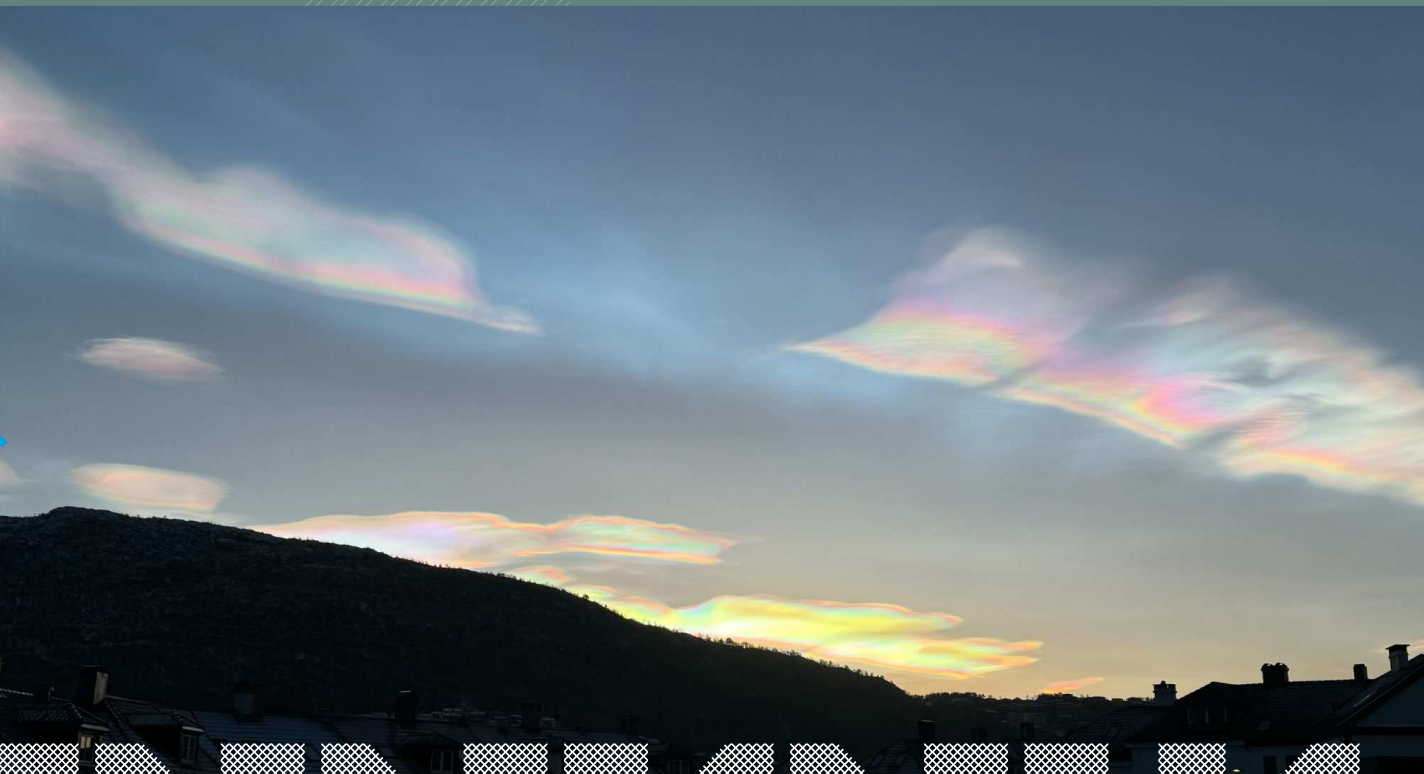




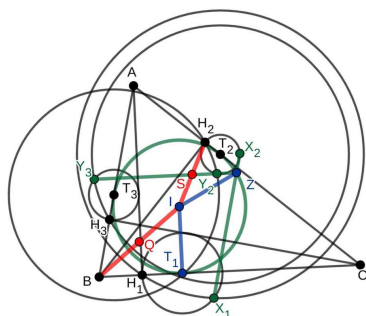
PRESEK



- S KVATERNIONI PREKO ŠTIRIH
DIMENZIJ DO RAČUNALNIŠKIH IGER
- VRČEK IN KOZAREC VODE
- PLIMOVANJE



Avtomatizirano reševanje olimpijskih nalog



→ Problemi iz matematičnih olimpijad predstavljajo izjemen izziv najboljšim srednješolcem in srednješolkam iz vsega sveta, orodja umetne inteligence pa pri njihovem reševanju doslej niso bila zelo uspešna, saj jim manjka dovolj obsežna baza človeških dokazov v stroju berljivi obliki. Nedavno pa je prišlo do prelomnih dosežkov tudi na tem področju. Dokazovalnik geometrijskih izrekov AlphaGeometry je bazo človeških dokazov nadomestil z lastno sintetizacijo milijonov izrekov in dokazov. Ustvaril je milijardo naključnih diagramov geometrijskih objektov in na njih izčrpno opisal različne relacije med premicami in točkami, nato pa analiziral, kateri dodatni elementi v konstrukcijah so potrebni za dokaze izrekov. Po izločitvi podobnih mu je v bazi ostalo 9 milijonov primerov, kar zadošča za učinkovito iskanje novih korakov pri reševanju zahtevnih problemov. AlphaGeometry je na testiranju v standardnem tekmovalnem času rešil 25 od 30 geometrijskih problemov iz matematičnih olimpijad med leti 2000 in 2022. S tem se je približal dosežkom povprečnega nosilca zlate medalje iz mednarodne matematične olimpijade, ki bi po obstoječi statistiki rešil 25,9 problema. Njegove rešitve so človeku berljive, čeprav so večinoma daljše od tistih, ki jih pripravijo najboljši reševalci, ki se sklicujejo na znane izreke. Več v članku Trinh, T.H., Wu, Y., Le, Q.V. et al. *Solving olympiad geometry without human demonstrations*. Nature **625**, 476–482 (2024). ——— × × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 51, šolsko leto 2023/2024, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@mf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2023/2024 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2024 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@mf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2** Avtomatizirano reševanje olimpijskih nalog

UVODNIK

- 4** Prvih petnajst let tekmovanj v znanju astronomije
(*Andrej Guštin*)

MATEMATIKA

- 5–10** S kvaternioni preko štirih dimenzij do računalniških iger
(*Filip Rus*)
- 11–13** Fibonaccijevi pravokotniki
(*Marko Razpet*)
- 28–30** GeoGebrin kotiček – Tetraedrsko število 2024
(*Boštjan Kuzman*)

FIZIKA

- 14–15, 18–19** Vrček in kozarec vode
(*Nada Razpet*)
- 31** Naravoslovna fotografija – Biserni oblaki: barvito optično čudo
(*Aleš Mohorič*)

ASTRONOMIJA

- 21–26** Plimovanje
(*Vid Kavčič*)

RAZVEDRILO

- 10, 26** Križne vsote
- 16–17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 20** Bilo je nekoč v reviji Presek – 2001 s kovanci
- 27** Rešitev nagradne križanke Presek 51/3
(*Marko Bokalič*)

SLIKA NA NASLOVNICI: Biserni oblaki nad norveškim Bergnom 20. decembra 2023. Pojav je opisan v prispevku o naravoslovni fotografiji. Foto: Tina Pavlin

Prvih petnajst let tekmovanj v znanju astronomije



ANDREJ GUŠTIN, UREDNIK ZA ASTRONOMIJO

→ Letos je potekalo petnajsto tekmovanje v znanju astronomije za Dominkova priznanja. Pobudo za to tekmovanje je ob mednarodnem letu astronomije 2009 (MLA 2009) dal Andrej Guštin in ob močni podpori predsednice MLA 2009 Andreje Gomboc zamisel tudi predstavil Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA). Na DMFA Slovenije so novo tekmovanje širokogrudno sprejeli in od tedaj poteka pod okriljem tega društva. Andreja Gomboc je bila prvih štirinajst let tudi predsednica komisije za astronomska tekmovanja in recenzentka nalog, Andrej Guštin pa tajnik tekmovanja in sestavljavec nalog šolskih in državnih tekmovanj v tem obdobju.

DMFA Slovenije ima dobro tekmovalno platformo in povezanost z mentorji po šolah, kar so pri društvu vzpostavili v desetletjih organiziranja tekmovanj iz znanja matematike, fizike in sorodnih ved. Vse to je omogočilo, da se je tudi tekmovanje v znanju astronomije hitro prijelo. Astronomija je v primerjavi s sestrskima matematiko in fiziko sicer v podrejenem položaju, saj ni del rednega šolskega programa, temveč je v osnovni šoli prepuščena izbirnosti in krožkom, v srednjih šolah oziroma gimnazijah večinoma krožkom, zato v pionirskih časih astronomskega tekmovanja sestavljavcu in recenzentki ni bilo lahko »nastaviti« primernega nivoja težavnosti nalog. Obenem ne gre pozabiti na pogum šolskih mentorjev in mentoric, ki so iz istih razlogov kot or-

ganizatorji lahko samo tipali za potrebnimi znanji za to novo tekmovanje. Rezultati in zgodovina kažejo, da je vsem vpletenim vendarle uspelo. Osnovna namena tekmovanja v znanju astronomije sta popularizacija astronomije in dvig astronomskega znanja med mladimi, ki ju je mogoče doseči z vzpostavitve piramide znanja od osnovne šole do zaključnega letnika srednjih šol. Za doseganje teh ciljev je ključnih veliko faktorjev: čim večje število udeleženišol in tekmovalk/tekmovalcev, angažiranost in znanje mentoric/mentorjev, primerna težavnost izzivov in njihova pedagoška nota, ki nakazuje smer pričakovanih znanj in gradi na postopni rasti znanja od nižjih razredov naprej. Tekmovanje v znanju astronomije se je držalo teh smernic in tako postalo dodana vrednost v splošnem izobraževalnem sistemu. V uspeh tekmovanja je bilo vloženih veliko delovnih dni, truda, strokovnega in pedagoškega znanja, pri čemer je na strani organizatorjev sodelovalo tudi veliko ljudi, ki so delovali na različnih nivojih tekmovanja. Posebej moram omeniti Dunjo Fabjan, ki se je v preteklem desetletju pri astronomskih tekmovanjih izjemno angažirala in je letos tudi prevzela vodenje državnega tekmovanja v znanju astronomije. Za mentorje je tudi pomembno, da vzgajajo naslednike, med katerimi v zadnjem času izstopa mladi Vid Kavčič, ki je letos prevzel večino bremena sestavljanja tekmovalnih nalog.

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

S kvaternioni preko štirih dimenzij do računalniških iger



FILIP RUS

→ V srednji šoli spoznamo naslednje zaporedje številskih množic:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Matematiki so se dolgo časa spraševali, ali lahko zaporedje smiselno nadaljujemo in definiramo novo množico števil, ki bi vsebovala vse prejšnje. Ker so kompleksna števila dvodimenzionalna »nadgradnja« realnih števil, bi bila rešitev problema lahko konstrukcija novih, tridimenzionalnih števil.

Tako idejo je imel tudi irski matematik William Rowan Hamilton (1805–1865). Kompleksnim številom lahko dodamo novo komponento, označeno z j , za katero velja $j^2 = -1$. Tako dobimo tridimenzionalni prostor $\{a + bi + cj \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, kjer je $i^2 = j^2 = -1$. Problem, ki je mučil Hamiltona, pa je bila smiselna definicija množenja takih števil. Kot je produkt dveh kompleksnih števil vedno kompleksno število, je želel, da je produkt dveh elementov te množice ponovno element iste množice. Vendar, kako smiselno definirati $i \cdot j$? 16. oktobra leta 1843, ko se je z ženo sprehajal po dublinskem kanalu Royal Canal, se mu je utrnila nova zamisel. Čeprav načina za množenje tridimenzionalnih števil ni poznal, pa se je spomnil definicije novih, štiridimenzionalnih števil. Poleg komponente j je kompleksnim številom dodal komponento k in tako dobil novo mno-



SLIKA 1.

Spominska plošča na mostu Broom Bridge, posvečena Williamu Hamiltonu.





žico števil $\{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Preko nje lahko vstopimo v tridimenzionalni svet, če parameter a nastavimo na 0. Pravila za množenje elementov te množice $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ijk = -1$ je Hamilton v navalu navdušenja vklesal na bližnji most Broom Bridge. Množico je poimenoval kvaternioni, ime, ki se je ohranilo vse do danes. Po Hamiltonu množico kvaternionov označujemo s $\mathbb{H}$.

