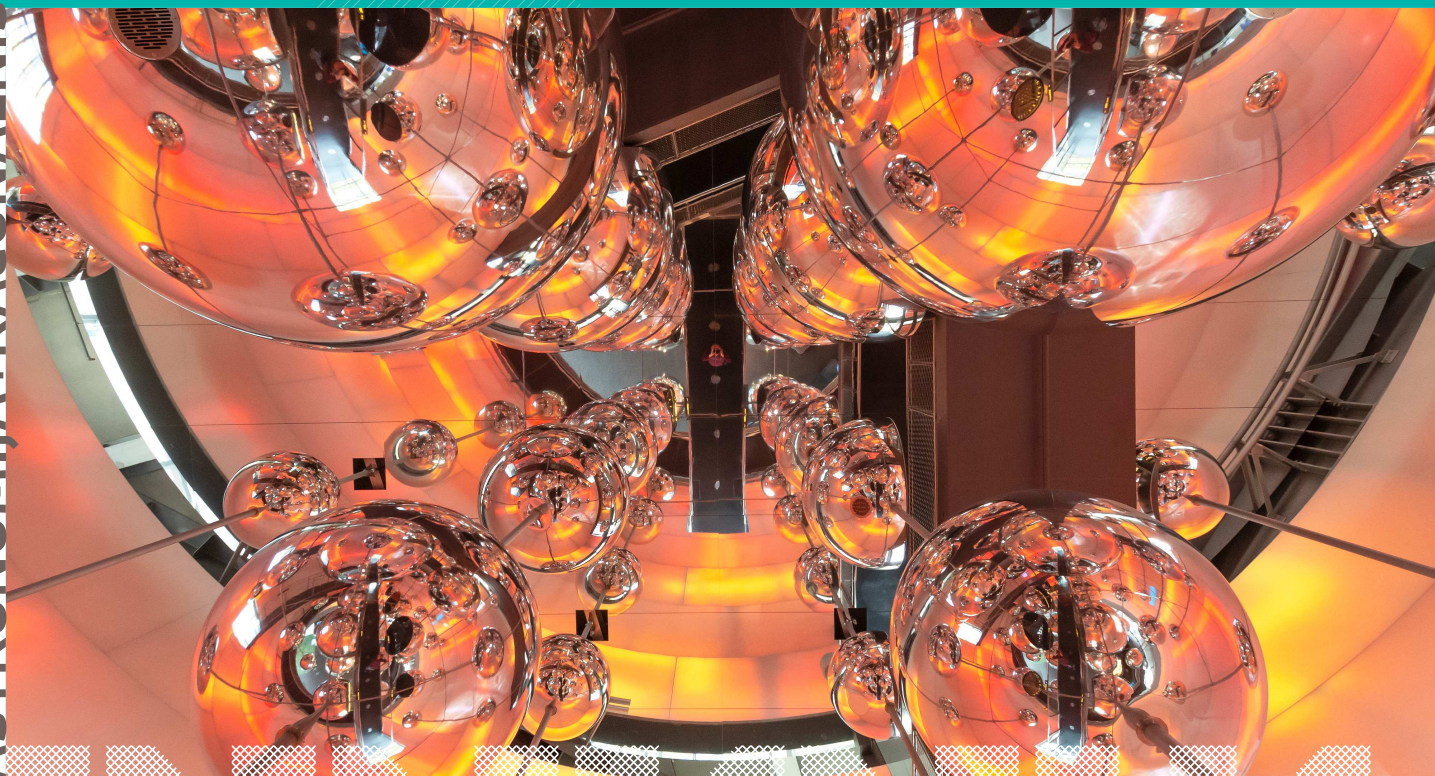




PRESEK LETNIK 50 (2022/2023) ŠTEVILKA 6

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

6



- ROČNO KORENENJE
- ŽARNICE IN STEFANOV ZAKON
- SFERNA TRIGONOMETRIJA IN
ČAS V ASTRONOMIJI
- FITTSOV ZAKON

ISSN 0351-6652



9 770351 665067

Nagrada strokovnjaku za parcialne diferencialne enačbe

↓↓↓

→ Abelova nagrada je ena izmed najprestižnejših mednarodnih nagrad za dosežke na področju matematike. Podeljuje jo Norveška akademija znanosti in književnosti z namenom dati priznanje prelomnim znanstvenim dosežkom v matematiki in njihovim avtorjem, povečati širši ugled matematike in spodbuditi zanimanje zanjo tudi med mladimi.

