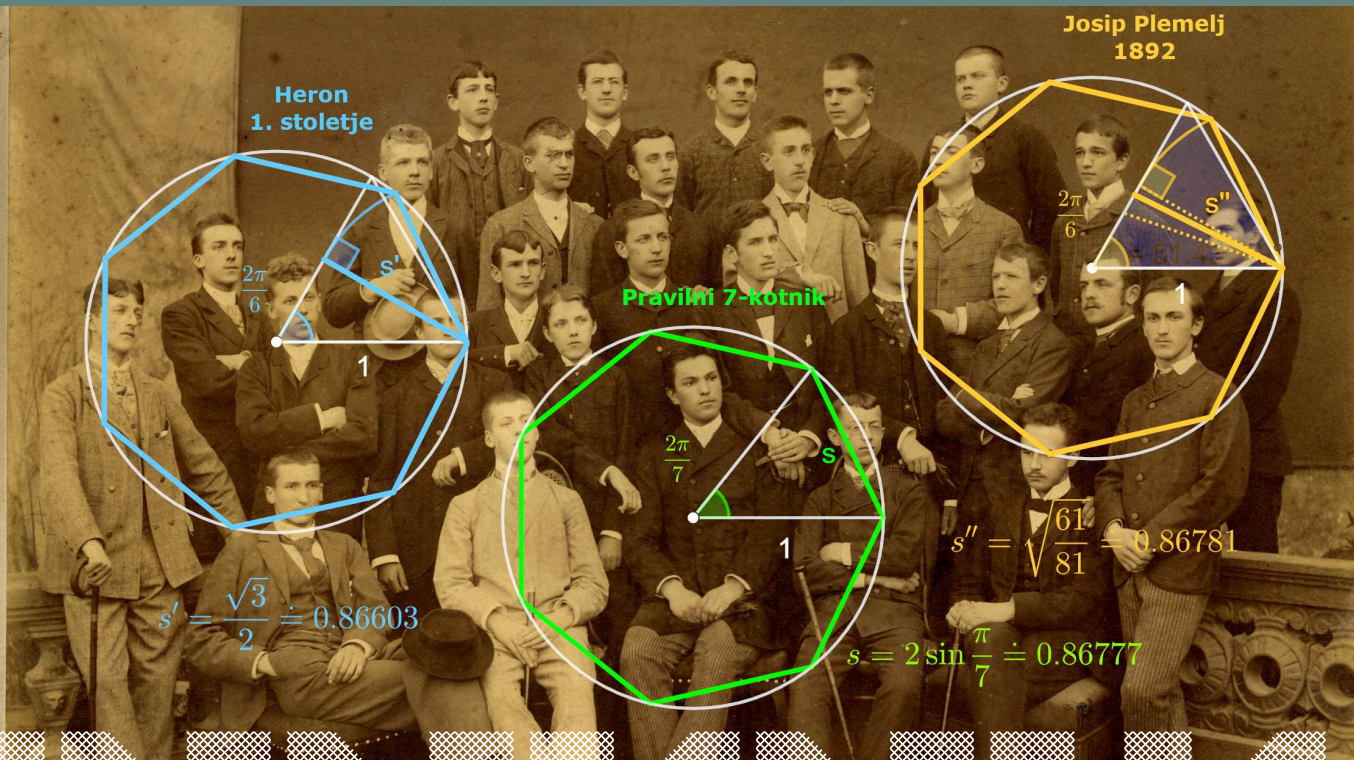
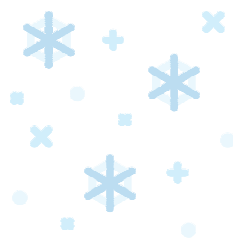




- REŠITVE MATEMATIČNIH NALOG S PLEMLJEVE MATURE
- VALJASTO IN KROGELNO ZRCALO
- ŠTUDIJA ASTEROIDA NA POLETNI ŠOLI GOCHILE

Hitro kvadriranje števil z zadnjo števkou 5

↓↓↓

77830832,99.221	133130	4.357711.13,17,19
155661664	141092	
17200613872	9349656	11284578964
1702366773328	15582760	22569157928
89508018	2492416	1105888738472
76261178	4329656	12164776123192
	22333211632	
	11166605816	
	24678198853360	

SLIKA.

Računi iz zvezka profesorja Plemija

→ Nekateri znameniti matematiki so bili odlični in večji mentalni računarji. Profesor Plemelj, o katerem precej pišemo v tej številki, je menda znal na pamet zmnožiti dve 5-mestni števili. Za nas je ta izziv prezahteven. Lahko pa si zapomnimo zanimivo pravilo za kvadriranje naravnega števila z zadnjo števkou 5, ki z malo vaje omogoča kvadriranje takih števil kar na pamet. To pravilo pravi takole: začetnemu številu odstrani zadnjo števkou in dobljeno število pomnoži z 1 večjim številom, rezultatu pa na desni dopiši 25.

Torej, kvadrat števila 35 po tem pravilu izračunamo tako, da zmnožimo $3(3+1) = 12$ in pripišemo 25, torej dobimo število 1225. Podobno kvadrat števila 75 dobimo tako, da zmnožimo $7(7+1)=56$ pripišemo 25, torej 5625. Pravilo pa deluje tudi za števila z več števki. Denimo 125^2 dobimo tako, da zmnožimo $12 \cdot 13 = 156$ pripišemo 25, torej 15625. Bralci z matematičnim znanjem prvega letnika srednje šole bodo zlahka sami razvozlati, zakaj to pravilo deluje. Tudi mlajši pa se bodo morda zabavali, ko bodo poskusili na pamet kvadrirati števila 45, 65, 105 ali 195.

Za konec omenimo, da je spretnost mentalnega računanja pri nekaterih mladostnikih včasih zares osupljiva, vendar številni izjemno večji računarji v zgodovini svojega talenta kasneje niso nadgradili v poglobljeno znanje matematike, ki zahteva še precej več. Več o tem lahko preberete na spletni strani https://en.wikipedia.org/wiki/Mental_calculator.

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 51, šolsko leto 2023/2024, številka 3

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matjaž Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2023/2024 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Tadeja Šekoranja in Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2023 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Hitro kvadriranje števil z zadnjo števk 5

UVODNIK

- 4–10 Matematični genij Josip Plemelj kot navdih za mlade generacije
(Boštjan Kuzman)

MATEMATIKA

- 11–15, 18 Rešitve matematičnih nalog s Plemljeve mature
(Marko Razpet)
- 29–31 GeoGebrin kotiček – Heron iz Aleksandrije, Josip Plemelj in skoraj pravilni sedemkotnik
(Boštjan Kuzman)

FIZIKA

- 19–23 Valjasto in krogelno zrcalo
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 25–27 Študija asteroida na poletni šoli GoChile
(Neja Pisk in Katja Šimenc)

RAZVEDRILLO

- 16–17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 24 Bilo je nekoč v reviji Presek – Anekdota o Plemlju
- 28 Rešitev nagradne križanke Presek 51/2
(Marko Bokalič)

SLIKA NA NASLOVNICI: Na fotografijo razreda Josipa Plemlja iz ljubljanske višje gimnazije okoli leta 1890 smo dodali tri skice 7-kotnikov. Znano je, da pravilnega 7-kotnika ni mogoče konstruirati le z ravnilom in šestilom, Plemelj pa je kot gimnazijec leta 1892 samostojno odkril geometrijsko konstrukcijo približno pravilnega 7-kotnika, ki je bistveno bolj natančna od konstrukcije antičnih geometrov, ki jo je opisal Heron v 1. stoletju. Več o tem v tokratnem GeoGebrinem kotičku.

Matematični genij Josip Plemelj kot navdih za mlade generacije



BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

→ 11. decembra 2023 mineva natanko 150 let od rojstva izjemnega slovenskega matematika profesorja Josipa Plemlja (1873–1967). Njegovo spominsko sobo v vili na Bledu, za katero skrbi DMFA Slovenije, sem prvič obiskal že kot otrok v 1980-tih, v zadnjih 15 letih pa sem tam pogosto sodeloval pri izvedbi različnih poletnih šol, namenjenih predvsem učencem osnovnih in srednjih šol ali študentom. Ob teh obiskih in v pogovorih s starejšimi kolegi sem spotoma vsakokrat odkril še kaj novega o profesorju Plemlju.

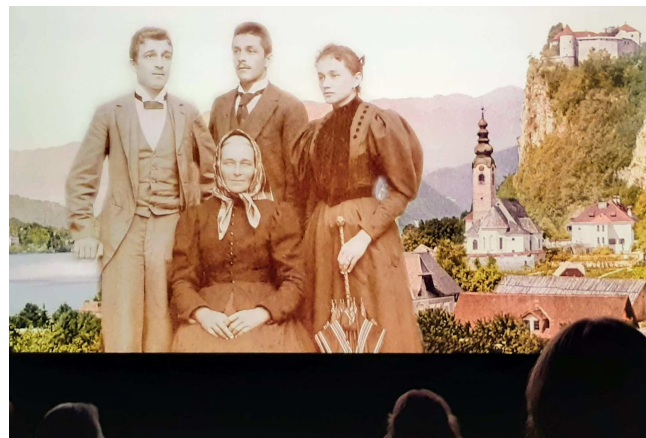
Življenjska zgodba prof. Plemlja se mi zdi izjemno navdihujoča, zato želim z njo vsaj na kratko seznaniti tudi mlajše generacije matematičark, fizikov in astronomk, ki berejo revijo Presek. Plemljevo zgodbo je sicer ob 100. obletnici njegovega rojstva v posebni knjižici zelo lepo zapisal že profesor Ivan Vidav, danes pa nam je dostopnih še nekaj izvirnih arhivskih dokumentov, ki so zanimivi tudi sami po sebi, saj nam veliko povedo tudi o življenju, šolstvu in znanosti v naših krajih pred 100 in več leti. Tokratni uvodnik je zato nekoliko daljši in v celoti posvečen poti Josipa Plemlja od mladega talenta do izjemnih matematičnih uspehov, tudi drugi matematični prispevki v reviji pa se tokrat vsaj nekoliko navezujejo na njegovo delo.

www.dmfa.si

www.presek.si

Zgodnja samostojnost in šolanje v Ljubljani

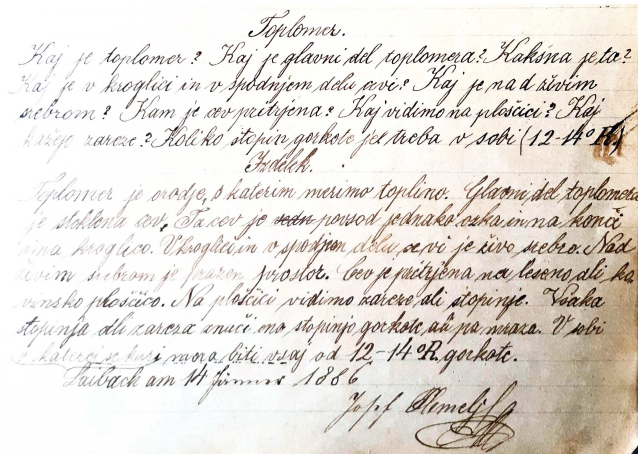
Josip Plemelj se je rodil na Bledu kot sin Urbana Plemlja (1831–1875), mizarja in malega kmeta. Bil je drugi otrok očetove tretje žene Marije (rojene Mrak). Očetova prva žena Margareta je umrla le leto dni po poroki, manj kot dva meseca po porodu svojega edinega otroka. V očetovem 10-letnem zakonu z drugo ženo Rozalijo so se rodili trije otroci, a tretji je umrl že ob rojstvu, vsi v družini pa so začeli bolehati za tuberkulozo, zaradi katere je najprej umrla mati. Kljub svoji bolezni se je oče poročil še s tretjo ženo Marijo (1845–1919), ki mu je prav tako rodila 3 otroke, Ivano (1872–1956), Josipa in Urbana (1875–1947), a še pred Urbanovim rojstvom je oče umrl. Marija je tako ostala sama s tremi svojimi majhnimi otroki, ter še dvema najstniškima otrokoma iz prejšnjih moževih zakonov. Po takratnem avstro-ogrskem zakonu so morali otroci v starosti med 7 in 12 let obvezno



SLIKA 1.

Prizor s kinoprojeksije najnovejšega dokumentarnega filma Josip Plemelj, prvi rektor Univerze v Ljubljani, režiserja Mirana Zupaniča. Na sliki je Josip Plemelj z bratom, sestro in materjo.

opraviti štiri razrede osnovne šole. V ljudskih šolah v manjših krajih sta eden ali dva učitelja običajno poučevala vse predmete in otroke različnih starosti hkrati. Josip je kazal veliko spretnost pri računu in zanimanje za šolo – računal naj bi dneve od Kristusovega rojstva in po koledarjih študiral astronomske pojave. Kljub gmotni stiski ga je mati na njegovo prigovarjanje jeseni 1885 poslala v Ljubljano, kjer je najprej opravil 4. razred zahtevnejše meščanske fantovske šole, ki ga je pripravila na gimnazijo.



SLIKA 2.

Zapis o toplomeru iz Plemljevega šolskega zvezka za 4. razred meščanske deške šole, ko je imel 12 let. Za merjenje temperature so tedaj uporabljali Reaumurjevo lestvico, ki znaša 0 stopinj pri ledišču in 80 stopinj pri vrelišču vode. Zadnji stavek torej pravi, da naj se sobe ogreva na 15 do 17,5 °C.

Šolanje je v letih od 1886 do 1894 nadaljeval na tedanji (avstrijski) državni gimnaziji v Ljubljani na Vodnikovem trgu. Hitro je zablestel pri matematiki, zanimala ga je tudi fizika, posebej astronomija, pri drugih predmetih pa je imel povprečne ocene. Njegov gimnazijski profesor Vincenc Boštner naj bi njegov talent hitro prepoznal in ga obravnaval kot sebi enakega. Že ob koncu 4. razreda nižje gimnazije je Plemelj obvladal vso maturitetno snov in se nato do mature sam preživiljal z inštrukcijami starejših učencev. V začetnih letih je bil zaradi tega oproščen šolnine, kasneje je to ugodnost izgubil zaradi disciplinskih ukrepov, ki si jih je nakopal zaradi prehranjevanja v gostilnah, kar dijakom tedaj ni bilo dovoljeno.

V času gimnazije je samostojno prišel do presenetljivih odkritij, denimo tega, da lahko kotni funkciji



SLIKA 3.