Računske operacije s kvaternioni

Množico kvaternionov sestavljajo torej štiridimenzionalni elementi oblike $a + bi + cj + dk$, kjer so a, b, c in d realna števila, na primer $6 + \sqrt{2}i + \frac{1}{2}j - k$. Podmnožico realnih števil iz množice kvaternionov dobimo, če vzamemo $b = c = d = 0$, kompleksnih pa, če na 0 nastavimo parametra c in d . Prav zato, ker so kvaternioni razširitev kompleksnih števil, je tudi računanje z njimi podobno. Kvaternione seštevamo in odštevamo po komponentah. Velja torej

$$\blacksquare (3 + 7i + 2j - 3k) + (5 + 2i - 2j + 4k) = 8 + 9i + k$$

in

$$\blacksquare (8 + 2i + 6j + 9k) - (9 + 7i + 6j + 8k) = -1 - 5i + k.$$

Pričakovano poteka tudi množenje kvaterniona z realnim skalarjem:

$$\blacksquare 5(2 - 4i + 3j - 2k) = 10 - 20i + 15j - 10k.$$

Bolj pazljivi moramo biti pri množenju kvaternionov. V uvodu smo že definirali pravila za množenje $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ijk = -1$. S pomočjo tega lahko izpeljemo, kako se med seboj množijo komponente i, j, k . Začnimo z enakostjo

$$\blacksquare ijk = -1.$$

Če enakost pomnožimo s k z desne, dobimo

$$\blacksquare ijk^2 = -k.$$

Ker velja $k^2 = -1$, pridemo do zveze

$$\blacksquare ij = k.$$

Če začetno enakost pomnožimo z i z leve, pa dobimo

$$\blacksquare i^2jk = -i$$

oziroma

$$\blacksquare jk = i.$$

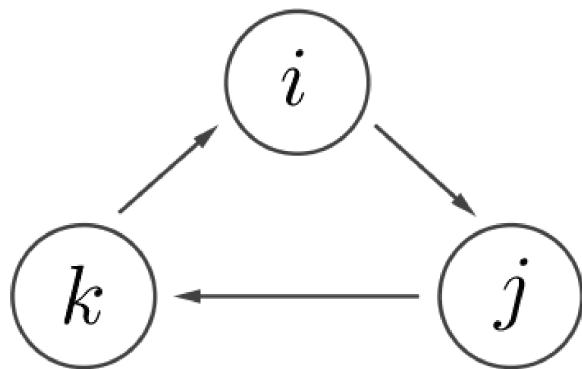
Enakost zdaj pomnožimo še z j z leve. Dobimo

$$\blacksquare ji = -k.$$

Vidimo, da velja $ij = -ji$. Množenje kvaternionov torej ni komutativno, zato moramo biti posebej pozljivi glede vrstnega reda, v katerem elemente množimo. Podobno lahko izpeljemo enakosti

$$\begin{aligned} \blacksquare ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Formule si lahko zapomnimo po shemi na sliki 2.



SLIKA 2.

Schema množenja elementov i, j, k . Produkt dveh zaporednih elementov v smeri urnega kazalca je naslednji element, v obratni smeri pa mu dodamo nasprotni predznak.

Kot primer zmnožimo $2 + i - k$ in $i + 3j$. Produkt je enak

$$\begin{aligned} \blacksquare (2 + i - k)(i + 3j) &= 2i + 6j + i^2 + 3ij - ki - 3kj \\ &= 2i + 6j - 1 + 3k - j + 3i \\ &= -1 + 5i + 5j + 3k. \end{aligned}$$

Podobno kot konjugiranje kompleksnih števil lahko definiramo tudi konjugiranje kvaternionov. Če vzamemo kvaternion $h = a + bi + cj + dk$, je konjugiran kvaternion $\bar{h}$ enak $a - bi - cj - dk$. Račun pokaže, da velja

$$h\bar{h} = \bar{h}h = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

kar lahko, podobno kot pri kompleksnih številih, interpretiramo kot kvadrat dolžine kvaterniona $|h|^2$.

Za konec pogledjmo še deljenje kvaternionov. Da poenostavimo kvocient kvaternionov $\frac{u}{v}$, lahko podobno kot pri kompleksnih številih števec in imenovalc pomnožimo z $\bar{v}$. V imenovalcu bomo dobili kvadrat dolžine $|v|^2$, v števcu pa produkt $u\bar{v}$. Velja torej

$$\frac{u}{v} = \frac{u\bar{v}}{v\bar{v}} = \frac{u\bar{v}}{|v|^2}.$$

Deljenje si oglejmo na primeru:

$$\begin{aligned} \frac{7i + 5k}{2 + i + 3j + k} &= \frac{(7i + 5k)(2 - i - 3j - k)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2} \\ &= \frac{12 + 29i + 2j - 11k}{15}. \end{aligned}$$

Uporaba kvaternionov v geometriji

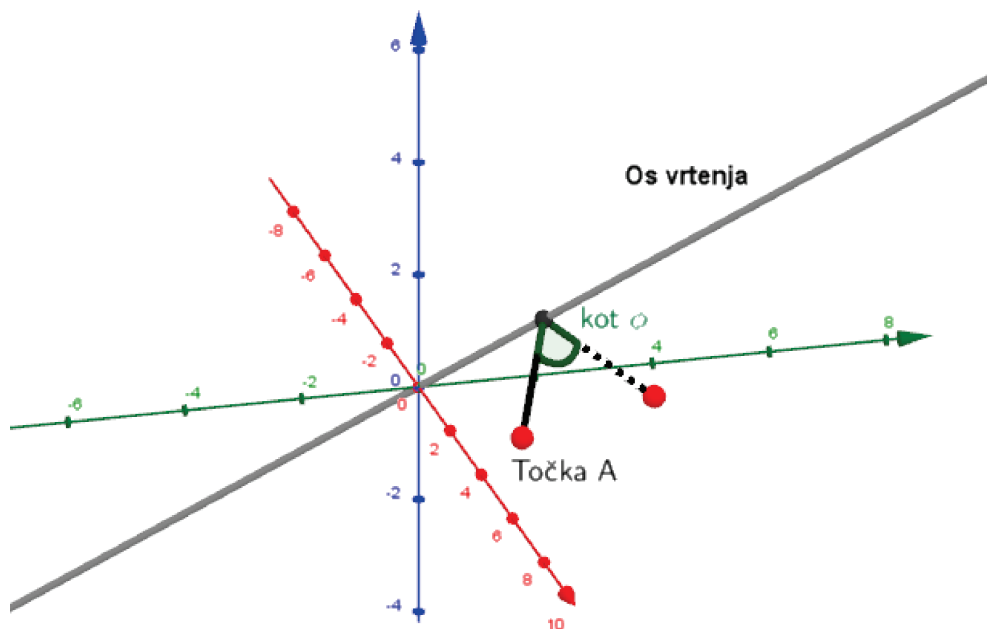
Hamilton je pričakoval, da se bodo kvaternioni uveljavili kot učinkovito orodje za opis operacij v trirazsežni geometriji, toda sčasoma jih je izrinil običajni vektorski zapis z operacijama skalarnega in vektorskega produkta. Kljub temu kvaternioni danes igrajo pomembno vlogo v računalniški grafiki, robotiki in astronomiji, kot je predstavljeno v tem razdelku.

Denimo, da imamo podano točko $A = (x, y, z)$, ki bi jo radi zavrteli okoli neke osi za kot ϕ .

Pri rotiranju si lahko pomagamo s kvaternioni. Točko A lahko predstavimo kot kvaternion $v = xi + yj + zk$. Definiramo še enotski vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ki kaže v smer osi vrtenja in mu priredimo kvaternion $h = \cos \frac{\phi}{2} + (u_1i + u_2j + u_3k) \sin \frac{\phi}{2}$, pri čemer je ϕ želen kot rotacije. Komponente točke A , zavrtene za kot ϕ v smeri urnega kazalca (gledano iz koordinatnega izhodišča vzdolž osi) okoli osi, dane z vektorjem $\vec{u}$, lahko preberemo iz produkta

$$h \cdot v \cdot \bar{h}.$$

Oglejmo si še primer. Denimo, da želimo zavrteti



SLIKA 3.

Rotacija točke A za kot ϕ okoli dane osi.

→ točko $A = (1, 0, 0)$ za kot $\phi = \frac{2\pi}{3}$ okoli osi v smeri vektorja $(1, 1, 1)$. Najprej definiramo enotski vektor $\vec{u}$ v smeri osi vrtenja. Ta je enak $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Pripadajoč kvaternion h je enak

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ & = \frac{1}{2}(1 + i + j + k). \end{aligned}$$

Točko $A = (1, 0, 0)$ lahko identificiramo s kvaternionom $v = i$. Da dobimo novo lego točke po vrtenju, moramo izračunati produkt

$$h \cdot v \cdot \bar{h} = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) \cdot i \cdot \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

Če upoštevamo pravila za množenje kvaternionov in pazimo na njihovo nekomutativnost, račun pokaže, da je zgornji produkt enak j . Podobno kot prej lahko ta kvaternion identificiramo s točko $(0, 1, 0)$. Če torej točko $(1, 0, 0)$ zavrtimo za kot $\frac{2\pi}{3}$ okoli osi v smeri vektorja $(1, 1, 1)$, dobimo novo točko s koordinatami $(0, 1, 0)$.

Da bi lažje razumeli ozadje formule za rotacijo, pogledjmo geometrijsko interpretacijo množenja kvaternionov. Najprej množimo poljuben kvaternion $a + bi + cj + dk$ s kvaternionom i z leve. Dobimo

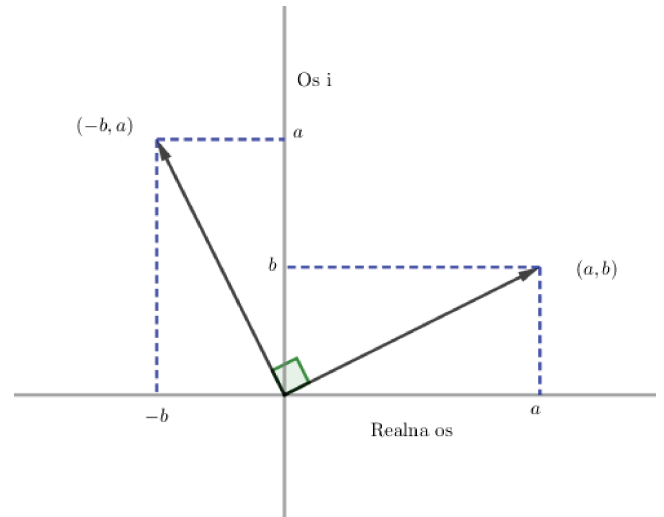
$$i(a + bi + cj + dk) = -b + ai - dj + ck.$$

Štiridimenzionalni prostor lahko razdelimo na dve ravnini. Prvo sestavljata realna os in os i , drugo pa osi j in k . Komponenti (a, b) po množenju postane $(-b, a)$, kar ustreza rotaciji za 90° v prvi ravnini. Hkrati komponenti (c, d) postaneta $(-d, c)$, kar prav tako ustreza rotaciji za 90° v drugi, jk ravnini.

Kaj pa, če kvaternion množimo z $-i$ z desne? Dobimo

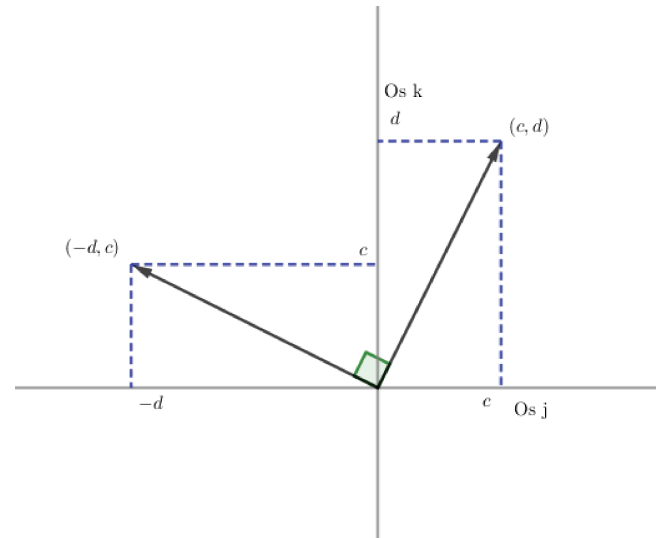
$$(a + bi + cj + dk)(-i) = b - ai - dj + ck.$$

V ravnini jk dobimo popolnoma enako rotacijo kot prej, v prvi ravnini pa dobimo rotacijo za 90° v nasprotni smeri kot pri množenju z i z leve. Zdaj lahko brez računanja ugotovimo, čemu je enak produkt $i(a + bi + cj + dk)(-i)$. V prvi ravnini pride do



SLIKA 4.

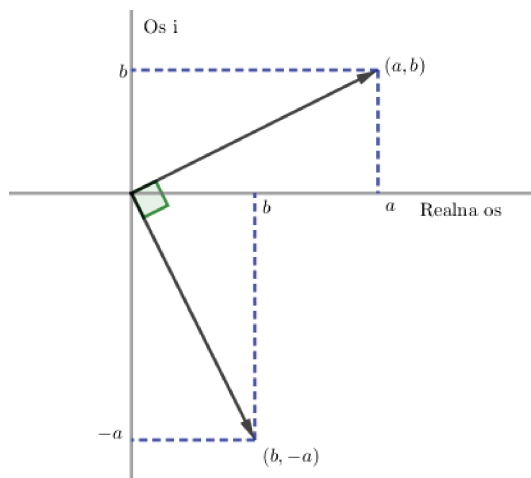
Rotacija v prvi ravnini pri množenju z i z leve.