Letošnjo Abelovo nagrado je prejel argentinsko-ameriški matematik **Luis Caffarelli (rojen 1948)** za svoje delo na področju parcialnih diferencialnih enačb (PDE). S takimi enačbami pogosto opisujemo delovanje in učinek različnih sil v naravi v odvisnosti od kraja in časa – tipičen primer njihove praktične uporabe je recimo napovedovanje vremena s pomočjo matematičnih modelov. Na učinek različnih sil običajno vpliva tudi geometrija okolice. Obnašanje plina, ki teče skozi cev, je denimo močno odvisno od oblike cevi: ožja cev povzroči hitrejši tok plina, ovire v cevi pa vrtinčaste tokove. Caffarelli je v svojih delih obravnaval številne probleme s prostim robom, pri katerih je rob območja spremenljiv: pri raztapljanju ledene kocke v vodi se rob kocke ves čas spreminja, prav tako se spreminja oblika teniške žogice med odbojem na podlagi in podobno. Njegove rešitve so po besedah komisije kombinacija izjemnega geometričnega vpogleda in globokih analitičnih orodij.

Prispeval je tudi k razumevanju znamenite Navier-Stokesove enačbe, ki opisuje gibanje tekočin, katere rešitev pa še ne razumemo povsem natančno. Problem obstoja in gladkosti rešitve Navier-Stokesove enačbe v treh dimenzijah je denimo eden izmed sedmih milenijskih problemov, za katere je Clayev matematični inštitut iz ZDA razpisal nagrado 1 milijon dolarjev. Omenjeni problem v zelo poenostavljeni razlagi sprašuje, ali je mogoče matematično izpeljati zgornjo mejo za hitrost tornadov. Morda bo to uspelo komu od nove generacije mladih znanstvenikov in znanstvenikov.

Po informacijah s spletne strani abelprize.no povzel in priredil Boštjan Kuzman. × × ×

KOLOFON



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 50, šolsko leto 2022/2023, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2022/2023 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2023 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2167

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2** Nagrada strokovnjaku za parcialne
diferencialne enačbe

UVODNIK

- 4** Nasvidenje prihodnje leto
(Boštjan Kuzman)

MATEMATIKA

- 5-8** Ročno korenjenje
(Vid Kavčič)

FIZIKA

- 12-15** Žarnice in Stefanov zakon
(Simon Čopar in Jošt Stergar)

ASTRONOMIJA

- 18-23** Sferna trigonometrija in čas v astronomiji
(Vid Kavčič)

RAČUNALNIŠTVO

- 24-27** Fittsov zakon
(Matjaž Kljun)

RAZVEDRILO

- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 27** Rešitev nagradne križanke Presek 50/5
(Marko Bokalič)
- 28-31** Izbrane slike in fotografije v petdesetih
letih Preseka – nadaljevanje in konec
(Nada Razpet, Marko Razpet in Andrej Likar)
- 32** Bilo je nekoč v reviji Presek –
Plemljeva spominska soba na Bledu

TEKMOVANJA

- 8-11** EDMO 2023
(Ana Meta Dolinar in Luka Horjak)
- priloga** Tekmovanje v znanju fizike za zlato
Stefanovo priznanje – državno tekmovanje
- priloga** 32. tekmovanje iz razvedrilne matematike –
državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Fuzija znanosti in umetnosti? Primer
dobre prakse iz predstavitvenega salona jeklarne voestalpine
v avstrijskem Linzu. Fotografija: Andrej Guštin