Razred gimnazijca Josipa Plemlja, verjetno okoli leta 1888. Gimnazije, ki so bile vstopnica za nadaljnji univerzitetni študij, so takrat obiskovali le fantje. Prve ženske so na dunajsko univerzo vpisali šele leta 1897.

sinus in kosinus izrazimo z neskončno vrsto. Izjemno spreten je bil pri računanju in naj bi zmoget na pamet zmnožiti dve 5-mestni števili. Reševal je zahtevne geometrijske naloge in odkril izvirno konstrukcijo skoraj pravega 7-kotnika. V antikvariatu je našel matematični priročnik Compendium der Höhere mathematik Adama von Burga, iz katerega se je sam učil višjo matematiko. Zanimal se je tudi za nebesno mehaniko.

Zadnji letnik gimnazije je moral opravljati kot privatist. Bil je v skupini dijakov, ki je med počitnicami vrgla klop v tivolski ribnik. Kasneje naj bi sam poravnal škodo, vendar ga ravnatelj ni hotel več vpisati v šolo, zato je v prvem semestru opravljal izpite na gimnaziji v Novem mestu, v drugem pa v Ljubljani, kjer je nato uspešno opravil tudi maturo.

Študij in bleščeč začetek akademske kariere na Dunaju

Maturantje iz dežele Kranjske so tedaj pretežno študirali na Dunaju, v Gradcu ali v Pragi, saj na slovenskem ozemlju univerze ni bilo. Plemelj je po maturi odšel na Dunaj in se vpisal na Filozofsko fakulteto, kjer je študiral matematiko in astronomijo. Z njim so se na Dunaj podali tudi nekateri njegovi gimna-





Sittliches Betragen: <i>befriedigend</i>		
Fleiß: <i>befriedigend</i>		
Leistungen in den einzelnen Unterrichtsgegenständen:		
Lehrgegenstand	Note	Unterschrift des Fachlehrers
Religionslehre:	<i>befriedigend</i>	<i>B. Betsinaf</i>
Lateinische Sprache:	<i>genügend</i>	<i>L. Lederhans</i>
Griechische Sprache:	<i>genügend</i>	<i>G. Breinik</i>
Deutsche Sprache:	<i>genügend</i>	<i>F. Hutter</i>
Slovenische Sprache:	<i>lobenswert</i>	<i>Bartel</i>
Geographie und Geschichte:	<i>befriedigend</i>	<i>K. Tönn</i>
Mathematik:	<i>vorzüglich bei besonderer rascher Auffassung und gewandter Darlegung</i>	<i>Konrad</i>
Naturgeschichte:	<i>vorzüglich</i>	<i>Konrad</i>
Physik:	<i>vorzüglich</i>	<i>Konrad</i>
Philosophische Propädeutik:	<i>vorzüglich</i>	<i>Dr. C. Gratz</i>
..		

SLIKA 4.

Plemljevo gimnazijsko spričevalo iz leta 1892/93. Pri matematiki je profesor Borštner običajni oceni »vorzüglich« (odlično) dodal zapis »mit besonders rascher Auffassung und gewandter Darlegung« (z izjemno hitrim dojemanjem in spretno razlago). Pri tujih jezikih je bil ocenjen z »genügend« (zadostno).

zijski sošolci, denimo Stanislav Bevk, kasnejši biolog in ravnatelj gimnazije v Idriji, Karel Hinterlechner, kasnejši geolog in dekan Tehniške fakultete, ter Anton Zupan, kasnejši profesor jezikov na kranjski gimnaziji in ravnatelj celjske gimnazije. Na ljubljanski gimnaziji je bil v petem in šestem razredu Plemeljv sošolec tudi Rudolf Maister, ki pa je nato končal vojaško šolo.

Že v prvem semestru študija je Plemljevo izjemno nadarjenost za matematiko opazil predstojnik Kate-dre za matematiko Gustav von Escherich, tedaj eden izmed vodilnih avstrijskih matematikov na področju matematične analize. Von Escherich je Plemlja usmeril v študij matematike in akademsko kariero, rekoč, da v astronomiji ni kruha, pomagal pa mu je pridobiti tudi Knafljevo štipendijo, ki jo je tedaj podeljevala dunajska univerza.

Na Dunaju je Plemelj med leti 1894 in 1898 uspešno študiral in se družil z drugimi slovenskimi študenti. Med poletnimi počitnicami se je vračal k svojim na Bled, kjer je rad obiskoval gore – njegov podpis zasledimo celo na začetnih straneh vpisne knjižice Aljaževega stolpa na Triglavu leta 1895. Zaradi odličnih študijskih ocen je Plemelj maja 1898 dobil posebno dovoljenje dekana fakultete, da odda doktorsko disertacijo še pred koncem četrtega leta štu-



SLIKA 5.

Ljubljanski maturantje leta 1894. Plemelj je v svetlem oblačilu v sredini druge vrste.

I. Semester. Vom <i>Oktober</i> 1896				bis <i>Osloven</i> 1897	Nr 4366	
Name des Dozenten	Bezeichnung der Vorlesung	Stunden-sahl	Die Quästur qualifiziert die Zahlung des Gebührgeldes	Der Dozent bestätigt eigenhändig die Inscription	die Frequenz	Anmerkungen
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Reine und Angewandte Mathematik 2</i>	<i>2.10</i>	<i>2.10</i>	<i>Gegenbauer</i>	<i>Gegenbauer</i>	
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Funktionenlehre</i>	<i>2.10</i>	<i>2.10</i>	<i>Plemelj</i>	<i>Plemelj</i>	
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Mathematik</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>Boltzmann</i>	<i>Boltzmann</i>	
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Algebra</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>Mertens</i>	<i>Mertens</i>	
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Math. Seminar</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>Plemelj</i>	<i>Plemelj</i>	
<i>Prof. Dr. Gegenbauer</i>	<i>Math. Seminar</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>Mertens</i>	<i>Mertens</i>	

SLIKA 6.

Plemelj študentski indeks s podpisi profesorjev. Plemlju so med študijem predavali še danes znani matematiki in fiziki, poleg von Eschericha še Franz Mertens (algebra), Leopold Gegenbauer (višja aritmetika in eliptične funkcije), Ludwig Boltzmann (mekanika) in Edmund Weiss (astronomija).

dija. Po doktoratu mu je avstrijsko ministrstvo takoj zagotovilo štipendijo za nadaljnji študij v Berlinu in nato v Göttingenu, pri tedaj najbolj vplivnih nemških matematikih Felixu Kleinu in Davidu Hilbertu.



SLIKA 7.

Plemelj je bil kot študent aktiven član Kluba slovenskih naravoslovcev na Dunaju, 1897/98, iz katerega so izšli številni slovenski intelektualci, denimo botanik Fran Jesenko, zdravnik in planinec Josip Tičar, geolog in dekan tehniške fakultete Karel Hinterlechner, zdravnik in profesor Janez Plečnik, fizik Valentin Kušar in drugi.

Ko se je Plemelj po specializaciji jeseni leta 1901 vrnil na Dunaj, mu je služba v Dvorni knjižnici omogočila nadaljnje znanstveno delo med čakanjem na morebitno mesto univerzitetnega profesorja. V naslednjih letih je na filozofski fakulteti kot privatni docent predaval Potencialno teorijo (1902/03), Teorijo števil (1903/04), Eliptične funkcije (1905/06) in Funkcijsko teorijo (1906/07). V tem obdobju je dosegel izjemne uspehe s svojimi matematičnimi odkritji, ki jih je objavljaval v nemški reviji Monatshefte für Mathematik und Physik. Veliko se je ukvarjal z integralskimi enačbami, s katerimi se je seznanil v Göttingenu. Večkrat je bil povabljen, da o njih predava na srečanjih dunajskega matematičnega društva in poroča cesarski akademiji znanosti.

Leta 1906 je Plemelj predstavil rešitev znamenitega Riemannovega problema o monodromiji. Ta problem je ugledni matematik David Hilbert leta 1900 na pariškem kongresu izpostavil kot enega izmed najpomembnejših nerešenih problemov matematike. S tem uspehom je Plemelj mednarodno zaslovel in kmalu je bil s cesarskim odlokom imenovan za profesorja na Univerzi v Černovicah (današnja Ukrajina), kjer je uspešno nadaljeval svoje znanstveno in pedagoško delo. Štirideset let kasneje pa je v enem izmed svojih nagovorov zapisal: »Na Univerzi v Čer-



SLIKA 8.

31-letni Josip Plemelj v času svojih prvih odmevnih mednarodnih uspehov leta 1904.

novicah smo imeli misijo širiti slavo nemške kulture na vzhod in jaz sem si samo želel, da neham čimprej delovati v čast nemški znanosti in se posvetiti delu za svoj narod«.

Za svojo 100 strani dolgo razpravo o potencialni teoriji je Plemelj v letih 1911 in 1912 dobil tudi dve prestižni nagradi. Poleg nagrade znanstvenega društva kneza Jablonowskega iz Leipziga je postal prvi prejemnik nove nagrade Dunajske cesarske akademije za najboljšo avstrijsko matematično delo v zadnjih treh letih. Ukvarjal se je tudi s Fermatovo domnevo iz teorije števil in v tistem času objavil tudi izvirno rešitev Fermatovega problema za eksponent $n = 5$. V letu 1913/14, ko je bil dekan filozofske fakultete, pa je njegovo uspešno delo prekinila prva svetovna vojna.



SLIKA 9.

Plemelj med profesorji na Univerzi v Černovicah.

Vrnitev v Ljubljano in poučevanje na univerzi

Ko je ruska vojska leta 1916 napadla Černovice, se je Plemelj z ženo Julko in 9-letno hčerko Nado umaknil na Dunaj in od tam na Bled. Označen kot politično sumljiv je bil januarja 1917 vpoklican v vojsko in poslan v zaledje ruske fronte. Po številnih posredovanjih akademskih kolegov je bil kasneje premeščen na Dunaj, kjer je konec vojne dočakal kot navaden vojak v tehnični službi. Po vrnitvi v Ljubljano se je vključil v delo vseučiliške komisije pri narodni vladi Slovenije, ki je v negotovih razmerah pripravljala ustanovitev slovenske univerze v okviru Kraljevine Srbov, Hrvatov in Slovencev. Leta 1919 je kralj Aleksander z zakonom razglasil ustanovitev vseučilišča v Ljubljani in imenoval prve redne profesorje, med njimi tudi Plemlja, ki je zaradi svojih mednarodnih akademskih izkušenj postal tudi prvi rektor. Plemelj je imel visoke zahteve pri imenovanju profesorjev, ki da morajo biti že preverjeni kot raziskovalci in učitelji, hkrati pa je nasprotoval omejevanju predavateljev na slovenski jezik, s čimer se niso strinjali vsi pobudniki ustanovitve. Nova univerza ni imela svojih predavalnic, laboratorijev in knjižnic, prav tako je primanjkovalo stanovanj za študente in profesorje. Kljub slabim materialnim pogojem je univerza v naslednjih desetletjih zaživela in Plemelj je postavil temelje poučevanja matematičnih predmetov za gimnazijske profesorje matematike in fizike na tedanji Filozofski fakulteti in za bodoče inženirje na tedanji Tehniški fakulteti. Njegova prej bleščeča znanstvena

kariera pa je v Ljubljani zamrla in leta kasneje je zapisal, da je bil odtlej »skorajda le še učitelj matematike, pa prav malo ustvarjalec novega«.



SLIKA 10.

Plemelj s študenti leta 1930.

Slovel je kot izvrsten predavatelj, ki je predaval na pamet v lepi slovenščini. Zahtevni matematični izreki so pred očmi poslušalcev nastajali na tabli v lepi pisavi in natančnem jeziku, kar je oboje zahteval tudi od študentov. Tistim, ki se mu niso zdeli dovolj nadarjeni, je že po prvem semestru na osebnem razgovoru svetoval drug poklic.

Plemelj je v Ljubljani predaval do visoke starosti in s svojim zgledom vzgojil številne profesorje matematike. Delež žensk med študenti je bil na začetku zelo majhen, kasneje pa se je povečal. Tako je do leta 1950 diplomiralo približno 100 matematikov, med njimi 27 žensk. Prvi diplomant iz matematike je bil Anton Vakselj leta 1922, ki je že leto zatem pri Plemlju tudi doktoriral, prva diplomantka pa Emilija Mlakar (por. Branc) leta 1932. Med Plemljevimi študenti je posebej izstopal Ivan Vidav, ki je maja 1941 doktoriral s komaj 23 leti. Vidav je po drugi svetovni vojni nadaljeval Plemljevo delo in vzpostavil tudi slovensko raziskovalno matematično šolo. Danes sodi matematika med mednarodno najbolj prodorne veje slovenske znanosti.

Plemelj je bil član Slovenske akademije znanosti in umetnosti od njene ustanovitve leta 1938, prejel je še vrsto drugih priznanj in nagrad. Svoja predavanja je objavil v treh obsežnih slovenskih monografijah Teorija analitičnih funkcij (1953), Diferencialne



SLIKA 11.

Plemelj s študenti leta 1954.

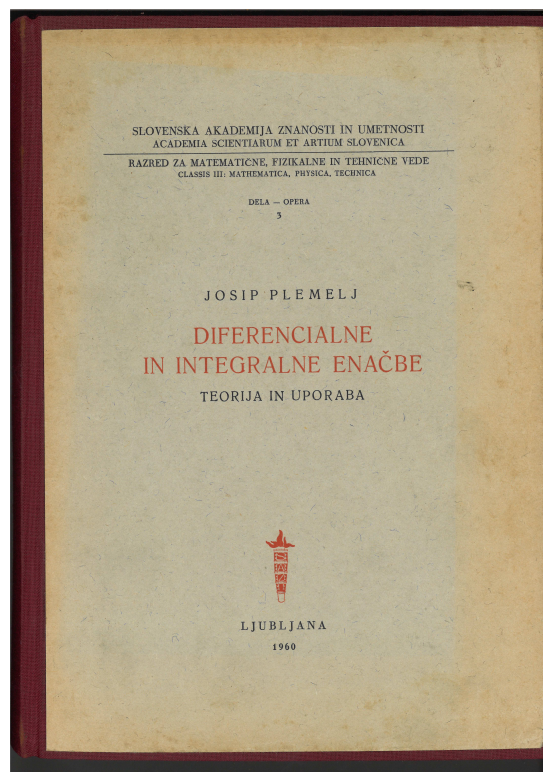
in integralne enačbe (1960) ter Algebra in teorija števil (1962), v knjigi Problems in the sense of Riemann and Klein (1964) pa je izbor svojih najpomembnejših rezultatov objavil tudi v angleškem jeziku.