SLIKA 5.

Rotacija v drugi ravnini pri množenju z i z leve.

dveh nasprotno izključujočih se rotacij, zato komponenti (a, b) ostaneta nespremenjeni, v drugi pa dvakrat rotiramo za 90° v isti smeri, kar ustreza rotaciji za 180° . Tako komponenta (c, d) postane $(-c, -d)$.



SLIKA 6.

Rotacija v prvi ravnini pri množenju z $-i$ z desne.

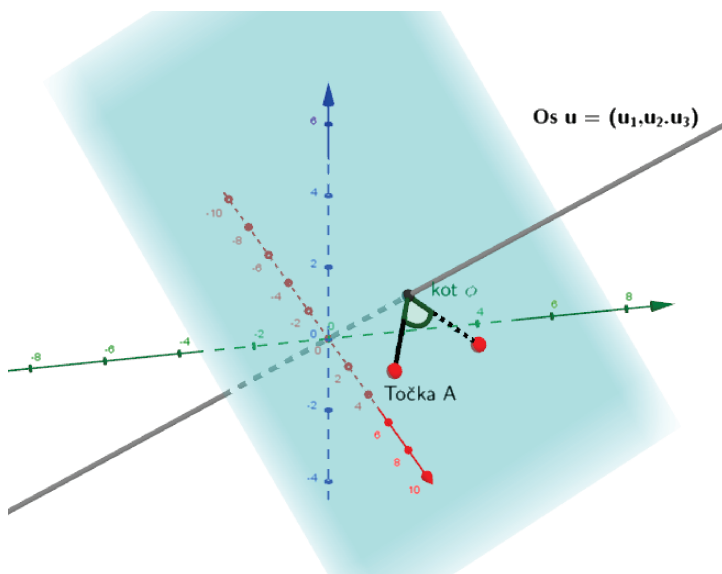
Velja torej

$$\blacksquare i(a + bi + cj + dk)(-i) = a + bi - cj - dk.$$

Pri množenju točke $ai + bj + cj$ s kvaternionom $h = \cos \frac{\phi}{2} + (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \sin \frac{\phi}{2}$ z leve in $\bar{h} = \cos \frac{\phi}{2} + (-u_1 i - u_2 j - u_3 k) \sin \frac{\phi}{2}$ z desne lahko prostor razdelimo na prvo ravnino, ki jo določata realna os in os v smeri vektorja $u = (u_1, u_2, u_3)$, drugo ravnino pa predstavlja njen ortogonalni komplement.

Rotaciji v prvi ravnini se izničita, torej realna komponenta točke, ki jo rotiramo, ostane 0, nespremenjena pa ostane tudi njena lega vzdolž osi u . Hkrati poteka rotacija v drugi ravnini, ki pa ustreza ravno dvakratni rotaciji za kot $\frac{\phi}{2}$ okoli osi (u_1, u_2, u_3) .

Ko je Hamilton pred približno dvesto leti prvič definiral kvaternione, si ni mogel predstavljati, kakšno vlogo bodo danes igrali v vsakdanjem življenju. S tehnološkim napredkom so kvaternioni postali pomembno orodje na številnih področjih, pred-



SLIKA 7.

Z modro barvo je označena ravnina, v kateri poteka rotacija. Njena normala je ravno u .

→ vsem znotraj računalništva, kljub temu da gre za štiridimenzionalne objekte, kar se na prvi pogled ne sklada z našim tridimenzionalnim svetom. Nobeno presenečenje ne bi bilo, če bi v prihodnosti podoben razcvet doživeli še drugi manj znani večdimenzionalni številski sistemi, kot na primer oktonioni. Raziskovanje takih objektov je torej še kako pomembno, saj lahko kakršno koli novo spoznanje znotraj njihovega sveta še dodatno poenostavi svet okoli nas.

Literatura

[1] Spominska plošča na mostu Broom Bridge, posvečena Williamu Hamiltonu, [ogled 12. 1. 2024], dostopno na https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Inscription_on_Broom_Bridge_%28Dublin%29_regarding_the_discovery_of_Quaternions_multiplication_by_Sir_William_Rowan_Hamilton.jpg.

[2] M. Brešar, *Uvod v algebro*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2018.

[3] G. Günaştı, *Quaternions Algebra, Their Applications in Rotations and Beyond Quaternions*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:535712/FULLTEXT02>.

[4] Yan-Bin Jia, *Quaternions and Rotations*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://graphics.stanford.edu/courses/cs348a-20-winter/Papers/quaternion.pdf>.

[5] N. Reed, *Why do Quaternions Double-Cover?*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://www.reedbeta.com/blog/why-quaternions-double-cover/>.

Popravek

V članku *Rešitve matematičnih nalog s Plemljeve mature* v 3. številki 51. letnika Preseka na strani 12 v levem stolpcu spodaj je napaka. Namesto $n = \log a / \log A = n = 92,64$ mora biti $n = \log(a/A) / \log r = 92,64$ let. Za neljubo napako se bralcem iskreno opravičujemo.

Križne vsote

↓↓↓ → Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	16	18	
14			
			5
20			
		5	

↓↓↓ REŠITEV KRIŽNE VSOTE

1	4		
4	6	7	
	5	6	
		18	16

Fibonaccijevi pravokotniki



MARKO RAZPET

→ Fibonaccijevo zaporedje sestavljajo Fibonaccijeva števila F_n , ki so določena z rekurzivno enačbo

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

pri začetnih pogojih $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$. Včasih raje začnemo s $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$ ter uporabimo (1) za $n \geq 0$. Indeksi n števil F_n kakor tudi sama števila F_n so naravna števila. Fibonaccijevo zaporedje z nekaj začetnimi členi zapišemo v obliki:

$$(F_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots).$$

Fibonaccijeva števila niso samo preprosto definirana, ampak imajo številne zanimive lastnosti. V prispevku si bomo ogledali samo eno.

Najprej vzemimo zaporedje kvadratov Fibonaccijevih števil

$$(F_n^2)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921, 20736, 54289, \dots), \quad (2)$$

nato pa zaporedje delnih vsot teh kvadratov:

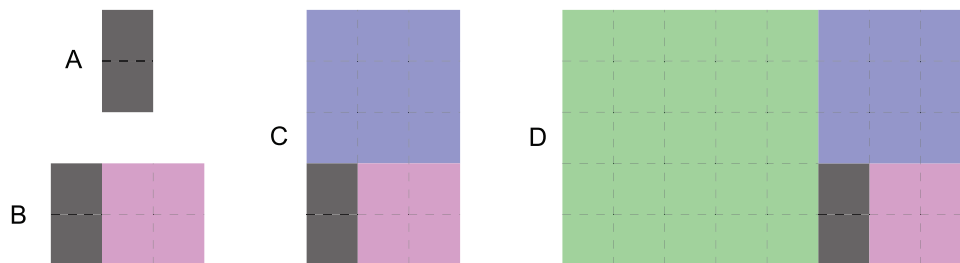
$$(S_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, 4895, 12816, 33552, \dots). \quad (3)$$

Pri tem je n -ta delna vsota S_n definirana kot vsota prvih n členov zaporedja (2), to se pravi

$$S_1 = F_1^2, \quad S_2 = F_1^2 + F_2^2, \quad S_3 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2, \dots, \\ S_n = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2, \dots$$

Takoj opazimo, da lahko člene zaporedja (3) razstavimo na produkt dveh zaporednih Fibonaccijevih števil, na primer:

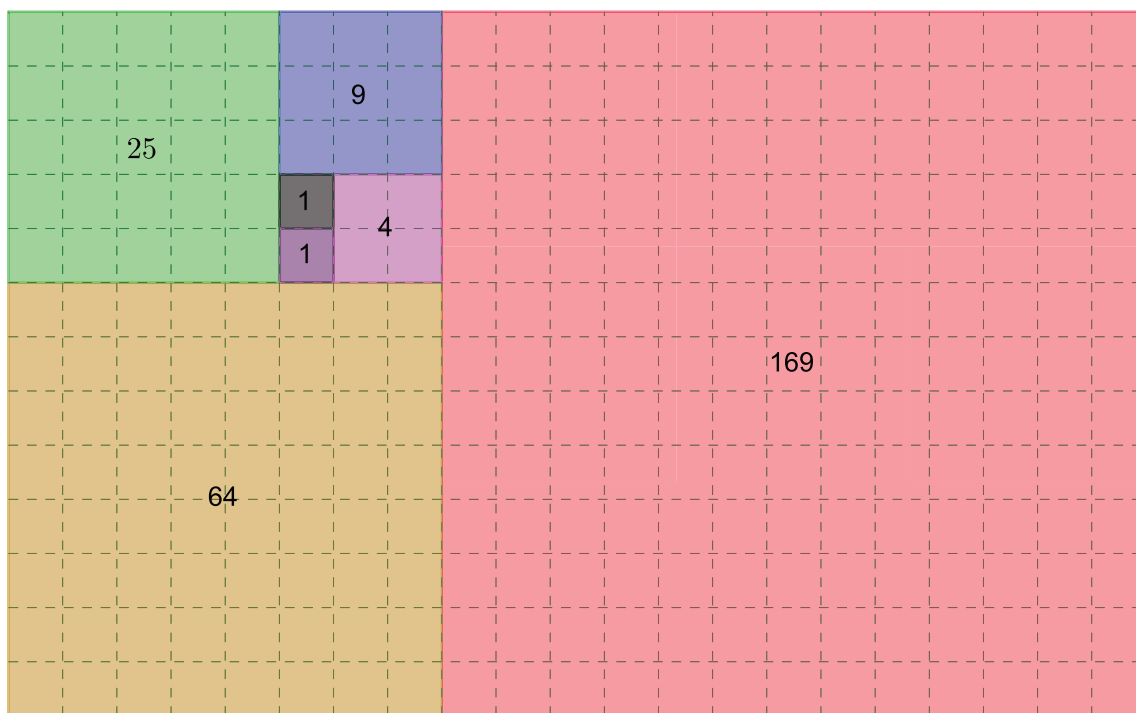
$$S_1 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2, \quad S_2 = 1 \cdot 2 = F_2 F_3, \\ S_3 = 2 \cdot 3 = F_3 F_4, \quad S_4 = 3 \cdot 5 = F_4 F_5.$$



SLIKA 1.

Konstrukcija Fibonaccijevih pravokotnikov.





SLIKA 2.

Razrez Fibonaccijevega pravokotnika na kvadrate.

Pri tem se nam kar hitro utrne misel, da je na splošno

$$\blacksquare S_n = F_n F_{n+1}$$

oziroma

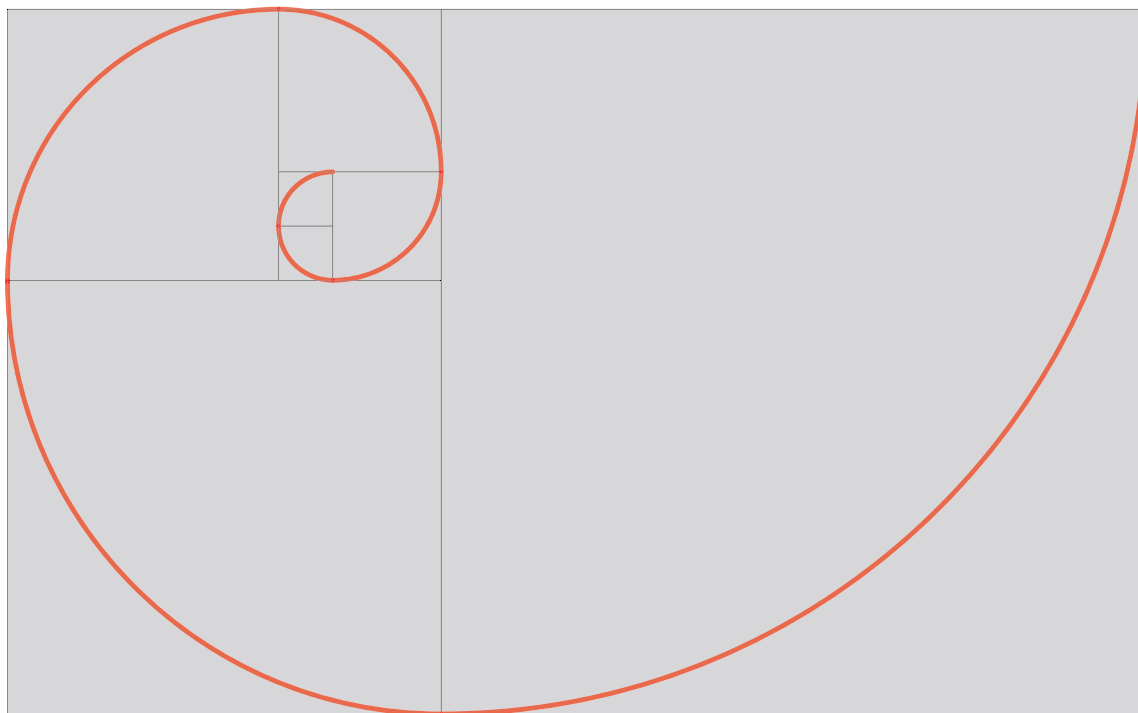
$$\blacksquare F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \quad (4)$$

O veljavnosti enakosti (4) se takoj prepričamo z metodo matematične indukcije. Za $n = 1$ relacija očitno velja. Predpostavimo, da relacija velja za katerokoli naravno število n . Potem na osnovi te predpostavke in z uporabo enačbe (1) dobimo

$$\begin{aligned} \blacksquare F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 \\ = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ = F_{n+1} F_{n+2} = F_{n+1} F_{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

To pomeni, da relacija velja tudi za število $n + 1$, ki je neposredni naslednik števila n . Potemtakem (4) velja za vsa naravna števila n .

