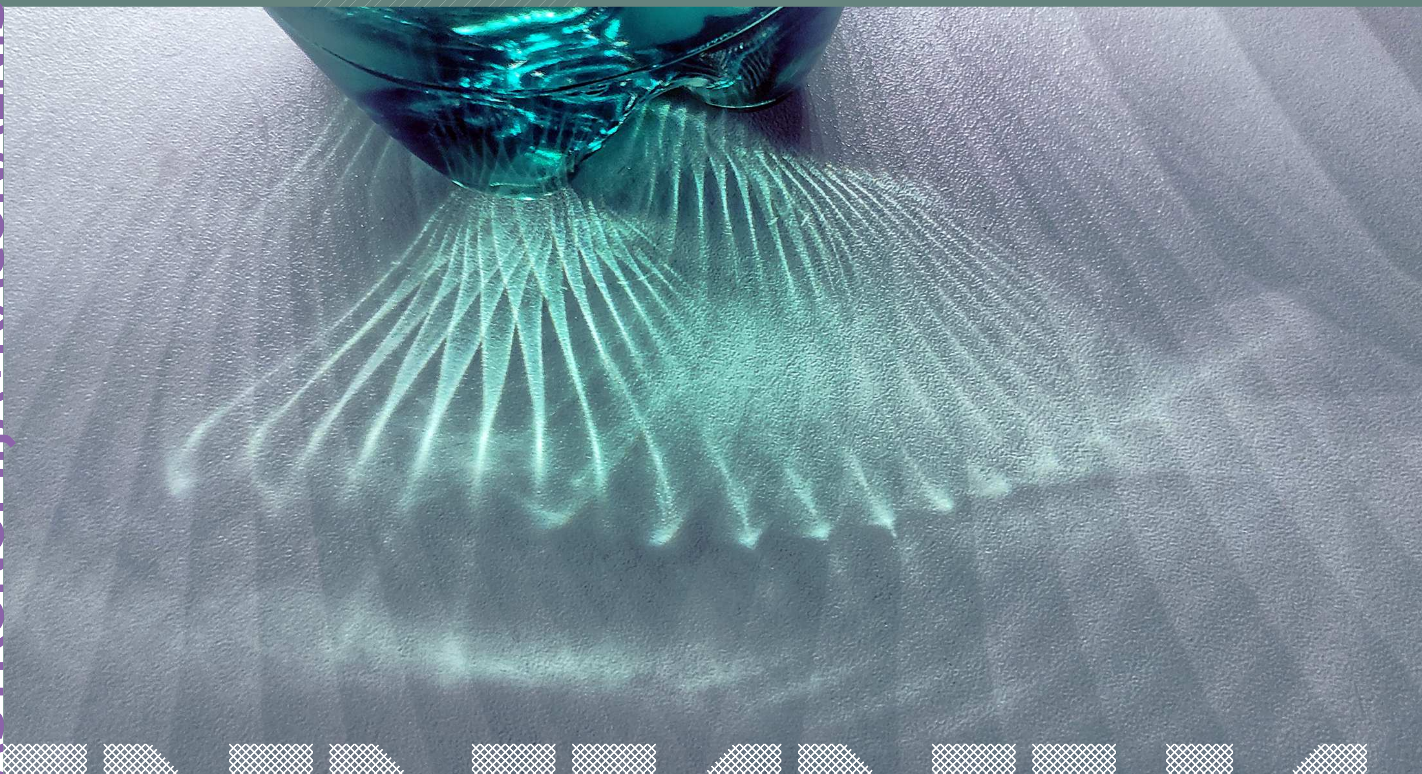
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#5

PRESEK LETNIK 51 (2023/2024) ŠTEVILKA 5



PRESEK

→ Mnogokotniške oblike naravnega števila

→ Ločljivost in nekatere napake fotografskega objektiva

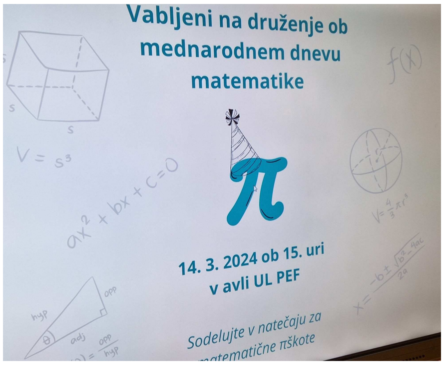
→ Ujemimo Luno!

ISSN 0351-6652

9 770351 665159

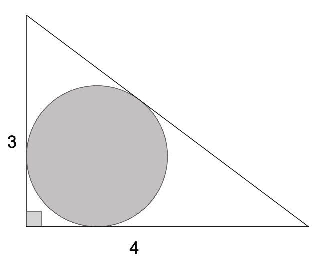
MATEMATIČNI TRENUTEK

Praznovanje dneva števila π



→ Obeleževanje 14. marca kot dneva števila π z različnimi šaljivo-matematičnimi aktivnostmi se je v zadnjih letih zelo razmahnilo tudi v Sloveniji. Pred Fakulteto za matematiko in fiziko v Ljubljani so letos navdušenci ponovno tekmovali v recitiranju decimalk – zmagal je devetletni Liam, ki je v približno 10 minutah zrecitiral 1500 decimalk, številni študentje in študentke pa so se izkazali tudi z mojstrsko spečenimi pitami. Na Pedagoški fakulteti v Ljubljani so študentje pripravili šaljiv matematični kviz, v katerem so nastopali znameniti matematiki in matematičarke od Pitagore in Evklida do Josipa Plemlja, Ade Lovelace, Sophie Germain in drugih. Na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije v Kopru so izvedli natečaj za najboljšo Piezijo, ogromno aktivnosti pa je potekalo tudi na različnih slovenskih osnovnih in srednjih šolah.

Ker je krožna konstanta Pi za matematike zares pomembna, bralce tokrat vabimo, da ji še sami namenijo nekaj trenutkov in rešijo naslednjo geometrijsko nalogo: Kolikšna je ploščina kroga na sliki?



× × ×

KOLOFON

→ **Presek**
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 51, šolsko leto 2023/2024, številka 5

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2023/2024 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online), **ISSN** 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **zalozba@fmf.uni-lj.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Trak LED-lučk, nekaj vode v plastenki in nastala je zanimiva optična igra loma svetlobe. Fotografija: Andrej Guštin

Očistimo Slovenijo

↓↓↓
Nino Bašić, urednik za računalništvo

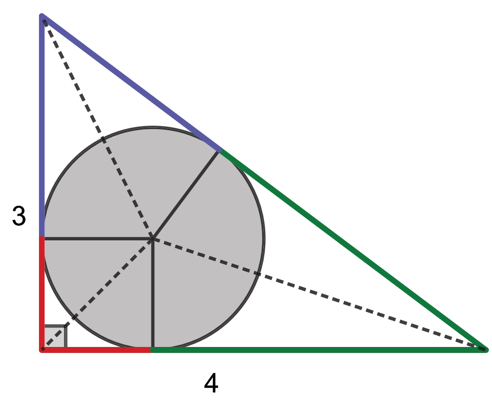
Nedavno je potekala prav posebna čistilna akcija, ki jo je organiziralo društvo Ekologi brez meja. V okviru akcije *Očistimo Slovenijo digitalnih odpadkov* (`https://digital.ocistimo.si/`) so ljudi pozivali, da izbrišejo svojo nepotrebno e-pošto, neuporabne aplikacije in druge neuporabne datoteke (npr. dvojnike fotografij in videoposnetkov). Akcijo je nedavno komentiral tudi Matjaž Klančar, urednik revije Monitor. Njegove pomisleke lahko preberete tukaj: `https://www.monitor.si/clanek/uvodnik-pridruzite-se-najlazji-cistilni-akciji-na-svetu/230916/`. Akcija je že zaključena, društvo pa je na svoji spletni strani zapisalo: »Na letošnjo prvo pobudo Ekologov brez meja in 028 komunikacijske skupine se je odzvalo 1288 posameznikov, ki so iz svojih digitalnih naprav izbrisali: 26 TB podatkov $\approx$ 5 ton prihranka izpustov toplogrednih plinov.« V svoji izjavi za javnost navajajo tudi, da »26 000 izbrisanih GB podatkov pomeni prihranek energije, ki bi jo porabili za 29 278 prevoženih kilometrov ali pridelavo 7 472 litrov mleka.« Priznam, da me je »matral firbec«, zato sem se tudi sam lotil razmišljanja, računanja in brskanja po literaturi. Vprašanje, ki sem si ga najprej zastavil, je bilo naslednje: Ali trdi disk, ki je napolnjen s podatki, troši več energije, kot če je prazen? Tako pri magnetnih trdih diskih kot tudi pri SSD diskih ne vidim nobenega očitnega tehničnega razloga, da bi bila poraba energije povezana z zasedenostjo. Diski namreč največ energije potrošijo, ko podatke na njih spreminjamo (kopiramo datoteke, ustvarjamo nove, brišemo obstoječe itd.). V mirovanju trdi diski trošijo relativno malo energije, pa če so napolnjeni s podatki ali pa ne. Kakšen je učinek, če nekaj 1000 ljudi zbriše s svojega diskovja po nekaj gigabajtov podatkov (kar je pravzaprav relativno malo)? Vsi ti diski bodo v uporabi še naprej, čeravno manj zapolnjeni. Učinek bi najbrž bil opazen šele, če bi zaradi

tega lahko nekaj diskov odstranili iz uporabe. Vzemimo na primer zunanji trdi disk WD 4TB My Passport. Zanj sem našel podatek, da v mirovanju porabi 1,45 W. Za hranjenje 26 TB podatkov bi tako potrebovali 7 takšnih diskov. Če bi bili diski priključeni ves čas (vse dni v letu po 24 ur na dan), bi posamezen disk potrošil približno 12,7 kWh elektrike v enem letu, vsi skupaj pa 88,9 kWh na leto. Za primerjavo, na spletni strani M Tehnika sem si ogledal hladilnik znamke Samsung. Ta po navedbah proizvajalca porabi 204 kWh elektrike na leto. Vendar ne vidim razloga, da bi bili zunanji diski priključeni na napajanje ves čas. Pa tudi dvomim, da je bil zaradi akcije en sam disk umaknjen iz uporabe. Bolj problematično se mi zdi vsakodnevno prenašanje glasbe in filmov po spletu preko pretočnih platform (angl. streaming), kot so YouTube, Spotify in Netflix. Pri ogledu enournega filma pri ločljivosti HD se pretoči tudi do 3 GB podatkov. Ljudem raje svetujmo, naj se namesto ogledov filmov na Netflixu sprehodijo v naravi in berejo knjige. Nato sem se vprašal: Koliko elektrike porabijo prenosniki in pametni telefoni v primerjavi z gospodinjskimi aparati? Za hladilnik že imamo občutek. Bralcu predlagam, da obišče spletno stran Energy Star (`https://www.energystar.gov/`) in poskuša poiskati podatke za naprave v svojem gospodinjstvu. Sam uporabljam prenosnik, ki ima litij-polimersko baterijo kapacitete 80 Wh. Pri običajnem delu baterija zdrži skoraj 5 ur. Če bi prenosnik uporabljal vse dni v letu po 10 ur, bi za polnjenje baterije porabil 58,4 kWh elektrike. Moj pametni telefon ima litij-ionsko baterijo kapacitete 4500 mAh. Napetost takšnih baterij je približno 4 V. Telefon polnim enkrat na dan, včasih pa celo po dvakrat. Če bi ga vsak drugi dan polnil dvakrat, bi v enem letu tako potrošil 9,9 kWh. Telefon in laptop potrošita skupaj manj kot hladilnik. Kaj šele, če ju primerjam z vsemi drugimi napravami (pečica, pralni stroj, klima itd.)! Če želimo torej prihraniti, ljudem raje svetujmo, naj manj perejo in manj kuhajo. Obstaja že nekaj literature na temo ogljičnega odtisa. Priznam, da nisem naredil poglobljene študije. Ogledal sem si članek U. Gupta, Y. G. Kim idr., *Chasing Carbon: The Elusive Environmental Footprint of Computing*, IEEE Micro **42** (2022) 37–47. Članek mi je ponudil nove perspektive za razmišljanje. Prvič, pri potrošniški elektroniki se energija ne porabi samo pri delovanju naprave, temveč tudi pri izdelavi, transportu do uporabnika in pri razgradnji po koncu uporabe. Na to kot potrošniki težko vplivamo. Drugič, potrošniška elektronika potroši mnogo manj energije kot podatkovni centri in internetna infrastruktura. Tudi na to kot posamezniki ne moremo kaj dosti vplivati. Korektno bi bilo narediti bolj poglobljeno študijo in ugotoviti, kako resnično lahko pripomoremo k zmanjšanju ogljičnega odtisa. Če imate kakšno res dobro idejo, vas na tem mestu vabim, da napišete prispevek za revijo Presek.

× × ×

Rešitev naloge s strani 2

→ Hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama 3 in 4 ima po Pitagorovem izreku dolžino 5. Označimo središče včrtanega kroga in ga povežimo z oglišči trikotnika (črtkana črta) in z dotikališči stranic (polna črta). Potem se zaradi skladnosti ujemajo pari daljic, ki so na skici označeni z rdečo, zeleno in modro barvo. Iskani polmer kroga r je enak dolžini rdeče daljice, dolžina hipotenuze pa je torej enaka $(3 - r) + (4 - r)$. Sledi, da je $r = 1$ in ploščina kroga je enaka π.