V predgovoru k svoji zadnji slovenski knjigi je Plemelj zapisal tudi svoje znamenito življenjsko vodilo: »Nikdar v življenju mi matematika ni bila nadležna. Bila mi je življenjska potreba in umetniški užitek, ki ga vsak matematik lahko vidi v svojih delih.«



SLIKA 12.

Plemelj s sodelavci v Zagorici ob 200. obletnici rojstva Jurija Vege leta 1954.



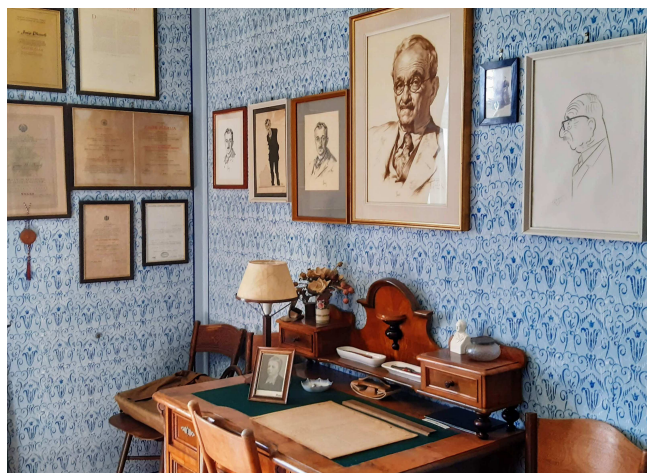
SLIKA 13.

Naslovnice knjige Diferencialne in integralne enačbe.

Plemljeva akademska zapuščina in vila na Bledu

Plemljeva akademska zapuščina je izjemna. Kot dolgoletni predavatelj je izoblikoval sodobni slovenski matematični jezik in več kot 40 let v Ljubljani vzgajal tako večino bodočih slovenskih profesorjev in inženirjev. Postavil je visoke akademske standarde in si prizadeval za kvaliteto študija, ki današnjim generacijam omogoča bistveno boljše pogoje kot nekoč. Med njegovo zapuščino pa lahko štejemo tudi hišo na Bledu, v kateri je Plemelj bival skoraj do svoje smrti leta 1967. Skrb za vilo je v sedemdesetih letih prevzelo DMFA Slovenije, ki je v njej uredilo spominsko sobo s Plemljevi osebnimi predmeti, portreti, priznanji, nagradami, knjigami – veliko delo pri tem je opravil že pokojni Ciril Velkovrh, številne Plemljeve osebne dokumente pa je ob prenovi stavbe v devdesetih letih pregledal in uredil prof. dr. Anton Suhadolc. Ti dokumenti so danes shranjeni v Arhivu Republike Slovenije v Ljubljani.





SLIKA 14.

Plemljeva spominska soba na Bledu.

V vili so od leta 1980 dalje občasno potekale tudi vikend delavnice in poletne šole za mlade, ki so se uspešno udeleževali različnih državnih ali mednarodnih tekmovanj iz znanja. Nekaj skupnih dni v Plemljevi vili je v dobrih štirih desetletjih ustvarilo številna medsebojna prijateljstva mladih iz vse Slovenije. Mnogi od njih so se prav na podlagi tovrstnih prijetnih izkušenj odločali za nadaljnji študij matematike ali fizike, nekateri pa so danes celo mednarodno priznani znanstveniki.



SLIKA 15.

Udeleženci izbora za matematično olimpijado leta 1995 pred Plemljevo vilo.

Upam, da nam bo v okviru DMFA Slovenije tovrstno dejavnost v vili uspelo ohraniti tudi v nadaljnjih desetletjih, in da bo k temu pripomoglo tudi letošnje praznovanje Plemljevega jubileja, ko se bomo nekoliko pogostejše spominjali dela tega izjemnega človeka in njegovih zaslug za slovensko akademsko skupnost. Za začetek pa bralke in bralce vabim k branju matematičnih člankov v reviji, ki jo držijo v rokah. Pa uspešen zaključek leta 2023 in še bolj srečno in uspešno 2024!



SLIKA 16.

Udeleženci poletne šole v Plemljevi vili za devetošolce leta 2017.

Literatura

- [1] I. Vidav, *Josip Plemelj ob stoletnici rojstva*, DMFA SRS, 1973.
- [2] M. Hladnik, *Akademski kariera profesorja dr. Josipa Plemlja (1873–1967)*. Šolska kronika, 29 (2020) 1, 81–120.
- [3] A. Suhadolc, *O profesorju Josipu Plemlju*, Obzorik za matematiko in fiziko, 57 (2010) 2, 53–57.
- [4] Arhiv Republike Slovenije, fond SI AS 2012 Plemelj Josip 1873–1992.
- [5] Arhiv fotografij DMFA Slovenije.



Rešitve matematičnih nalog s Plemljeve mature



MARKO RAZPET

→ Josip Plemelj je obiskoval osemrazredno državno gimnazijo v Ljubljani in na njej uspešno maturiral v šolskem letu 1893/94. Pot do njegove mature pa ni bila gladka, ker se v zadnji razred zaradi neke neumnosti ni mogel vpisati. Več o tem lahko preberemo v [3]. Kot privatist je opravljal izpite za prvo polletje osmega razreda na gimnaziji v Novem mestu, za drugo polletje pa na gimnaziji v Ljubljani, kjer je tudi maturiral. V prispevku bomo predstavili rešitve maturitetnih nalog, ki so jih reševali takratni gimnazijci.

Gimnazije so na koncu šolskega leta objavile poročilo o svojem delu. Letna poročila ljubljanske državne gimnazije, ki jo je obiskoval Plemelj, so bila tiskana. Njihov osnovni jezik je bila nemščina. V teh poročilih so bili objavljeni sezname profesorjev in dijakov po razredih, sezname vsebin predmetov, potrebnih učbenikov, učil, poljudnih predavanj, šolska statistika in drugo, pa tudi maturitetne naloge s prejšnjih rokov. Na začetku poročil je bil po navadi daljši znanstveni prispevek kakega profesorja. Matematike je bilo povprečno tri ure tedensko v vseh razredih. Uporabljali so Močnikove in Hočevarjeve učbenike.

Kot je razvidno iz letnih poročil ljubljanske državne gimnazije (o tem več v [1, 2]), so potekali pisni maturitetni izpiti v poletnem roku od 11. do 16. junija, ustni izpiti pa so se začeli 9. julija in končali 14. julija 1894. Za ta rok je bilo prijavljenih 41 rednih dijakov, en privatist osmega razreda in trije eksternisti. Privatist ni bil nihče drug kot Josip Plemelj, eksternisti pa so bili dijaki iz drugih šol.

Da si bomo bolje predstavljali takratno maturo,

zlasti njen matematični del, navajamo teme pri pisnih izpiti: prevod iz nemščine v latinščino, prevod iz latinščine v nemščino, prevod iz grščine v nemščino, nemški prosti spis, prosti spis iz zgodovine slovenskega jezika za tiste dijake, ki so obiskovali obvezen pouk slovenščine, in spis na temo neke starogrške drame.

f) Aus der Mathematik: 1.) Jemand zahlt einer Rentenbank 16.000 fl., bezieht aber nur durch 10 Jahre eine decursive Rente von 2000 fl. Wie viel hat er nach dieser Zeit zu fordern und wie lange müsste er diesen Rest anliegen lassen, damit er wieder auf 16.000 fl. steige, wenn jedesmal $4\frac{3}{4}\%$ Zinseszins gerechnet wird? — 2.) Von einer geraden Pyramide sind gegeben: die Seitenkante $s = 1,4$ m, von der Grundfläche, welche ein Dreieck ist, eine Seite $a = 0,7$ m, der gegenüberliegende Winkel $\alpha = 57^\circ 54' 44''$ und die beiden anderen Seiten verhalten sich wie 4 : 3. Wie groß ist der Radius der inhaltsgleichen Kugel? — 3.) Durch den Brennpunkt der Parabel $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ ziehe man eine Sehne, welche zu der im Endpunkte des Parameters errichteten Tangente parallel ist. Wie lautet die Gleichung dieser Sehne und welche Fläche schneidet diese Sehne ab?

SLIKA 1.

Maturitetne naloge iz matematike.

Naloge iz matematike (slika 1) pa so bile take:

1. Nekdo vplača na banki 16 000 gld, nato pa 10 let prejema dekurzivno rento v višini 2 000 gld. Koliko ima po tem času še na računu in koliko časa mora čakati, da mu znesek spet naraste na prvotnih 16 000 gld? Vselej se računa z obrestno mero 4,5 %.
2. Pokončna piramida ima stranski rob $s = 1,4$ m in za osnovno ploskev trikotnik s stranico $a = 0,7$ m, kateri je nasproten kot $\alpha = 57^\circ 54' 44''$, preostali stranici pa sta v razmerju 4 : 3. Kako velik je polmer krogle, ki ima enako prostornino kot piramida?
3. Skozi gorišče parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ poteka tetiva, ki je vzporedna tangenti skozi krajišče parametra. Poišči enačbo nosilke tetive in ploščino odseka, ki ga ta tetiva odreže od parabole.



→ Opombe

1. Goldinar (gld) je bila stara avstrijska denarna enota (slika 2). V nemških besedilih so uporabljali za goldinar besedo Gulden in kratico fl (Florin). Leta 1892 so uvedli krone (K) in je veljalo $1 \text{ gld} = 2 \text{ K}$. Goldinarji so bili v obtoku vse do leta 1900.
2. Dekurzivno rento se izplačuje ob koncu leta. Verjetno je v nalogi mišljeno, da je bil znesek 16 000 gld vplačan na začetku leta.
3. Pokončna tristrana piramida ima vse tri stranske robove enako dolge, tako da je pravokotna projekcija njenega vrha na osnovno ploskev v središču njej očrtanega kroga.
4. Od 5. do 8. razreda so pri geometriji in algebri uporabljali Močnikova učbenika. Učbenik za geometrijo med drugim obravnava tudi zasuk koordinatnega sistema in krivulje drugega reda, zato naloga tedanjim dijakom načeloma ne bi smela delati težav, čeprav je računsko kar zahtevna. *Parameter* parabole je v Močnikovem učbeniku tista njena tetiva, ki je vzporedna vodnici parabole in poteka skozi njeno gorišče (slika 5). Danes pomeni parameter parabole polovico te tetive.

Rešitve Plemljevih maturitetnih nalog

1. Naj bo $a = 16\,000$ gld, $b = 2\,000$ gld in $p = 4,5\%$. Obrestovalni faktor je $r = 1 + p = 1 + 4,5/100 = 1,045$. Če je oseba vložila na banki znesek a na začetku leta, ima na koncu prvega leta $ar - b$ kapitala, na koncu drugega leta $(ar - b)r - b = ar^2 - b(r + 1)$ kapitala, na koncu desetega leta pa

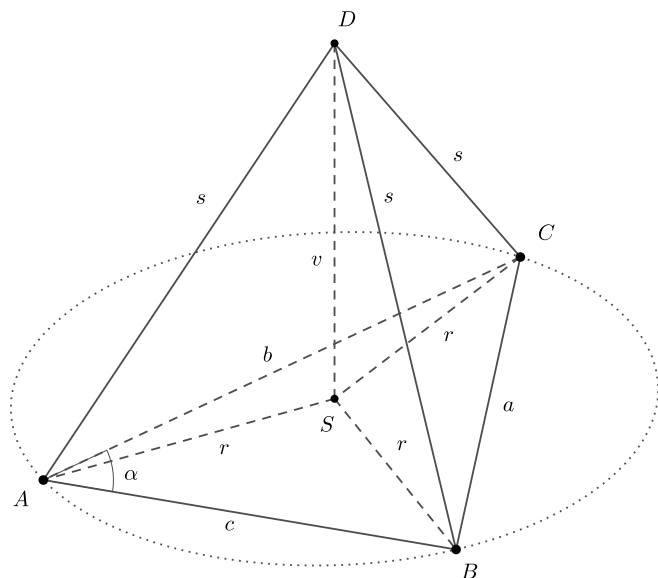
$$\begin{aligned} A &= ar^{10} - b(r^9 + r^8 + \dots + r + 1) \\ &= ar^{10} - b \frac{r^{10} - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

Verjetno so dijaki računali z logaritmskimi tablicami. Danes s pomočjo žepnega računalnika dobimo: $A = 271,09$ gld. Po naslednjih n letih se kapital A obrestno obrestuje. Da naraste kapital na a , mora veljati enačba $Ar^n = a$. Za rešitev dobimo $n = \log a / \log A = n = 92,64$ leta. Oseba zelo verjetno tega ne bi dočkala, morda sinovi ali hčere ali pa celo vnuki in pravnuki.



SLIKA 2.

Goldinar s cesarjevo podobo in dvoglavim orlom.



SLIKA 3.

Tristrana piramida v nalogi.

2. Polmer r osnovni ploskvi piramide očrtanega kroga dobimo s formulo $a/\sin \alpha = 2r$. Višina v piramide je po Pitagorovem izreku $v = \sqrt{s^2 - r^2}$. Ploščina p osnovne ploskve je $p = bc \sin \alpha/2$. Prostornina V piramide je $p v/3$.