Enačba (4) pove, da lahko zaporedje pravokotnikov s stranicama F_n in F_{n+1} za $n > 1$ (imenujemo jih *Fibonaccijevi pravokotniki*) konstruiramo po korakih. Začnemo z najmanjšim Fibonaccijevim pravokotnikom s stranicama $F_2 = 1$ in $F_3 = 2$ (slika 1, A) in ploščino $S_2 = 2$. Temu pridružimo kvadrat s stranico $F_3 = 2$. Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s stranicama $F_3 = 2$ in $F_4 = F_2 + F_3 = 3$ (slika 1, B) in ploščino $S_3 = 6$. Temu pridružimo kvadrat s stranico $F_4 = 3$. Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s stranicama $F_4 = 3$ in $F_5 = F_3 + F_4 = 5$ (slika 1, C) in ploščino $S_4 = 15$. Nato temu pridružimo kvadrat s stranico $F_5 = 5$. Dobimo Fibonaccijev pravokotnik s



SLIKA 3.

Fibonaccijsva spirala.

stranicama $F_5 = 5$ in $F_6 = F_4 + F_5 = 8$ (slika 1, D) in ploščino $S_5 = 40$. Opisani postopek lahko nadaljujemo tako dolgo, kot želimo.

Enakost (4) tudi pomeni, da lahko Fibonaccijev pravokotnik s stranicama F_n in F_{n+1} za $n > 1$ razrežemo netrivialno na same kvadrate. Slika 2 kaže primer za $n = 7$, ko je $F_7 = 13$ in $F_8 = 21$. Kvadrati, na katere smo razdelili Fibonaccijev pravokotnik, so različno obarvani.

Ko od Fibonaccijevega pravokotnika s stranicama F_{n+1} in F_n odrežemo kvadrat s stranico F_n , dobimo manjši Fibonaccijev pravokotnik s stranicama F_n in F_{n-1} . Ta postopek lahko nadaljujemo, dokler ne pridemo do najmanjšega Fibonaccijevega pravokotnika s stranicama $F_3 = 2$ in $F_2 = 1$. Slednjega lahko razdelimo samo še na dva enotska kvadrata. Če v

vse kvadrate pri tem postopku včrtamo četrtine krožnic, tako kot na sliki 3, dobimo *Fibonaccijsvo spiralo*. Krožni loki imajo polmere $F_n, F_{n-1}, \dots, F_2, F_1$.

Literatura

- [1] J. Ziegenbalg, *Figurierte Zahlen*, Springer Spektrum, Wiesbaden 2018.

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Vrčec in kozarec z vodo



NADA RAZPET

→ V steklen vrčec in kozarec smo natočili vodo, ju postavili na poličko balkonske ograje in z njima opazovali okolico. Ker imata posebno obliko, vidimo isto skupino hiš večkrat, kot kažeta fotografiji (slika 1 in slika 2), ki sta bili posneta pred prihajajočo nevihto.



SLIKA 1.

Pogled skozi steklen vrčec z vodo. Vidimo dva pasova hiš. Spodnji je na glavo obrnjeni zgornji, oba pa imata med seboj zamenjani levo in desno stran.

Spodnji del vrčka in srednji del kozarca sta izbočena. Ustje vrčka in spodnji ter zgornji del kozarca pa imata posebno obliko. Preseki z ravninami, vzporednimi z osnovno ploskvijo, so krogi. Preseki z ravninami, ki so pravokotni na osnovno ploskev, pa so približno hiperbole. Geometrijsko telo, ki ima tako obliko, je enodelni rotacijski hiperboloid. Zato bomo te dele vrčka in kozarca imenovali hiperboloidni deli. Na prvi pogled rečemo: aha, izbočeni deli vrčka in kozarca delujejo kot zbiralna, hiperboloidni pa kot



SLIKA 2.

Pogled skozi steklen kozarec z vodo. Vidimo tri pasove hiš, kjer so na spodnjem in zgornjem pasu hiše pokonci, v srednjem pa obrnjene na glavo. Pri vseh treh pasovih hiš pa sta med seboj zamenjani leva in desna stran.

razpršilna leča. Pa je res tako? Kaj vidimo skozi krogelno zbiralno in kaj skozi krogelno razpršilno lečo, kažeta fotografiji na sliki 3.

Po lomu skozi krogelno zbiralno lečo se žarki iz točke P oddaljenega predmeta sekajo v točki P' . Točka P' je prava slika točke P . Prave slike oddaljenih predmetov so na drugi strani leče, kot je predmet, obrnjene so na glavo, leva in desna stran sta med seboj zamenjani. Lahko jih ujamemo na zaslon. Krogelna razpršilna leča pa svetlobo, ki prihaja skozi lečo, razprši, sekajo se podaljški žarkov. Slika nastane na isti strani, kot je predmet, in sicer med predmetom in lečo. Slika je navidezna, pokončna, leva in desna stran pa med seboj nista zamenjani.

Primerjajmo, kaj vidimo skozi krogelni leči in kaj skozi vrčec in kozarec z vodo. Najprej pogledjmo skozi vrčec. Če bi bil trebušasti del vrčka povsod enako ukrivljen, bi za svetlobo deloval kot debela zbiralna leča. In res, skozenj vidimo okolico postavljeno na glavo, leva in desna stran pa sta med seboj zamenjani, kot to pričakujemo pri zbiralni leči. Nekoliko preseneti dobra ostrina slike 1, a ker sta

**SLIKA 3.**

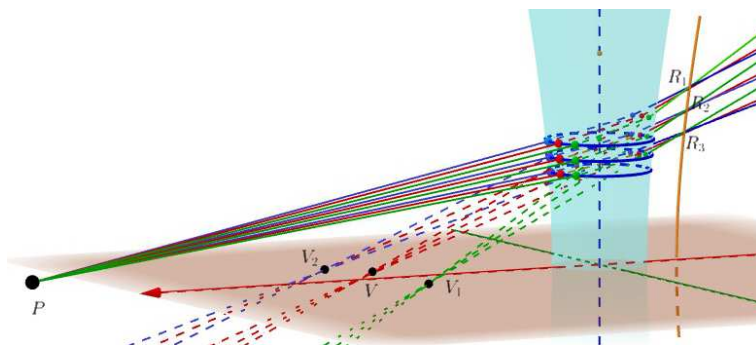
Levo: Pogled skozi krogelno razpršilno lečo. Hiše stojijo pokonci, leva hiša je na levi strani, desna pa na desni strani. Desno: Pogled skozi krogelno zbiralno lečo. Hiše stojijo na glavi, leva in desna sta med seboj zamenjani.

krivinska radija vrčka na trebušastem predelu v vodoravni in navpični smeri, to sta $R_v = 6$ cm, $R_n = 6,3$ cm, skoraj enaka, trebušasti del vrčka res deluje kot debela zbiralna leča. Povsem drugače pa je na grlu vrčka in na spodnjem in zgornjem delu kozarca. To so hiperboloidni deli. Tu je navpična ukrivljenost negativna, vodoravna pa pozitivna, zato imamo zanimivo lečo, ki je za žarke v vodoravni ravnini zbiralna, v navpični pa razpršilna. Takih leč ni mogoče kupiti, saj so neuporabne. V teh delih vrčka in kozarca se pojavljajo pasovi hiš, kjer sta med seboj zamenjani leva in desna stran, hiše pa ne stojijo več na glavi, ampak so pokončne. Torej vidimo kom-

binacijo prave in navidezne slike (glej sliko 4). Prava nastane med vrčkom/kozarcem in opazovalcem, navidezna pa na drugi strani vrčka/kozarca. Če je opazovalec daleč od vrčka/kozarca, če je torej njegova razdalja do posod veliko večja, kot je njihov krivinski radij R , še vedno kar dobro vidimo kombinirano sliko, čeprav ne več tako ostro kot prej. Narišimo potek žarkov skozi hiperboloidne dele kozarca/vrčka. Za skico potrebujemo enačbo hiperboloida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Parametra a in c sta izbrana tako, da ustrežata

**SLIKA 4.**

Shema žarkov za hiperboloidne dele vrča in kozarca. Žarki, katerih vstopne točke ležijo na modrih krožnicah, ki so pravokotne na os z , se sekajo za lečo. Žarki, ki vstopajo na različnih višinah, se sekajo v različnih točkah R_1, R_2, R_3 , ki ležijo na rumeni črti. Dobimo prave slike točke P . Podaljški žarkov, katerih vstopne točke ležijo na ravninah, ki so vzporedna z navpično osjo z , pa se zgoščajo okoli točk V_1, V_2 in V . To so navidezne slike točke P .

18

nadaljevanje
na strani

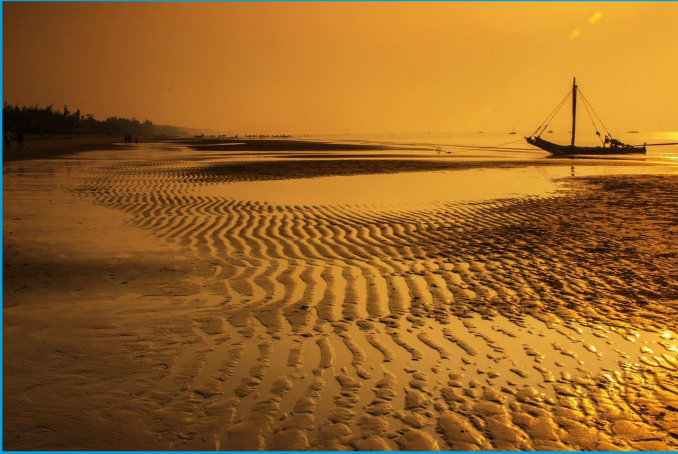


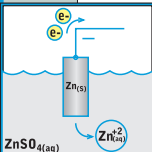
Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ	HRVAŠKI IGRALEC ROGOSZ	NEDELAVNOST	BENIGNA LOJNA BULA ALI MASCOBNA OBLAGA	TELUR	EVROPSKA OTOŠKA DRŽAVA	PARAZITSKE BAKTERIJE, KI POVZROČAJO PEGAVICO	ITALIJAN. FIZIK FERMI	PRIKRITJE SLEDI
POSEBNO RAZMERJE V MATEMATIKI		2						
ŽIVINO-ZDRAVSTVO								
NEIMENOVANA REČ, ONEGA				ČUT ODGOVORNOSTI, OBČUTEK NEMIRA				
NEUMEN, OBSEDEN, PODIVJAN GORIŠČE				AM. IGRALEC DULLEA NAŠA NEKD. JUDOISTKA (PETRA)				

 AZERBAJ-RUSKI FIZIK (LEV DAVIDOVIČ)	PIHALEC V SIMFONIČNEM ORKESTRU	VISOKA LESENA POSODA TRGAČEV GROZDJA	ALBERT EINSTEIN	ČENČA, TRAC	AMERIŠKA PEVKA (BILLIE)	POKOJNI ZDRAVNIK IN ALPINIST (EVGEN)	ČUTNI IN DUŠEVNI OPOJ TRDEN PRIJEM		GRŠ. OTOK ENCIM ZA RAZGRADNJO SEČNINE			
RUSKI MATEMATIK (NIKOLAJ)						6		RAČUNSKA VEJA MATEMATIKE		9	501 Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI	VELIKA NAVDUŠENKA, ZANESLJIVOST
7									KRAŠKI GRM Z JESENI RDEČIMI LISTI IT. DIRIGENT (ALBERTO) OBUTEV IZ JEREMENČKOV			
SVETOPISEMSKI OČAK			PEVEC PRESLEY					DELOVNE OKONCINE OSTUDA, OGABA			POLOTOK V JUGOVZHODNI AZIJI RENIJ	LETOVIŠKA DEJAVNOST PRIPADNIK BIT GENERACIJE
KRATICA ZA NEMŠKE INDUSTRIJSKE NORME			POGRESEK, SPODRSLJAJ ANDREJ HIENG				MAVČAR AKTIVEN JAPONSKI VULKAN					
MINISTRICA ZA KULTURO VREČKO				PREMICA SEČNICA					GRBASTO INDIJSKO GOVEDO HIMALAJ. GOVEDO			
GORATA DRŽAVA V ZAHOD. DELU ZDA				HINKO NUČIČ		SUMNICE					SOBA V KMEČKI HIŠI NAŠ KIPAR (NIKOLAJ)	