× × ×

Mnogokotniške oblike naravnega števila

Boštjan Kuzman

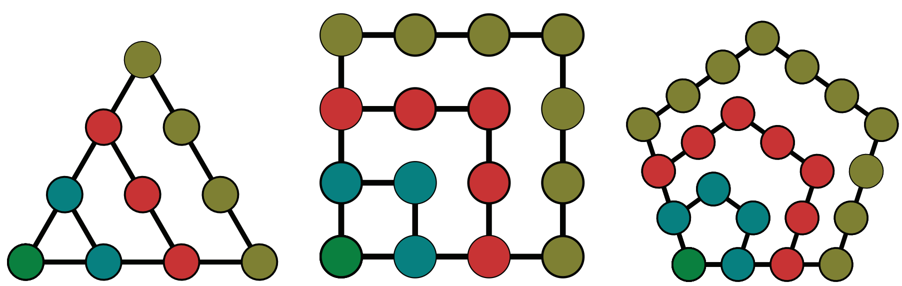
→ Proučevanje števil s pomočjo razporejanja enakih predmetov v različne geometrijske oblike je verjetno predstavljalo ena od najbolj osnovnih matematičnih aktivnosti starodavnih ljudstev. Trikotniška in kvadratna števila ter njihovo povezavo z vsoto zaporednih naravnih oziroma lihih števil naj bi poznali že pitagorejci v 6. stoletju pred našim štetjem, o splošnejših mnogokotniških številih pa je prvi pisal Nikomah iz Gerase okoli leta 100 našega štetja. Nekatera naravna števila lahko predstavimo na več mnogokotniških načinov – število 36 je denimo hkrati trikotniško in štirikotniško (oziroma kvadratno). V tem prispevku si bomo ogledali postopek, ki danemu naravnemu številu poišče vse njegove mnogokotniške oblike in ga preizkusili na številu 2024.

Naj bo $n \geqslant 3$ naravno število. Potem *k-to n-kotniško število* $P_n(k)$ predstavlja število objektov, razporejenih v pravilni n-kotnik tako, da je na posamezni stranici k objektov. Parametru k v tem primeru rečemo *red* n-kotniškega števila. Poseben primer mnogokotniških števil so trikotniška števila, ki predstavljajo vsoto zaporednih naravnih števil in jih izračunamo po formuli $P_3(k) = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, in štirikotniška oziroma kvadratna števila, ki predstavljajo vsoto zaporednih lihih števil $P_4(k) = 1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

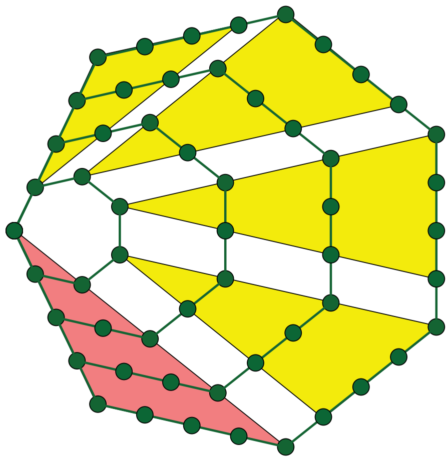
Splošno formulo za $P_n(k)$ najlažje izpeljemo z razrezom mnogokotnika na trikotnike. Za poljuben par n, k lahko ustrezni n-kotnik razrežemo na en trikotnik reda k in $(n-3)$ trikotnike reda $k-1$ (Slika 2), torej je

$$P_n(k) = \frac{k(k+1)}{2} + (n-3)\frac{(k-1)k}{2} = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}.$$

S preoblikovanjem tega izraza dobimo formulo za n-



SLIKA 1.
Trikotniško število reda 4 je enako 10, štirikotniško število reda 4 je enako 16 in petkotniško število reda 4 je enako 22.



SLIKA 2.
Razrez n-kotniškega števila na trikotniško število reda k in $(n-3)$ trikotniških števil reda $k-1$ za primer $n=7$ in $k=5$.

kotniško število reda k v obliki

- $P_n(k) = \dfrac{k}{2}\left(2 + (n-2)(k-1)\right).$

S to formulo lahko zdaj izračunamo mnogokotniška števila za dana n in k, denimo $P_7(3) = 18$. Nekaj vrednosti za majhne k in n smo zbrali v Tabeli 1.

Bralka in bralec bosta zdaj zlahka sama preverila, da iz mnogokotniške formule za primera $n = 3$ in 4 dobimo že znani formuli za trikotniška oziroma štirikotniška števila $P_3(k) = k(k+1)/2$ in $P_4(k) = k^2$. Prav tako za vsa števila $n \geqslant 3$ velja tudi, da je $P_n(1) = 1$, saj je prvo n-kotniško število vselej enako 1, in $P_n(2) = n$, torej je vsako n-kotniško število reda 2 kar enako n (z drugimi besedami, vsako naravno število $n \geqslant 3$ je n-kotniško na trivialen način).

Zdaj pa se vrnimo h glavnemu vprašanju iz uvoda: kako za dano naravno število N določiti vse njegove mnogokotniške oblike? Iz dosedanjih ugotovitev in Tabele 1 lahko razberemo, da je število 15 mnogokotniško na (vsaj) 3 načine:

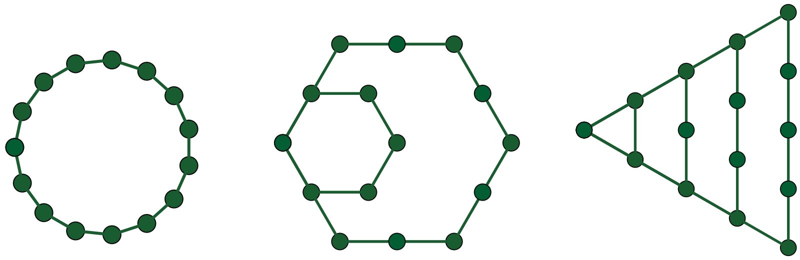
- $15 = P_2(15) = P_3(5) = P_6(3)$.

Za vsak izbrani $n \in \mathbb{N}$ se vprašanje, ali je $N = P_n(k)$ za kakšen k, z mnogokotniško formulo prevede na reševanje kvadratne enačbe v neznanki k. Nemški matematik Gustav Wertheim pa je leta 1897 opisal splošen postopek, kako ugotoviti, ali je dano število N mnogokotniško za katerikoli n, in določiti njegovo mnogokotniško obliko $P_n(k)$. Osnova postopka je naslednji izrek.

Izrek: *Naravno število N ima mnogokotniško obliko $P_n(k)$ za neki števili $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$, natanko tedaj, ko je k delitelj števila $2N$ in za naravno število $\ell = \frac{2N}{k}$ velja, da je $\ell > k$ in je $\frac{\ell-2}{k-1}$ naravno število. Tedaj je $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$.*

	k	1	2	3	4	5	6	7	8
Trikotniško	$P_3(k)$	1	3	6	10	15	21	28	36
Štirikotniško	$P_4(k)$	1	4	9	16	25	36	49	64
Petkotniško	$P_5(k)$	1	5	12	22	35	51	70	92
Šestkotniško	$P_6(k)$	1	6	15	28	45	66	91	120
Sedemkotniško	$P_7(k)$	1	7	18	34	55	81	112	148

TABELA 1.
Tabela n-kotniških števil reda k za majhne n in k.



SLIKA 3.
Tri mnogokotniške oblike števila 15.

Dokaz. Denimo, da je $N = P_n(k) = \frac{k}{2}(2 + (n-2)(k-1))$ za ustrezni števili n, k. Potem sledi $2N = k\ell$ za $\ell = 2+(n-2)(k-1) \in \mathbb{N}$. Za $n \geqslant 3$ velja $\ell \geqslant 2+1\cdot(k-1) > k$ in izrazimo lahko $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$, torej mora biti izraz v ulomku celo število. S tem smo preverili, da so vsi pogoji potrebni. V obratno smer razmislimo takole. Denimo, da imamo ustrezni števili k, ℓ kot v izreku. Če vstavimo $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$ v formulo za $P_n(k)$, po krajšem izračunu dobimo $P_n(k) = N$. □

Izrek nam da preprost algoritem, s katerim lahko določimo vse mnogokotniške oblike danega števila N, če poznamo njegov razcep na prafaktorje. Za vsak delitelj k števila $2N$, tako da je $2 \leqslant k < \sqrt{2N}$, določimo število $\ell = \frac{2N}{k}$ (pogoj $k < \sqrt{2N}$ pomeni, da je $k < \ell$). Če je $\frac{\ell-2}{k-1}$ naravno število, potem je iskano število stranic enako $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$, sicer pa ustrezna oblika ne obstaja. Vsak par celoštevilskih rešitev (n, k) da mnogokotniško obliko števila $N = P_n(k)$.

Za prvi zgled uporabimo opisani algoritem za število $N = 15$. Velja $2N = 30 = 2\cdot 3\cdot 5$. Ker je $\sqrt{2N} < 6$, je dovolj preveriti delitelje $k = 2, 3, 5 < 6$ števila $2N$:

- Za $k = 2$ dobimo $\ell = \frac{2N}{k} = 15$. Število $\frac{\ell-2}{k-1} = 13$ je celo in zato je $n = 13 + 2 = 15$ ustrezna rešitev. Našli smo torej trivialno mnogokotniško obliko $15 = P_{15}(2)$.
- Za $k = 3$ dobimo $\ell = 10$ in število $\frac{\ell-2}{k-1} = 4$ je zopet celo. Torej je $n = 6$ in velja $15 = P_6(3)$.
- Za $k = 5$ dobimo še $\ell = 6$ in $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2 = 3$, torej je $15 = P_3(5)$.

Dobili smo natanko tri mnogokotniške oblike števila 15 (Slika 3), ki jih poznamo že od prej.

Za drugi zgled uporabimo opisani algoritem še za število $N = 60$. Potem je $2N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ in velja $\sqrt{2N} < 11$. V tem primeru so ustrezni delitelji $k = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Za vsakega izračunamo ustrezni ℓ ter pogledamo, ali je $\frac{\ell-2}{k-1}$ celo število, nato določimo n. Toda smiselno rešitev najdemo le v dveh primerih, kot kaže Tabela 2.

k	$\ell = 2N/k$	$\frac{\ell-2}{k-1}$	n
2	60	58	60
3	40	19	21
4	30	28/3	/
5	24	22/4	/
6	20	18/5	/
8	15	13/7	/
10	12	10/9	/

TABELA 2.
Uporaba algoritma na številu $N = 60$.

Tako smo preverili, da ima število 60 natanko dve mnogokotniški obliki. Poleg trivialne $P_{60}(2)$ še 21-kotniško $P_{21}(3)$.

Kot smo napovedali na začetku, lahko z uporabo algoritma obravnavamo še letošnjo letnico $2024 = 2^3 \cdot 253$. Izkaže se, da ima natanko dve mnogokotniški obliki. Poleg (trivialne) 2024-kotniške $P_{2024}(2)$ ima še 74-kotniško obliko $P_{74}(8)$. Pravilnost te trditve lahko bralec in bralka preverita sama. Nadobudnim programerjem in programerkam pa prepustimo še zanimivejši izziv: napisati računalniški program, ki bo na osnovi opisanega algoritma določil (in morda celo narisal?) vse mnogokotniške oblike danega števila N.

× × ×

Štiri medalje za Slovenijo na EGMO 2024 v Gruziji

Kaja Rajter, Ana Meta Dolinar

S podelitvijo medalj in priznanj najupešnejšim tekmovalkam se je v torek, 16. aprila 2024, zvečer zaključila 13. Evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO - European Girls' Mathematical Olympiad), ki je potekala v mestu Tskaltubo v Gruziji. Največjega mednarodnega tekmovanja za srednješolke, na katerem je tokrat sodelovalo več kot 200 tekmovalk iz 53 držav, se je že dvanajstič zapored udeležila tudi slovenska ekipa. Ta je ekipno dosegla najboljši rezultat doslej, saj so vse štiri tekmovalke osvojile medalje.

SLIKA 1.
Slovenska ekipa od leve proti desni: vodja Kaja Rajter, tekmovalke Zara Barbarić, Patricia Király, Nives Gošnjak in Ekaterina Chizhova ter pomočnica vodje Katarina Grilj.

S srebrno medaljo se je med našimi tekmovalkami najbolje odrezala najmlajša med njimi, Ekaterina Chizhova (Gimnazija Bežigrad), tudi druge tri slovenske tekmovalke pa so pokazale veliko znanja, saj so Nives Gošnjak (ŠC Velenje, Gimnazija), Patricia Király in Zara Barbarić (obe Gimnazija Bežigrad) osvojile bronaste medalje, pri čemer sta Nives in Patricia srebro zgrešili le za eno točko. Slovenija je skupaj dosegla 82 točk in osvojila 10. mesto med evropskimi ekipami, kar je najbolje doslej. Ekipno prvo mesto je osvojila ekipa ZDA, med evropskimi ekipami pa je bila najboljša Ukrajina. Skupno je bilo tekmovalkam podeljenih 25 zlatih, 38 srebrnih in 52 bronastih medalj ter 28 pohval.

Namen udeležbe na posebni matematični olimpijadi za dekleta je omogočiti dekletom dodatno spodbudo za udejstvovanje na akademskem področju, kjer so bila tradicionalno zapostavljena, in na ta način doseči večjo uravnoteženost spolov tudi na običajni Mednarodni matematični olimpijadi (IMO) in v akademski in raziskovalni sferi na splošno. Samo tekmovanje sicer poteka dva dneva. Tekmovalke vsak dan 4 ure in pol rešujejo 3 zahtevne problemske naloge iz različnih vej matematike (teorija števil, kombinatorika, geometrija in algebra), ki jih izmed prejetih predlogov različnih držav izbere tekmovalna komisija.

Celoletne priprave in izbor ekip za mednarodna tekmovanja iz matematike za srednješolke in srednješolce tradicionalno potekajo pod okriljem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z bivšimi tekmovalkami in tekmovalci in z različnimi fakultetami. Slovensko ekipo sta letos vodili bivši tekmovalki Katarina Grilj in Kaja Rajter, kot koordinatorji so pri izvedbi olimpijade sodelovali še Neca Camlek, Lenart Dolinar, Hugo Trebše in Ana Meta Dolinar, ki je bila tudi članica odbora za izbiro nalog in članica odbora EGMO.