Iz $b : c = 4 : 3$ dobimo $b = 4c/3$ in s kosinusnim izrekom $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} a^2 &= 16c^2/9 + c^2 - 2 \cdot (4c/3)c \cos \alpha \\ &= c^2(25 - 24 \cos \alpha)/9, \\ c &= \frac{3a}{\sqrt{25 - 24 \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Iz znanih podatkov lahko izračunamo

$$\begin{aligned} c &= 0,6 \text{ m}, \quad b = 0,8 \text{ m}, \\ p &= 0,2033 \text{ m}^2, \quad r = 0,4131 \text{ m}, \\ v &= 1,3377 \text{ m}, \quad V = 0,0906652 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Prostornina V piramide je enaka prostornini krogle s polmerom R , če je $V = 4\pi R^3/3$. Iz tega dobimo

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0,2787 \text{ m}.$$

3. Nalogo je najlažje rešiti z zasukom in vzporednim premikom koordinatnega sistema, da s

tem parabolo prevedemo na kanonsko obliko. Homogeni del enačbe parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ je popoln kvadrat:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x - 3y)^2.$$

Vpeljemo novi spremenljivki u in v z izrazoma

$$u = (4x - 3y)/5, \quad v = (3x + 4y)/5,$$

ki predstavljata zasuk ravnine Oxy v ravnino Ouv . Obratna transformacija je dana z izrazoma

$$x = (4u + 3v)/5, \quad y = (-3u + 4v)/5.$$

Enačba parabole preide z zasukom v enačbo

$$u^2 + 4u - 2v + 2 = (u + 2)^2 - 2(v + 1) = 0.$$

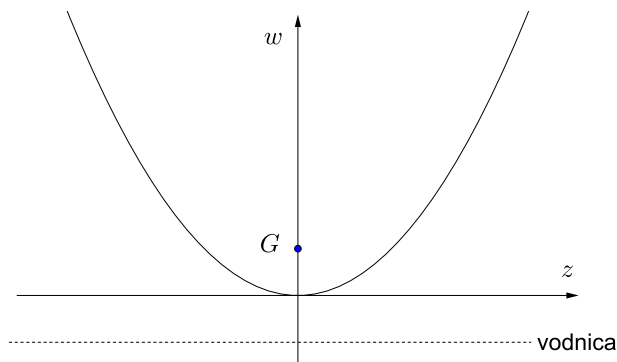
Nato vpeljemo

$$z = u + 2, \quad w = v + 1,$$

kar predstavlja vzporedni premik ravnine Ouv v ravnino Ozw . Obraten premik predstavljata izraza

$$u = z - 2, \quad v = w - 1.$$





SLIKA 4.

Parabola v klasični legi.

Obe transformaciji ohranjata razdalje, kote, ploščine ter orientacijo. Enačba parabole je v ravnini Ozw preprosta: $z^2 = 2w$ (slika 4). Iz nje preberemo enačbo vodnice in položaj gorišča G v ravnini Ozw :

- $w = -1/2, G(0, 1/2).$

Tetiva skozi G , vzporedna vodnici, je po Močniku parametar parabole. Krajišči parametra sta presečišči E in F premice $w = 1/2$ s parabolo $z^2 = 2w$. Brez težav dobimo $E(-1, 1/2)$ in $F(1, 1/2)$ (slika 5).

Kot je znano, dobimo enačbo tangente na para-

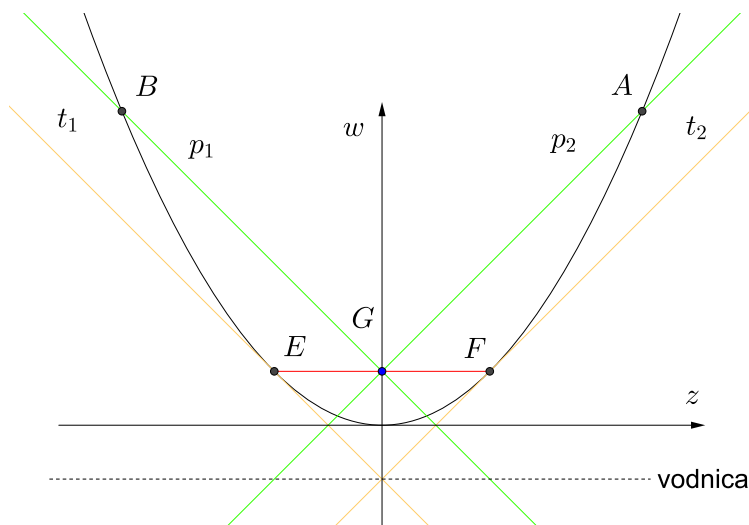
bolo $z^2 = 2w$ v točki $T(z_0, w_0)$ z enačbo $zz_0 = w + w_0$. V našem primeru je enačba tangente t_1 v $E(-1, 1/2)$ enaka $-z = w + 1/2$, enačba tangente t_2 v $F(1, 1/2)$ pa $z = w + 1/2$. Enačbi premic p_1 in p_2 skozi $G(0, 1/2)$, ki sta ustrezno vzporedni tangentama t_1 in t_2 , sta $-z = w - 1/2$ in $z = w - 1/2$ oziroma $z + w - 1/2 = 0$ in $-z + w - 1/2 = 0$.

Ploščina odseka parabole, ki jo od nje odreže p_1 , je zaradi simetrije enaka ploščini odseka parabole, ki jo od nje odreže p_2 , zato je dovolj obravnavati primer s p_2 . Dijaki niso še uporabljali integralnega računa, so pa vedeli, da je ploščina odseka parabole enaka $2/3$ ploščine polarnega trikotnika, ki ga omejujejo tangenti na parabolo in premica skozi njuni dotikališči (slika 6).

Poiščimo presečišči A in B parabole $z^2 = 2w$ s premico $-z + w - 1/2 = 0$. Dobimo $A(1 + \sqrt{2}, 3/2 + \sqrt{2})$ in $B(1 - \sqrt{2}, 3/2 - \sqrt{2})$. Sedaj je treba določiti enačbi tangent q_1 in q_2 na parabolo $z^2 = 2w$ v točkah A in B . Enačbi tangent sta

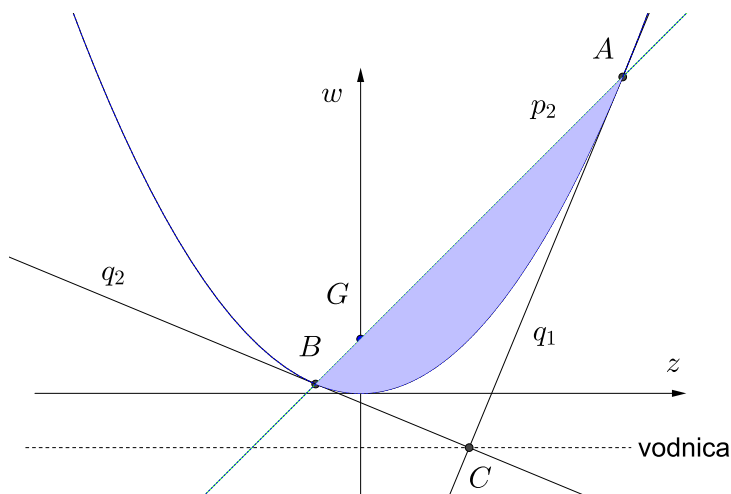
- $z(1 + \sqrt{2}) = w + 3/2 + \sqrt{2}, z(1 - \sqrt{2}) = w + 3/2 - \sqrt{2}.$

Tangenti se sekata pravokotno v točki $C(1, -1/2)$, ki leži na vodnici. Polarni trikotnik ABC je pravokoten s katetama $|AC| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$ in



SLIKA 5.

Parabola in tangenti v krajiščih parametra.



SLIKA 6.

Polarni trikotnik ABC in odsek parabole.

$|BC| = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Ploščina p polarnega trikotnika ABC je potem

$$\begin{aligned} p &= (1/2)\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}\sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \\ &= (1/2)\sqrt{64 - 32} = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

ploščina P odseka parabole pa

$$P = 2p/3 = 4\sqrt{2}/3.$$

Današnji maturanti lahko ta rezultat sami preverijo še z integracijo, a vstavljanje mej bo zaradi korenov nekoliko bolj zamudno.

Zapisati moramo še enačbi premic p_1 in p_2 v

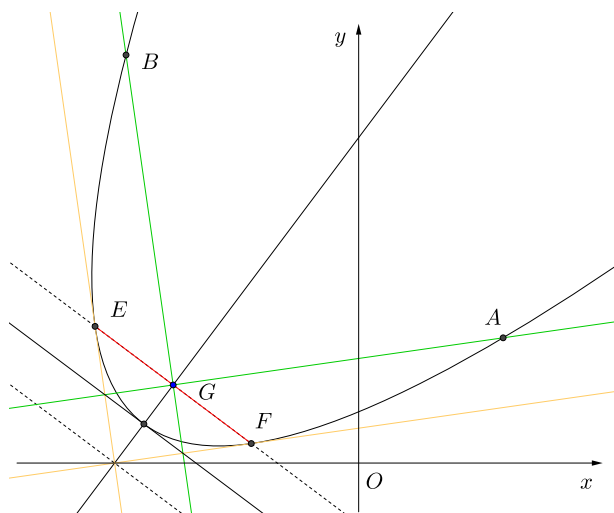
ravnini Oxy . Najprej v ravnini Ouv :

$$\begin{aligned} z + w - 1/2 &= u + 2 + v + 1 - 1/2 \\ &= u + v + 5/2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z + w - 1/2 &= -u - 2 + v + 1 - 1/2 \\ &= -u + v - 3/2 = 0. \end{aligned}$$

Končno pa še v ravnini Oxy :

$$\begin{aligned} u + v + 5/2 &= (4x - 3y)/5 + \\ &+ (3x + 4y)/5 + 5/2 \\ &= (14x + 2y + 25)/10 = 0, \end{aligned}$$



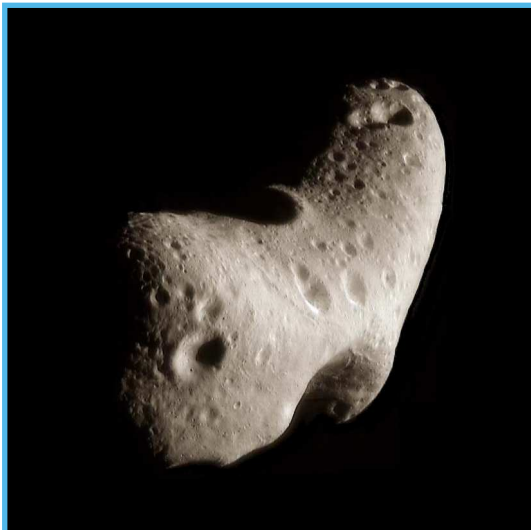
SLIKA 7.

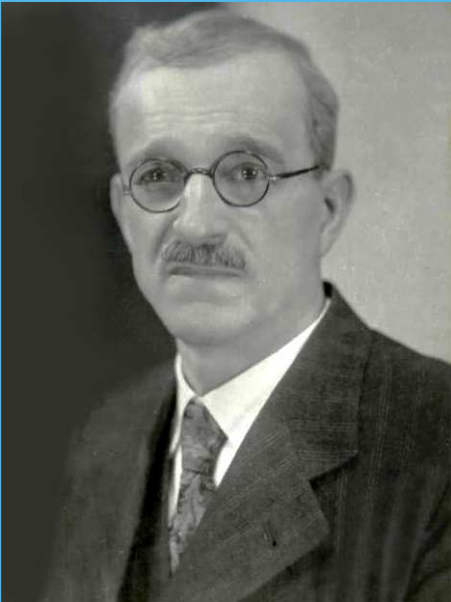
Parabola v zasukani legi.





Nagradna križanka

[illegible]

MOŠTVE- NOST	ITALIJAN. BAROČNI SKLADA- TELJ (GIULIO)					GRAFIČNO OBLIKO- VANJE MATEVŽ BOKALIČ	OSNOVNI DELEC, NASPROTJE ELEKTRONA	SEKSUAL- NOST	SPLETNA OZNAKA ITALIJE	TRENUTEK	IDEJNI UTEME- LJTE LJ, ZAČETNIK, POBUDNIK	KRAJ MED NOVIGRA- DOM IN POREČEM V ISTRI	NEMŠKA SLIKARJA, BRATA (FRITZ IN ERICH)	ROK ZA PLAČILO OBVEZ- NOSTI, ZAPADLOST	MERILNIK, KI ZAPISUJE HITROST VOZILA
						POSTOPEK UGOTAVLJA- NJA DUŠEV. LASTNOSTI IN VEDENJ									
						IZDELO- VALKA OČESNIH PRIPO- MOCKOV									
						ZLATA OGNJA- NOVIČ			NAŠ MATE- MATIK IZ 16. STOL. (ANDREJ) USTNIČNIK						
						PRITOK RENA V STRAS- BOURGU				GOBAVOST	ČRKI, KI OKLEPATA ČRKO P	IME ZA TOKIO OD 17. DO 19. STOL.	8		
						VEČJI KOS DEBLA, NA KATEREM SE SEKA DRVA						GRUŠČNATA PUŠČAVA ZEMLJEPI- SNO LAST- NO IME			
						NEKD. SMUČ. SKAKALEC KRANJEC IGRALKA IRELAND							NORINA RADOVAN JUNAKINJA NASE LJUD- SKE PESMI		
	NEKDANJI NORVEŠKI NOGOMETAS (ANDRE) FLO	UBITI ITALIJAN. POLITIK (ALDO)	DRUGO NAJVEČJE MESTO V SIRIJI	JAGUAR- JEVA LUKSUZNA LIMUZINA	ENOTA ZA MAGNETNI PRETOK (PO NEM. FIZIKU)	NAŠ FIZIK (MILAN) IZVLEČEK IZ SUROVINE					FR. PEVKA (EDITH) NITAST CELICNI IZRASTEK				
ZVRST ZABAVNE GLASBE	ŠKOTSKI FIZIK (JAMES CLERK) POLONIJ						JURČIČEV VAŠKI POSEBNEŽ	VELIK BEL VODNI PTIČ ADAM YATES					7	NEMŠKA DRŽAVA V ČASU NACIZMA	POLJUBNA NOVEJŠA UMET- NOSTNA SMER
KMETO- VALKA HRV. PRE- RODITELJ (LJUDEVIT)									NEKDANJE GLAVNO MESTO NEMČIJE	SEVERNO- FINSKO JEZERO NORDIJSKA BOŽANSTVA					
				HITER RAZMAH, RAZCVET SOSEDNJI ČRKI			RUSKO NASELJE OB BALTIKU PRELAZ V KARAVANKAH							OZNAKA AZER- BAJDŽANA LARS ONSAGER	
	CITRAM PODOBNO GLASBILO RADJUSKA NAPRAVA		4					TERITORIJ NEKDANJI SKRBNIK ZA JAVNO VARNOST							
		INTERNET EXPLORER	PROSTOR ZA PRTLJAGO V VOZILU SKANDIN. NAROD									ENOTA ZA ELEKTRIČ. UPORNOST (PO NEM. FIZIKU)			
MESTO V SRBIJI POLNA LUNA				IGRALEC SAMOBOR	POKOJNA ITALIJAN. IGRALKA (VIRNA)	NAŠA TENISAČICA (KAJA) ODBOJKAR PAJENK									
11											VELIKAN IZ ČASA PRED ČLOVEŠKIM RODOM				
		NEKDANJI NORVEŠKI BIATLONEC GJELLAND						ANGLEŠKI DRAMATIK JONSON							
								PEVKA VILER GERMANIJ							
		DOSEŽEK			9										
		POKOJNI SRBSKI PATRIARH													
								RIBIŠKA DRUŽINA							

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka ter ga oddajte do **1. februarja 2024**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.





