnosti.

Kakor koli, v našem primeru pride do rahlega modrega premika zaradi približevanja Siriju. Enačba za Dopplerjev premik, če izrazimo razmerje spremembe frekvence $\Delta\nu$ s siceršnjo frekvenco ν , je:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{0,7}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{-9},$$

pri čemer je v relativna hitrost pešcev glede na Sirij, torej komponenta hitrosti pešcev v smeri Sirija, izračunana v uvodu, in c hitrost svetlobe. Ker je energija fotona po enačbi $E = h\nu$, ki ji v srednji šoli rečemo kar Planckov zakon, sorazmerna z njegovo frekvenco, bo navidezna svetlost Sirija narasla za pravkar izračunani faktor. Izračunajmo torej ustrezno spremembo navideznega sija.

$$\begin{aligned} \Delta m_2 &= m_0 - m_2 = -2,5 \log \frac{j_0}{j_2} = 2,5 \left(1 + \frac{\Delta j}{j_0} \right) \\ &= \frac{2,5 \log_{2,5} \left(1 + \frac{\Delta j}{j_0} \right)}{\log_{2,5} 10} \\ &\approx \ln \left(1 + \frac{\Delta j}{j_0} \right) \approx \frac{\Delta j}{j_0} \approx 2 \cdot 10^{-9}, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je $e \approx 2,5$, $\log_{2,5} 10 \approx 2,5$ in ponovno približek za linearizacijo naravnega logaritma pri računanju z relativno majhnimi vrednostmi.

Kakor koli, ocena zgoraj predpostavlja, da občutljivost človeškega očesa in prepustnost atmosfere nista odvisni od valovne dolžine svetlobe (kar seveda v resnici ne drži), temveč ker je Sirij bela zvezda, bomo z obravnavanimi učinki, če že, podcenili spremembo svetlosti. Za zdaj je važno le, da je ta učinek povečanja svetlosti za kar nekaj redov velikosti večji od prvega.

3. dejavnik: Sirij je višje nad obzorjem

Zdaj pa obravnavajmo še tretji vzrok. Kot smo izračunali v uvodnem razmisleku k rešitvi, se Sirij navidezno premakne za eno kotno sekundo proti zenitu.

Upoštevati moramo spremembo absorpcije. Posežemo po tako **formulo zračne mase** (angl.: *air-mass formula*). **Zračna masa** je definirana kot količina zraka v atmosferi, skozi katero gledamo, zato je sorazmerna z debelino atmosfere v smeri opazovanja objekta in je tako odvisna predvsem od **zenitne oddaljenosti** z (kotne oddaljenosti med zenitom in opazovanim objektom). *Ena zračna masa* je definirana za debelino atmosfere v smeri zenita. Za lažjo predstavo glej sliko 3.

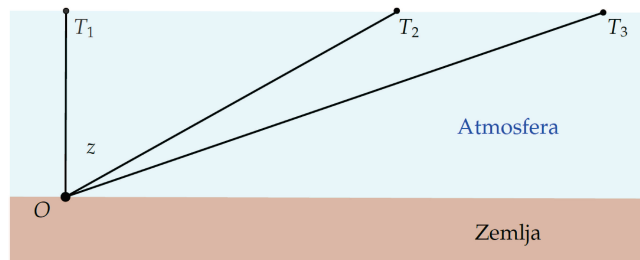
Omenjena formula opisuje absorpcijo svetlobe v atmosferi in velja za majhna območja na nebu. Enačbo smemo uporabiti pri zenitnih oddaljenostih $z < 70^\circ$, čemur pa je v našem primeru zadoščeno, saj je $z = 90^\circ - h = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ < 70^\circ$. Enačba se glasi:

$$\Delta m = \frac{0,2}{\cos z},$$

Izrazimo lahko razliko absorpcije za lego Sirija pred premikom in po njem. Velja torej

$$\Delta m_3 = m_0 - m_3 = 0,2 \cdot \left(\frac{1}{\cos z_0} - \frac{1}{\cos z} \right),$$

kjer je $z_0 = 45^\circ$ in $z = z_0 - \Delta z$, pri čemer je $\Delta z = 1''$. Ker žepnega računalnika ne smemo uporabljati, se



SLIKA 3.