Sobota, 13. april 2024

Naloga 1. Na tabli sta napisani dve različni celi števili u in v. Izvedemo zaporedje korakov, pri čemer v vsakem koraku naredimo eno izmed naslednjih dveh potez:

(i) Če sta a in b različni celi števili na tabli, lahko na tablo napišemo $a+b$, če tega števila še ni tam.

(ii) Če so a, b in c tri različna števila na tabli in če za celo število x velja $ax^2+bx+c=0$, lahko na tablo napišemo x, če tega števila še ni tam.

Določi vse začetne pare števil (u, v), za katere lahko na tabli v končnem številu korakov dobimo poljubno celo število.

Naloga 2. Naj bo ABC trikotnik, pri čemer je $|AC| > |AB|$. Z Ω označimo njegovo očrtano krožnico ter z I središče včrtane krožnice trikotnika. Včrtana krožnica se dotika stranic BC, CA, AB zaporedoma v D, E, F. Naj bosta X in Y zaporedoma dve točki na krajših lokih $\widehat{DF}$ in $\widehat{DE}$ včrtane krožnice, tako da velja $\angle BXD = \angle DYC$. Naj se premici XY in BC sekata v točki K. Naj bo T takšna točka na Ω, da je KT tangentna na Ω in da T leži na isti strani premice BC kot A. Dokaži, da se premici TD in AI sekata na Ω.

Naloga 3. Naravno število n je *svojevrstno*, če za vsak pozitiven delitelj d števila n celo število $d(d+1)$ deli $n(n+1)$. Dokaži, da za poljubna štiri različna svojevrstna naravna števila A, B, C in D velja:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Pri tem je $\gcd(A, B, C, D)$ *največje naravno število, ki deli vsakega izmed števil* A, B, C *in* D.

SLIKA 2.
Naloge prvega tekmovalnega dne.

Letos so se slovenske tekmovalke na olimpijado nekaj dni pripravljale v Plemljevi vili na Bledu in ob tem spoznale tudi delček slovenske matematične dediščine. K izjemnemu uspehu in dodatni motivaciji slovenskih tekmovalk za delo pa je gotovo prispevala tudi odlična organizacija lanske olimpijade EGMO 2023 v Portorožu. Vse štiri slovenske tekmovalke so se olimpijade namreč udeležile že lani in tako pridobile pomembne izkušnje za letošnji uspeh. Prihodnje leto bo olimpijada potekala v Prištini na Kosovu.

Udeležbo slovenskih tekmovalk na EGMO 2024 v Gruziji sofinancira Javni štipendijski, razvojni, invalidski in preživninski sklad Republike Slovenije (JŠRIPS). Diamantni sponzor aktivnosti DMFA Slovenije v letu 2024 je podjetje Zavarovalna skupina Sava.

Za bralke in bralce Preseka povejmo še nekaj o letošnjih nalogah. Kot običajno se je za najtežjo na tekmovanju izkazala 6. naloga, ki je v celoti ni uspela rešiti nobena izmed 212 tekmovalk. Slovenske tekmovalke pa so bile zelo uspešne pri 4. nalogi, ki so jo vse štiri rešile popolnoma pravilno. S tem je bila Slovenija ena izmed le treh evropskih držav z vsemi točkami pri 4. nalogi. Besedilo in rešitev te naloge objavljamo v nadaljevanju.

SLIKA 3.
Razširjena slovenska odprava.

Naloga 4: Za zaporedje celih števil $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ je par (a_i, a_j), pri čemer je $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *zanimiv*, če obstaja par celih števil (a_k, a_l), pri čemer je $1 \leqslant k < l \leqslant n$, da velja

$$\frac{a_l - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Za vsak $n \geqslant 3$ poišči največje možno število zanimivih parov v zaporedju dolžine n.

Rešitev: Najprej opazimo, da je število vseh parov z indeksi $1 \leqslant i < j \leqslant n$ enako

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

saj je za $i = 1$ ustreznih indeksov j natanko $(n-1)$, za $i = 2$ natanko $(n-2)$ in tako dalje.

Z nekaj intuicije bomo zdaj našli zaporedje, ki ima veliko zanimivih parov, nato pa dokazali, da večje število zanimivih parov ni možno. Oglejmo si zaporedje $a_i = 2^i$ za $2 \leqslant i \leqslant n$ in $a_1 = 0$. Izberimo katerikoli par (a_i, a_j), kjer velja $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Če je $i = 1$, je par (a_1, a_j) zanimiv za vse $2 \leqslant j \leqslant n-1$, ker velja

$$\frac{a_{j+1} - a_1}{a_j - a_1} = \frac{2^{j+1}}{2^j} = 2.$$

Če je $i \geqslant 2$, je par (a_i, a_j) zanimiv za vse j, kjer je $i + 1 \leqslant j \leqslant n - 1$, saj je

$$\frac{a_{j+1} - a_{i+1}}{a_j - a_i} = \frac{2^{j+1} - 2^{i+1}}{2^j - 2^i} = 2.$$

Poleg tega je zanimiv tudi par (a_{n-1}, a_n), saj velja

$$\frac{a_n - a_1}{a_n - a_{n-1}} = \frac{2^n - 0}{2^n - 2^{n-1}} = 2.$$

Torej smo pokazali, da so v tem zaporedju zanimivi vsi pari z indeksi $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ in še par (a_{n-1}, a_n). Nezanimivi so le pari (a_i, a_n) za $i = 1, \ldots, n-2$, ki jih je skupaj $n-2$. Vseh zanimivih parov v tem zaporedju je torej natanko

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-2) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}.$$

Zdaj dokažimo, da nobeno zaporedje nima več kot toliko zanimivih parov. Pokazali bomo, da vsaj $n-2$ parov ni zanimivih. Par (a_1, a_n) ni zanimiv, saj bi za to potrebovali $a_l - a_k = 2(a_n - a_1)$, vendar pa je razlika $(a_n - a_1)$ največja od vseh razlik med pari, zato ne moremo najti a_l in a_k s še enkrat večjo razliko.

Opazimo naslednje: če je par (a_i, a_j) zanimiv in ni enak (a_1, a_n), potem razlika $a_j - a_i$ ne more biti večja od $(a_n - a_1)/2$. Če je namreč par (a_i, a_j) zanimiv, potem velja $a_l - a_k = 2(a_j - a_i)$ za neki par (a_k, a_l), zato bi iz $2(a_j - a_i) > a_n - a_1$ sledilo $a_l - a_k > a_n - a_1$, kar pa ni mogoče.

Zdaj si za vsak $2 \leqslant i \leqslant n-1$ oglejmo para (a_1, a_i) in (a_i, a_n). Če bi bila oba zanimiva, potem (upoštevajoč opažanje iz prejšnjega odstavka) je edina možnost $a_i - a_1 = a_n - a_i = (a_n - a_1)/2$. To je mogoče za največ en i, za vseh ostalih $n-3$ možnih vrednosti za i pa vsaj eden od parov (a_1, a_i) in (a_i, a_n) ni zanimiv. Skupaj s parom (a_1, a_n) dobimo vsaj $n-2$ nezanimivih parov, kar je točno to, kar smo želeli dokazati.

Največje možno število zanimivih parov je torej

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2}.$$

× × ×

Ločljivost in nekatere napake fotografskega objektiva

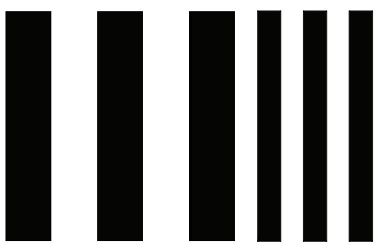
Peter Legiša

→ **Članek je nadaljevanje Presekovega prispevka *Kaj povejo krivulje za MTF o fotografskem objektivu* [1].**

1. Ločljivost lečja

Včasih so ločljivost objektivov preizkušali tako, da so objektiv usmerili na tarčo s črnimi stolpci, ločenimi z enako širokimi belimi prostori – kot na sliki 1.

En črni stolpec in beli prostor ob njem sta en **črtni par**. Z mikroskopom so ugotavljali **število črtnih parov = ciklov na milimeter slike**, to je **frekvenco** vzorca, pri kateri so na sliki lahko še ločili posamezne stolpce. Izkaže se, da je tako preštevanje precej nezanesljivo.



SLIKA 1.
Dvakrat po trije črtni pari. Frekvenca desne trojice je dvakratnik frekvence leve.

Ločljivost omejuje **uklon** ali **difrakcija** svetlobe, ki je posledica valovne narave svetlobe. Čim manjša je odprtina, skozi katero gre svetloba, tem bolj uklon pokvari sliko.

Po *Rayleighevem kriteriju* [[?] str. 131]; glej tudi Strnadov učbenik [[?] str. 552] je teoretično največja frekvenca, ki jo loči objektiv,

$$\frac{1}{1,22 \quad \lambda z},$$

kjer je z zaslonsko število in λ valovna dolžina svetlobe. (Če ima enostavna leča z goriščno razdaljo f premer d, je zaslonsko število te leče $z = f/d$.) Z zaslonko lahko zmanjšamo odprtino leče in tako zvišamo z, obenem pa povečamo negativni vpliv difrakcije.

Vzemimo za λ kar valovno dolžino, pri kateri je oko najbolj občutljivo: $\lambda = 0.55$ mikrometra. Potem je največja ločljivost enaka približno

$$\frac{1500}{z}\mathrm{mm}^{-1}.$$

Pri zaslonskem številu $z = 11$ je ločljivost kvečjemu 135 črtnih parov na mm, pri zaslonki $z = 22$ pa pol tega, torej le 68 črtnih parov na mm.

Ločljivost tipala

Velika omejitev je še *ločljivost tipala* fotoaparata. Tipalo polnega formata (24 mm krat 36 mm) s 4000×6000 piksli, torej s 24 MP, ima kvadraten piksel z robom 6 mikrometrov. Za upodobitev črtnega para potrebujemo dva piksla, torej 12 mikrometrov. Največja ločljivost je torej $1000/12 \approx 83$ črtnih parov na milimeter. To je po [[?] str. 9-11] podobno ločljivosti nizko občutljivega barvnega negativnega filma. Standardni nizko občutljivi črnobeli filmi naj bi imeli nekoliko večjo ločljivost. Če na aparatu polnega formata s 24 MP zapremo zaslonko z 11 na 22, lahko po gornjem računu pričakujemo poslabšanje slike.

Tipalo polnega formata B z 48 MP ima na enaki površini dvakrat toliko pikslov kot tipalo A s 24 MP. Površina enega piksla tipala B je torej polovica površine piksla tipala A. Tako rob piksla tipala B meri

- $\frac{6}{\sqrt{2}}$ mikrometrov.

Ločljivost tipala B je torej ločljivost tipala A, pomnožena s $\sqrt{2}$, torej približno 118 črtnih parov na milimeter. Podobno vidimo, da je ločljivost tipala polnega formata z 61 MP približno 130 črtnih parov na milimeter slike. Pri obeh visokoločljivih tipalih že zaprtje zaslonke z 11 na 16 pomeni manj podrobnosti na sliki, vsaj pri dobrem objektivu.

Poudarimo, da sodobna tipala zelo dobro izkoristijo vpadajočo svetlobo in so zato pri šibki svetlobi mnogo boljša od filmov. Pri malih tipalih, ki v eno smer merijo le nekaj milimetrov, mora biti zaslonsko število z majhno, če želimo kolikor toliko spodobno ločljivost celotne slike. Tako objektivi na telefonih nimajo zaslonke, ki bi pri močni svetlobi ožila odprtino, saj bi uklon takoj pokvaril sliko.

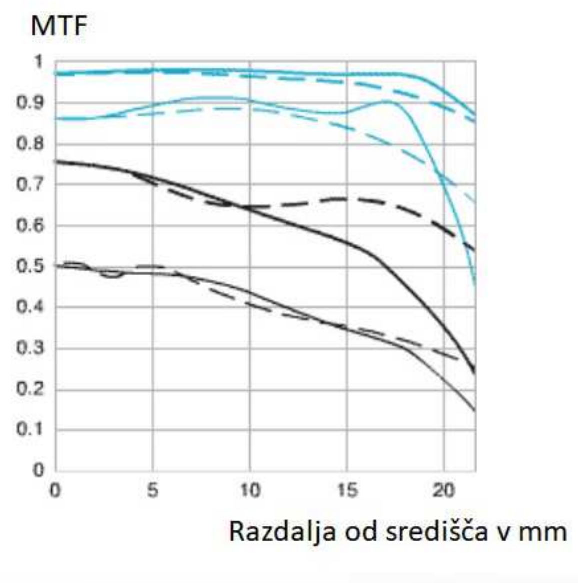
Ena vrednost MTF ne pove vsega

Faktor prenosa modulacije **MTF** – *Modulation Transfer Factor* objektiva meri, koliko lečje zmanjša kontrast tarče v dani točki T slike 1. Lahko bi ga tudi imenovali *faktor prenosa kontrasta.* Faktor je med 0 in 1. Želimo si, da je čim bliže 1, se pravi, da je kontrast kar najbolj ohranjen. Faktor je odvisen od frekvence vzorca, se pravi števila ciklov vzorca na milimeter slike. (Kot smo povedali v prvem članku, uporabljamo vzorce, katerih svetlost ne skače s črnega na belo, ampak se spreminja sinusno). Pri majhni frekvenci - denimo 10 ciklih na mm, je MTF objektiven kriterij za kontrastnost objektiva. Pri veliki frekvenci, to je 30-50 ciklov na mm, pa je MTF objektiven kriterij za *ločljivost* objektiva. **Radialni (sagitalni) MTF** je izmerjen ali izračunan za vzorce, ki so vzporedni zveznici točke T s središčem slike. **Tangentni (meridionalni) MTF** pa pripada vzorcem, ki so pravokotni na to zveznico. Če MTF izmerimo v več točkah, navadno od središča slike do vogala, dobimo **funkcijo MTF–Modulation Transfer Function.**

Prikaz MTF je narejen pri določeni oddaljenosti tarče (morda 25 ali 100 goriščnih razdalj ali pa v neskončnosti) in bi bil pri drugi razdalji lahko drugačen.