Nasvidenje prihodnje leto



BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

→ Izteka se še eno šolsko leto. Maturantje v teh dneh opravljajo maturo, državna tekmovanja iz znanja so zaključena. Počitnic se veselimo vsi, učenci, dijaki, učitelji in profesorji. Večinoma so že izbrane tudi ekipe za mednarodna tekmovanja iz matematike, fizike, astronomije, ekonomije, naravoslovja in morda še kakšnega pod okriljem društva DMFA Slovenije. Nekaj najbolj uspešnih tekmovalk in tekmovalcev se bo tako še velik del poletja srečevalo na pripravah in potovanjih, pa tudi veliko drugih bo preživelo vsaj del počitnic na kakšnem raziskovalnem taboru ali poletni šoli s teh področij, ki jih je v Sloveniji na voljo precej. Lepo je videti, da imajo mladi na voljo tovrstne aktivnosti in da se jih tudi z veseljem in zadovoljstvom udeležujejo.

Do jeseni pa bo vsak od nas zagotovo vsaj malo razmišljal tudi o prihodnosti. Sam precej razmišljam o prihodnosti matematičnega izobraževanja v svetu, v katerem matematika postaja, vsaj na videz, vse bolj skrita in nepotrebna. Blagajna v trgovini sama prebere črtne kode in seštevja zneske, fotografski algoritmi sami optimalno popravljajo fotografije, spletni prevajalniki ponujajo povsem sprejemljive prevode krajših besedil v slovenščino, aplikacije na mobilnikih same prepoznajo matematične izraze in enačbe in jih rešijo z natančno izpisanimi koraki (lahko tudi na več načinov) in ne nazadnje, AI-boti, z umetno inteligenco podprti klepetalniki, postajajo resna grožnja tistim, ki se ukvarjajo s kreativnim pisanjem (ali pa profesorjem, ki želijo ocenjevati pisne izdelke svojih učencev).

Ali je v današnjem svetu res pomembno, da zna osnovnošolec z ravnilom in šestilom konstruirati simetralo daljice, pisno deliti štirimestno število z dvomestnim ali dokazati, da je kvadratni koren iz

2 iracionalno število? Marsikomu se to res ne zdi več pomembno, toda dokler smo živi, moramo ohraniti radovednost. V tokratni številki denimo objavljamo prispevek o ročnem korenjenju, pozabljeni spretnosti, ki je bila nekoč del osnovnošolskega pouka, avtor prispevka pa je kot srednješolec o tem napisal raziskovalno nalogo, ker ga je pač iskreno zanimalo, kako izračunati kvadratni koren brez kalkulatorja. Verjamem, da imamo tako radovednih mladih še precej. Ponuditi pa jim je treba ustrezne izzive in spodbudo. Morda nam to uspe v tej reviji vsaj še nekaj let.



SLIKA 1.

Udeleženci tabora MaRS 2022 študirajo linearno regresijo.



www.dmfa.si

Ročno korenjenje

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ Danes v šoli kvadratne korene števil večinoma računamo s pomočjo žepnih računal, včasih pa so se že v osnovni šoli učili določiti kvadratni koren ročno po posebnem postopku, ki ga lahko najdemo v starih učbenikih, uporabljal pa ga je tudi tudi Napierov mehanski računski stroj v 17. stoletju. V članku bomo ta postopek predstavili in utemeljili, hkrati pa bomo nakazali njegove posplošitve in ga primerjali z drugimi metodami za korenjenje.

Predstavitev algoritma za računanje kvadratnega korena

Algoritem za ročno korenjenje bomo najprej prikazali na konkretnem primeru števila 189225.