Opazovalec na Zemlji (O) opazuje nočno nebo, pri tem pa seveda gleda skozi atmosfero. V smeri T_1 je zenit, zato je tam debelina atmosfere najmanjša in ustreza *eni zračni masi*. Če pogleda opazovalec v smeri T_2 , potem njegovo opazovanje ovira debelejši sloj atmosfere, ki učinkuje kot zmanjšanje svetlosti in pordečitvi barve zvezde. Učinek je še večji za smer T_3 . Na skici je označena zenitna oddaljenost z za zvezdo v smeri T_2 . Opomba, da je Zemlja na skici narisana kot raven ploskev zaradi preglednosti, zato tega dejstva ne gre povezovati s takšnimi ali drugačnimi teorijami zarote.



→ najdemo, in razpišemo $\cos z$ z adicijskim izrekom za kosinus razlike:

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(z_0 - \Delta z) \\ &= \cos z_0 \cos \Delta z + \sin z_0 \sin \Delta z.\end{aligned}$$

Sedaj moramo napraviti ustrezne približke. Ker je kot Δz zelo majhen, lahko rečemo, da je $\cos \Delta z \approx 1$. S pomočjo zveze $\sin x \approx x$ (kjer je x v radianih), ki velja za majhne x , lahko izračunamo $\sin \Delta z \approx \Delta z = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} \approx \frac{1}{206265} \approx 5 \cdot 10^{-6}$. Ker pa je hkrati tudi $\sin z_0 = \cos z_0 = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$, imamo:

$$\begin{aligned}\Delta m_3 &= 0,2 \cdot \left(\frac{1}{0,7} - \frac{1}{0,7 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-6})} \right) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^{-6}} \right).\end{aligned}$$

Zadevo si še nekoliko poenostavimo, če uporabimo zvezo $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, ki velja za majhne x . Poročunamo:

$$\begin{aligned}\Delta m_3 &= \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^{-6}} \right) = \frac{2}{7} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \\ &\approx 10^{-6}.\end{aligned}$$

Če sintetiziramo; pri prvem vzroku za povišanje navidezne svetlosti smo dobili razliko navideznega sija $\sim 10^{-16}$, pri drugem $\sim 10^{-9}$, pri zadnjem pa $\sim 10^{-6}$. Od tod zaključimo, da je sprememba višine Sirija tista, ki je glavni razlog za spremembo navideznega sija, ostala dva dejavnika pa sta povsem zanemarljiva.

Zaključek

Kakor koli že, tudi sprememba navideznega sija za 10^{-6} je v praksi povsem zanemarljiva. Takšnih sprememb tudi z najboljšo tehnično opremo, ki nam jo ponuja napredek 21. stoletja, nikakor ne bi mogli zaznati. No ja, tako očitno naša anekdota za zdaj še vedno ostaja skrivnostna anekdota.

Prijateljski dodatek na računanje z majhnimi količinami

V rešitvi naloge smo pogosto uporabili približke, kar smo upravičevali s tem, da delamo z relativno majh-

nimi številkami. Vsako od uporabljenih formul si bomo v tem dodatku pogledali nekoliko podrobneje.

$$\sin x \approx \tan x \approx x \text{ in } \cos x \approx 1.$$

Približek velja za majhne kote, to je kote, manjše od 10° , pri čemer poudarimo, da mora biti x v približku podan v radianih. Zvezi $\sin x \approx \tan x$ in $\cos x \approx 1$ lahko geometrijsko ponazorimo na primeru pravokotnika z relativno majhnim kotom, kar prikazuje slika 4. Vidimo, da velja $|AB| \approx |BC|$, s tem pa $\sin x = \frac{|AC|}{|BC|} \approx \frac{|AC|}{|AB|} = \tan x$. Z enakim argumentom dobimo $\cos x = \frac{|AB|}{|BC|} \approx 1$. Če želimo ugotoviti, za koliko se vrednost $\cos x$ razlikuje od 1, lahko posežemo po znani zvezi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Pri manjših kotih tudi velja, da je $|AC|$ približno enaka kot dolžina krožnega loka krožnice s polmerom AB , ki ga opisuje kot x . Ker je enota radian definirana kot razmerje med krožnim lokom in polmerom krožnice, velja $\sin x \approx \tan x = \frac{|AC|}{|AB|} \approx \frac{l}{|AB|} = x$ [rad].