Mnogi prikazi so narejeni le za polno odprtino. Če na aparatih z velikim tipalom zapremo objektiv za dve, tri zaslonke od polne odprtine, so navadno MTF rezultati boljši. Na sliki 2 imamo stari prikaz MTF za sedemlečni objektiv Canon EF 50 mm f/1.4 USM pri dveh zaslonskih številih: $z = 1,4$ (črna barva) in $z = 8$ (modra barva). Rezultati pri 8 so neprimerno boljši in pomenijo odlično kakovost skoraj celotne slike. Črtkano so tangentne, polno radialne vrednosti za MTF. (Mimogrede, objektiv je po izkušnjah odličen vsaj na intervalu od 5,6 do 11.)

Lahko pogledate še poljudni članek [?].



SLIKA 2.
Stari prikaz (pred 2018) krivulj MTF za objektiv Canon EF 50 mm f/1.4 USM. Modro obarvane so vrednosti pri zaslonskem številu 8, črno (sivo) pri polni odprtini (1,4). Vsakič je zgoraj frekvenca 10, spodaj frekvenca 30 ciklov na mm.

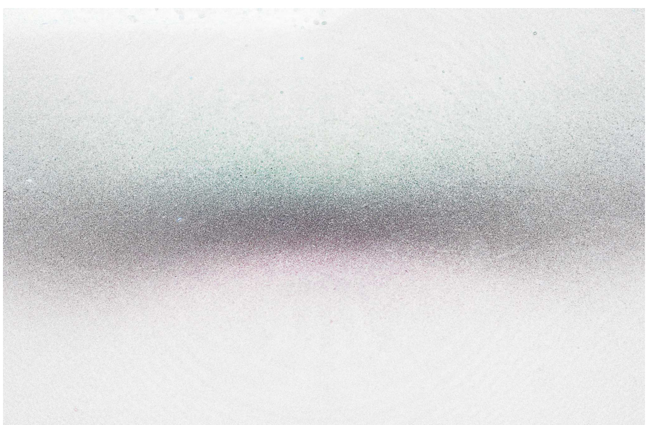
Ko fotografiramo, velja [[?] str. 23]: **MTF upodobitve je produkt MTF objektiva in tipala (pri dani frekvenci in v dani točki).** Števili, ki ju množimo, sta manjši od 1, zato je rezultat manjši kot faktorja.

Ukrivljenost in nagib slike

Strnadov učbenik [[?] str. 541-542] govori o kar pogosti napaki lečja, to je **ukrivljenosti slike** – angleško *field curvature.* Se pravi: najbolj ostre slike točk ravne ploskve, pravokotne na optično os, sestavljajo krivo, morda celo valovito ploskev. Tudi če je ta ploskev skoraj ravna, je zaradi tovarniških napak lahko nagnjena glede na os. Tej napaki rečejo **nagnjenost slike**, angleško *tilt*. Ker pri merjenju MTF izostrijo na sredino, ti napaki zbijeta MTF vrednosti stran od središča. Želimo, da sta ukrivljenost in nagib slike minimalna, saj imamo sicer težave s slikanjem fasad, skupin ljudi..., zato je tak način merjenja smiseln. Valovitost slike lahko povzroči valovitost grafa MTF.

Preprost, a zelo poveden preizkus

S prej omenjenim 50 – milimetrskim objektivom je bil pri zaslonskem številu z=1,4 poševno navzdol posnet raven grob asfalt. Daljši rob tipala je bil vodoraven. Razdalja do točk na sliki je naraščala od spodaj navzgor, izostreno je bilo na sredino. Globinska ostrina (glejte Presekov članek [?] ali Strnadov učbenik [[?] str. 544-546]) pri tako odprtem lečju je prav majhna; zato pričakujemo, da je na fotografiji oster le ozek pas.



SLIKA 3.
Področje ostrih robov fotografije grobega asfalta s 50 – milimetrskim objektivom pri zaslonskem številu 1,4.

Fotografija je v programu Photoshop (Elements) šla nato skozi filter *Najdi robove*: *Filter/Stylize/Find Edges*. Ta filter temno obarva dele slike z mnogo robovi, to je z naglimi prehodi s temnega na svetlo. Asfalt je poln podrobnosti in največ takih prehodov je na ostro upodobljenih delih. Filtrirana fotografija je na sliki 3. Vidimo, da je najbolj temna in torej najbolj ostra sredina fotografije, levo in desno od sredine proti robovom pa ostrina popušča – kot je napovedal graf za MTF.

V prejšnjem članku [?] obravnavani avtorjev širokotni zoom 20-35 mm je po izkušnjah najšibkejši pri 35 mm.

SLIKA 4.
Travnik; na desni najbolje upodobljeni deli.

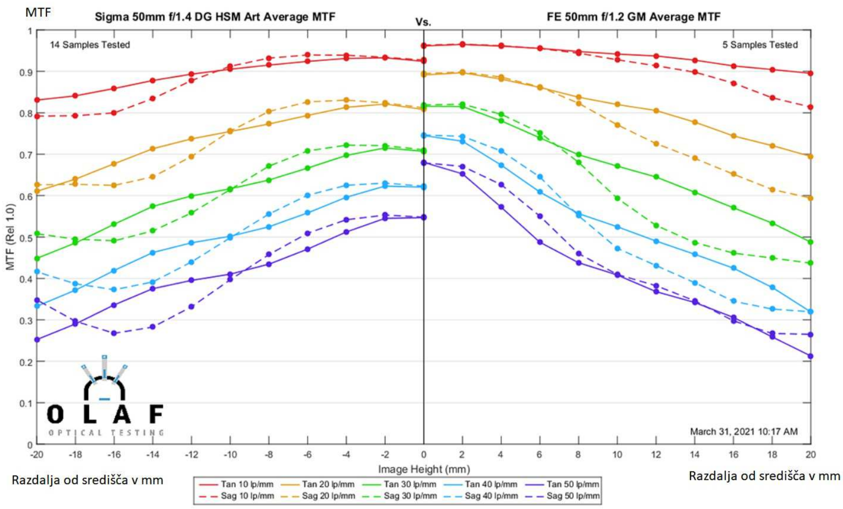
Fotografija travnika na levi strani slike 4 je bila narejena pri goriščni razdalji 35 mm in polni odprtini (1:4,5). Na desni strani te slike so spet »robovi«

Temna lisa je drugačna kot prej: nagnjena in ukrivljena. Je tudi široka, saj je globinska ostrina zaradi manjše odprtine in manjše goriščne razdalje precej večja. Nagib je hud, tudi ukrivljenost je precejšnja.

Zoom spreminja goriščno razdaljo s premikanjem dela lečja. Morda je ta del lečja vpet le na eni strani in se pri 35 mm postavi rahlo poševno ... Če zapremo zaslonko na 8 ali 11, zmanjšamo vpliv takih napak.

Statistične metode

Zanimiva je zgodba o novostih v MTF testiranju, za katerimi je zdravnik Roger Cicala iz ameriškega mesta Memphis. Ta gospod je avtor več medicinskih



Sigma 50mm F1.4 Art @ F1.4 | Sony FE 50mm F1.2 GM @ F1.2
Lensrentals.com, 2021

SLIKA 5.
Povprečje meritev MTF za dva objektiva.

učbenikov in soavtor več deset znanstvenih člankov s področja anesteziologije. Začel je posojati svojo zbirko drage fotografske opreme. Iz tega je sčasoma nastalo družinsko podjetje *Lensrentals* z več kot 150 zaposlenimi. Ker so nekatere stranke trdile, da so izposojeni objektivi neostri, je bilo treba to preverjati. Proizvajalci pa svojih kriterijev in priročnikov za popravilo niso želeli deliti. Oporekali so stvarnim napakam izdelkov. Eden od inženirjev ga je pokroviteljsko potrepljal in mu rekel: »Nimate osnov, da bi razumeli meroslovje.« To je Cicalo razjezilo, saj je v raziskavah na področju medicine uporabljal veliko statističnih orodij.

Začel je sam študirati tematiko, zaposlil optične tehnike in kupil drago nemško opremo za MTF testiranje. Na prakso je vzel podiplomske študente z ugledne ustanove *The Institute of Optics* na *University of Rochester*. (Donna Strickland in Gérard Mourou sta 2018 dobila Nobelovo nagrado za raziskave na področju laserjev, opravljene na tem inštitutu.)

V podjetju so razvili inovativne metode za testiranje objektivov. Mnoge rezultate testiranja je Cicala delil z javnostjo. Na svojem blogu na strani *Lensrentals* je objavil MTF grafe, ki so povprečje meritev več (vsaj pet) primerkov objektiva. In to pri merjenju do vseh štirih vogalov slike ter pri frekvencah, 10, 20, 30, 40, 50 mm^{-1}.

Na sliki 5 imamo te grafe za dva moderna 50 – milimetrska objektiva pri polni odprtini. Desni objektiv je izjemno svetel z odprtino f/1.2. Rdeča barva je za frekvenco 10, vijoličasta za frekvenco 50 ciklov na milimeter. Sagitalne vrednosti so črtkane. Za desnim grafom je 550 točkovnih meritev, za levim 1540. Primerjajte zelene grafe pri frekvenci 30 s sivima (najnižjima) grafoma pri isti frekvenci na sliki 2.

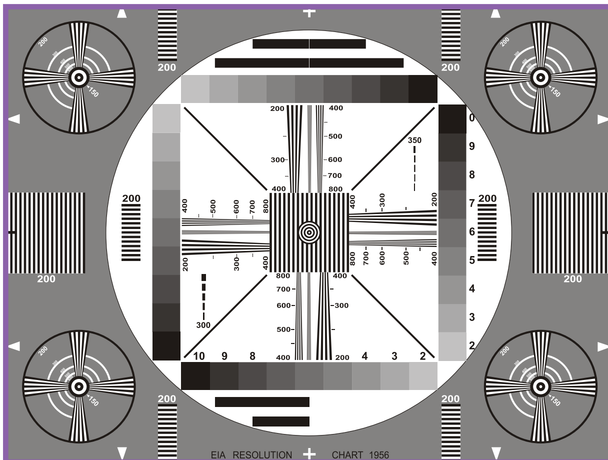
Te MTF prikaze najdemo še pri več objektivih na [**?**] – če pregled vsebine na začetku vsebuje postavko MTF.

Cicala je na svojem blogu objavil tudi prikaze razpršenosti rezultatov meritev za nekatere objektive. To veliko pove o kakovosti proizvodnje in kontroli kakovosti v tovarni. (Pri cenejših znamkah in pri ultraširokotnih objetivih je pri nakupu navadno več loterije: lahko imamo srečo in dobimo dober primerek ali pa tudi ne.)

Objavil je celo statistične podatke o tem, kako dobro objektivi prenašajo rabo in zlorabo. Objektiv s slike 2 se odlikuje po tem, da tudi po mnogih izposojah skoraj ne spreminja karakteristik. To se ujema z avtorjevo izkušnjo: kamera s tem objektivom je padla tri desetletja nazaj iz cenene torbice (s slabo zaporo) na tlakovana tla. Aparatu ni bilo nič, objektiv pa je zablokiral. Na servisu so morali le poravnati vodila in objektiv je v uporabi še danes.