- Številko razdelimo na tri razdelke po dve števki: 18|92|25. Najprej določimo največje naravno število, katerega kvadrat je manjši ali enak najbolj levemu razdelku. To je jasno število 4, saj je $4^2 \leq 18$. Desno od enačaja zapišemo 4, pod prvi razdelek pa vrednost $4^2 = 16$, ki jo odštejemo in pod črto zapišemo ostanek 2, ki mu pripišemo naslednji razdelek.

$$\sqrt{18|92|25} = 4$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \end{array}$$

- Dobljeno število je 292, dvakratnik dosedanjega rezultata pa $2 \cdot 4 = 8$. Zdaj s poskušanjem določimo največjo števko, ki jo lahko zapišemo na črtici, da velja neenakost $292 \geq 8 \cdot \underline{\quad}$. Z nekaj računanja ugotovimo, da je $292 \geq 83 \cdot 3 = 249$ in $292 < 84 \cdot 4 = 336$, torej je iskana števka 3, ki jo napišemo na črtici in še pri novem vmesnem rezultatu 43. Vrednost 249 odštejemo od 292 in dobljenemu ostanku 43 pripišemo naslednji raz-

delek 25, da dobimo 4325.

$$\sqrt{18|92|25} = 43$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \geq 83 \cdot 3 \\ 2 \ 49 \\ 43 \ 25 \end{array}$$

- Zdaj ponovimo prejšnji korak. Dvakratnik dosedanjega rezultata je $2 \cdot 43 = 86$. Na črtici zapišemo največjo števko, za katero velja $4325 \geq 86 \cdot \underline{\quad}$. Tokrat je to števka 5, saj je $865 \cdot 5 = 4325 \leq 4325$. Števko 5 dodamo tudi v vmesni rezultat, da dobimo 435. Ker velja $865 \cdot 5 = 4325$, dobimo pri odštevanju ostanek 0, kar pomeni, da smo s korenjenjem zaključili. Končni rezultat je torej 435.

$$\sqrt{18|92|25} = 435$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \geq 83 \cdot 3 \\ 2 \ 49 \\ 43 \ 25 \geq 865 \cdot 5 \\ 43 \ 25 \\ 0 \end{array}$$

Kvadratni koren decimalnega števila določimo podobno, le z nekaj izjemami. Korenjenec razdelimo na razdelke po dve števki od decimalne vejice proti levi in proti desni. Preden obravnavamo prvi razdelek desno od vejice, v rezultat za enačaj postavimo decimalno vejico. Če ima razdelek na skrajni desni le eno števko, mu pripišemo še števko 0. Poglejmo si ta postopek na primeru števila 1,5129.

$$\sqrt{1,51|29} = 1,23$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \ 51 \geq 22 \cdot 2 \\ 44 \\ 7 \ 29 \geq 243 \cdot 3 \\ 7 \ 29 \\ 0 \end{array}$$

Ker smo dobili ostanek 0, je algoritem končan. Iskani rezultat je 1,23, kar je natanko kvadratni koren števila 1,5129.

Postopek lahko strnjeno predstavimo s koraki:





- Število razdelimo na razdelke po dve števki, od decimalne vejice levo in desno. Najbolj levi razdelek je v primeru lihega števila števk enomesten. Če je potrebno, decimalna števila z ničlo dopolnimo tako, da ima sodo decimalalk.
- Poiščemo največje enomestno število, katerega kvadrat je manjši ali enak številu v prvem razdelku. To je prva števka korena. Njen kvadrat odštejemo od števila v prvem razdelku ter ostanku pripišemo drugi razdelek. Dobljenemu številu bomo rekli zahtevek.
- Poiščemo največjo tako števko, ki je lahko dopisana dvakratniku dosedanjega rezultata, da bo dobljeno število, pomnoženo s to isto števko, manjše ali enako zahtevku. Dobljeno števko zapišemo za enačaj kot drugo števko rezultata. To števko pomnožimo s številom, ki ima to isto števko pripisano, dobljeni rezultat pa odštejemo od zahtevka in dobimo nov ostanek.
- Novemu ostanku pripišemo števki v naslednjem razdelku in postopek nadaljujemo.
- Če porabimo vse razdelke in v zadnjem koraku dobimo ostanek 0, smo izračunali točno vrednost korena začetnega števila. V nasprotnem primeru pa lahko postopek nadaljujemo do zelene natančnosti, tako da zadnjemu ostanku in vsem naslednjim pripisujemo po dve ničli, ki nam določata dodatno mesto v rezultatu.