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

Ulomek na levi lahko razširimo z $1 - x$ dobimo:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1-x^2}$$

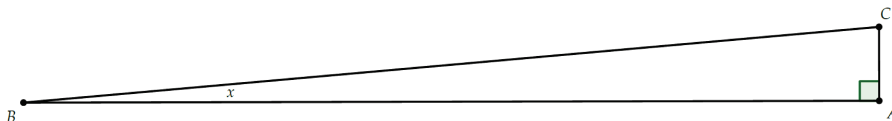
Na tem mestu se zdi, da je dovolj, da pokažemo, da je $x^2 \approx 0$, saj bomo tako prišli do izraza na desni. Razmislimo, zakaj je tako. Vemo, da je x relativno majhen (glede na 1), npr. $x = 0,001$. To pomeni, da je $x^2 = 0,000001$, kar pa resnično je zelo malo, torej približno nič. Za prej navedeni konkretni x bi bilo $\frac{1}{1+x} \approx 0,999001$ in $1 - x = 0,999$ (točna vrednost), od koder vidimo, da se vrednosti ujemata na 5 decimalnih mest, kar je zelo solidna natančnost, sploh za rusko olimpijado.

$$\ln(1+x) \approx x$$

Na tem mestu pa se odvodom ne bomo mogli izogniti. Pri vrednostih $x \approx a$ lahko vrednost funkcije $f(x)$ približamo z

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a),$$

pri čemer smo z $f'(a)$ označili odvod funkcije v točki a . V našem primeru imamo funkcijo $f(x) =$



SLIKA 4.

Pravokotni trikotnik z majhnim kotom x pri B, ki nam pomaga pri oblikovanju predstave o tem, zakaj lahko pri majhnih uporabimo približke za kotne funkcije.

$\ln(x)$, približek pa želimo narediti okoli $a = 1$. Ker vemo, da je odvod naravnega logaritma $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, lahko po zgornji formuli razpišemo:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x &\approx \ln a + \frac{x-a}{a} = \ln 1 + \frac{x-1}{1} \\ &= 0 + x - 1 = x - 1 \end{aligned}$$

Še enkrat poudarimo, da velja zgornja zveza za $x \approx a$. Ker ime spremenljivke ni pomembno, lahko naredimo substitucijo $x \rightarrow x + 1$, in tako dobimo $\ln(x + 1) \approx x$. Ta zveza pa velja pri $x \approx 0$.

Omeniti gre, da bi lahko vse zgornje približke veliko hitreje in bolj tehnično obrazložili s **Taylorjevim** oziroma **Maclaurinovim razvojem**, v katerem bi v duhu približka upoštevali le prvi člen. Vendar je za samo predstav o pomenu teh približkov veliko bolje, če se jih lotimo na nekoliko bolj elementaren način, sploh če ta obstaja.

Naloge bralcu

1. Oddaljenost od Sirija izračunaj iz letne paralakse, $\pi = 380$ mas (enota *mas* pomeni *mili ločna sekunda*, torej tisočinka ločne sekunde).
2. Izračunaj absolutni sij Sirija. Absolutni sij je navidezni sij na oddaljenosti 10 parsekov.
3. Koliko bi bilo dolgo leto, če bi Zemlja krožila okoli Sirija, njegova navidezna velikost na nebu pa bi bila enaka resnični navidezni velikosti Sonca na Zemlji?
4. Kapela, alfa Voznika, je zvezda, ki jo lahko v prvi polovici decembra okoli polnoči opazujemo v zenitu. Za zvezdo, ki se v nekem trenutku nahaja v zenitu, ustreza absorpcija svetlobe zaradi atmosfere 0,16. Izračunaj, kolikšen je njen navidezni sij, ko se nahaja na višini 30° nad obzorjem. Privzemi, da je navidezni sij Kapele, ko je v Zenitu, 0,08.