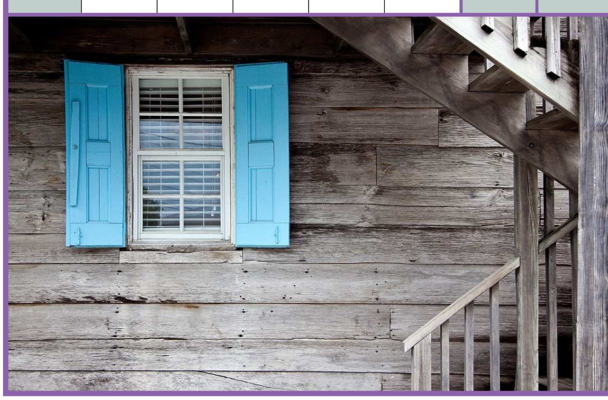
18
nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ
IGRALCA CARREY IN BELUSHI
PRISOTNOST NA SEZNAMU, PLASIRANOST
FRANCOSKI SKLADATELJ (MAURICE)
HRVAŠKO NAFTNO PODJETJE
JUGOVZHOD
NASELJE IN REKA V DOLINI POD NANOSOM
AMERIŠKI IZUMITELJ (THOMAS ALVA)
AMERIŠKI PROGRAMER IN POSLOVNEŽ (BILL)
VZNEMIRLJIVA DOGODIVŠČINA
NAŠ MATEMATIK IZ 18. STOLETJA, BARON
NAŠ POKOJNI MATEMATIK, AKADEMIK
SENO
KRHKO PECIVO Z NADEVOM
GOSTILNIČAR
VITKA DVOJAMBORNICA IZ SKUPINE ŠKUN
PRISLOV ČASA
PRIPRAVA ZA NA OČI
ŽIVALSKA ZGODBA
RIM. BOGINJA PRAVIČNOSTI

dMFA
NERESNO DEJANJE ALI RAVNANJE
SINČEK BREZ BRATCA ALI SESTRICE
VELIKA MNOŽINA DROBNIH DELCEV V OZRAČJU
BRAZILSKA DENARNA ENOTA
STAROGRŠKI TRAGIK
TEDENSKI ČASOPIS ALI REVIJA
REDOVNIK, KI JE DUHOVNIK
RADON
4
SEDMI PLANET
NAŠ IGRALEC (BORIS)
SIMBOL ZA ELEKT. NAPETOST
PRVOBITNOST
NEPREKINJENOST, KONTINUIRANOST
OSREDNJI VRH MARTULJKOVE SKUPINE V JULIJCIH
KRATICA SLUŽBE ZA STIKE Z JAVNOSTJO
HEKTAR
OTRPLOST, OLESENELOST
IZGUBA GLADKOSTI
PRITLIKAV AZIJSKI JELEN
3
SLIKAR JAKOPIČ
VELIKOMORAVSKI KNEZ
ZAPOREDNI ČRKI
2
LETALO
ENOTA ZA RAZDALJE MED KRAJI
ČARLI NOVAK
POVEZAVA NA DRUG RAČUNAL. DOKUMENT
PESTNER
CESTNO VOZILO
RIMSKI ZGODOVINAR
NAŠ PISATELJ (JANI)
OZNAKA ZA NEZNANKO
RIBA Z ORANŽNIM MESOM
SOCIOLOG KULTURE IN GLASB. KRITIK VIDMAR
ORIENTALSKA RIŽOTA
NOVA REVIJA
PRISLOV ZANIKANJA
MESTO V OSRČJU ARGENTINE
ZAPORNIK
5
ZUNANJI DALMATINSKI OTOK
ČEŠKI PISATELJ HAŠEK
BISTVO MISLI
12
SOZVOČJE VSAJ TREH TONOV
dMFA
NEUMNICA, AVŠA, TROLA
NAŠ NEKDANJI PREDSEDNIK PAHOR
STRIGA
PESNICA PESJAK



ANGLEŠKI IGRALEC (ORLANDO)
NEBESA, PARADIŽ
VELIKA FRANCOSKA ZALOŽBA
MARIJAN PROSEN
ITALIJAN. VIZUALNI UMETNIK (BRUNO)
ENAKI ČRKI
SPLETNA OZNAKA ITALIJE
ZAHODNI DEL BALEAROV Z IBIZO
7
NEMŠKI BAKTERIOLOG (PAUL)
dMFA
SLAVKO AVSENIK
KRADLJIVEC
REKA V ŠPAN. GEOGRAF. IMENIH

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

LOČENJE CELOTE V SESTAVNE DELE

KARBONATNI MINERAL, ŽELEZOV CVET

ZGODOVINSKO OBDOBJE

POVODNA KUNA S CENJENIM KOŽUHOM

BOSANSKI KOŠARKAR ALIBEGOVIĆ MLAJŠI

LATINSKO IME ZA OZVEZDJE DVOJČKA

PALICA ZA OTEPANJE SNOPOV

POSNETEK MEDICIN. SLIKANJA NOTRANJIH ORGANOV

PLANINA BLIZU SNEŽNE JAME NA RADUHI

PRAGOZDNI REZERVAT V OSRČJU GORJANCEV

PLAVAJOČA PRIPRAVA ZA DOLOČ. GOSTOTE KAPLJEVIN

9

SVETO ZNAMENJE V KRŠČANSTVU

DECIGRAM

OBOKANA KAMNITA GROBNICA

ENOTA ZA MOČ

8

KRAJ PRI RADOMLJAH

ENOTA SVETLOBNEGA TOKA

POVSEM SLEČEN

BLAGO Z NAPAKO

DEL VESOLJSKE LADJE BREZ POTISNIH RAKET

NOŽEK, PIPEC

GOROVJE NA SEVERU IRANA

FRANCOSKI MATEMATIK (BLAISE; ENOTA ZA TLAK)

ELDA VILER

TRETJE NAJVEČJE MESTO V SRBIJI

PLETENO OBLAČILO, KI SE SPREDAJ ZAPENJA

GOSTEJŠA JED NA ŽLIČO IZ VEČ VRST ŽIVIL

DMFA

ITALIJAN. PESNIK (FRANCESCO)

OBČUTEK UGODJA

SLOVNIČAR BOHORIČ

FRANCOSKI MATEMATIK FERMAT

NATRIJ

TANGENS

UM, INTELEKT

PRENOSNI RAČUNALNIK

6

NEKD. BRIT. DRŽAVNIK (ANTHONY)

LJUBEZEN. ZMENEK

SPRETEN ČAROVNIK, ROKOHITRC

ANGLEŠKI MATEMATIK (HENRY; DESETIŠKI LOGARITMI)

BAVLJENJE S ŠPORTOM

IT. KEMIK IN FIZIK (AMEDEO)

NEMŠKA PEVKA LEMPER

GRŠKI BOG VETROV

SPLETNA OZNAKA RUSIJE

NABITI DELEC

ZVOČNI ZNAK ZA NEVARNOST

PRIPADNIK PROTIMARKSIST. STRANKE V ST. RUSIJI

IRANSKI DENAR

ZAČETNICI HUMORISTA TOFA

DELO, BIZNIS

3. OSEBA ŽENSKEGA SPOLA

SAMOTAR, PUŠČAVNIK

NEMŠKO MESTO OB TROMEJI Z BELGIJO IN NIZOZ.

RUSKO MESTO OB IZLIVU ISTOIMENSKE REKE V VOLGO

PRADAVNO LJUDSTVO V ANATOLIJI

1

10

AMERIŠKI REŽISER KOMEDIJ ROACH

TOPEL IN SUH VETER, KI PIHA Z GORSKIH POBOČIJ

DMFA

ZAČIMBA H KLOBASI ALI HRENOVKI

EDDY MERCKX

NEKD. FR. NOGOMETAŠ (PATRICE)

GLAVNO MESTO JAPONSKE V 8. STOL.

BOLGARSKI CAR OB KONCU 12. STOL. (IVAN)

LAHKO HLAPNO ORGANSKO TOPILO

IGRALKA MOORE

GR. ČRKA MED FIJEM IN PSIJEM

13

SPLETNA DOMENA HRVAŠKE

ISLANDSKA REKA, NA KATERI JE SLAP GULLFOSS

11

PRIMORSKA TELEVIZIJKA PUST

NASELJE MED NOVIGRADOM IN POREČEM V ISTRI

NIGERIJSKA DENARNA ENOTA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **20. maja 2024**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani

Hitro MTF testiranje in astigmatizem

Omenimo še sistem hitrega MTF testiranja [?], razvit v podjetju Lensrentals. Namenjen je izločanju slabih primerkov.

Postopek je približno takle.

Objektiv je vpet na optični klopi in naravnan na neskončnost. Testirajo pri frekvenci 30 mm^{-1}, najprej na osi lečja.

Začnejo meriti, ko je objektiv oddaljen od testne naprave malce bolj, kot bi bilo po deklaraciji proizvajalca potrebno za najboljšo sliko. Zabeležijo to razdaljo ali koordinato x in izmerjeno vrednost MTF. Premikajo objektiv v približno deset korakih po nekaj mikrometrov bliže in vsakič določijo MTF, dokler se MTF ne začne spet manjšati.To je podoben postopek kot pri ostrenju na maksimalni kontrast, ki ga uporabljajo mnogi fotoaparati.

Program ugotovi koordinato x_0, pri kateri je MTF največji, in preveri, ali je ta največja vrednost za MTF ustrezna – glede na povprečje, dobljeno s testiranji mnogih (po prejšnjih izkušnjah sprejemljivih) primerkov tega objektiva.

Nato ves ta postopek ponovijo še v štirih točkah $T_i; i = 1, .., 4$ na diagonalah slike, blizu vogalom (14 mm od središča slike pri polnem formatu). V ta namen trikrat zavrtijo objektiv okrog osi. V vsaki točki T_i določijo največji vrednosti za radialni in tangentni MTF (ti sta najdeni v točki z razdaljo x_{ir} in v točki x_{it}) in ugotovijo, ali sta ta maksima dovolj visoka.

Iz do sto meritev torej izluščijo deset parov podatkov. Največja vrednost za MTF in ustrezna koordinata sta en par. (Tudi v središču testirajo v dveh pravokotnih smereh.)

Od tu naprej je le še računanje in primerjanje: v vsaki od testiranih zunanjih točk program preveri razmik $|x_{ir} - x_{it}|$ med koordinatama radialnega in tangentnega maksima. Če je razmik občuten, to pomeni velik **astigmatizem**, kar je resna napaka. Pri astigmatizmu najboljši sliki radialnega in tangentnega vzorca nastaneta na različnih razdaljah.

Nato določijo še

- $max \left\{|x_{ir} - x_{jr}|; 1 \leqslant i < j \leqslant 4\right\} in$
- $max \left\{|x_{it} - x_{jt}|; 1 \leqslant i < j \leqslant 4\right\}.$

Večja od teh dveh vrednosti je mera za *nagnjenost slike*. Ta ne sme biti prevelika.

Postopek je avtomatiziran in traja približno eno minuto. Programi uporabljajo strojno učenje, tako da sčasoma postanejo učinkovitejši pri izločanju pomanjkljivih primerkov. Upajmo, da so ali bodo tak sistem vključili v kontrolo kakovosti tudi proizvajalci.

Literatura

[1] P. Legiša, *Kaj povejo krivulje za MTF o fotografskem objektivu*, Presek 50, št. 5 (2023), str. 9-12.

[2] S. F. Ray, *Applied Photographic Optics*, 2nd ed., Focal Press, Oxford 1995, 586 str.

[3] R. Winston, Reading and Understanding Lens MTF Charts, Canon USA, 7. maj 2013, `https://www.usa.canon.com/learning/training-articles/training-articles-list/reading-and-understanding-lens-mtf-charts`

[4] H. H. Nasse, How to Read MTF Curves, Carl Zeiss Camera Lens Division, December 2008, 33 str. `https://lenspire.zeiss.com/photo/app/uploads/2018/04/Article-MTF-2008-EN.pdf`

[5] J. Strnad, *Fizika, 2. del, Elektrika, Optika*, 7. natis, DMFA-Založništvo, Ljubljana 2014, 562 str.

[6] P. Legiša, *FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA, 3. del – globinska ostrina*, Presek 25(4), 1998, str.194-201, `http://www.presek.si/25/1340-Legisa.pdf` `https://www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:doc-BK72VKFU`

[7] R. Cicala, *Developing a Rapid MTF Test for Photo and Video Lenses*, Lensrentals Blog, 29. junij 2018, `https://www.lensrentals.com/blog/2018/06/developing-a-rapid-mtf-test-for-photo-and-video-lenses/`

[8] B. Carnathan, The-Digital-Picture.com, `https://www.the-digital-picture.com/Reviews/`

× × ×

Presekova zvezdna karta

Številka 6, letnik 8 (1980/81)

→ V prvih dveh desetletjih Preseka je imela revija občasne tematske številke. Presekova zvezdna karta je bila zgibanka na papirju večjega formata, ki je spremljala tematsko številko, v kateri je bila na 32 straneh pojasnjena vsebina karte z navodili za uporabo, seznamom nebesnih teles, raznimi skicami in fotografijami.

Vsebino številke je skrbno pripravila nedavno umrla Pavla Ranzinger (1933-2024), ki velja za prvo slovensko poklicno astronomko. Po diplomi iz matematike je leta 1958 postala asistentka na Katedri za astronomijo in se zaposlila na Astronomsko-geofizikalnem observatoriju Golovec. Kasneje je iz astrofizike tudi magistrirala in objavila številne znanstvene in strokovne prispevke, predavala in vodila vaje za uvodne tečaje astronomije za študente v Ljubljani. Kot področna urednica za astronomijo pri reviji Presek je redno poročala o zanimivih pojavih, njena zvezdna karta iz leta 1981 pa je bila kar trikrat ponatisnjena in je vrsto let navdihovala številne mlade astronomke in astronome. Morda spomin nanjo nagovori tudi vas?

Ujemimo Luno!

↓↓↓
POSLOVENIL: VID KAVČIČ

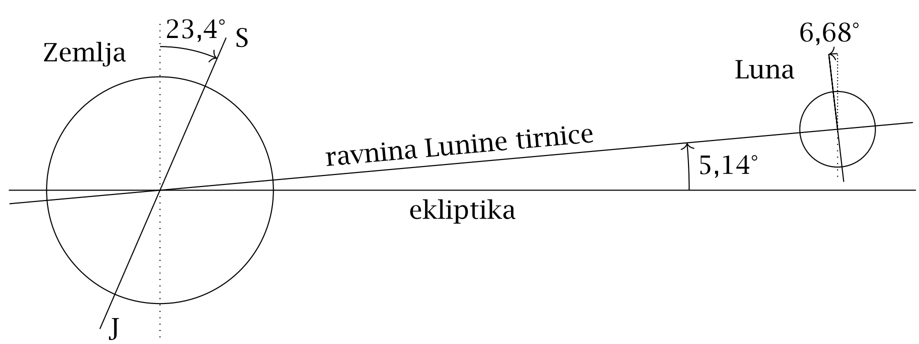
→ **V tokratnem članku predstavljamo nekaj praktičnih astronomskih vaj za osnovnošolke in osnovnošolce. Učenke in učenci v okviru vaj spoznajo osnovne značilnosti gibanja Lune okoli Zemlje. S skrbnim opazovanjem Lune in merjenjem njenega položaja na nebu določijo razliko med sinodskim in siderskim obhodnim časom Lune, poleg tega pa izmerijo tudi nagib Lunine orbite glede na ekliptiko. Vaje so v okviru projekta astroEDU Mednarodne astronomske zveze (IAU) pripravili Andrej Guštin, Dunja Fabjan in Damir Hržina.**

Teoretično ozadje

Zemlja kroži okoli Sonca po ravnini, ki ji pravimo **ekliptika**. Hkrati pa tudi Luna kroži okoli Zemlje po nekoliko drugačni tirnici, ki ne leži v ravnini ekliptike. Obhodni čas Lune okoli Zemlje lahko izmerimo na dva načina. Navidezno gibanje Lune na nebu lahko opazujemo glede na položaj Sonca ali glede na položaj oddaljenih zvezd. Medtem ko se položaj Sonca na nebu med letom spreminja, oddaljene zvezde na nebu mirujejo.