Utemeljitev algoritma

Za utemeljitev algoritma definirajmo posplošeni desetiški sestav. Vsako naravno število $N \in \mathbb{N}$ lahko v *posplošenem desetiškem sestavu* izrazimo kot

$$\begin{aligned} N &= \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} \\ &= 10^{n-1} \cdot a_1 + 10^{n-2} \cdot a_2 + \dots + 10^1 \cdot a_{n-1} + \\ &\quad 10^0 \cdot a_n, \end{aligned}$$

kjer velja $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Posplošeni desetiški sestav se torej od običajnega razlikuje v tem, da lahko za števke vzamemo poljubna naravna števila (vključno z 0), ne pa le cela števila od 0 do 9. Seveda tak sestav ne omogoča enoličnega zapisa števila, vendar ga bomo pri samem dokazu potrebovali.

Poskusimo algoritem najprej utemeljiti na primeru korenjenja kvadrata dvomestnega naravne-

ga števila $\overline{x_1 x_2}$:

$$\begin{aligned} (\overline{x_1 x_2})^2 &= (10x_1 + x_2)^2 = 100x_1^2 + 20x_1x_2 + x_2^2, \\ &= 100x_1^2 + x_2 \cdot (20x_1 + x_2), \\ &= 100x_1^2 + x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2}. \end{aligned}$$

Zadnji izraz razjasni algoritem, ki v tem primeru sestoji iz dveh faz. V prvi fazi je treba poiskati enolično določeno števko x_1 , ki predstavlja desetice rezultata korena. Nadalje je treba določiti enice, tj. števko x_2 , ki nastopa v drugem členu izraza, s katerim smo zapisali korenjenec, torej v $x_2 \cdot (20x_1 + x_2) = x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2}$. Zapis desno od enačaja utemeljuje postopanje iz algoritma; to, kar imamo v dozdajšnjem rezultatu (v tem primeru je to x_1), množimo z 2, potem pa iščemo tako števko x_2 , ki jo moramo dopisati števki $2x_1$, da bo dobljeno število, pomnoženo s to isto števko x_2 , dalo število, ki bo zajelo ostanek, ki ga nismo zajeli s prvim členom, tj. $100x_1^2$.

Utemeljitev algoritma zdaj posplošimo na korenjenje kvadrata n -mestnega števila. V tem primeru se bomo sklicali na naslednjo enakost, ki velja za poljubna realna števila in jo lahko bralci preverijo s pomočjo matematične indukcije:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 2x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j. \end{aligned}$$

S pomočjo zgornje enakosti lahko kvadrat poljubnega naravnega števila preoblikujemo v naslednji zapis.

Izrek 1. (Enakost za ročno korenjenje) Naj bo $\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n}$ poljubno naravno število, zapisano s števki v desetiškem sestavu, kjer velja $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ in $x_1 \neq 0$. Potem velja

$$\begin{aligned} (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n})^2 &= \\ &= 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2} + 10^{2n-6} x_3 \cdot \\ &\quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2})) x_3} + \dots + \\ &\quad + x_n \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1}})) x_n}. \end{aligned}$$

Dokaz. Levo stran izraza najprej preoblikujemo s pomočjo prejšnje enakosti:

$$\begin{aligned} & \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n})^2 \\ &= (10^{n-1} \cdot x_1 + 10^{n-2} \cdot x_2 + \dots + 10^1 \cdot x_{n-1} + x_n)^2 \\ &= 10^{2n-2} \cdot x_1^2 + 10^{2n-4} \cdot x_2^2 + \dots + 10^2 \cdot x_{n-1}^2 + \\ & \quad + x_n^2 + 2 \cdot 10^{2n-3} x_1 x_2 + 2 \cdot 10^{2n-4} x_1 x_3 + \dots + \\ & \quad + 2 \cdot 10^{n-1} x_1 x_n + 2 \cdot 10^{2n-5} x_2 x_3 + \\ & \quad + 2 \cdot 10^{2n-6} x_2 x_4 + \dots \\ & \quad + 2 \cdot 10^{n-2} x_2 x_n + \dots + 2 \cdot 10^1 x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