15

nadaljevanje
s strani

$$\begin{aligned} -u + v - 3/2 &= -(4x - 3y)/5 + \\ &+ (3x + 4y)/5 - 3/2 \\ &= (-2x + 14y - 15)/10 = 0. \end{aligned}$$

Enačbi iskanih premic p_1 in p_2 sta torej

$$14x + 2y + 25 = 0, \quad -2x + 14y - 15 = 0.$$

Premici sta pravokotni druga na drugo.

Dodatek

Enačbo vodnice, tangente v temenu, nosilko parametra in osi parabole ter njeno teme in gorišče v ravnini Oxy lahko hitro zapišemo z uporabo transformacijskih formul.

Današnji maturanti lahko ta rezultat sami preverijo še s pomočjo integracije, a vstavljanje mej bo zaradi korenov kar sitno. Nazadnje zapišimo še enačbi tangent v krajiščih parametra:

$$14x + 2y + 35 = 0, \quad 2x - 14y + 5 = 0.$$

Parabola $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ v ravnini Oxy je predstavljena na sliki 7.

Vodnica parabole ima v ravnini Ozw enačbo $w = -1/2$. Če vstavimo najprej $w = v + 1$ in nato še $v = (3x + 4y)/5$, po preureditvi dobimo enačbo vodnice $6x + 8y + 15 = 0$ v začetnem koordinatnem sistemu Oxy . Bralec lahko sam na podoben način preveri, da ima parabola gorišče v točki $G(-19/10, 4/5)$ in določi enačbe osi parabole, tangente v temenu, nosilke parametra in koordinati njegovih krajišč ter enačbi tangent v teh krajiščih.

Dijak Josip Plemelj je maturo brez težav opravil (slika 8), se vpisal na dunajsko univerzo, kjer je doktoriral leta 1898 in postal, kot je znano, zelo uspešen matematik.

Literatura

- [1] A. Senekovič, *Jahresbericht des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Laibach veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1893/94*, Ljubljana 1894.
- [2] A. Senekovič, *Jahresbericht des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Laibach veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1894/95*, Ljubljana 1895.



SLIKA 8.

Plemljevo maturitetno spričevalo. Kopija listine iz [4].

- [3] I. Vidav, *Josip Plemelj: ob stoletnici rojstva*, DMFA, Ljubljana 1975.
- [4] Arhiv Republike Slovenije, fond SI AS 2012 Plemelj Josip, 1873–1992.

xxx

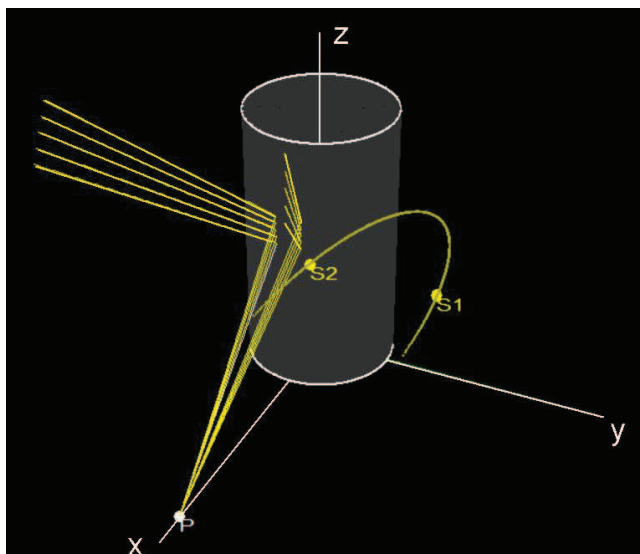
www.presek.si

Valjasto in krogelno zrcalo



ANDREJ LIKAR

→ Zrcalo, ki je največ v rabi, je ravno zrcalo. Ko se gledamo v njem, se zdi naša slika nepopačena, čeprav vemo, da nas drugi vidijo nekoliko drugače. V valjastem zrcalu, posrebnem na zunanji strani plašča, pa je naša slika popačena, pri premeru valja nekaj centimetrov komaj razpoznavna. Ob tem se čudimo, da v zrcalu sploh vidimo kaj smiselnega, saj se svetla točka ne preslika v točko, temveč v črto. Pri konkavnem valjastem zrcalu lahko sliko točke prestrežemo na zaslonu in res vidimo le črto, vzporedno z osjo valja. Pri krogelnih zrcalih se točka preslika v točko in tam upravičeno pričakujemo, da bomo videli razpoznavne slike predmetov.

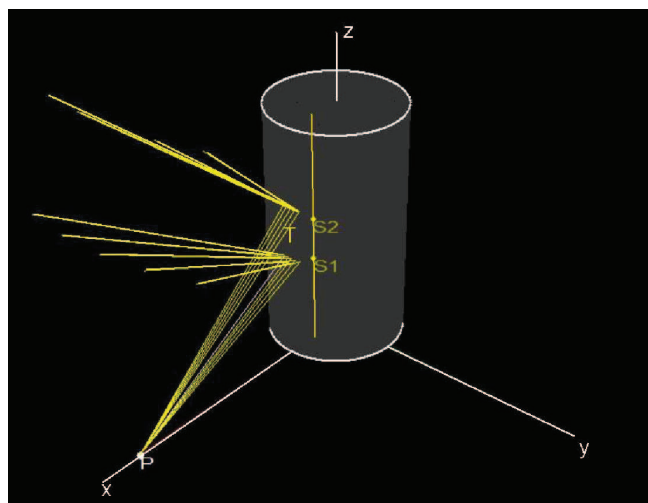


SLIKA 2.

Navidezni sliki S_1 in S_2 svetle točke P v valjastem zrcalu za prikazane žarke, ki osvetlijo valj navpično. Na krivulji v ravnini $z = 0$ ležijo slike za ostale navpične žarke.

Pri valjastem zrcalu nas običajna konstrukcija slike, ki smo je vajeni pri ravnih in krogelnih zrcalih, pusti na cedilu. Če postavimo krogelno zrcalo na mizo tako, da je njegova simetrijska os navpična, in skušamo ugotoviti, kje nastane slika oddaljene točke na mizi, dobimo za žarke, ki osvetlijo valj vodoravno (slika 1) eno navidezno sliko, za žarke, ki ga osvetlijo navpično, pa drugo sliko povsem drugače. Teh slik pač ne moremo smiselno združiti.

Hitro doumemo razmere, če si ogledamo sliko 1. Svetla točka na mizi P se z narisanimi žarki preslika v S_1 in S_2 . Ker gledamo v valj skozi drobno očesno zenico, vidimo bodisi le S_1 ali le S_2 , pač odvisno, kje je oko in v katero smer gleda. Prikazali smo le dve izbrani sliki in ustrezni smeri, pod katerima ju vidimo. Vse slike svetle točke pa ležijo na premici, označeni z rumeno barvo. Fotografski aparat ima lahko veliko vstopno zenico, zato tam sliko svetle točke prikaže



SLIKA 1.

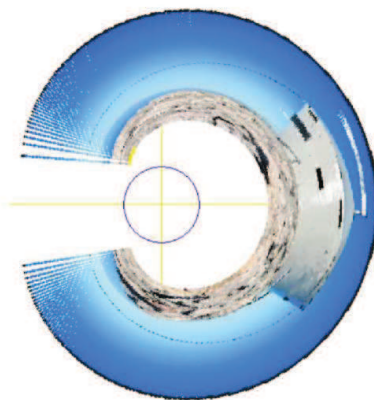
Navidezni sliki S_1 in S_2 svetle točke P v valjastem zrcalu za žarke, ki osvetlijo zrcalo vodoravno.

**SLIKA 3.**

Fotografija slike točkastega svetila v valju. Zaradi velike vstopne zenice fotoaparata slika ni več točka, temveč črtica

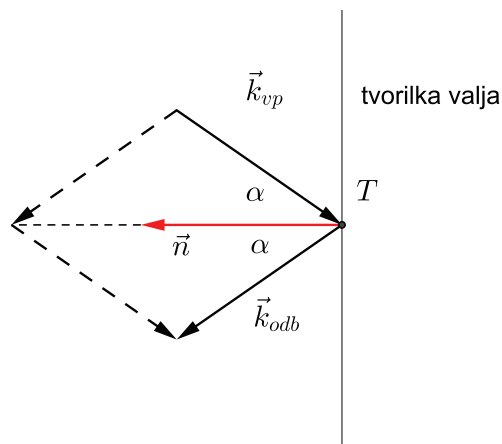
kot črtico, glej sliko 3. Če gledamo sliko z obema očesoma, je slika lepo vidna le, ko sta očesi na enaki višini, da vidimo z obema isto sliko. Zasuk glave okoli vodoravne osi povzroči, da očesi ne vidita iste slike. Kljub trudu se sliki ne zlijeta v eno in je tako gledanje prav neprijetno.

Pri valjastem zrcalu ima točka S še eno navidezno sliko. To najlažje razumemo, če organiziramo žarke iz P tako, da obsvetijo valj navpično. Dobimo množico slik na ravnini $z = 0$. Te slike so bolj oddaljene od teh, ki ležijo na navpični premici, glej sliko 2. Pri ogledu svetle točke v ogledalu sicer vidimo obe sliki, a pri konveksnem zrcalu nas kljub različnim oddaljenostim slik to ne moti. Na večje težave pri raz-

**SLIKA 4.**

Slika Aljaževega stolpa na Triglavu. Levo sliko vidimo v valjastem zrcalu s premerom, ki ga nakazuje krožnica.

poznavanju slike naletimo pri konkavnem valjastem zrcalu. Tam je namreč razdalja med realno sliko in navidezno večja, in če gledamo od blizu, oko bega od ene slike k drugi.

**SLIKA 5.**

Vektor vpadne svetlobe $\vec{k}_{vp}$, odbite svetlobe $\vec{k}_{odb}$ in pravokotnice $\vec{n}$ na ploskev valja v točki T

Pred leti sem na neki slikarski razstavi prvič videl sliko, ki jo je bilo treba gledati v valjastem zrcalu. Slika je ležala na mizi, posrebren valj pa pokončno na določenem mestu. V valju si videl sliko, ki jo je hotel pokazati umetnik, slika na mizi pa je bila močno popačena. Poučili so me, da se takšnim slikam reče anamorfne slike. Na sliki 4 smo tako prikazali sliko Aljaževega stolpa na Triglavu, da je v valjastem zrcalu videti nepopačena.

Ali bi znali tudi mi neki sliki narediti popačenko, da bi bila v valjastem zrcalu videti prav? Ni razloga, da tega ne bi znali, saj gre le za odboj svetlobe, za katerega nam takoj pride na misel šolska učenost, da je vpadni kot enak odbojnemu. Pri ravnem zrcalu nismo v zadregi, kaj to pomeni. Vpadni kot je kot med vpadnim žarkom in pravokotnico na zrcalo na mestu, kjer žarek zadene zrcalo, torej vpadni točki T . Žarek in pravokotnica tvorita vpadno ravnino in odbiti žarek leži prav v tej ravnini. Kot med pravokotnico in odbitim čarkom je enak vpadnemu kotu. Pri ukrivljenih zrcalih moramo pravokotnico na zrcalo določiti za vsako točko posebej, potem pa določiti vpadno ravnino. Smeri vpadnega in odbitega žarka bomo najlažje ponazorili z enotskima vektorjema v smeri širjenja svetlobe, torej $\vec{k}_{vp}$ in $\vec{k}_{odb}$. Prav tako bomo pravokotnico na zrcalo opisali z enotskim vektorjem $\vec{n}$ v smeri iz ogledala. Ker leži odbiti žarek v vpadni ravnini, zapišemo odbojni zakon s temi tremi vektorji takole:

$$\vec{k}_{vp} \times \vec{n} = \vec{k}_{odb} \times \vec{n}$$

Zakaj tako? Vektorski produkt dveh vektorjev skupaj z vpadno točko T določa ravnino, v kateri ležita vektorja in ker sta vektorja enotska, je velikost produkta kar $\sin \alpha$, kjer je α kot med njima. Velja namreč:

$$|\vec{k}_{vp} \times \vec{n}| = |\vec{k}_{vp}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin \alpha.$$

Ker leži odbiti žarek v isti ravnini, kot jo tvorita vpadni žarek in pravokotnica $\vec{n}$ in je odbojni kot enak vpadnemu, morata biti vektorska produkta na levi in desni strani zgornje enačbe enaka. Iz prve enačbe sledi:

$$(\vec{k}_{vp} - \vec{k}_{odb}) \times \vec{n} = 0.$$

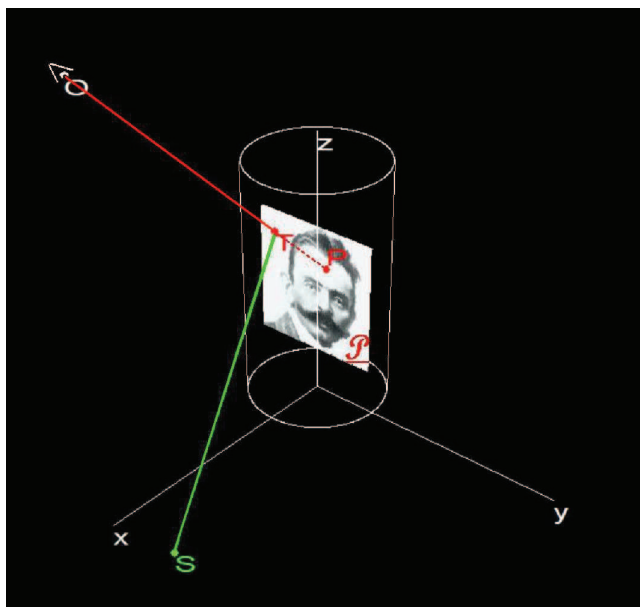
Iz te enačbe lahko takoj zapišemo splošno rešitev:

$$\vec{k}_{odb} = \vec{k}_{vp} + \lambda \vec{n}.$$

Tu je λ poljubna konstanta. Določimo jo iz zahteve, da sta vpadni in odbojni kot enaka. Torej mora veljati:

$$\vec{k}_{odb} \cdot \vec{n} = -\vec{k}_{vp} \cdot \vec{n},$$

kar hitro razberemo iz lege vseh treh vektorjev, glej skico slika 5. Skalarni produkt dveh enotskih vektorjev je namreč enak kosinusu kota med njima. Zadnji



SLIKA 6.