EDEM									DVONOGA ŽIVAL NEKD. AVS. DIRKAČ (NIKI)			
BIZMUT								PRIKOT SAVE IZ BOSNE	ANTIČNI ASTRONOM ČEBULI SORODNA VRTNINA		3	
ZDRAVILEC, KI ZABADA IGLE V TKIVO												NEKDANJE ŠIROKO NABRANO KRILLO, OBROČNICA
								STAROGR. PESNIK, PISEC ASTROPEPA POJAVI				DEJANJE



GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	SAMO-STOJNO PODROČJE FIZIKE	VEDA O PRETVO RBI SONČNE ENERG IJE V ELEKTRIČNO	SPLETNA OZNAKA EGIPTA	VISOK VOJAŠKI ČIN	APLIKAC IJA ZA PRIKAZ PORABE JAVNEGA DENARJA	GLAS OSLA	IGRALKA RINA	MAKEDON. MESTO BLIZU MEJE Z ALBAN IJO	SVETOPIS. KRAJ IZ ČASA JEZU-SOVEGA VSTAJENJA	
TABELE S PODATKI O LEGI NEBESNIH TELES				4						
FUNKCIJA IZ VIŠJE MATE-MATIKE										
LATINSKI VEZNIK			PRAVLJIČNA GOZDNA HUDBOBNICA OBRAT ZA OGREVANJE							
STARO OBALNO MESTO V ČRNI GORI						IGRALEC HANKS	REKA V ANGLIJI GOSTOTO-MER ZA PLINE			8
TUR					POLJ.-AM. MATEMATIK (ALFRED) LJUD. PRI-TRDILNICA					
NASILEN ODVZEM DOBRIN WERNER EGK				AM. PRE-D-SEDNIK BIDEN SOŠED BRITANCA				PLIN, KI VPLIJA ULTRA-VIJOLIČNO SEVANJE	SELEN FINSKI PISATELJ (MIKA)	
					TRAVNATI SVET NA KONCU NJIVE. KJRE SE PRI ORANJU OBRACA PLUG					
ZA RENOM DRUGA NAJVEČJA REKA V ŠVICI					VISOKO LEŽEČI TEKAŠKI CENTER V KENJI	ENOTA ZA MNOŽINO SNOVI NEBOGLJEN OTROK				
IZPOSO-JEVALNICA ČOLNOV	IZGRED, EKSCES									
	NAJMANJŠI FORDOV MODEL PASCAL			PRIPADNIK SLOJA ST. GRKOV MESTO V ARGENTINI			ANGLEŠKA VRSTA PIVA OLGA GRACELJ			
			GMOTA, KI PADE IZ VESOLJA NA ZEMLJO			10				
		ARKTIČNA PTICA, NJORKA	FIZIKALNA KOLIČINA POKRAJINA V JUŽNI AFRIKI							
	IGRALKA BLYTH IGRALEC CONNERY				ALEKSAN-DRIJSKI ŠKOF, KI JE OSNOVAL SVOJ NAUK					
		NAJVIŠJI NORDIJSKI BOGOVI								
		TEBANSKI KRALJ, OJDIPOV OČE								

NAGRADNI RAZPIŠE

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka in ga oddajte do **15. marec 2024** ob 12. uri. Izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **glavno nagrado**.

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. marec 2024**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



15

nadaljevanje
s strani**SLIKA 5.**

Posvetimo s svetilko skozi hiperboloidni del vrčka/kozarca in z zaslonom poiščemo sliko. Vidimo črte. Barvna črta je na levi, obarvana dioda pa na desni strani.

polmeru dna kozarca in polmeru presečne krožnice na višini 9 cm. Rotacijska os pa je kar os z . Opazujemo žarke, ki izhajajo iz točke P (slika 4). Žarki v hiperboloidni del kozarca/vrčka vstopajo v vstopnih točkah. Tisti žarki, katerih vstopne točke ležijo na modrih krožnicah, ki so pravokotne na os hiperboloida, se sekajo na drugi strani hiperboloida. Se pa žarki, ki vstopajo na različnih višinah, sekajo v različnih točkah R_1, R_2, R_3 in ležijo na črti, ki je na sliki 4 označena z rumeno barvo. To so prave slike

točke P . Vstopne točke na posameznih krožnicah so označene z rdečo, modro in zeleno barvo. V resnici rumena črta ni tako tanka, saj je leča debela in se na črti seka le ozek šop žarkov. Primerjate s člankom [1]. Črte lahko ujamemo na zaslon. Naredili smo dve fotografiji (slika 5). Za izvir svetlobe smo uporabili baterijsko svetilko s petimi svetlečimi diodami. Eno od diod smo prekrili s prosojno oranžno ploščico. Svetilko postavimo pred vrček/kozarec tako, da je ploščica na desni strani, če gledamo v smeri proti vrčku/kozarcu. Na fotografijah se opazi, da črte niso ostre, so razmazane, saj tudi diode niso točkasta svetila. Ostrejši deli črt so na mestih, kjer se sekajo žarki, katerih razdalja od navpične osi z je majhna. Ne vidimo 5 črt, ker se črte nekaterih diod prekrivajo.

Zdaj pa pogledjmo, kako je s tistimi žarki, katerih vstopne točke ležijo v navpičnih ravninah. Ker smo narisali vstopne točke na treh vzporednih krožnicah, moramo samo pogledati, kje se sekajo podaljški žarkov iz točk, ki ležijo v istih navpičnih ravninah. Na sliki so pobarvane z isto barvo. Pravzaprav bi morali reči, kje se gostijo podaljški žarkov, saj se pozna napaka debele leče. Dobimo zgoščine V_1, V_2 in V . Če se razdalja žarkov od osi z manjša, se zgoščini V_1 in V_2 približujeta V . Dobili smo navidezne slike točke P .

Povzemimo: hiperboloidni deli vrčka in kozarca delujejo v vodoravni smeri kot zbiralna, v navpični pa kot razpršilna leča.

Kaj pa izbočeni del kozarca (slika 6)? Del izboče-

**SLIKA 6.**

Povečan zgornji del kozarca. Na izbočenem, spodnjem delu, so hiše obrnjene na glavo, leva in desna stran sta med seboj zamenjani. Na hiperboloidnem zgornjem robu pa stojijo hiše pokonci, prav tako sta leva in desna med seboj zamenjani.



SLIKA 7.

Kozarec z vodo smo zasukali za 90° . Zdaj so na hiperboloidnem delu kozarca hiše obrnjene na glavo, saj v navpični smeri deluje ta del kozarca kot zbiralna leča. Leva in desna stran pa nista med seboj zamenjani, saj v vodoravni smeri deluje ta del kot razpršilna leča. Na izbočenem delu pa so hiše obrnjene na glavo, leva in desna sta med seboj zamenjani.

nega dela kozarca deluje kot zbiralna leča, del pa kot kombinirana. Na zaslonu lahko najdemo tako črte kot slike diod, ki pa ne nastanejo na istem mestu.

Zanimivo je pogledati še skozi kozarec, ki ga zasukamo za 90° (slika 7). Zdaj deluje hiperboloidni del kozarca navpično kot zbiralna leča, vodoravno pa kot razpršilna leča. Zato so hiše obrnjene na glavo, leva in desna pa nista med seboj zamenjani. Pri fotografiranju smo bolj pazili na hiperboloidni del, tako da se na izbočenem delu vidi le srednja hiša, kjer pa vidimo, da je zeleni bagar, pri hiperboloidnem delu kozarca na levi strani rumene hiše, pri izbočenem delu pa na desni strani hiše, torej sta leva in desna stran na izbočenem delu kozarca med seboj zamenjani. Ne bo odveč, če pripomnimo, da zbiralna leča, tudi očesna je zbiralna, preslika tudi navidezno sliko v pravo sliko. Ko gledamo predmete skozi vrč ali kozarec, seveda brez zaslona, zaradi majhne zenice in večje oddaljenosti očesa vidimo le košček črte, ki

daje vtis točke, žarke iz navidezne slike pa tudi v nekoliko zabrisano točko, ko oko akomodiramo na realno sliko. Od daleč torej vidimo sliko, ki je sicer ne moremo povsem izostriti, a tega niti ne opazimo. Če očesi nista v vodoravni ravnini, vidimo slabše, ker eno oko vidi nekaj drugega kot drugo. Stereo pogled z obema očesoma ne izostri slike. Tudi fotografski aparat teh slik ne more izostriti. Torej v teh primerih o slikah, kot jih vidimo pri krogelnih lečah, ne moremo govoriti. Še sami doma pogledjte skozi kakšen zanimivo oblikovan steklen kozarec ali vrč, napolnjen z vodo.

Literatura

- [1] A. Likar, *Valjasto in krogelno zrcalo*, Presek, 51, 3, str. 19-23, 2023/2024

× × ×

2001 s kovanci

ŠTEVILKA 4, LETNIK 28 (2000/2001)

↓↓↓

→ V Sloveniji od leta 2007 dalje uporabljamo evro. Nekatere naše mlade bralke in bralci tako sploh nikoli niso uporabljali slovenskih tolaarskih kovancev, o katerih govorijo naloga iz začetka leta 2001. Pravi ljubitelji matematike bodo nalogo zlahka posodobili na današnjo situacijo:

- Koliko najmanj kovancev in bankovcev za 1, 2, 5 in 10 EUR potrebujemo, da lahko z njimi izplačamo vse zneske od 1 do 2024 EUR. Ali je takih skupin kovancev in bankovcev več?
- Na koliko različnih načinov lahko izplačamo znesek 2024 EUR s kovanci in bankovci za 1, 2, 5 in 10 EUR?

Pa bi jo znali današnji bralci tudi rešiti? Če je naloga za vas pretežka, pobrskajte po starih številkah revije in morda boste našli odgovor tam.

Računalništvo – Naloge

211

2001 S KOVANCI

V Sloveniji so za plačevanje z gotovino (poleg bankovcev) v obtoku kovanci za 10, 5, 2 in 1 tolar ter za 50, 20 in 10 stotinov. V nalogi nas stotinski drobiž ne bo zanimal, računali bomo le s celimi tolarji.

(a) Če imamo na razpolago skupino kovancev, lahko z njimi izplačamo različne zneske. Tako lahko npr. s kovanci za 1, 2, 2 in 5 tolarjev izplačamo vsak (tolarski) znesek od 1 do 10 tolarjev. Hitro se tudi lahko prepričamo, da tega za manj kot štirimi kovanci ni moč storiti. Sprašujem vas, najmanj koliko kovancev potrebujemo, da lahko z njimi izplačamo vsak znesek od 1 do 2001 tolarja. Ali je takih po številu kovancev najmanjših skupin več?

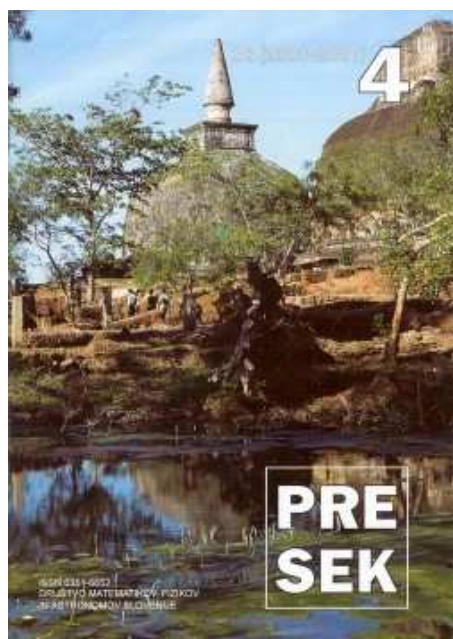
(b) Posamezne zneske lahko izplačamo na več bistveno različnih načinov. Tako lahko npr. 10 tolarjev izplačamo na 11 bistveno različnih načinov:

$$\begin{aligned}
 10 &= 1 \cdot 10 \\
 &= 2 \cdot 5 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \\
 &= 5 \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \\
 &= 10 \cdot 1.
 \end{aligned}$$

V zgornjem zapisu so števila, ki predstavljajo vrednosti kovancev, natisnjena krepko. Sprašujem vas, na koliko različnih načinov lahko izplačamo 2001 tolar.

Odgovor na prvo vprašanje najdete z razmislekom. Pri drugem vprašanju pa se računanju ne bo dalo izogniti. Ker vam računanje s svinčnikom in papirjem verjetno ne diši, si boste seveda pomagali s kalkulatorjem, še lažje pa boste do odgovora prišli s kratkim računalniškim programom.

Martin Juvan



Plimovanje



VID KAVČIČ

→ Vsak, ki je vsaj en dan preživel ob morski obali, je prav gotovo opazil plimovanje – periodično dviganje in spuščanje gladine morske vode. V članku se bomo sprehodili mimo nekaj osnovnih dejstev o plimi, spoznali, kaj je to plimska sila, nato pa v poenostavljenem modelu ocenili razliko višin gladine morja ob nizki in visoki vodi. Nato se bomo z učinki plimovanja seznanili še nekoliko podrobneje, vse skupaj pa bomo zaokrožili z nekaj zanimivimi izzivi z astronomskih tekmovanj.