Časovni presledek, v katerem Luna naredi en obhod okoli Zemlje in se vrne v začetno lego glede na oddaljene zvezde, imenujemo **siderski obhodni čas**. Časovni presledek, v katerem Luna napravi en obhod okoli Zemlje in se vrne v začetno lego glede na Sonce, pa imenujemo **sinodski obhodni čas**. Sinodski obhodni čas je enak časovnemu presledku med dvema enakima Luninima menama, na primer času med dvema zaporednima polnima lunama.

S pozornim opazovanjem nočnega neba v krajšem časovnem obdobju lahko določimo trajanje siderskega in sinodskega obhodnega časa Lune. Če položaj Lune na nebu redno merimo dlje časa, ugotovimo, da gibanje Lune ni enakomerno in da je tirnica Lune glede na ravnino ekliptike nagnjena (slika 1). To je tudi razlog, da ob vsaki polni luni ne moremo opazovati Luninega mrka, prav tako pa ob vsakem mlaju ne moremo videti Sončevega mrka.



SLIKA 1.
Tirnica Lune okoli Zemlje je glede na ravnino ekliptike nagnjena za približno 5 stopinj.

Pripomočki

Z merjenjem lege in faze Lune na nebu lahko določimo sinodski in siderski obhodni čas Lune. Meritve lahko opravimo v različnih nočeh.

Za meritve uporabimo **križno palico**, ki jo lahko izdelamo sami. Navodila za izdelavo križne palice so dostopna na spletni povezavi `https://astroedu.iau.org/en/activities/2401/the-sky-at-your-fingertips/`.

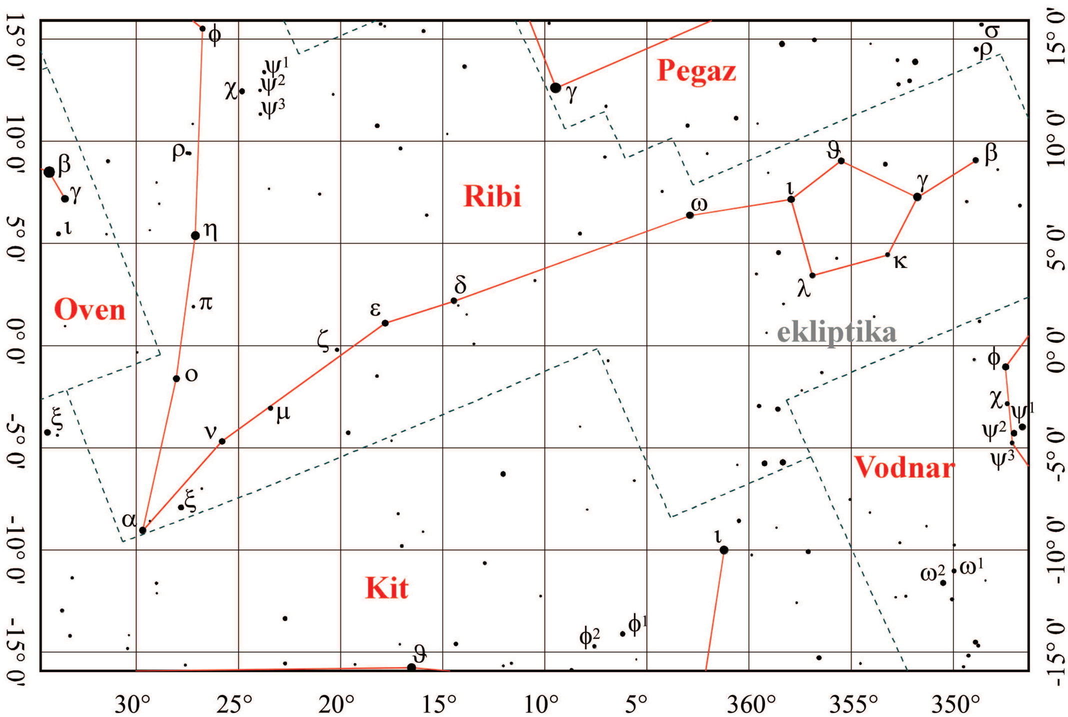
Poleg tega za izvedbo vaj potrebujemo tudi **zvezdne karte**, na katerih bomo označevali lego lune na nebu. Karte so v polni ločljivosti dostopne na spletnem naslovu `https://astroedu.iau.org/documents/914/2402-astroedu-starmaps.pdf`. Primer zvezdne karte prikazuje slika 2.

Razen križne palice in zvezdne karte potrebujemo tudi goniometer ali kompas, list papirja ter pero oziroma svinčnik.

Vaja 1 – siderski obhodni čas Lune

Ob jasni noči opazujmo položaj Lune glede na oddaljene zvezde. Da lažje prepoznamo ozvezdja na nebu, si pomagamo s priloženimi zvezdnimi kartami. S pomočjo križne palice izmerimo kotno razdaljo med Luno in zvezdami v bližnjih ozvezdjih. Na zvezdni karti označimo položaj Lune in zraven pripišemo datum in uro opazovanja.

Položaj Lune na zvezdni karti določimo na naslednji način. S pomočjo kotnega merila na karti šestilo nastavimo na izmerjeni kot med izbrano zvezdo in Luno. Konico šestila zapičimo v prvo zvezdo na karti in načrtamo prvi krožni lok. Postopek ponovimo za vse ostale meritve. Presečišče lokov na karti predstavlja lego Lune. Če pri tem pridobimo dve presečišči, premislimo, katero od teh resnično ustreza položaju Lune na nebu. Najbolje je za meritve izbrati zvezde, ki se glede na Luno nahajajo pri kotih okoli



SLIKA 2.
Primer zvezdne karte, ki uporabimo pri meritvah položaja Lune na nebu.

90°. Če meritev opravimo s tremi zvezdami, je najbolje izbrati take tri zvezde, da je kot med njimi glede na Luno enak 120°.

Meritve ponovimo naslednjo noč ob približno enakem času in ponovno na zvezdno karto vrišemo položaj Lune. Da bi določili siderski obhodni čas Lune, potrebujemo vsaj meritvi v dveh zaporednih nočeh. Če želimo pridobiti boljše rezultate, moramo meritve izvajati več časa.

Ko svoje meritve položaja Lune označimo na zvezdni karti, s pomočjo koordinatne mreže na karti preberemo ekliptično dolžino Lune. Navidezno kotno hitrost ω_{sid} kroženja Lune okoli Zemlje lahko določimo s pomočjo enačbe

- $\omega_{\text{sid}} = \dfrac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}$,

kjer so

- ω_{sid} navidezna kotna hitrost Lune okoli Zemlje (v stopinjah na dan),
- l_1 – ekliptična dolžina (v stopinjah) v trenutku t_1 (v dnevih) prve meritve in
- l_2 – ekliptična dolžina (v stopinjah) v trenutku t_2 (v dnevih) druge meritve.

Če je $l_2 - l_1 < 0$, moramo razliki prišteti kot 360°. Siderski obhodni čas t_{sid} Lune lahko nadalje ocenimo s pomočjo enačbe

- $t_{\text{sid}} = \dfrac{360^\circ}{\omega_{\text{sid}}}$.

Vaja 2 – sinodski obhodni čas Lune

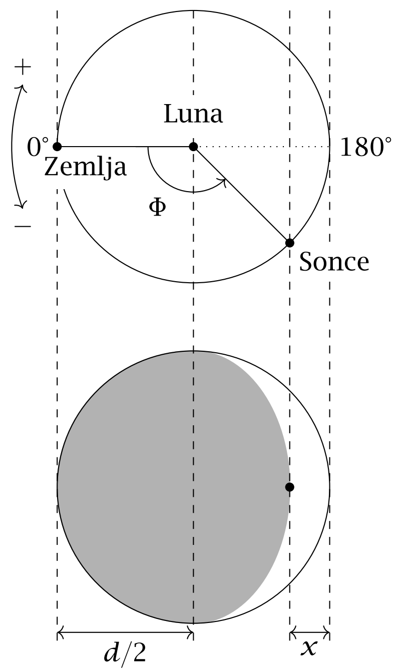
Ker Luna kroži okoli Zemlje, se medsebojna lega Zemlje, Lune in Sonca neprestano spreminja. Pri tem se zato spreminja tudi delež osvetljenosti Lunine ploskvice. Temu pravimo Lunina **faza**. Če izmerimo spremembo Lunine faze v določenem času, lahko izračunamo sinodski obhodni čas Lune. Lunino fazo definiramo kot razmerje med osvetljenim delom in premerom Lunine ploskvice (slika 3). Vsaka Lunina faza ustreza določenemu **faznemu kotu**. To je kot med Zemljo in Soncem z vrhom pri Luni.

V jasni noči lahko opazujemo fazo Lune. Na list papirja narišemo krog, nato pa skiciramo trenutno Lunino meno (slika 3). Beli del naj označuje osvetljeni del Lunine ploskvice, sivi del pa naj označuje neosvetljeni (temni) del ploskvice. Polno Luno bi tako narisali kot popolnoma bel krog, mlaj (prazno luno) pa kot popolnoma zasenčen krog. Lunino fazo p lahko nato izračunamo z enačbo

- $p = \dfrac{x}{d}$,

kjer sta

- d premer narisanega kroga, ki predstavlja premer Lune, in
- x največja širina belega dela kroga, ki predstavlja osvetljeni del Lunine ploskvice.



SLIKA 3.
Skica nam je v pomoč pri meritvah faznega kota Lune. Opazimo, da sta na spodnji skici dejanski medsebojni legi Sonca in Zemlje glede na rdeče zaznamovani zavrteni za kot 90° v nasprotni smeri urnega kazalca.

Fazni kot Lune, ki ustreza posamezni fazi Lune, izmerimo tako, da na list papirja pod prvi krog narišemo še drugi krog, ki je poravnan s prvim (slika 3). Z druge skice izmerimo fazni kot Φ, to je kot Zemlja – Luna – Sonce.

Spodnji krog z vodoravno črto razdelimo na dve enaki polovici. Ta vodoravnica predstavlja smer Zemlja–Luna, ki je glede na dejansko smer zavrtena za 90 stopinj.

Iz zgornjega kroga narišemo navpično premico, tako da lahko na spodnjem krogu označimo dolžino x. Narišimo črto, ki to točko povezuje s središčem spodnjega kroga. Ta črta predstavlja smer Luna–Sonce, ki je glede na pravo smer Luna–Sonce zavrtena za 90 stopinj. Fazni kot Φ je kot med dvema rdečima črtama. Izmerimo ga z goniometrom in izdelamo preglednico, v katero vpisujemo vrednosti faznega kota pri posamezni fazi Lune

Vrednosti faze Lune in pripadajočih faznih kotov za značilne Lunine mene prikazuje tabela 1.

Lunina mena	faza Lune p	fazni kot Φ (°)
mlaj	0	180 / −180
prvi krajec	0,5	−90
polna luna	1	0
zadnji krajec	0,5	90

TABELA 1.
Vrednosti faze in faznega kota pri tirih osnovnih Luninih menah.

Fazni kot izmerimo ponovno čez nekaj časa, ko se faza Lune spremeni. Za oceno sinodskega obhodnega časa Lune potrebujemo vsaj dve meritvi. Navidezno kotno hitrost ω_{sin} Lune glede na Sonce ocenimo z enačbo

- $$\omega_{\text{sin}} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{t_2 - t_1},$$

kjer so

- ω_{sin} – navidezna kotna hitrost Lune okoli Zemlje glede na Sonce (v stopinjah na dan),
- Φ_1 – fazni kot Lune (v stopinjah) v trenutku t_1 (v dnevih) prve meritve in
- Φ_2 – fazni kot (v stopinjah) v trenutku t_2 (v dnevih) druge meritve.

Če je $(\Phi_1 - \Phi_2) < 0$, razliki faznih kotov prištejemo kot 360 stopinj. Upoštevamo, da se v času med mlajem in polno luno absolutna vrednost faznega kota zmanjšuje. To pomeni, da moramo za te meritve pred vrednostjo izmerjenega faznega kota dodati negativni predznak (minus). Tako je na primer fazni kot Lune ob prvem krajcu enak −90 stopinj.

Sinodski obhodni čas t_{sin} Lune (v dnevih) tako izračunamo z enačbo

- $$t_{\text{sin}} = \frac{360^\circ}{\omega_{\text{sin}}}.$$

Vaja 3 – nagib Lunine orbite okoli Zemlje glede na ekliptiko

Izmerimo položaj Lune glede na zvezde na enak način kot pri Vaji 1. Pri tem meritve izvajamo daljši čas (vsaj 15 dni). Vsakič izmerimo položaj Lune glede na zvezde in jo označimo na zvezdnih kartah. Ko pridobimo vsaj 15 meritev, narišemo krivuljo, ki povezuje vse točke. Dobljena krivulja predstavlja orbito Lune glede na oddaljene zvezde. Krivulja bi morala imeti sinusno (valovito) obliko.

Zvezdne karte so narejene v Mercatorjevi ekliptični projekciji. To pomeni, da lahko nagib Lunine orbite glede na ekliptiko preprosto določimo tako, da izmerimo amplitudo narisane sinusne krivulje.