Konstrukcija popačene slike. Iz izbrane lege očesa O določimo vektor vpadnega žarka v smeri daljice $|OP|$ in določimo točko odboja T na zrcalu. Sledimo odbitemu žarku, dokler ne pridemo do ravnine $z = 0$. Kjer odbiti žarek seka ravnino, dobimo točko S in jo obarvamo z barvo točke P na sliki P .

dve enačbi združimo in dobimo:

$$(\vec{k}_{vp} + \lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = -\vec{k}_{vp} \cdot \vec{n},$$

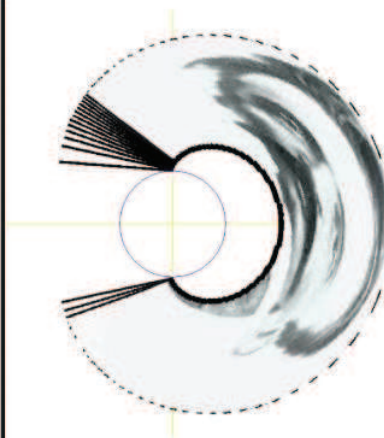
od koder je:

$$\lambda = -2\vec{k}_{vp} \cdot \vec{n}.$$

Z vpeljavo koordinatnega sistema $[x, y, z]$ pridemo do enačb za komponente vektorjev $\vec{k}_{vp}$, $\vec{k}_{odb}$ in $\vec{n}$. Preden se lotimo konstrukcije popačene slike, preverimo končne enačbe z risanjem vpadnega in odbitega žarka. Ker delamo v prostoru, je smiselno uporabiti kakšen program, ki iz poljubno izbranega gledišča prikaže koordinatni sistem v ustrezni projekciji. Naše skice so predstavljene na ta način.

Kako se bomo lotili risanja popačene predloge? Seveda bomo to opravili z računalniškim programom. Postavimo koordinatni sistem $[x, y, z]$ in vanj najprej postavimo valjasto zrcalo. Tega postavimo tako, da njegova geometrijska os sovпада z osjo z . Nato izberemo lego očesa O tako, da bomo imeli kar





SLIKA 7.

Portret Ivana Cankarja, kot ga vidimo v valjastem zrcalu s prikazano predlogo

najudobnejši pogled na zrcalno sliko, glej sliko 6. Originalno sliko P , ki jo želimo videti v zrcalu, postavimo na sredo valja. Točko S , ki jo iščemo na popačeni sliki, mora oko po odboju žarka na valju videti v smeri izbrane točke P na originalu. Točko S bomo našli, če obrnemo pot žarka, torej pošljemo žarek iz oči proti valju. Po odboju bo odbiti žarek prebodel ravnino $z = 0$ prav v iskani točki S . Vektor vpadne svetlobe poznamo, saj poznamo smer, pod katero gledamo izbrano točko na originalni sliki P . Vektor vpadnega žarka, ki kaže od očesa do izbrane točke P na sliki znotraj valja, seka zrcalno ploskev, to je plašč valja, v točki odboja T . Po odboju odbiti žarek postopoma širimo, dokler v točki S ne seka ravnine $z = 0$. Tu v bližnji okolici točke S obarvamo ravnino z barvo slike v točki P . Pri ogledu slike v zrcalu se bo svetloba širila po obratni poti od točke S na ravnini $z = 0$ do točke odboja T in po odboju nadaljevala pot v oko. Tako bomo videli virtualno sliko izbrane točke P . Ko na ta način obdelamo vso sliko, dobimo na ravnini $z = 0$ popačeno sliko, ki smo jo iskali.

Morda je na mestu nekaj besed o iskanju odbojne točke T . Ker poznamo vektor v smeri vpadnega žarka, lahko zapišemo premico, po kateri potuje žarek, parametrično takole:

- $x = x_O + k_{vp,x}t$,
- $y = y_O + k_{vp,y}t$,
- $z = z_O + k_{vp,z}t$.

Parameter t določa točke na premici. Pri $t = 0$ smo v točki O . Točka T je presečišče plašča valja, za

katerega za vse z velja enačba

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

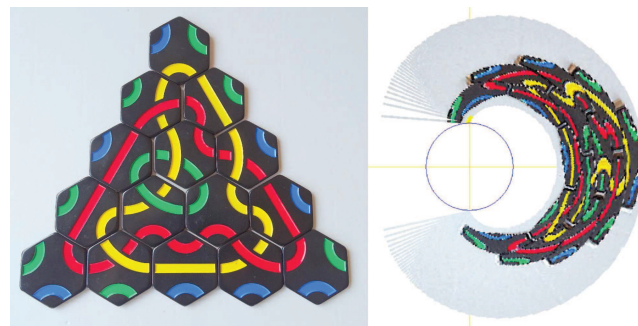
Ker je točka T hkrati na premici in plašču valja, poiščemo tak t , da bo to res. Ko najdemo parameter t , določimo koordinate točke T .

Normala na plašč valja v točki $T(x_T, y_T, z_T)$ je za vse z_T kar

$$\vec{n} = \frac{1}{R}(x_T, y_T, 0)^T,$$

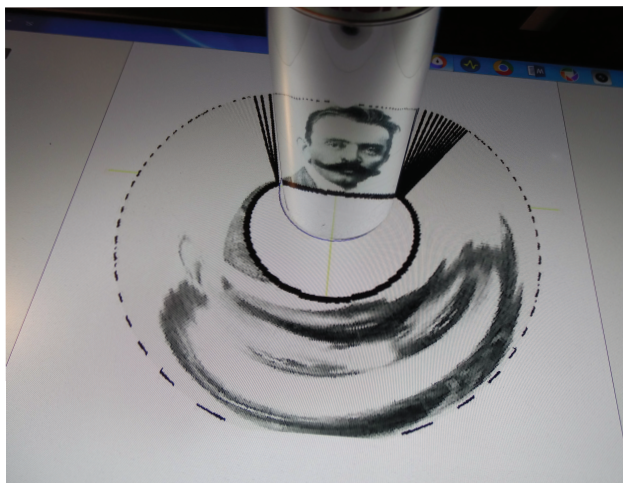
saj leži v ravninah s konstantnim z . T nad zaklepajem pomeni transpozicijo, ki vrstico spremeni v stolpec.

Nadaljujmo z nekaj prepoznavnimi slikami in njihovimi popačenimi predlogami. Na sliki 7 je najbolj znan portret Ivana Cankarja, na sliki 8 pa je slika trikotnika, sestavljenega iz šestkotnikov. Na sliki 9

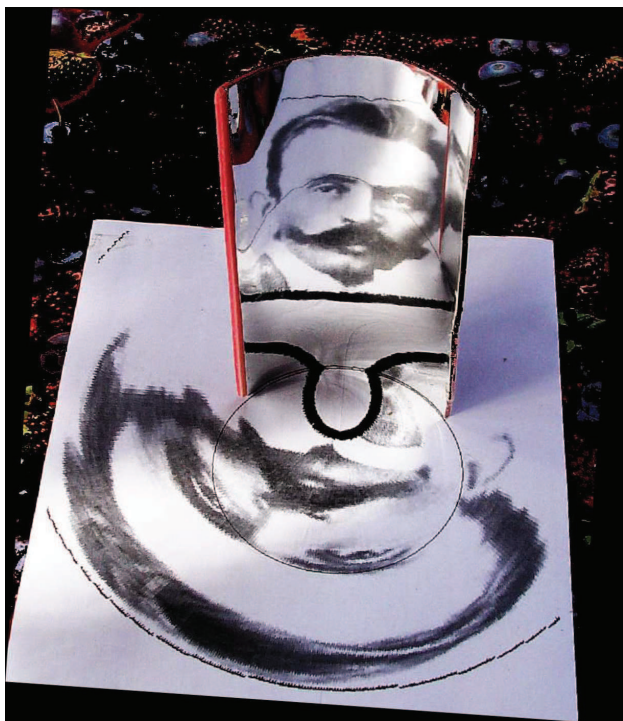


SLIKA 8.

Trikotnik iz šestkotnikov

**SLIKA 9.**

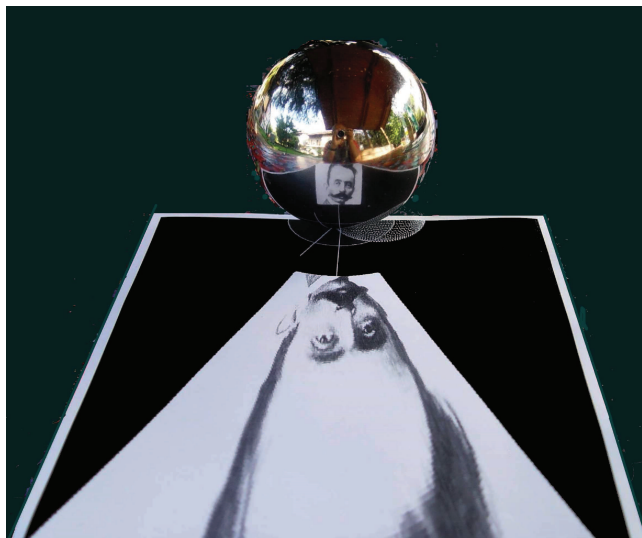
Postavitev anamorfne slike. Tako nekateri umetniki predstavljajo svoja dela.

**SLIKA 10.**

Postavitev anamorfne slike pri konkavnem valjastem zrcalu.

smo fotografirali postavitev anamorfne slike, predstavljene na sliki 7.

Kako pa bi se obneslo konkavno valjasto zrcalo. Vse povedano velja tudi v tem primeru. Program smo v nekaj podrobnostih prilagodili konkavni obliki. Pričakovali smo zanimivo sliko, ki je to pot realna in stoji pred ogledalom. Postavitev je prikazana na sliki 10. Slika res lebdi v prostoru, česar fotografija ne more ustrezno prikazati. Žal je konkavno valjasto zrcalo težko dobiti, tu smo ga izdelali iz dela plastične cevi, ki smo jo oblepili z zrcalno tapeto.

**SLIKA 11.**

Postavitev anamorfne slike s krogelnim zrcalom

Na misel nam pride, da bi za prikaz anamorfne slike uporabili še krogelno zrcalo. Pa poskusimo še z zrcalno kroglo. Ko jo postavimo na mizo, vidimo, da le spodnja polovica odseva površino mize, zgornja pa predmete nad njo. Anamorfne slike, ki ležijo na mizi, bodo torej vidne le v spodnji polovici krogle. Primer popačene slike in njen odsev v zrcalni krogli sta prikazana na sliki 11. Hitro uvidimo, da krogelno zrcalo ni kaj posrečena izbira za predstavitev anamorfnih slik.

× × ×

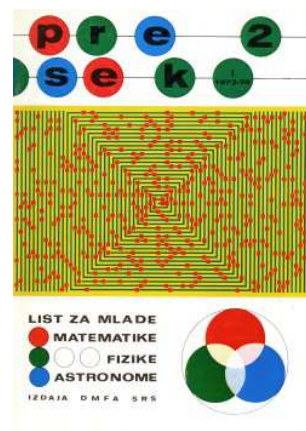
www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Anekdota o Plemlju

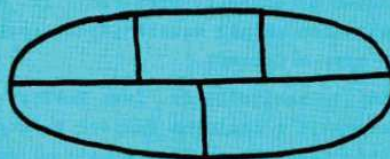
LETNIK 1, ŠTEVILKA 2, 1973-74



→ Tudi pred natanko 50 leti so naši predhodniki jesensko številko revije Presek posvetili profesorju Josipu Plemlju. Tedaj so seveda obeleževali 100-letnico njegovega rojstva in bržkone je tudi revija Presek prav zaradi tega v letu 1973 ugledala luč sveta. Daljšemu uvodniku, ki ga je napisal gimnazijski profesor in nekdanji Plemljevi študent Marjan Vagaja (1932-2019), je dve anekdoti o profesorju Plemlju dodal še njegov doktorand prof. dr. Ivan Vidav, ki je na Univerzi v Ljubljani veljal za Plemljevega naslednika in je po drugi svetovni vojni vzgojil številne generacije matematikov. Obe anekdoti sta seveda matematični – bralcem v izziv takrat in morda še danes.



Takoj po opravljenem doktoratu leta 1898 je Plemelj dobil službo v uradu za merjenja na Dunaju. Pred novim letom so ga tamkajšnje uradnice prosile, naj jim pove kakšno zanimivo matematično uganko, da si bodo z njo krajšale čas med prazniki. Plemelj jim je povedal tole nalogo: Lik na sliki je treba narisati s tremi potezami, seveda brez prekrivanja. Naslednje leto je dobil stipendijo za nadaljnji študij in odpotoval v Berlin. Na nalogo je popolnoma pozabil. Nekoč ga je tam obiskal prijatelj z Dunaja. Preden se je poslovil, mu je povedal, da so mu uradnice iz urada za merjenja naročile, naj ne pozabi Plemlja vprašati



za rešitev naloge. Same so se z nalogo zelo dolgo trudile, pa se jim ni in ni posrečilo najti rešitve. "Nič čudnega, da je niso znale rešiti," je odgovoril Plemelj. "Naloga sploh ni rešljiva. Lik se ne da narisati samo s tremi potezami, temveč najmanj s štirimi". Prijatelj se je od srca nasmejal Plemljevi potegavščini. Bralec pa naj premisli, zakaj naloga ni rešljiva.

Ivan Vidav

Študija asteroida na poletni šoli GoChile



NEJA PISK IN KATJA ŠIMENC

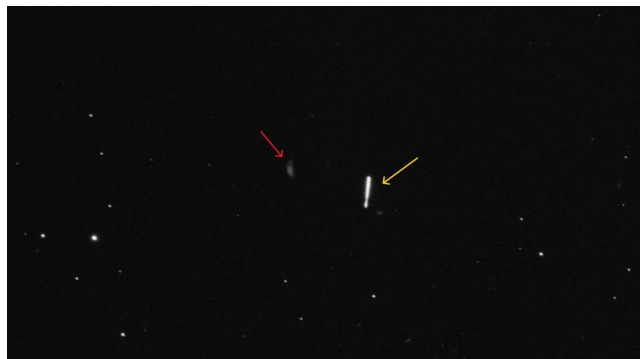
→ V tednu od 13. do 19. avgusta je na kmetiji Lešnik nad Slovenj Gradcem potekala Druga poletna šola astronomije GoChile. Poletne šole se nas je udeležilo 15 dijakov in dijakinj, v tem tednu pa smo v parih izpeljali zahtevnejši projekt. Na letošnji šoli smo opazovali prehod eksoplaneta, klasificirali galaksije, fotografirali meglice, izdelali HR diagram, opazovali asteroid in lovili satelite.