5. Pokaži, da pri $x \approx 0$ veljajo približki

- a) $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$,
- b) $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 + 2x$,
- c) $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$,
- d) $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$.

6. Kako lahko približamo $(1 + x)^n$, če je $x \approx 0$?

Literatura

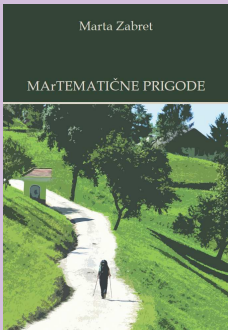
- [1] *Air mass (astronomy)*, Wikipedia, dostopno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_\(astronomy\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_(astronomy)), ogled: 24. 2. 2021.
- [2] Avsec, F., Prosen, M. (1969). *Astronomija*. Ljubljana: DMFA - založništvo.
- [3] *Doppler effect*, Wikipedija, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect, ogled: 26. 2. 2021.
- [4] Karttunen ... [in drugi]. (2007). *Fundamental astronomy*. Berlin; New York: Springer.
- [5] *Naloge za 11 klas 28. SAO, Šolska astronomija v Sankt Petersburgu*, dostopno na: <http://school.astro.spbu.ru/?q=node/622>, ogled: 24. 2. 2021.
- [6] *Osmij*, Wikipedija, dostopno na: <https://sl.wikipedia.org/wiki/Osmij>, ogled: 24. 2. 2021.
- [7] *Sirius*, Wikipedia, dostopno na: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sirius>, ogled: 24. 2. 2021.

× × ×

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo. V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

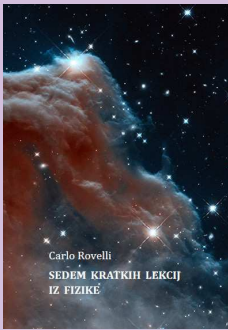


Marta Zabret:

MaTeMATIČNE PRIGODE

148 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 51/5

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 51/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke Preseka letnika 51 je **strojni prevod**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Eva Šolinc iz Ljubljane, Ivan Lisac iz Kopra, Karel Rankel iz Kranja, ki bodo nagrade prejeli po pošti.



Igra(n)je z matematiko ob Mednarodnem dnevu matematike

↓↓↓

NEŽKA MRAMOR KOSTA IN JASNA PREZELJ



SLIKA 1.

→ Mednarodno matematično združenje IMU vsako leto predlaga temo kot rdečo nit za dogodke, ki po svetu potekajo ob Mednarodnem dnevu matematike 14. marca (znanem tudi kot dan števila π , saj se v anglosaškem zapisu ta datum zapiše kot 3.14). Letošnja tema je bila *Igranje z matematiko (Playing with math)*.



SLIKA 2.

Učence in dijake v Sloveniji smo povabili, da se pridružijo svetovnemu praznovanju dneva matematike z igro in z igranjem in nam pošljejo svoje prispevke v obliki skečev, glasbenih in plesnih točk, družabnih in računalniških iger z matematično tematiko ali li-

kovne izdelke, ki kakorkoli povezujejo matematiko in igranje.

Prejeli smo vrsto posnetkov različnih dogodkov, ki so jih po šolah organizirali v čast dnevu matematike in številu π . Na OŠ Ig so učenci 2. in 6. razreda izdelali barvno verigo z decimalkami števila π , računali, risali, pisali pesmi, izdelovali zapestnice o številu π in potrdili, da je matematika lahko zabavna in ustvarjalna (posnetek je na voljo na naslovu <https://youtu.be/wlm-5MhYC5c?feature=shared>).