Zaključek

Aktivnost lahko zaključimo s kvizom ali razpravo v razredu. Poleg tega se lahko z učenkami in učenci pogovorimo tudi o dobljenih rezultatih za sinodski in siderski obhodni čas Lune ter v kontekstu napak meritev komentiramo, zakaj se rezultati razlikujejo.

Opisane meritve seveda ne morejo biti zelo natančne, vendar so naravnost odlična iztočnica, ki učenke in učence spodbuja h ključnim razmislekom o pravem in navideznem gibanju Lune.

× × ×

Samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov 1. del - WER in TER

Jani Dugonik, Mladen Borovič

→ Prevajanje je zahtevno in ustvarjalno dejanje, pri čemer lahko strojno prevajanje (angl. machine translation) prevajalcu delo olajša ali pa ga v omejenem obsegu popolnoma nadomesti. Strojno prevajanje je postopek, pri katerem računalniški program analizira besedilo in tvori prevod (v nadaljevanju strojni prevod). Kvaliteto strojnih prevodov je težko oceniti, ker je nabor prevodov za vsako referenčno poved velik in običajno neznan. V praksi se uporabljajo različne metode ocenjevanja kakovosti strojnih prevodov, kot so ročno in samodejno ocenjevanje. Enostaven pristop za ocenjevanje kakovosti prevoda je, da se pogleda prevod in se ročno oceni, ali je pravilen ali ne. Problem pri tem je, da morajo biti ocenjevalci ustrezno usposobljeni, zahteva pa tudi dosti časa in denarja. Tako so metrike za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov hitrejše in cenejše alternative ročnemu ocenjevanju. Metrike za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov so odvisne od razpoložljivosti referenčnega prevoda, ki je ponavadi preveden ročno. Strojni prevod se oceni tako, da se ga primerja z referenčnimi prevodi. Ker lahko vsak ocenjevalec drugače oceni nek prevod, je dobro imeti več referenčnih prevodov. Z uporabo metrik za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov je treba razumeti, kaj njihovi rezultati pomenijo. Metrike za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov se zanašajo na idejo, da se strojni prevod čim bolj približa človeškemu prevodu. V nadaljevanju bomo predstavili dve osnovni metriki za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov.

Metrika WER

Metrika WER (angl. Word Error Rate) [**?**] izhaja iz Levenshteinove razdalje [**?**], ki meri razdaljo med nizi različnih velikosti, upoštevajoč operacije vstavljanja, brisanja in zamenjave znakov. Metrika WER deluje na ravni besede namesto na ravni fonema in računa minimalno število urejanj, potrebnih za spremembo strojnega prevoda, da se natančno ujema z referenčnimi prevodi. Število urejanj je nato normalizirano z dolžino referenčnih povedi, pri čemer so možna urejanja vstavljanje (V), brisanje (B) in zamenjava (Z) posameznih besed. V Zgledu so ujemajoče se besede označene s simbolom »-«. Rezultat popolnega ujemanja vrne oceno 0, rezultat popolnega neujemanja pa vrne oceno 1 (v določenih situacijah, ko je število operacij urejanj večje kot število besed v referenčni povedi, je lahko rezultat tudi večji od 1). Oceno lahko predstavimo kot stopnjo napake v odstotkih, pri čemer 0 predstavlja 0 %, 0,5 predstavlja 50 %, 1 pa predstavlja 100 %. Oceno s pomočjo metrike WER izračunamo po enačbi:

$$ocena_{WER} = \frac{Z + B + V}{N}, \quad (1)$$

kjer so V, B in Z operacije urejanja, N pa je število besed v referenčnem prevodu.

Zgled

Oglejmo si primer (tabela 1), kjer imamo referenčni prevod »danes je lep dan« in strojni prevod »lep dan je danes«. Strojni prevod moramo preoblikovati tako, da dobimo referenčni prevod.

referenčni prevod	danes	je	**lep**	**dan**		
strojni prevod			**lep**	**dan**	je	danes
WER	V	V	–	–	B	B

TABELA 1.
Primer izračuna ocene s pomočjo metrike WER za referenčni prevod in strojni prevod za slovenščino.

Izračun ocene s pomočjo metrike WER po enačbi 1:

$$ocena_{WER} = \frac{0 + 2 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 = 100\% \quad (2)$$

Ocena je 1, kar pomeni popolno neujemanje, vendar kot vidimo iz tabele 1, se dve besedi od štirih popolnoma ujemata (ponazorjeno v tabeli 1 s krepko pisavo). To je težava pri uporabi splošne enačbe metrike WER (enačba 1), da se ne upošteva učinek, ki ga imajo lahko različne vrste napak na verjetnost uspešnega izida. Nekatere napake so namreč lahko bolj moteče kot druge in nekatere je mogoče lažje popraviti kot druge. Nadaljnja težava je, da metrika WER po splošni enačbi tudi z najboljšo poravnavo ne more ločiti napake zamenjave od kombinirane napake brisanja in vstavljanja. Tako je avtor v [?] predlagal uporabo utežene metrike WER, pri kateri so napake pri zamenjavi utežene z 1, napake pri brisanju in vstavljanju pa so utežene z 0,5:

$$ocena_{WER} = \frac{Z + B \cdot 0,5 + V \cdot 0,5}{N}. \quad (3)$$

Oglejmo si, kaj se zgodi, če ponovno izračunamo oceno glede na zgornjo enačbo:

$$\begin{aligned} ocena_{WER} &= \frac{0 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{4} \\ &= \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\,\%. \quad (4) \end{aligned}$$

Ocena je 0,5, kar pomeni 50 % neujemanje. Tako nam ta utežena enačba vrne bolj realno oceno, saj je iz primera razvidno, da se dve besedi od štirih popolnoma ujemata (ponazorjeno v tabeli 1 s krepko pisavo).

Metrika TER

Metrika TER (angl. Translation Error Rate) [?] nadgradi metriko WER z dodatnim korakom urejanja: premikom besednih zaporedij. Tudi pri metriki TER se išče najmanjše število sprememb. Premik (P) premakne sosednje zaporedje besed znotraj strojnega prevoda na drugo mesto znotraj prevoda. Vsa urejanja imajo enako težo:

$$ocena_{TER} = \frac{Z + B + V + P}{N} \quad (5)$$

Zgled

Oglejmo si primer (tabela 2), kjer imamo referenčni prevod »danes je lep dan« in strojni prevod »lep dan je danes«. Strojni prevod moramo preoblikovati tako, da dobimo referenčno poved.

referenčni prevod	danes	je	**lep**	**dan**		
strojni prevod			**lep**	**dan**	je	danes
TER			–	–	P	P

TABELA 2.
Primer izračuna metrike TER za referenčno poved in strojni prevod za slovenščino.

Izračun ocene s pomočjo metrike TER po enačbi 5:

$$ocena_{TER} = \frac{0 + 0 + 0 + 2}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\% \quad (6)$$

Ocena je 0,5, kar pomeni 50 % neujemanje. Tako nam tudi ta metrika vrne bolj realno oceno, saj lahko vidimo iz primera, da se dve besedi od štirih popolnoma ujemata (ponazorjeno v tabeli 1 s krepko pisavo).

Zaključek

V tem prispevku smo predstavili metriki za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov: WER in TER. Skozi primere smo prikazali, kako se s tema dvema metrikama izračuna podobnost med referenčnim in strojnim prevodom. V javno dostopnem repozitoriju GitHub [?] sta na voljo tudi primera implementacij omenjenih metrik v jeziku Python. Obstajajo še druge metrike za samodejno ocenjevanje kakovosti strojnih prevodov, kot so BLEU, chrF in COMET, ki pa jih bomo obravnavali v prihodnjih delih.

Literatura

[1] M. Borovič, J. Dugonik, *Razdalje urejanja*, Presek, 49(5) 2022, 25–30.

[2] Melvyn J. Hunt, *Figures of merit for assessing connected-word recognisers*, Speech Communication, 9(4) 1990,329-336.

[3] M. Borovič, J. Dugonik, *Procesiranje naravnega jezika - GitHub*, [ogled 15. 11. 2023], dostopno na `https://github.com/procesiranje-naravnega-jezika/example-code/tree/main/4d%20-%20WER%2CTER`.

[4] M. Snover, B. Dorr, R. Schwartz, L. Micciulla, J. Makhoul, *A study of translation edit rate with targeted human annotation*, Proceedings of the 7th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas: Technical Papers, 2006, 223–231.

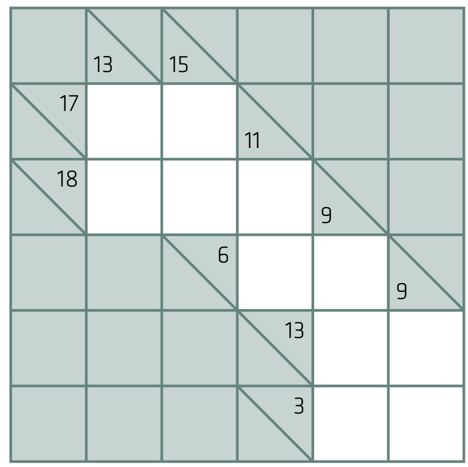
[5] Wikipedia, *Word Error Rate*, [ogled 15. 11. 2023], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Word_error_rate`.

× × ×

Križne vsote

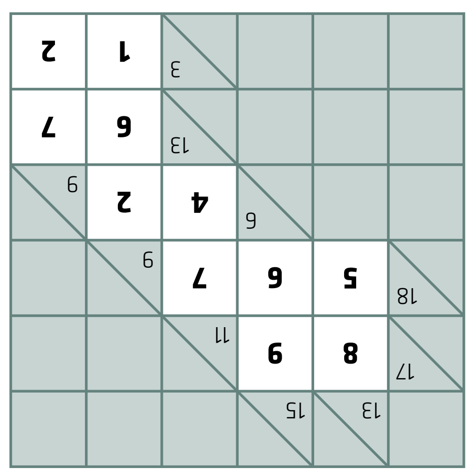
↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

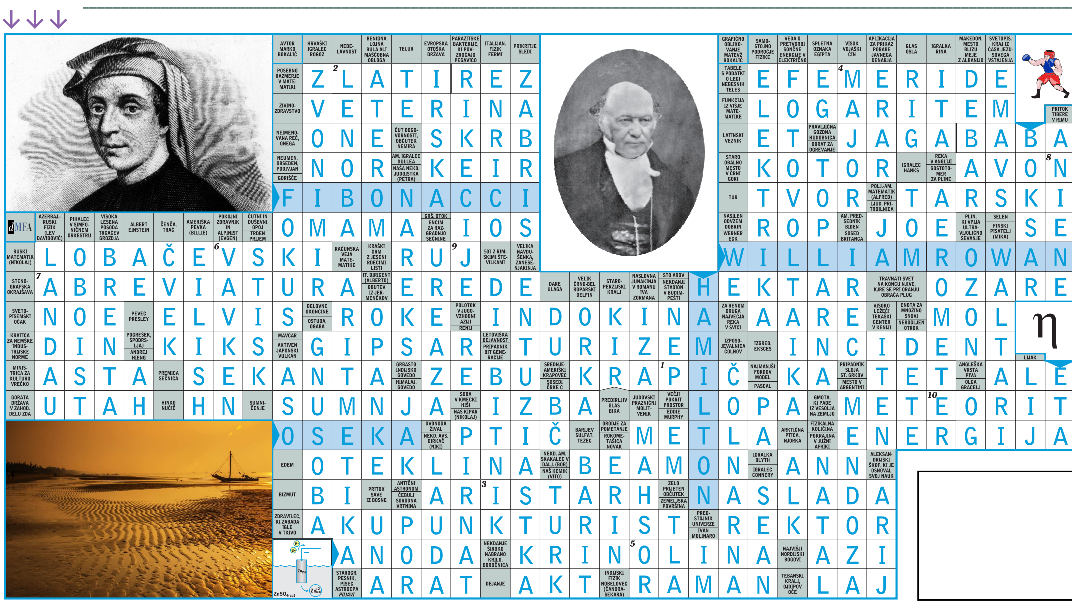


↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 51/4

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke Preseka letnika 51 je **plimovanje.** Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Ivan Lisac iz Kopra, Svit Krivic iz Ljubljane, Darija Roš iz Murske Sobote, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Neskončna vrsta $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$

Boštjan Kuzman

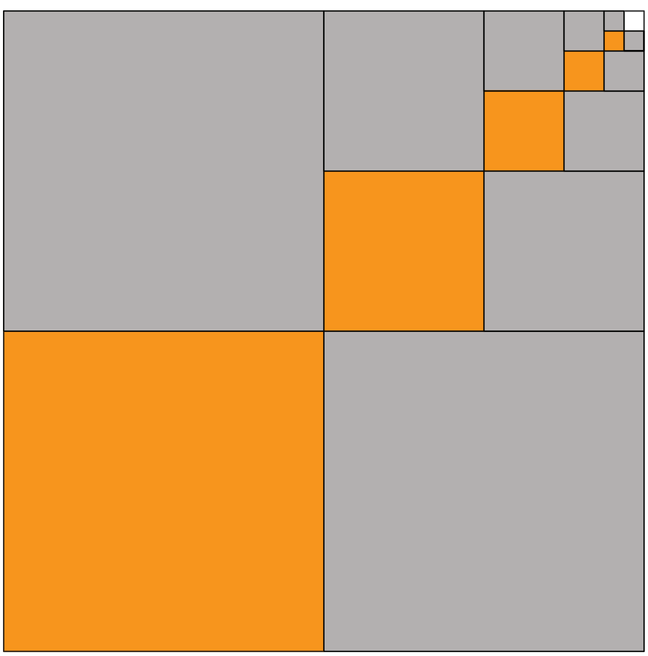
→ Neskončne vsote ali vrste so poznali že antični matematiki, posebej spreten z njimi je bil Arhimed. V svojem delu o kvadraturi parabole je pri računanju ploščine pod krivuljo seštel prav vrsto iz naslova in ugotovil, da je njena vsota enaka natanko 1/3. Ilustracija oziroma geometrijska ponazoritev te na prvi pogled nekoliko presenetljive trditve predstavlja tokratni izziv za naše bralce.