GoChile¹ je projekt Univerze v Novi Gorici in astronomske revije Spika. Projekt sestoji iz dveh teleskopov (ki si delita montažo), postavljenih na robu puščave Atacama. Teleskop GoT2 je 72 mm velik refraktor z relativno velikim vidnim poljem, namenjen predvsem za fotografiranje večjih objektov, kot so npr. meglice, galaksije in razsute kopice. Teleskop GoT1 pa je večji 400-milimetrski reflektor, namenjen podrobnejšemu raziskovanju zvezd, asteroidov, meglic ipd. Teleskop upravljamo na daljavo.

Na poletni šoli smo opazovali s teleskopom GoT1 pod vodstvom mentorjev iz Univerze v Novi Gorici. Razdelili smo se v pare in si izbrali vsak svoj objekt. Za izvedbo opazovanja je bilo treba najprej poiskati objekt, ki ga sploh želimo opazovati, pri čemer je bilo treba upoštevati, da mora biti objekt viden z južne poloble, da ima primerno magnitudo za opazovanje z GoT1 in da je v času opazovanja vsaj 20 stopinj nad obzorjem. Nato pa je bilo treba pripraviti načrt opazovanja, torej kdaj točno želimo izvesti opazovanje in s kakšnimi osvetlitvami in filtri želimo opazovati.

Perioda in spekter asteroida (354) Eleonora

Za najin projekt sva si izbrali opazovanje asteroida. Vsem kriterijem je ustrezal asteroid (985) Rosina.



SLIKA 1.

Asteroid na sliki lahko vidimo kot črto na sredini – označen je z rumeno puščico. Iz slike lahko razberemo, da se asteroid premika razmeroma hitro glede na okoliške zvezde, glede na čas opazovanja, ki je trajalo okoli 5.5 ur. Levo, označeno z rdečo puščico, pa lahko vidimo tudi galaksijo NGC 303.

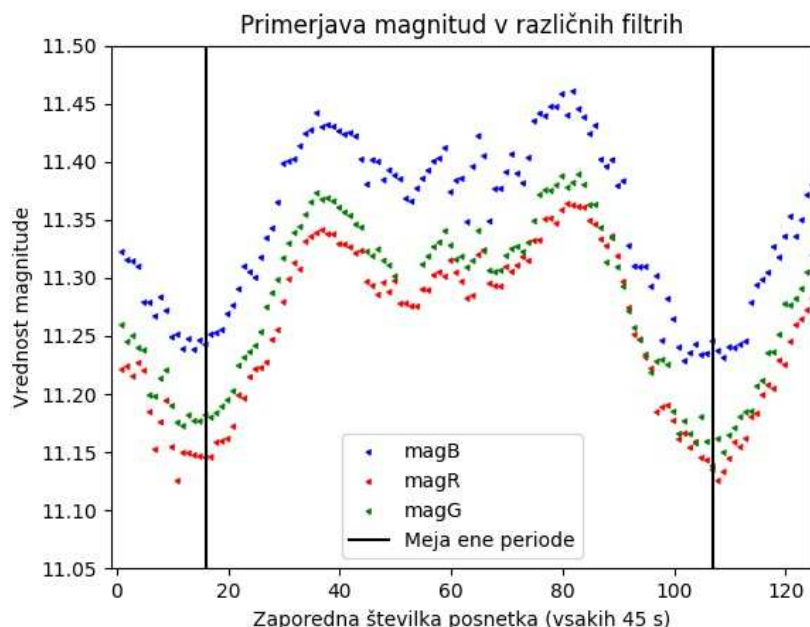
Žal ga zaradi slabih vremenskih razmer nisva mogli opazovati. K sreči so imeli organizatorji pripravljene rezervne podatke opazovanja asteroida (354) Eleonora² s katerimi sva nato tudi delali. Asteroid je bil opazovan v filtrih B, G in R. Posamezna osvetlitev je trajala 45 s, celotno opazovanje pa približno 5,5 ure (slika 1).

Najina naloga je bila izmeriti periodo vrtenja asteroida in njegov odbojni spekter. Asteroid se, tako kot vsak objekt v vesolju (Zemlja, Sonce ...), vrti okoli svoje osi. To je posledica ohranitve vrtilne količine. Obenem so asteroidi nepravilnih oblik, zato se količina odbite Sončeve svetlobe in posledično njihova svetlost s časom spreminjata. Iz spremenljive svetlobne krivulje lahko torej izračunamo periodo asteroida, torej koliko časa potrebuje, da se enkrat zavrti okoli svoje osi. Periode asteroidov zavzemajo različne vrednosti, velika večina vrednosti se giblje med nekaj do nekaj deset urami.

¹<https://gochile.si/>

²Opazovanje s teleskopom GoT1 je 30. 11. 2022 izvedel Marko Žigart.





SLIKA 2.

Graf prikazuje spreminjanje svetlosti asteroida v vseh treh filterih uporabljenih med opazovanjem. Navpični črti pa predstavljata mejo ene periode vrtenja.

Kot rečeno, asteroidi odbijajo Sončevo svetlobo. Odbita svetloba pa nima povsem enakega spektra kot Sonce. Svetloba različnih valovnih dolžin se od asteroida različno učinkovito odbije. Kako asteroid odbija svetlobo, je odvisno od njegovega površja (ali je gladko ali posejano s skalami različnih velikosti) in od sestave. Prek primerjave Sončevega spektra in od asteroida odbite svetlobe lahko izračunamo odbojni spekter asteroida.

Dela sva se lotili s kalibracijo slik v programu Astro Pixel Processor. Nato sva poiskali astrometrično rešitev v programu ASTAP, s čimer sva posnetke opremili s koordinatami. Naslednji del sva opravili v programu AstroImageJ. Program nama je s pomočjo referenčnih zvezd, za katere sva našli podatke magnitud v različnih katalogih, izrisal graf spreminjanja svetlosti asteroida ter podal magnitudo za vsak filter posebej (glej sliko 2). Preverili sva, ali se razlika magnitud oziroma barva asteroida med vrtenjem spremeni, kar bi se lahko zgodilo zaradi različne sestave na različnih delih asteroida. Občutne spremembe barve nisva opazili. Iz grafa pa sva lahko razbrali tudi dolžino periode (354) Eleonore, ki znaša okoli 4 h in 5 min.

Iz povprečne magnitude na najbolj konstantnem delu grafa sva izračunali povprečno gostoto svetlobnega toka za asteroid in njegovo napako za vsak filter. Da pa sva lahko izračunali odbojni spekter, sva te podatke morali deliti s podatki o gostoti svetlobnega toka za Sonce. Za to sva uporabili spekter, posnet z instrumentom SOLSPEC misije Atlas (Thuillier et al. 2003). Enačba za odbojni spekter je enaka

$$R_{\lambda} = \frac{F_{\lambda}}{F_{\lambda,\odot}},$$

kjer R_{λ} predstavlja odbojni spekter v določenem filteru, F_{λ} pa gostoto svetlobnega toka v tem filteru.

Najine podatke sva želeli primerjati s podatki satelita Gaia. Gaia je do sedaj pridobila odbojne spektre za okoli 60000 asteroidov (Gaia Collaboration 2023), med njimi tudi za najin asteroid. Podatke sva dobili v spletnem arhivu³, v katerem so zbrani vsi podatki, ki jih je posnel satelit Gaia in so dostopni tudi javnosti.

Podatki satelita Gaia so normalizirani pri valovni dolžini, ki približno ustreza našemu zelenemu filteru.

³<https://gea.esac.esa.int/archive/>

	Filter	Najina meritev	Napaka	Katalog
Perioda		4 h 5 min	15 min	4 h 16 min
Povprečna magnituda	G	11,28	0,07	–
	R	11,35	0,23	–
	B	11,35	0,07	–
Spekter	G	1	–	1
	R	1,26	–	1,18
	B	0,61	–	0,64

TABELA 1. Meritve periode, povprečne magnitude in odbojnega spektra asteroida. Kjer je to mogoče, sva meritve primerjali z vrednostmi iz kataloga. Poudarjava, da nisva izmerili napake izračunanega spektra.

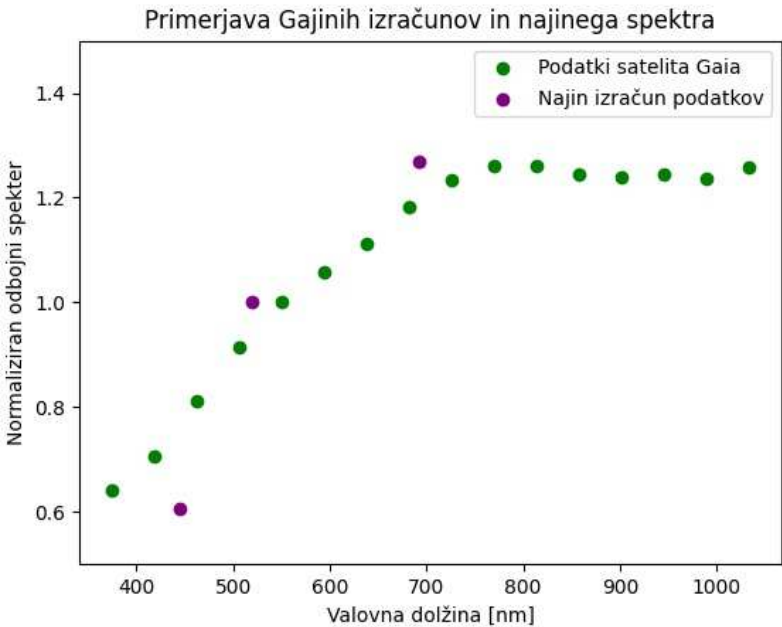
Najine rezultate sva zato normalizirali tako, da sva vrednosti v vseh treh filtrih delili z vrednostjo, izmerjeno v zelenem filtru—vrednost spektra v zelenem filtru je tako postala enaka 1. Na koncu sva izrisali graf odbojnega spektra ter ga primerjali z Gainimi podatki (slika 3). Najini rezultati so zbrani v tabeli 1. Izmerjena perioda se dobro ujema s podatki v katalogu. Tudi najin spekter se zelo dobro ujema z Gainimi podatki.

Z rezultati najinega projekta sva bili zelo zadovoljni. Pridobili sva veliko novega znanja, zato bi z veseljem to izkušnjo ponovili. Poleg projekta so na

poletni šoli potekala tudi vsakodnevna predavanja, pri katerih smo izvedeli veliko novih stvari z različnih področij. Obiskali pa smo tudi Fakulteto za varstvo okolja v Velenju in Fakulteto za tehnologijo polimerov v Slovenj Gradcu. Čez celo šolo sva se zelo zabavali in sva veseli, da sva se je udeležili.

Literatura

[1] Gaia Collaboration 2023, A&A, 674, A35
Thuillier et al. 2003, Solar Physics, 214, 1-22

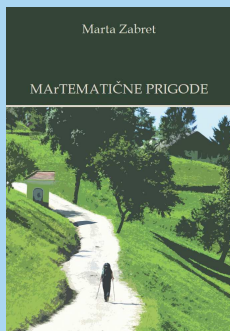


SLIKA 3. Graf prikazuje odbojni spekter asteroida (354) Eleonora. Najina meritev (vijolične točke) primerjava s spektrom, izračunanim iz podatkov satelita Gaia. Spektra sta normalizirana pri valovni dolžini 550 nm.

× × ×

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbe Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo. V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

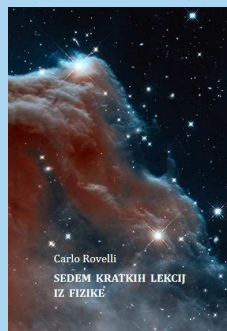


Marta Zabret:

MATHEMATICAL PROBLEMS

148 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ
IZ FIZIKE

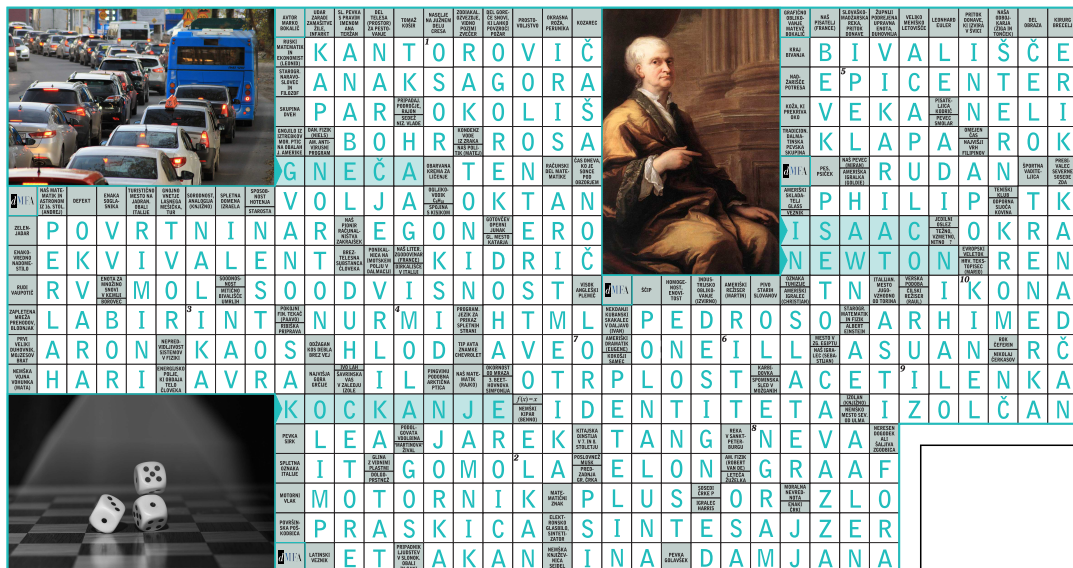
76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 51/2

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz druge
številke Preseka letnika
51 je **olimpionik**. Med
pravilnimi rešitvami
smo izžrebali naslednje
reševalce: Andrej Ura-
njek iz Velenja, Marija
Jakopin iz Ljubljane in
Patricia Király iz Bre-
zovice pri Ljubljani, ki
bodo nagrade prejeli po
pošti.