Učenci višjih razredov OŠ Olge Meglič na Ptujju so se z mentorji Petrom Strelcem, Vido Lačen in Darjo Šprah odpravili na matematični potep in nam poslali matematične utrinke iz svojega starega mesta. Na OŠ Montessori v Mariboru pa so pripravili cel π -žur (posnetek je na <https://youtu.be/wlm-5MhYC5c?feature=shared>) s peko (in menda tudi pospravljanjem) množice π -t, izdelovanjem lesenih π -jev, branjem pesmi in recitiranjem decimalk števila π (kar je tradicionalna zabava na ta dan na marsikateri šoli, pa tudi pred Fakulteto za matematiko in fiziko in po svetu). Na OŠ Prule v Ljubljani pa so se z matematiko igrali in ustvarjali učenci kar petih šol na že tradicionalni skupni matematični zabavi. Kaj vse so si izmislili, odigrali, odplesali, odpeli in uganili učenke in učenci OŠ Prule, Evropske šole, OŠ Oskarja Kovačiča, OŠ Brinje Grosuplje in OŠ Leskovec pa si lahko ogledate v kratkem filmu (na naslovu <https://www.youtube.com/watch?v=2KE-fAiGKSA>).

Na natečaj smo prejeli tudi vrsto domiselnih idej za družabne igre. Najbolj nas je navdušila namizna igra *Vojne verjetnosti* Leona Pečavarja s Kmetijske šole Grm in biotehniške gimnazije v Novem mestu. Leon je inspiracijo za svojo igro našel v šahu in manj znani digitalni igri s kartami iz animirane TV serije *Adventure time*. Vabimo vas, da si ogledate navodila za Leonovo in še nekaj najbolj zabavnih prispelih družabnih iger na spletni strani DMFA Slovenije in igre, seveda z nekaj truda za izdelavo delov, tudi preizkusite (morda celo med uro matematike...).




SLIKA 3.

Primer kart in postavitev figur na igralno polje v igri Vojne verjetnosti Leona Pečavarja.

Simbolične nagrade za najboljše izdelke bodo prejeli v prvi (1.-3. razred) in drugi kategoriji (4.-6. razred) učenci 2. in 6. razreda z mentoricama Manco Zupančič in Manco Hace z OŠ Ig za vrhunsko predstavitev števila π na sto in en način. V tretji kate-