Današnji maturantje se običajno v četrtem letniku srednje šole učijo, da ima neskončna geometrijska vrsta $a_0+a_0q+a_0q^2+\ldots$ končno vsoto $S=\frac{a_0}{1-q}$, če za razmerje med dvema zaporednima členoma velja $|q|<1$. Arhimedova vrsta $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ ima začetni člen $a_0=\frac{1}{4}$ in kvocient $q=\frac{1}{4}$, zato lahko vsoto vrste izračunamo po formuli

- $S=\dfrac{a_0}{1-q}=\dfrac{1/4}{1-1/4}=\dfrac{1}{3}.$

Arhimed si je pri seštevanju te vrste pomagal z geometrijsko razlago, ki prikazuje ploščino zaporedja vgnezdenih kvadratov. Ustrezno ilustracijo zlahka najdemo z brskanjem po spletu, mi pa jo bomo narisali sami in jo tudi animirali z drsnikom.

- Vstavimo drsnik n z razponom od 0 do 7 v korakih po 1.
- Z ukazom `Mnogokotnik((0,0),(1,0),4)` narišemo največji kvadrat.



SLIKA 1.
$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$, saj je oranžno pobarvana natanko $1/3$ ploščine celotnega lika - za vsak oranžen kvadrat sta na sliki še dva siva kvadrata enake velikosti.

- Zaporedje oranžnih kvadratov na diagonali začetnega narišemo z ukazom

```
z1=Zaporedje(Mnogokotnik(
    (1-1/2^(k-1),1-1/2^(k-1)),
    (1-1/2^k,1-1/2^(k-1)),4),k,1,n)
```

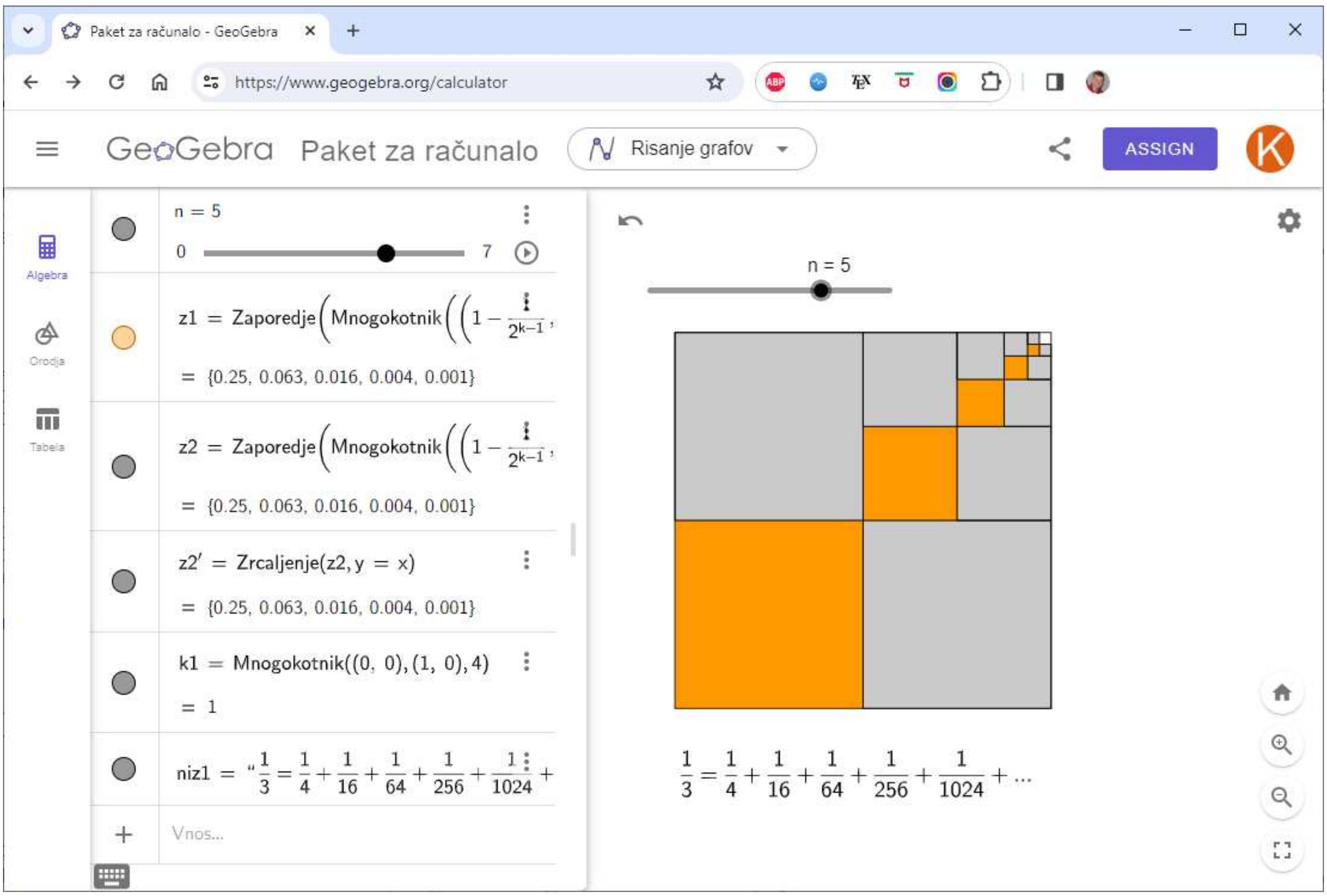
- Zaporedje kvadratov nad diagonalo dodamo z ukazom

```
z2=Zaporedje(Mnogokotnik(
    (1-1/2^(k-1),1-1/2^k),
    (1-1/2^k,1-1/2^k),4),k,1,n)
```

- Zadnje zaporedje prezrcalimo čez premico $y = x$ z ukazom `Zrcaljenje(z2,y=x)`.
- Zaporedja kvadratov ustrezno pobarvamo.
- Če želimo, lahko k ilustraciji dodamo še zapis vrste z ukazom

```
Tekst(ZapisUlomka(1/3)+"="
    +(Vsota(Zaporedje(
      ZapisUlomka(1/4^k)+"+",k,1,n)))
    +("..." ""),(0,-0.1),true,true)
```

Tako, naš izdelek je pripravljen za preizkus. O Arhimedovi kvadraturi parabole bomo več povedali v kateri od prihodnjih številk. Medtem pa lahko bralci in bralke poskusijo še sami poiskati in ilustrirati kakšno zanimivo geometrijsko vrsto.



SLIKA 2.
Končni izdelek v GeoGebri

Pogled skozi okno

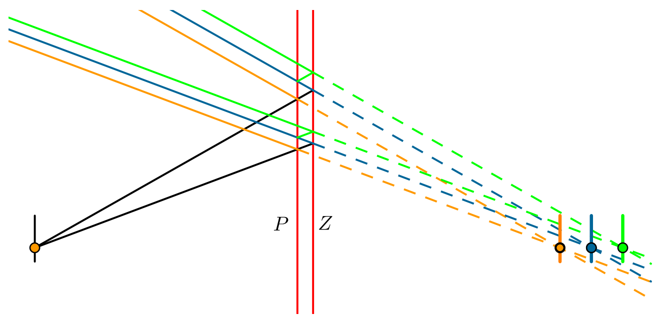
Nada Razpet

9. november 2023

→ Zvečer, ko je bilo zunaj že temno, smo ob pogledu skozi okno opazili tri slike senzorske lučke, ki jo imamo v vtičnici. Tista slika lučke, ki je bila nam najbližja, je bila slabo vidna in manjša, drugi dve pa sta bili dobro vidni, kot kaže slika 1. Najbolj oddaljena slika lučke je bila največja. Fotoaparat ne zazna prostorske razporeditve, saj ima le eno *oko*, mi pa zaznamo, kako so slike razporejene v prostoru. Poskus lahko naredimo z baterijsko svetilko na primerni oddaljenosti od okna.

SLIKA 1.
Opazimo tri slike lučke. Fotografski aparat ne zazna prostorske slike. Mi pa vidimo, da je slabo vidna slika lučke nam najbližja, najbolj oddaljena je največja.

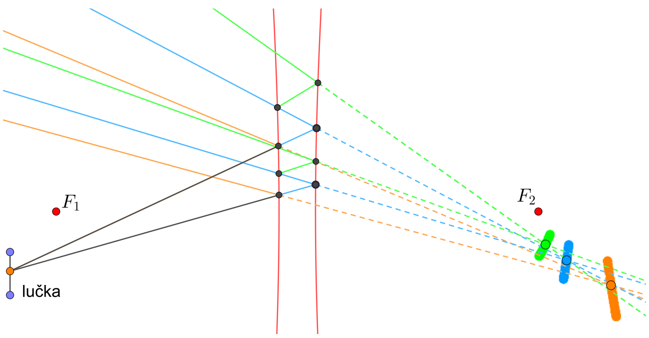
Vemo, da lahko z dvema vzporednima *ravnima zrcaloma* vidimo veliko slik, saj zrcala dobro odbijajo svetlobo in vidimo tudi slike, ki nastanejo po večkratnih odbojih od zrcal. Steklene ali plastične prozorne tanjše ravne plošče slabše odbijajo svetlobo, zato vidimo le slike, ki nastanejo po odboju od prve, druge oziroma obeh plošč, kot kaže slika 2. Del svetlobe, ki pade na prednjo ploščo, se odbije, dobimo prvo navidezno sliko, označena z oranžno, del gre skozi ploščo in se odbije na zadnji plošči, označena z modro, dobimo drugo navidezno sliko. Odbita svetloba od zadnje plošče pade na notranjo stran prednje plošče in se od nje odbije nazaj proti zadnji plošči in se od nje zopet odbije, dobimo tretjo sliko, označena z zeleno. Slike so navidezne, pokončne in enako velike, vendar vse niso enako dobro vidne, saj je pri vsakem naslednjem odboju svetlobni tok manjši. Pri risanju nismo upoštevali, da se žarek svetlobe, ki gre skozi prozorno ravno ploščo, vzporedno premakne, saj so plošče tanke.



SLIKA 2.
Slika, ki nastane po odboju svetlobe od prednje ravne plošče (P), je označena z oranžno, od zadnje z modro in po trikratnem odboju z zeleno barvo.

Zakaj slike lučke, ki jih vidimo skozi okno, niso enako velike? Okenske šipe niso ravne, vsaj naše ne. Na sredini so nekoliko upognjene, za nekaj milimetrov, odvisno od vplivov okolice. Zunanji ploskvi sta konkavni, nista pa sferično konkavni, saj je šipa vpeta v pravokoten okvir in zato ploskev ne more biti sferična. Za risanje si bomo stvar poenostavili, kot je v fiziki v navadi. Privzeli bomo, da je presek ravnine, v kateri ležijo vpadni in odbiti žarki z okenskima šipama, kar hiperbola (slika 3) z goriščema F_1

in F_2. Žarke, ki se odbijejo na prednji šipi, smo tako kot prej obarvali z oranžno, žarke, ki se odbijejo na zadnji šipi, z modro, trikrat odbite žarke pa z zeleno barvo. Opazimo, da je slika, ki nastane po odboju svetlobe od prve šipe, najdlje stran od okna, po odboju od zadnje šipe je na sredini, po trikratnem odboju pa je spredaj. Spredanja najbližja slika je najmanjša, najbolj oddaljena pa največja. Vse slike so pokončne in navidezne.



SLIKA 3.
Slika, ki nastane po odboju svetlobe od prednje šipe, je označena z oranžno, od zadnje z modro in po trikratnem odboju z zeleno barvo. Lučka je pred goriščem hiperbole.

Kje nastanejo slike in kakšen je njihov vrstni red, če spreminjamo obliko šip in lego predmeta, pa ugotovite sami. Mi smo za risanje uporabili program GeoGebra in si izdelali orodje za konstrukcijo odbitih žarkov, da nam je šlo načrtovanje hitreje od rok.

Še sami poglejte, kaj vidite zvečer ali ponoči, ko gledate skozi okno.

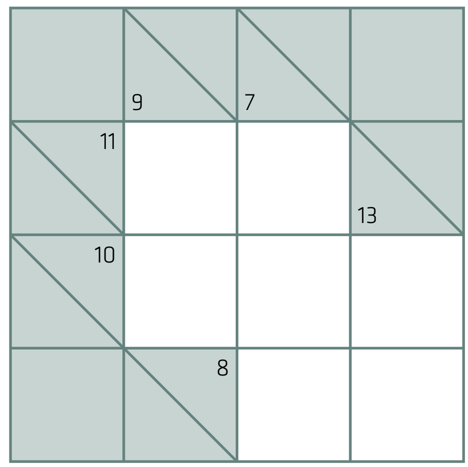
× × ×

www.presek.si

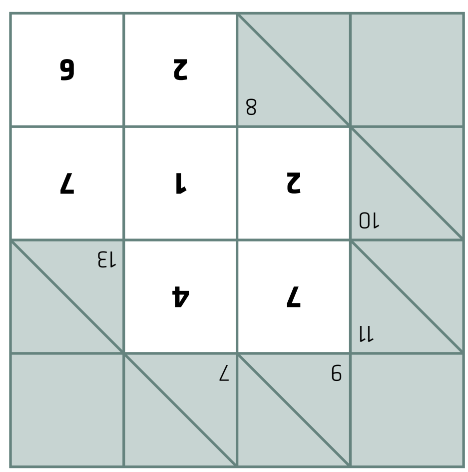
www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR

14,50 EUR

23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/`

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.