Heron iz Aleksandrije, Josip Plemelj in skoraj pravilni sedemkotnik



BOŠTJAN KUZMAN

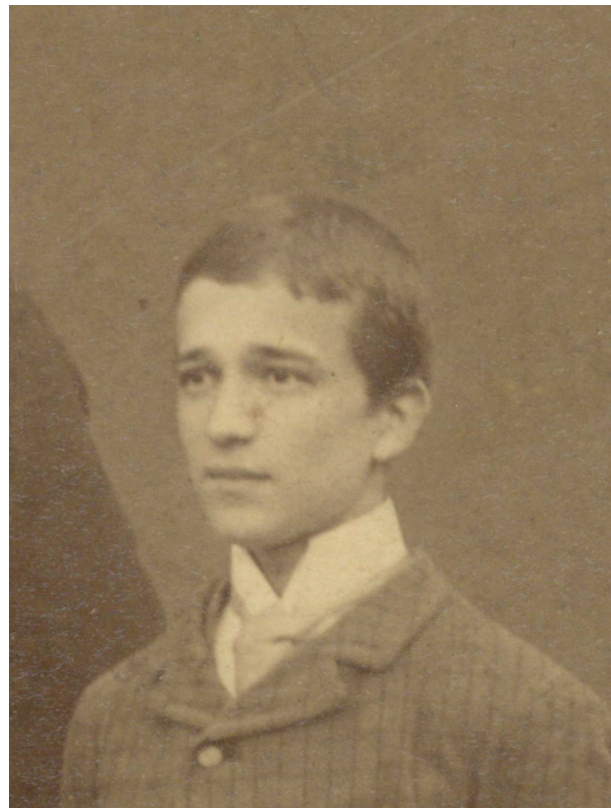
→ Geometrijske konstrukcije z ravnilom in šestilom so antičnim geometrom predstavljale matematični ideal. Znali so konstruirati pravilni 3-, 4- in 5-kotnik in že dobljenim likom še podvojiti število stranic, s čimer so lahko konstruirali tudi pravilne 6-, 8-, 10-, 12- in druge mnogokotnike. Konstrukcije pravilnega 7-kotnika pa v antiki seveda niso odkrili, saj danes vemo, da taka konstrukcija sploh ne obstaja¹. V tokratnem kotičku si bomo zato ogledali dve konstrukciji skoraj pravilnega 7-kotnika. Prvo je opisal znameniti Heron iz Aleksandrije v 1. stoletju, drugo pa je leta 1892 še kot nadarjeni gimnazijec odkril tedaj 19-letni Josip Plemelj.

Heronova konstrukcija

Konstrukcijo skoraj pravilnega 7-kotnika z včrtavanjem v dano krožnico je prvi opisal Heron v svojem delu Metrica, a so jo antični geometri verjetno poznali že mnogo prej. Pri različnih likovnih izdelkih so jo pogosto uporabljali tudi kasnejši obrtniki islamske dobe in renesančni slikarji, saj je dovolj natančna in precej preprosta za uporabo.

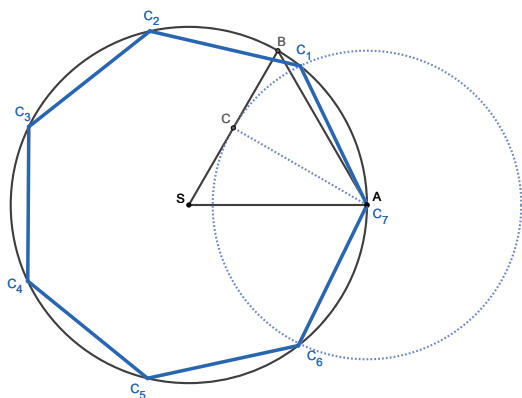
¹Šele konec 18. stoletja je znameniti nemški matematik Gauss s pomočjo zahtevnih orodij teorije števil dokazal, da je mogoče konstruirati vse pravilne n -kotnike, za katere je $n = 2^m p_1 \dots p_k$, kjer je $m, k \geq 0$ in so $p_1, \dots, p_k$ različna praštevila oblike $2^{2r} + 1$. Gauss je brez dokaza tudi zapisal, da drugih pravilnih n -kotnikov ni mogoče konstruirati, kar je prvi zares dokazal Pierre Wantzel leta 1839. V skladu z njunimi ugotovitvami je $n = 7$ najmanjše naravno število, za katerega konstrukcija pravilnega n -kotnika z ravnilom in šestilom ne obstaja.

Naj bo točka S središče krožnice s polmerom 1. Na krožnici izberemo poljubno točko A in s šestilom na krožnici označimo še točko B tako, da bo trikotnik $\triangle SAB$ enakostraničen (slika 2). Označimo s C razpolovišče daljice SB , torej je daljica CA višina enakostraničnega trikotnika, ki je enaka $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oziroma približno 0,866025. Kot so opazili antični geometri, je ta dolžina zelo dober približek za stranico pravilnega



SLIKA 1.

Dijak Josip Plemelj okoli leta 1890 (izrez iz skupinske fotografije, vir [4])


SLIKA 2.

Pri Heronovi konstrukciji dolžino stranice 7-kotnika predstavlja višina enakostraničnega trikotnika $\triangle SAB$. Točki A in C_7 se ne ujemata povsem, zato je ena od stranic malce daljša od drugih.

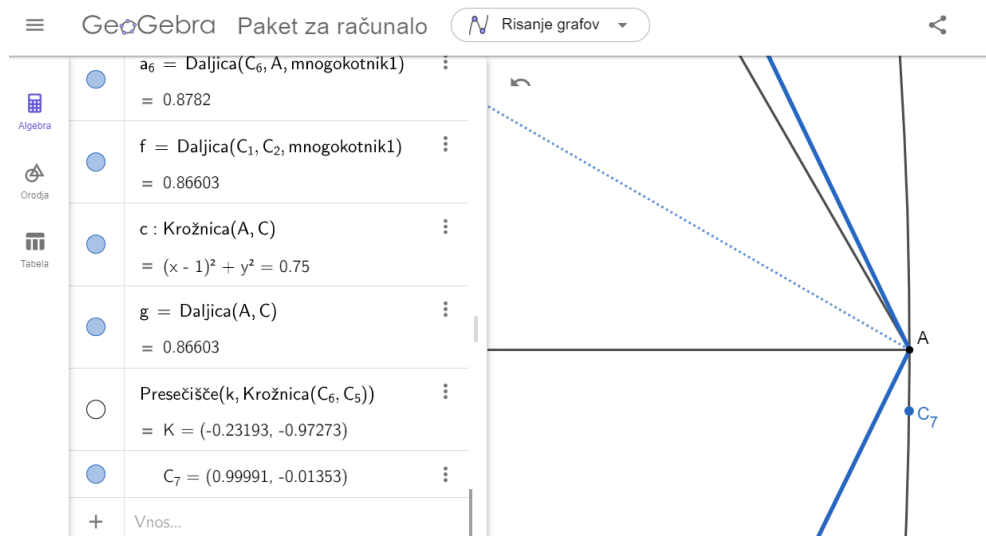
7-kotnika, ki ga včrtamo v narisano krožnico. Njeno točno vrednost namreč danes zlahka določimo s pomočjo kotnih funkcij: $a = 2 \sin \frac{\pi}{7} \doteq 0,867767$, kar znaša komaj 0,2 % več.

Da bi konstruirali skoraj pravilni sedemkotnik, lahko zdaj narišemo novo krožnico s središčem v A skozi točko C, ki seka začetno krožnico v točki C_1 . Nato razdaljo AC prenašamo naprej po krožnici in s šestilom iz točke C_1 konstruiramo še točke $C_2, \dots, C_7$. Zdi se, da je zadnja točka C_7 enaka točki A, toda

to ni res. Dobljene točke lahko zapored povežemo v 7-kotnik, ki ni povsem pravilen, saj je zadnja stranica C_7C_1 malce daljša od drugih.

Z GeoGebro lahko Heronovo konstrukcijo ponazorimo z naslednjimi koraki:

- Na prazni risalni površini označimo točki $S=(0,0)$ in $A=(1,0)$ ter narišemo krožnico k s središčem S skozi točko A. To lahko naredimo v algebrskem oknu z ukazom $k=\text{Krožnica}(S,A)$.
- Za točko B izberemo eno od dveh presečišč krožnice k s krožnico $\text{Krožnica}(A,S)$. Točko po potrebi preimenujemo.
- Z ukazom $C=\text{Središče}(S,B)$ označimo razpolovišče daljice SB, nato narišemo daljico $a=\text{Daljica}(A,C)$. Njena dolžina predstavlja dolžino stranice približnega 7-kotnika.
- Zdaj s šestilom rišemo oglišča iskanega lika. Namesto klikanja z miško lahko objekte vnašamo tudi z ukazi. Z ukazom $\text{Presečišče}(k,\text{Krožnica}(A,a))$ dobimo dve presečišči začetne krožnice z novo krožnico s središčem v A in polmerom a .
- Enega od presečišč izberemo in preimenujemo v C_1 . Nato z ukazom $\text{Presečišče}(k,\text{Krožnica}(C_1,a))$ določimo naslednji dve presečišči in enega preimenujemo v C_2 . Isti postopek ponavljamo do oglišča C_7 .
- Oglišča $C_1, \dots, C_7$ povežemo z ukazom $\text{Mnogokotnik}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7)$.
- S povečevanjem slike si lahko ogledamo, za koliko se razlikujeta točki A in C_7 .


SLIKA 3.

Iz algebrskega okna v GeoGebri opazimo razlike med dolžinami stranic, šele velika povečava pa pokaže, da sta A in C_7 različni točki.

Plemljeva konstrukcija

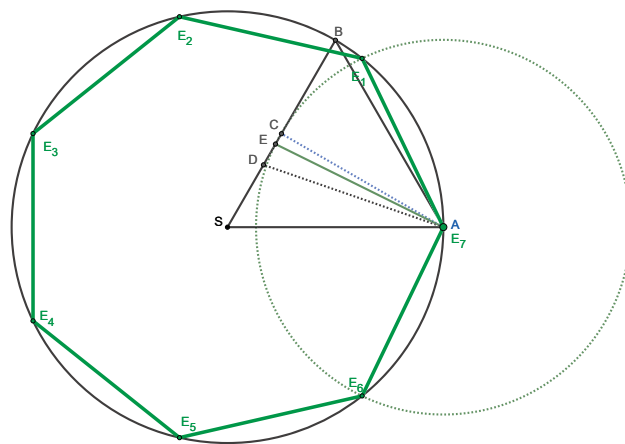
Josip Plemelj je svojo izvirno konstrukcijo (skoraj) pravega 7-kotnika odkril že kot dijak leta 1892, a je tedaj menil, da je takšna konstrukcija verjetno že znana. Ko slabih dvajset let kasneje ni našel omenjene v neki novejši knjigi o konstrukcijah, pa je svoje odkritje leta 1912 objavil v krajšem znanstvenem članku [2]. Plemelj je celo dokazal, da je mogoče pravilni 7-kotnik konstruirati povsem točno, če lahko poleg ravnila in šestila uporabimo še trisekcijo oziroma delitev kota na tri enake dele, kar samo z ravnilom in šestilom ni mogoče. Če pa se trisekcija kota zamenja z delitvijo daljice na 3 enake dele, bomo dobili približno konstrukcijo, ki je precej natančnejša od Heronove.

Naj bo točka S središče krožnice s polmerom 1. Kot pri Heronovi konstrukciji na krožnici izberemo poljubno točko A in s šestilom na krožnici označimo še točko B tako, da bo trikotnik $\triangle SAB$ enakostraničen. Zdaj označimo s C razpolovišče daljice SB , točka D pa naj daljico SB razdeli v razmerju $SD : DB = 1 : 2$. Dodajmo še točko E , ki naj tretjini daljico CD , torej jo razdeli v razmerju $CE : ED = 1 : 2$. Dolžina daljice AE predstavlja odličen približek za stranico pravega sedemkotnika.² S pomočjo kosinusnega izreka v trikotniku $\triangle SAE$ lahko namreč preverimo, da je dolžina stranice AE enaka $\sqrt{\frac{61}{81}} \doteq 0,867805$, kar točno dolžino stranice pravega 7-kotnika presega le za 0,004%. Zdaj podobno kot pri Heronovi metodi narišemo krožnico s središčem v A skozi točko E , ki seka začetno krožnico v točki E_1 in nato s prenašanjem po krožnici konstruiramo še točke $E_2, E_3, \dots, E_7$, ki jih povežemo v skoraj pravi 7-kotnik (slika 4).

Plemljeva konstrukcija v GeoGebri je podobna kot Heronova:

- Točke S, A, B, C in krožnico k narišemo enako kot prej.
- Točki D in E lahko v GeoGebri direktno vnesemo z ukazoma $D=S+(B-S)/3$ in $E=D+2(C-D)/3$, kar nam prihrani razdeljevanje daljice z ravnilom in šestilom.

²Kot je dokazal Plemelj, bi povsem točno konstrukcijo dobili, če bi točka E namesto daljice CD tretjinila kot $\angle CAD$.



SLIKA 4.

Pri Plemljevi približni konstrukciji dolžino stranice 7-kotnika predstavlja dolžina daljice AE , kjer točka E tretjini daljico CD in predstavlja $1/18$ polmera kroga.

- Zdaj označimo $b = \text{Daljica}(A, E)$ in s pomočjo krožnic s polmerom b označimo vsa oglišča iskanega 7-kotnika.

Bralce in bralke vabimo, da poskusijo še sami izračunati dolžine stranic 7-kotnika iz natančne ter približnih Heronove in Plemljeve konstrukcije. Več o tem, kako s pomočjo trisekcije kota konstruirati točen pravi 7-kotnik, zakaj 7-kotnika ni mogoče točno konstruirati samo z ravnilom in šestilom, in kakšne posplošitve Plemljeve konstrukcije so kasneje prispevali še drugi matematiki pa si lahko preberete v nekoliko zahtevnejšem članku [1].

Literatura

- [1] Milan Hladnik, *Josip Plemelj in pravilni sedemkotnik*, Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 60, številka 5 (2013), 161–172.
- [2] Josip Plemelj, *Die Siebenteilung des Kreises*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 23 (1912), 309–311.
- [3] Ivan Vidav, *Josip Plemelj ob 100-letnici rojstva*, DMFA SR Slovenije, 1975.
- [4] Arhiv RS, fond SI AS 2012 Plemelj Josip, 1873–1992.

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.