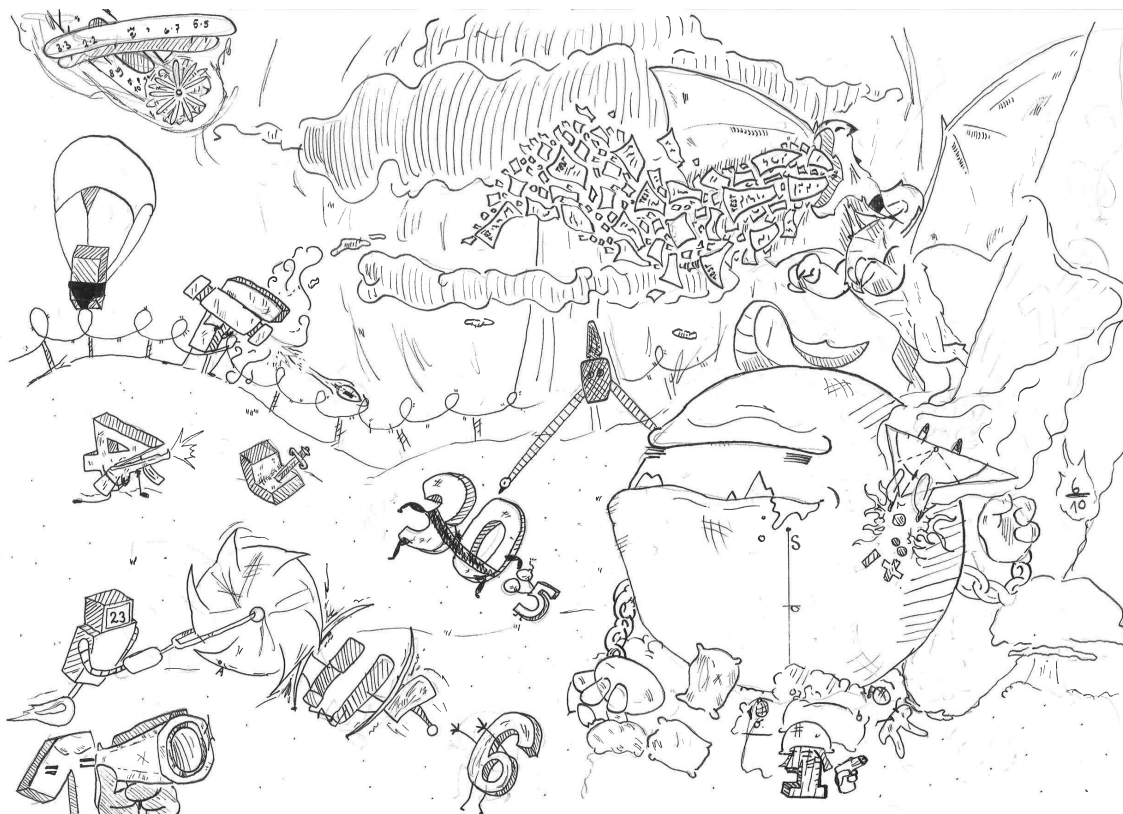

SLIKA 4.

Igra na mreži arhimedskega poliedra.

goriji (7.-9. razred) nagrado prejmejo mladostniki OŠ Montessori v Mariboru z Lovrom Potočnikom in mentorico Simono Ulamec in pa učenca Ema Jurjevčič in Benjamin Mahič z mentorico Sonjo Strgar z OŠ Antona Martina Slomška Vrhnika za sliko Boji v matematični deželi. V kategoriji srednješolcev nagrade prejmejo dijakinje Špela Škoda, Sara Arh, Neja Ančimer in Ivana Gorenc z mentorico Katjo Ilc s Kmetijske šole Grm in biotehniške gimnazije za spletno knjigo z naslovom Matematične dogodivščine družine Koren in pa Leon Pečavar z mentorico Urško Mihelič za originalno, lepo izdelano družabo igro Vojne verjetnosti.

Prav posebno pohvalo in nagrado pa si zaslužijo učenci in mentorji OŠ Prule, Evropske šole, OŠ Oskarja Kovačiča, OŠ Brinje Grosuplje in OŠ Leskovec, ki so tako kot že zadnjih nekaj let tudi letos pripravili skupen super matematični žur.

Vsem učenkam, učencem, dijakinjam in dijakom, mentoricam in mentorjem hvala, da ste se lotili našega izziva in iskrene čestitke!


SLIKA 5.

Boji v matematični deželi Eme Jurjevčič in Benjaminah Mahiča.

× × ×

Razlaga trika s kartami

↓ ↓ ↓

→ Namesto kart s števkami od 1 do 10 si predstavljajmo kar listke s števkami od 1 do $2N$. Premesamo jih in razdelimo na dva dela z N listki. En del listkov položimo v vrsto od največjega do najmanjšega, drugi del položimo nanje v obratni smeri. Tako dobimo N parov listkov. Bistveni element trika je, da vsak par sestavlja en listič s številom med $N + 1$ in $2N$ in en listič s številom med 1 in N . Denimo, da bi bila v k -tem paru na obeh lističih števili med 1 in N . Zaradi razvrstitve od največjega do

najmanjšega bi bilo v prvi vrsti desno od izbranega listka še $(N - k)$ listkov z manjšimi števili. Podobno bi v drugi vrsti našteali levo od izbranega listka še $(k - 1)$ listkov z manjšimi števili. Skupaj bi torej dobili $2 + (N - k) + (k - 1) = N + 1$ števil med 1 in N , kar ni mogoče. Podobno izločimo možnost, da sta na obeh listkih v paru števili, večji od N . V vsakem paru torej odštevamo neko število med 1 in N od števila med $N + 1$ in $2N$. Ko razlike seštejemo, uporabimo vsa možna števila, vrstni red pa v resnici ni pomemben, zato je končni rezultat enak

$$\begin{aligned} & \blacksquare (N + 1) + (N + 2) + \dots + 2N - 1 - 2 - \dots - N = \\ & = N + N + \dots + N = N^2. \end{aligned}$$

V triku z 10 kartami je $N = 5$ in torej vsota razlik $N^2 = 25$, v triku z 2024 lističi pa 1012^2 .

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.