Splošno o plimovanju

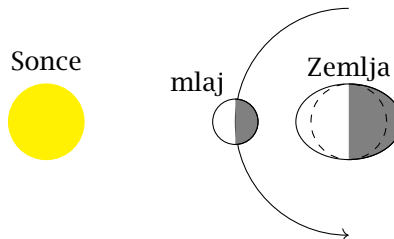
Obče znano je, da je plima v veliki meri posledica gravitacijskega učinka Lune. Manj razširjeno pa je, da na plimovanje v manjši meri kot Luna vpliva tudi Sonce.

Morska gladina dvakrat dnevno doseže svojo največjo višino (*plima*), prav tako svojo najmanjšo višino (*oseka*). Če smo nekoliko bolj natančni in upoštevamo kroženje Lune okoli Zemlje z obhodnim časom približno 27,3 dni, lahko izračunamo, da sta dva zaporedna plimska maksimuma razmaknjena za

$$\frac{1}{2} \left(24 + \frac{24}{27,3} \right) \text{ h} = 12 \text{ h } 25 \text{ min.}$$

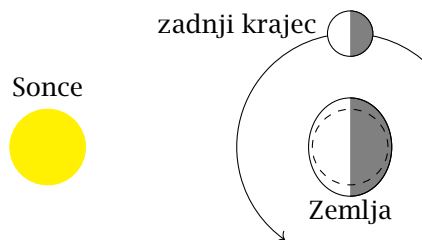
Ob polni Luni in ob mlaju so Sonce, Zemlja in Luna poravnani v isti premici, zato se takrat plimska učinka Sonca in Lune seštejeta (slika 1). To pomeni, da je takrat razlika med višinama plime in oseke največja. V Koprskem zalivu ta razlika na primer znaša okoli 1 meter in 20 centimetrov.

Nasprotno sta ob prvem oziroma ob zadnjem kraju zveznici Zemlja–Luna in Zemlja–Sonce približno pravokotni, zato takrat razlika višin ni tako izrazita (slika 2). Najmanjša razlika višin gladine morske vode v Koprskem zalivu je takrat le okoli 40 cm.



SLIKA 1.

Ob največji plimi ležijo Sonce, Luna in Zemlja na isti premici.



SLIKA 2.

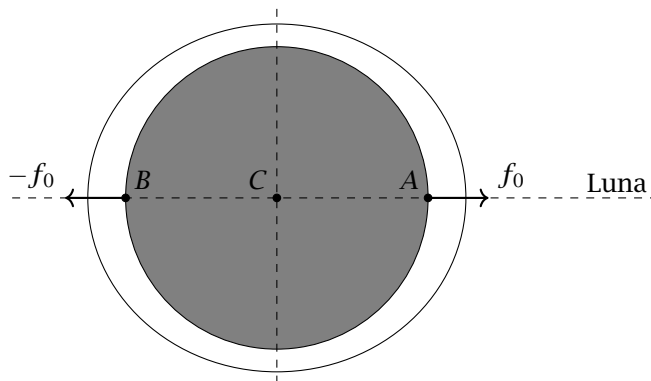
Učinek plime je manjši, ko zveznici Sonce-Zemlja in Zemlja-Luna oklepata pravi kot.

Plimska sila

Plimovanje je v osnovi zelo zapleten pojav, ki ga ni enostavno pojasniti. Na prvi pogled bi rekli, da se višina gladina vode spreminja, ker Luna in Sonce vodo privlačita s silo gravitacije, kar bi povzročilo dvigovanje in spuščanje vode. Po Newtonovem gravitacijskem zakonu je sila med telesoma z masama M in m obratno sorazmerna s kvadratom razdalje d med njima:

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}.$$





SLIKA 3.

Središče Zemlje je v točki C. Točka A je Luni najbližja točka na Zemljinem površju, točka B pa najbolj oddaljena. Plimska sila je razlika gravitacijskih sil Lune na telo v točkah A in C.

Po nekaj razmisleka pa ugotovimo, da bi v tem primeru v enem dnevu imeli le eno plimo in eno oseko. Voda bi namreč Zemljo obdala z nekakšno jajčasto lupino, ki bi bila na strani Lune najdebelejša, na nasprotni strani pa najtanjša. Težava je tudi v tem, da je sila gravitacije Sonca na telesa na Zemlji skoraj dvestokrat večja od sile gravitacije Lune nanje. To se ne sklada s tem, da na plimovanje v večji meri vpliva ravno Luna, zato takšna razlaga ni prava.

Luna je od središča Zemlje v povprečju oddaljena okoli 384 tisoč kilometrov. Zemlja pa ni točkasto telo – je planet v obliki nekoliko sploščene krogle s polmerom okoli 6370 kilometrov. To pomeni, da različni deli Zemljinega površja niso enako oddaljeni od Lune – nekateri so bližje, nekateri pa dlje. Ker sila Lunine gravitacije pada z oddaljenostjo od Lune, je sila gravitacijska sila Lune na tiste dele Zemlje, ki so bližje Luni, večja kot na tiste, ki so dlje od nje.

Oglejmo si (slika 3) razliko gravitacijskih sil, s katerima deluje Luna na opazovalca v središču Zemlje (točka C) in na opazovalca v točki, najbližje Luni (točka A).

Označimo to razliko sil z f_0 . Potemtakem lahko zapišemo

$$f_0 = \frac{GMm}{(d_{\text{L}} - R_{\oplus})^2} - \frac{GMm}{d_{\text{L}}^2},$$

kjer smo z $R_{\oplus}$ označili polmer Zemlje in z d_{L} oddaljenost Lune od središča Zemlje. Polmer Zemlje je veliko manjši od oddaljenosti Zemlje od Lune ($R_{\oplus} \ll$

d_{L}), njen polmer namreč znaša približno 1/60 razdalje do Lune. Izraz za f_0 lahko tako z upoštevanjem zveze $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$ nekoliko poenostavimo:

$$f_0 = \frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{L}}^2} \left[\left(1 - \frac{R_{\oplus}}{d_{\text{L}}} \right)^{-2} - 1 \right] \approx \frac{2GM_{\text{L}}m}{d_{\text{L}}^3} R_{\oplus}.$$

Sili f_0 pravimo *plimska sila*. Iz zgornjega izraza razberimo zelo pomembno lastnost plimske sile – ta namreč v nasprotju z gravitacijsko ne pada s kvadratom oddaljenosti, temveč pada z njenim kubom.

S podobnim izračunom ugotovimo, da je plimska sila na delec v točki, ki je od Lune najbolj oddaljena (B), enaka $-f_0$. Iz simetrije gre tako sklepati, da se voda okoli Zemlje razporedi približno v obliki majcenega sploščenega elipsoida, kar smo zaznamovali tudi na sliki 3.

Zdi se, da bi lahko bile ravno plimske sile tiste, zaradi katerih se višina gladine vode na površju Zemlje spreminja – Luna na nekatere dele Zemljinega površja deluje z večjo silo kot na druge, zato bi pričakovali, da tam vodo pritegne "bližje k sebi", kar bi ustvarilo učinek plimovanja. V tem primeru bi se voda oblikovala v enakomerno jajčasto lupino, kot jo prikazuje slika 3, poleg tega pa bi dnevno zares imeli dve plimi in dve oseki.

Z modelom plimovanja kot posledico učinkov plimskih sil bi lahko izračunali največjo razliko višin gladine vode ob plimi in oseki. Poskusimo!

Največja razlika višin gladine vode

Izračunajmo, kolikšna je največja razlika višin gladine morja zaradi učinka Lune in Sonca. Pri tem bomo predpostavili, da je Zemlja enakomerno prekrita z vodo ter da ležita Luna in Sonce v ekvatorialni ravnini. Upoštevali bomo, da je masa Zemlje $M_{\oplus} = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, polmer Zemlje je $R_{\oplus} = 6370$ km, masa Lune je $M_{\text{L}} = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg, oddaljenost središča Lune od središča Zemlje je $d_{\text{L}} = 384\,000$ km, masa Sonca je $M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg, njegova oddaljenost od Zemlje pa $d_{\odot} = 1,5 \cdot 10^8$ km.

Zavoljo lažjega računanja se nad izziv ne bomo spravili s proučevanjem gravitacijske ali plimske sile, temveč z uporabo gravitacijske potencialne energije. Poleg tega se za začetek omejimo zgolj na plimske učinke Lune, dodatnim vplivom Sonca pa se bomo posvetili v nadaljevanju.

Zamislimo si testni delec z maso m na Zemljinem površju, ki se nahaja pri kotu z (slika 4). Izrazimo gravitacijsko potencialno energijo W_p tega delca v odvisnosti od kota z . Razdaljo r od središča Lune do telesa na površju Zemlje pri kotu z izrazimo s pomočjo kosinusnega izreka:

$$r = \sqrt{d_{\text{L}}^2 + R_{\oplus}^2 - 2d_{\text{L}}R_{\oplus}\cos z}.$$

Za potencialno energijo tako sledi

$$W_p = -\frac{GM_{\text{L}}m}{\sqrt{d_{\text{L}}^2 + R_{\oplus}^2 - 2d_{\text{L}}R_{\oplus}\cos z}}.$$

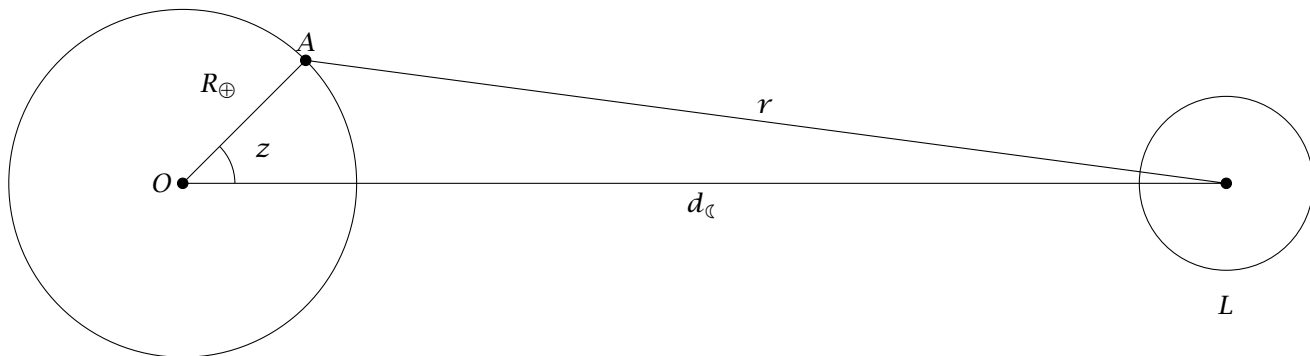
Kaj pa zdaj? Zgornji izraz lahko nekoliko poenostavimo, če upoštevamo, da je polmer Zemlje veliko manjši od oddaljenosti Lune od Zemlje. Pri tem upoštevamo prve tri člene Taylorjevega razvoja koren-ske funkcije. Če bi namreč upoštevali le prva dva člena, bi napravili pregrob približek, s tem pa bi v enačbah izgubili plimski učinek. Spomnimo se, da za $x \ll 1$ velja zveza

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

Če slednje uporabimo v konkretnem primeru, dobimo

$$\begin{aligned} W_p &= -\frac{GM_{\text{L}}m}{\sqrt{d_{\text{L}}^2 + R_{\oplus}^2 - 2d_{\text{L}}R_{\oplus}\cos z}} \\ &\approx -\frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{L}}} - \frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{L}}^2}R_{\oplus}\cos z \\ &\quad - \frac{GM_{\text{L}}mR_{\oplus}^2}{2d_{\text{L}}^3}(3\cos^2 z - 1). \end{aligned}$$

V točkah $z_1 = 0$ in $z_2 = 180^\circ$ je razlika gravitacijskih potencialnih energij zaradi vpliva Lune največja.



SLIKA 4.

Skica za razumevanje plimskega učinka Lune za posamezne kraje na Zemljinem površju. S točko O je označeno središče Zemlje, s točko L pa središče Lune. Točka na Zemljinem površju, ki se nahaja pri kotu z glede na zveznico OL , označimo z A .





čja. Iz energijskega izreka sledi, da mora razlika gravitacijskih potencialnih energij zaradi Lune ustrezati razliki gravitacijskih potencialnih energij $\Delta W'_p$ na površju Zemlje, ki je enaka

$$\Delta W'_p = mgh_0,$$

kjer je h_0 iskana razlika višin, g pa gravitacijski pospešek na površju Zemlje. Poenostavljeno enačbo za razliko potencialnih energij lahko uporabimo, ker je pričakovana razlika višin h_0 veliko manjša od polmera Zemlje $R_\oplus$. Dobimo:

$$\begin{aligned} mgh_0 &= -\frac{GM_\oplus m}{d_\oplus^2} R_\oplus (\cos z_2 - \cos z_1) \\ &= \frac{2GM_\oplus m}{d_\oplus^2} R_\oplus, \end{aligned}$$

iz česar izračunamo h_0 :

$$h_0 = \frac{2GM_\oplus}{gd_\oplus^2} R_\oplus \simeq 50 \text{ m.}$$

Rezultat se zdi nekoliko prevelik in nerealen. Tega si ne moremo niti predstavljati, kaj šele, da bi želeli kaj takšnega tudi izkusiti v vsakdanjem življenju. Kje smo se zmotili?

Razlaga pojava plimovanja s plimsko silo je veliko boljša od začetne zamisli o razlagi pojava z gravitacijsko silo kot tako. Takšna interpretacija je po svoje tudi upravičena in bi tudi delovala, če bi Zemlja in Luna mirovali. V razlagi pojava smo namreč zanemarili kroženje Lune okoli Zemlje. Poskusimo to upoštevati in popraviti svoje izračune.

Pri tem moramo paziti in upoštevati še, da Luna pravzaprav ne kroži okoli središča Zemlje, temveč tako Luna kot tudi Zemlja v resnici krožita okoli skupnega težišča. Težišče sistema Zemlja-Luna se nahaja v Zemlji, in sicer okoli $\rho = 4670 \text{ km}$ od njenega središča, kar lahko preverimo s preprostim računom:

$$\rho = \frac{M_\oplus}{M_\oplus + M_\oplus} d_\oplus \approx \frac{M_\oplus}{M_\oplus} d_\oplus = 4670 \text{ km.}$$

Tako tudi Zemlja kroži, kar pomeni, da se giblje pospešeno. Na opazovalca v pospešenem opazovalnem sistemu deluje sistemska sila, ki ji v primeru kroženja pravimo *centrifugalna sila*. To ni prava sila, temveč navidezna sila, ki jo uvedemo za lažjo obravnavo krožečih (torej pospešenih) sistemov. Centrifugalna sila v sistemu krožečega telesa je po velikosti

enaka centripetalni sili na telo v mirujočem opazovalnem sistemu, vendar kaže v smeri stran od težišča sistema.

Pri energijskem izračunu moramo tako upoštevati tudi *delo centrifugalne sile* zaradi kroženja Zemlje in Lune okoli skupnega težišča. Telesom na Zemljinem površju pripišemo *centrifugalno potencialno energijo* W_c , ki jo podaja izraz

$$W_c = m\omega^2 \rho x,$$

kjer je ω kotna hitrost kroženja sistema Zemlja-Luna, x pa oddaljenost telesa na površju Zemlje od Zemljine vrtilne osi (slika 4).

Če izrazimo $s = R_\oplus \cos z$ in $\omega^2 = GM_\oplus/d_\oplus^3$, lahko izraz za centrifugalno potencialno energijo preoblikujemo v

$$\begin{aligned} W_c &= m\omega^2 \rho z = m \frac{GM_\oplus}{d_\oplus^3} \frac{M_\oplus}{M_\oplus} d_\oplus R_\oplus \cos z \\ &= \frac{GM_\oplus m}{d_\oplus^2} R_\oplus \cos z. \end{aligned}$$

Razlika obeh potencialnih energij v danih krajih z_1 in z_2 ustreza mgh , pri čemer lahko za voljo ocene predpostavimo, da je $g = GM_\oplus/R_\oplus^2 = 9,8 \text{ m/s}^2$ konstanten. K razliki prispeva samo tretji člen v izrazu za gravitacijsko potencialno energijo. Velja

$$mgh = \frac{3GM_\oplus m R_\oplus^2}{2d_\oplus^3},$$

iz česar izračunamo

$$h = \frac{3M_\oplus R_\oplus^4}{2M_\oplus d_\oplus^3} = 54 \text{ cm.}$$

Podobno izračunamo razliko višin h' zaradi vplivov Sonca:

$$h' = \frac{3M_\odot R_\oplus^4}{2M_\oplus d_\odot^3} = 24 \text{ cm.}$$

Največja višinska razlika je tako

$$h_{\max} = h + h' = 78 \text{ cm,}$$

najmanjša pa

$$h_{\min} = h - h' = 30 \text{ cm.}$$

Opazimo pa še, da so plimski učinki Lune približno dvakrat tolikšni kot plimski učinki Sonca. Če pa po drugi strani poračunamo razmerje gravitacijskih sil Sonca na Zemljo in Lune na Zemljo, ugotovimo:

$$\frac{F_{\odot}}{F_{\text{L}}} = \frac{M_{\odot}}{M_{\text{L}}} \left(\frac{d_{\text{L}}}{d_{\odot}} \right)^2 \approx 180.$$

Sonce je v tem smislu absolutni zmagovalec. Vendar moramo upoštevati, da je pri plimi bistvena razlika sil na središče Zemlje in točko na njeni površini. Ker plimsko silo izrazimo kot

$$f = \Delta F = \frac{2GMm}{d^3} R_{\oplus},$$

je karakteristično razmerje plimskih učinkov v resnici

$$\frac{f_{\odot}}{f_{\text{L}}} = \frac{M_{\odot}}{M_{\text{L}}} \left(\frac{d_{\text{L}}}{d_{\odot}} \right)^3 \approx 0,5.$$

Dinamična teorija plimovanja

Razmeroma enostaven matematični model plimovanja temelji na tako imenovani *statični teoriji plimovanja*, ki predpostavlja, da je celotna Zemlja prekrita z oceanom, ki se okoli Zemlje zaradi plimskih sil razporedi v obliki elipsoida. To je le idealiziran približek, ki omogoča enostavno matematično obravnavo. Zemlja namreč ni enakomerno prekrita z vodo, temveč ima zelo razgiban relief. Izračun zgoraj je tako smiseln le za plimovanje na odprtem morju. V bližini otokov, zalivov, prelivov in drugih reliefnih posebnosti je slednje veliko bolj zapleteno.

Analiza plimovanja na Zemlji terja zahtevnejši pristop, ki mu pravimo *dinamična teorija plimovanja*. Teorija poleg gravitacijskih učinkov Sonca in Lune vključuje tudi preučevanje dinamike tekočin ob prisotnosti kopenskih mas, obliko oceanskega dna in vrtenje Zemlje.

Plimski valovi se na Zemljinem ekvatorju gibljejo s hitrostjo 460 m/s. Iz hidrodinamike poznamo enačbo za hitrost v širjenja valovanja na vodi, če je njegova veliko večja od globine H vode:

$$v = \sqrt{gH}, \quad (1)$$

kjer je g gravitacijski pospešek na površju Zemlje. Iz enačbe sledi, da bi morala biti globina oceana vsaj

22 kilometrov, da bi se plimski val prosto širil. Povprečna globina oceanov pa je okoli 4 kilometre, zato je hitrost valovanja približno 200 m/s. Če predpostavimo, da je valovna dolžina plimskih valov enaka polovici obsega Zemlje, sledi, da je pripadajoča perioda tega valovanja približno 30 ur. Spomnimo se, da je perioda plimovanja zaradi Lune okoli 12 ur. Pojav tako sestavljata dve nihanji, zato bi ga morali v resnici obravnavati kot vsiljeno nihanje.

Ostale zanimivosti o plimovanju

Ocena v članku se kljub poenostavitvi dobro sklada z dejstvom, da je povprečna razlika višin gladine vode pri plimovanju oceanov po vsem svetu okoli 1 meter.

Poznamo pa veliko zanimivih primerov, kjer je ta razlika višin tudi bistveno večja. Pojav opazimo predvsem v nekaterih zalivih z ugodno obliko. Največja amplituda je izmerjena v **zalivu Fundy v Kanadi**, kjer dosega vrednosti tudi do **22 metrov**. V Evropi je plimovanje najbolj izrazito v **Rokavskem prelivu**, kjer amplituda plimovanja doseže do **16 metrov**, podobno tudi v zalivu Saint-Malo v Franciji. Tolikšne amplitude so posledica pojava *resonance*, ki nastopi zaradi prisotnosti precejšnje količine vode v kombinaciji z edinstveno obliko in velikostjo zaliva.

Po drugi strani je lahko plimovanje bistveno manj izrazito, kar je značilno za plitva in zaprta morja, med katere sodi tudi **Jadransko morje**. Povprečna razlika med višino plime in oseke v severnem Jadranu je le okoli **60 centimetrov**.

Velik vpliv na plimovanje morja imajo tudi *meteorološki dejavniki*. Med njimi sta najpomembnejša zračni tlak in veter. Padec tlaka za en milibar povzroči zvišanje morske gladine za približno en centimeter. Ob nizkem zračnem tlaku v severnem Jadranu piha jugo, ki proti obali potiska večjo količino morske vode. Takrat se lahko gladina morja tako zviša, da poplavi nižje dele obale.

Povprečna temperatura Zemljinega ozračja se z leta v leto viša. Eden izmed najočitnejših znakov *globalnega segrevanja* je tudi zviševanje gladine morja, kar pomeni, da se bo ogroženost obalnih predelov zaradi visokih plim v prihodnosti še povečala. Po podatkih Agencije za okolje se je povprečna višina morja ob slovenski obali v zadnjih 55 letih zvišala za približno 10 centimetrov ali povprečno za 1,7 milimetra na leto, v zadnjih 20 letih pa v povprečju za



→ pet milimetrov na leto, kar je hitreje od evropskega in globalnega trenda. Po projekcijah se bo gladina Jadranskega morja do konca stoletja zvišala še za približno 40 centimetrov.

Zaradi plimskih učinkov se ne spreminja le višina gladine vode, temveč tudi oblika Zemljinega ozračja. Pri tem se v ozračju spreminjata gostota zraka in zračni tlak, vendar ne več kot za 0,01 % srednjega tlaka na morski gladini. Te spremembe so zato v primerjavi z meteorološkimi dejavniki zanemarljive.

Zemlja ni popolnoma toga, temveč je do neke mere prožna, zato se tudi sama ne more upreti učinkom delovanja plimskih sil. Marsikoga preseneti dejstvo, da poleg gladine vode in ozračja zaradi plimskih sil periodično niha tudi Zemljina skorja. Amplituda nihanja na ekvatorju je okoli 55 centimetrov, učinek pa ni tako nedolžen, kot se zdi na prvi pogled. Takšne spremembe so nemalokrat vzrok za manjše potrese, hkrati pa lahko spodbujajo tudi vulkansko delovanje. Ti učinki so navadno dovolj majhni, da ne predstavljajo nevarnosti za ljudi.

Plimovanje pa ima tudi druge posledice. Zaradi njihovega delovanja se vrtilna doba Zemlje vsako stoletje poveča za eno do dve milisekundi. Iz istega razloga se upočasnjuje tudi kroženje Lune, hkrati pa zato tudi Luna v prvem približku Zemlji vedno kaže isto lice. Luna se od Zemlje vsako leto oddalji za približno tri centimetre.

Literatura

[1] French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics*. London: Nelson.

[2] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2007). *Fundametnal astronomy, fifth edition*. Helsinki: Springer.

[3] Roša, D. (2020). *Elementarna astronomija*. Zagreb: Zvezdarnica Zagreb – Zagrebački astronomski savez.

× × ×

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	10	12			
16					
			7		
10				14	
		9			7
			10		
			5		

↓↓↓

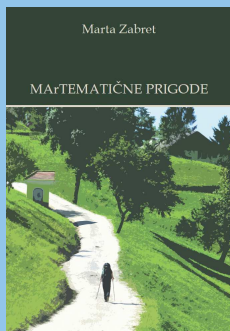
REŠITEV KRIŽNE VSOTE

4	1	5			
3	7	10			
	9	3	6		
		14	4	5	1
			7	7	6
				12	10

× × ×

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

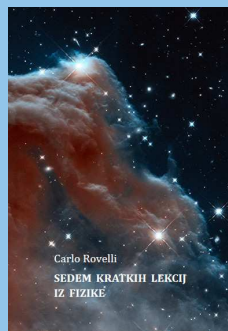
V Založbe Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.



Marta Zabret:
MATHEMATIČNE PRIGODE

148 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:
SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12×17 cm
mehka vezava

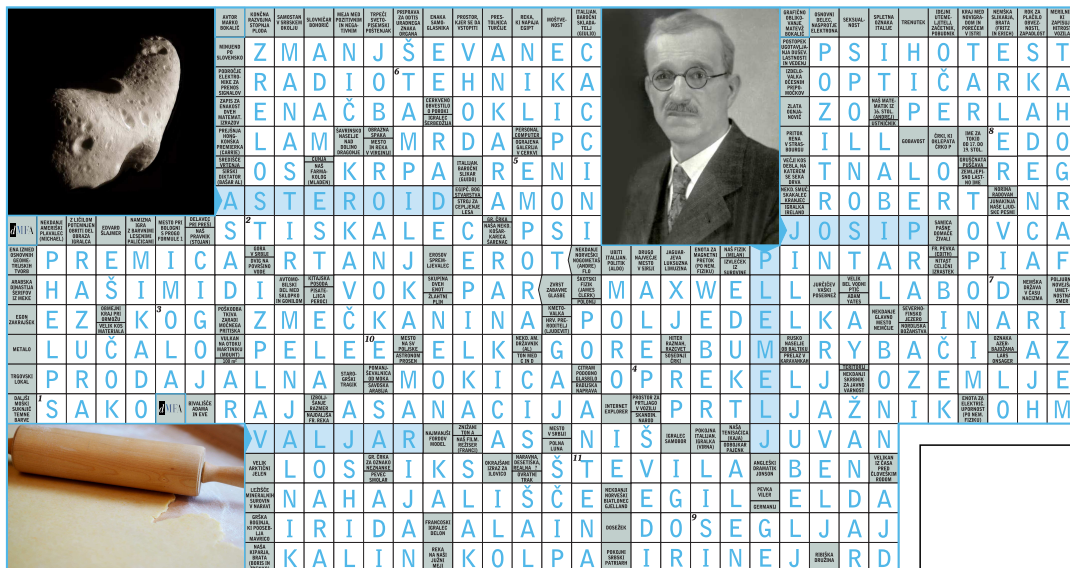
9,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.





REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 51/3

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz druge
številke Preseka letnika
51 je **stopetdeset**. Med
pravilnimi rešitvami
smo izžrebali naslednje
reševalce: Urška Kenda
Mavrar iz Grahova ob
Bači, Andrej Uranjek iz
Velenja, Vlasta Pospah
Fischer iz Celja, ki bodo
nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Tetraedrsko število 2024



BOŠTJAN KUZMAN

→ Letnica 2024 se kar sama od sebe ponuja kot navdih za tokratni GeoGebrin kotiček, saj ima število 2024 številne zanimive lastnosti. Ena izmed njih je ta, da lahko 2024 okroglih pomaranč zložimo v obliko pravičnega tetraedra, tako da je na vsakem robu 22 pomaranč. Ker pa bi takšna količina pomaranč tehtala približno pol tone, bomo to konstrukcijo težko naredili z resničnimi pomaranči. Namesto tega jo lahko poskusimo narisati s pomočjo GeoGebre. Čeprav je končna rešitev kratka, pot do nje ni enostavna, zato predstavlja ravno pravšnji izziv za Presekove bralce.

Trikotniška in tetraedrska števila

Spomnimo se najprej trikotniških števil. Dobimo jih z zlaganjem pomaranč ali drugih enakih objektov v obliko enakostraničnega trikotnika. Za vsako naslednje število prejšnjemu trikotniku dodamo vrstico, v kateri je en objekt več kot v prejšnji vrstici. Trikotniško število T_n je torej enako vsoti prvih n naravnih

števil, ki jo znamo izračunati po formuli

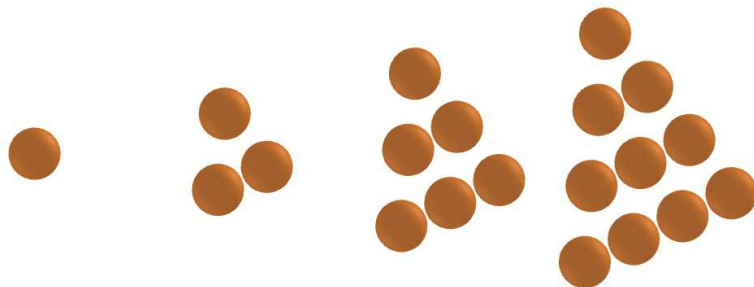
$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zaporedje trikotniških števil ima torej člene 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Tetraedrska števila pa dobimo z zlaganjem pomaranč v plasti, ki dajo tetraedrsko obliko. Plasti v tej konstrukciji torej predstavljajo zaporedna trikotniška števila, n -to tetraedrsko število pa je njihova vsota

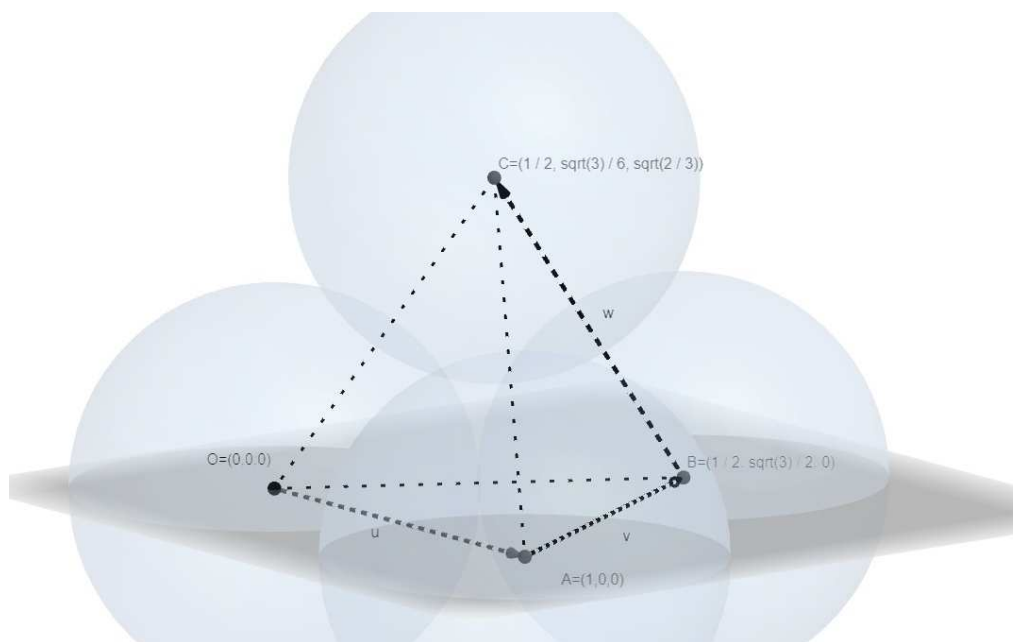
$$Tet(n) = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

S pomočjo že znanih trikotniških števil lahko brez težav izračunamo prvih nekaj tetraedrskih števil, ki so enaka 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ... Za splošno formulo za tetraedrska števila pa zapišimo $T_k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2}$ in se spomnimo formule za vsoto kvadratov $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Bralec lahko zdaj hitro preveri, da je iskana formula



SLIKA 1.

Prva štiri trikotniška števila $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ predstavljajo plasti četrtega tetraedrskega števila $Tet(4) = 20$.



SLIKA 2.

Pomikanje med središči kroglic poteka v smeri treh vektorjev na robovih pravilnega tetraedra.

za n -to tetraedrsko število

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Tet}(n) &= \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Iz formule sledi, da je dvaindvajseto tetraedrsko število enako $\text{Tet}(22) = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{6} = 2024$.

Konstrukcija tetraedrskih števil

Za konstrukcijo bomo seveda uporabili GeoGebrin 3D-način. Ustvarili bomo trojno zaporedje, odvisno od treh parametrov, ki bodo določali položaj središča vsake kroglice. Pri pomikanju od središča do središča pa si bomo pomagali z ustrezno izbranimi baznimi vektorji na robovih pravilnega tetraedra, glej sliko 2.

Denimo, da sta $O(0,0,0)$ in $A(1,0,0)$ dve izmed oglišč pravilnega tetraedra. Če tretje oglišče B leži v ravnini xy in ima nenegativne koordinate, potem je

$B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, saj je trikotnik $\triangle OAB$ enakostraničen s stranico 1. Četrto oglišče C mora ležati navpično nad težiščem tega trikotnika, torej ima prvo koordinato $\frac{1}{2}$, drugo koordinato $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, tretjo koordinato z pa določimo tako, da bo razdalja točke $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, z)$ do točke $O(0,0,0)$ enaka 1. Kratek račun pokaže, da je $z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ in izberemo lahko $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Konstrukcija je zdaj naslednja:

1. Odpremo 3D pogled v GeoGebri in ustvarimo drsnik

$$n = \text{Drsnik}(1, 22, 1),$$

ki ga zaradi preglednosti najprej nastavimo na manjšo vrednost, npr. 5.

2. S pomočjo algebrskega okna vnesemo koordinate točk

$$O = (0, 0, 0),$$

$$A = (1, 0, 0),$$

$$B = (1/2, \text{sqrt}(3)/2, 0),$$

$$C = (1/2, \text{sqrt}(3)/6, \text{sqrt}(2/3)).$$



- ```

Zaporedje(
 Zaporedje(
 Zaporedje(
 Sfera(0+m*u+(l-1)*v+(k-1/2)*w,1/2),
 k,1,l),
 l,1,m),
 m,1,n).

```

- ki nam  $n$ -to tetraedrsko število tudi izračuna, ustrežno tetraedrsko število pa s pomočjo orodja za besedilo postavimo na sliko.

Če smo pravilno prepisali ukaze, dobimo konstrukcijo na sliki 3. Bralec pa lahko tudi preizkusi, kaj se zgodi, če v ukazu za trojno zaporedje zbriše člen  $(k-1/2) * w$ , ki dvigne  $k$ -to plast v smeri vektorja  $w$ . Ker se bodo plasti kroglic prekrivale, bi moral zagledati običajna trikotniška števila. Do naslednjega tetraedrskega leta pa bo moralo preteči kar 276 let, zato se potrudite, da ga letos čimbolje izkoristite!

x x x

PRESEK **51** (2023/2024) 4

# Biserni oblaki: barvito optično čudo



ALEŠ MOHORIČ

→ Iridescenca je optični pojav, ki se lahko pojavi na oblakih in jih obarva v živahne barve. Barve oblakov spominjajo na barve milnih mehurčkov ali oljne plasti na vodni gladini. Te mavrične oblake pogosteje opazimo blizu Sonca ali Lune in nebu dodajo pridih čarovnije. Ti oblaki se kažejo v pastelnih odtenkih, barve pa so redkeje lahko tudi bolj živahne in se prelivajo podobno kot pri biserovini. Najpogosteje jih opazimo na altokumulusih (srednje visoki oblaki, velike ovčke), cirokumulusih (visoki oblaki, male ovčice), lečastih in visokih, tankih cirusnih oblakih. Včasih se iridescenca pojavi v pasovih, ki so vzporedni z robovi oblakov [1]. V redkih primerih, predvsem v polarnih območjih, lahko opazujemo polarne stratosferske oblake (od 12 do 15 km visoko na nebu), ki kažejo izrazito živo iridescenco, če se Sonce nahaja že pod obzorjem. Take oblake imenujemo biserni oblaki in primer, ki nam ga je poslala bralka iz Norveške, kaže današnja naravoslovna fotografija. Iridescenca nastane zaradi uklona na majhnih kapljicah vode ali drobnih ledenih kristalih, ki posamično razpršijo sončno svetlobo. Interferenca potem povzroči, da se od kapljic širi svetloba različnih barv pod različnimi koti. Oblak mora biti dovolj tanek, da večina žarkov svetlobe, ki potuje skozenj, naleti le na eno kapljico. Ko veliko število enako velikih kapljic vode uklanja svetlobo, postane iridescenca prvega reda vidna pod kotom približno 10 stopinj od Sonca. Lahko pa jo opazimo tudi še do kota 40 stopinj od Sonca. Najsvetlejšo in najbolj barvito iridescenco ustvarjajo novo nastajajoči oblaki, tam so kapljice najbolj verjetno enakih velikosti. Strukturirane oblike iridescence, kot je korona, svetel krožni disk okoli Sonca ali Lune, obdan z barvnimi obroči, se pojavijo, ko so delci povsod po oblaku enakomerno veliki. Več o iridescenčnih oblakih si zainteresirani bralci lahko na hitro preberete v [2], bolj poglobljeno pa v [3]. Ko se iridescenca pojavi blizu

Sonca, jo je težko opaziti zaradi Sončevega bleščanja. Takrat si lahko premagamo tako, da zastremo sončno svetlobo z roko ali pa se postavimo tako, da je Sonce skrito za drevesom ali stavbo. Za zmanjšanje bleščanja pomagajo tudi temna sončna očala in opazovanje neba v odsevu od gladke površine, npr. šipe ali vodne gladine [4]. Pojava iridescence oblakov pa ne gre zamenjevati s halojem, ki se prav tako pojavi na koprenastih oblakih okoli Lune ali Sonca. V takih oblakih je vzrok za nastanek lom in razklon na dosti večjih šestkotnih ledenih kristalčkih [5]. Halo prepoznamo po tipično simetrični obliki kroga okoli Lune ali Sonca in značilnem zornem kotu  $22^\circ$ , ki je posledica geometrije ledenih kristalov. Naslednjič, ko boste gledali v nebo in opazili mavrične biserne oblake, se spomnite zanimive fizike, ki je v igri – drobnih kapljic, ki uklanjajo svetlobo, da ustvarijo nebesno mojstrovino. Ti bežni trenutki nas spominjajo na lepoto in čudenje, ki ga ponuja narava, tudi v navidezno običajnih oblakih nad nami.

## Literatura

- [1] A. Mohorič, *Venec*, Presek, **40**, 5, 2012/2013.
- [2] P. Laven, *Iridescent clouds and distorted coronas*, Applied Optics, **56**, 19, 20217.
- [3] K. N. Liou, *An Introduction to Atmospheric Radiation*, ISBN 0-12-451451-02002, Applied Optics, Elsevier Science (ZDA)
- [4] A. Mohorič, *Vodna gladina*, Presek, **45**, 1, 2017/2018.
- [5] A. Mohorič, *Halo*, Presek, **44**, 3 in naslovnica 4, 2016/2017.

x x x

# Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.