Sedaj moramo spretno združevati in izpostavljati. Člene združujemo tako, da izpostavimo enako desetiško potenco. Poleg tega v i -tem koraku združimo člene, ki vsebujejo $x_1, x_2, \dots, x_i$. Na ta način dobimo desno stran izraza, kot smo želeli.

$$\begin{aligned} & \cdot = 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot (20x_1 + x_2) + \\ & \quad + 10^{2n-6} x_3 \cdot (200x_1 + 20x_2 + x_3) + \dots + \\ & \quad + x_n \cdot (2 \cdot 10^{n-1} x_1 + 2 \cdot 10^{n-2} x_2 + \dots + \\ & \quad + 2 \cdot 10 \cdot x_{n-1} + x_n) \\ &= 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2} + 10^{2n-6} x_3 \cdot \\ & \quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2})) x_3} + \dots + x_n \cdot \\ & \quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1}})) x_n}. \end{aligned}$$

Iz dokazane trditve zdaj neposredno sledi pravilnost algoritma za korenjenje naravnih števil, ki so popolni kvadrati. Ta algoritem lahko posplošimo na algoritem za korenjenje realnih števil, katerih koren ima končen decimalni zapis. Tako decimalno število D pomnožimo z desetiško potenco 10^{2k} za dovolj velik $k \in \mathbb{N}$, da dobimo naravno število N , ki ga že znamo koreniti. Da dobimo koren prvotnega decimalnega števila, torej $\sqrt{D}$, moramo $\sqrt{N}$ le še deliti z 10^k . S tem smo utemeljili postopek za korenjenje decimalnih števil, opisan na začetku članka.

Pozorni bralec je seveda opazil, da s tem nismo utemeljili njegove pravilnosti tudi za iskanje približkov kvadratnih korenov tistih števil, katerih koreni nimajo končnega decimalnega zapisa.

Kot zanimivost povejmo, da lahko na podoben način izpeljemo tudi algoritem za kubične ali višje korene. Postopek za kubični koren je denimo predstavljen tudi v Močnikovih učbenikih, algoritmi za ko-

rene višjih stopenj pa so za praktično rabo prezahtevni.

Zaključek

Poleg opisanega algoritma obstaja še precej drugih metod za računanje (približkov) korenov števil. V dobi brez žepnih računal so imele veliko vlogo (Vegove) *logaritemske tablice*. Z njimi si lahko pomagamo tudi pri iskanju približka n -tega korena danega števila s pomočjo obrazca $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$, pri čemer vrednost $\ln a$ razberemo iz logaritemskih tabel.

Poleg metode z *neskončnimi verižnimi ulomki* in *Taylorjevega razvoja* je zanimiva tudi *Newtonova numerična metoda*. Slednja sloni na iskanju ničel funkcije in temelji na odvodih, torej vsebini iz višje matematike. Če iščemo ničle funkcije $f(x) = x^2 - a$, v resnici korenimo število a . Ta primer Newtonove numerične metode se imenuje Babilonska metoda, tudi Heronova metoda, saj jo je grški matematik Heron v svojem delu *Metrika* objavil že v prvem stoletju našega štetja.

Pri metodi najprej ugibamo vrednost korena x_0 . Natančnejšo vrednost korena dobimo iz izraza:

$$\cdot x_{i+1} \equiv \frac{\frac{a}{x_i} + x_i}{2}.$$

Dobljen približek nato ponovno vstavimo v zgornjo enačbo, da dobimo še boljšega, in tako naprej do iskane natančnosti.

Zgoraj navedene metode korenjenja so bodisi matematično zahtevnejše, saj temeljijo na vsebinah iz višje matematike (neskončne vrste, limite, odvodi), bodisi podajo zgolj približek. Algoritem, obravnavan v članku, pa operacijo korenjenja zreducira na osnovni operaciji množenja in odštevanja, hkrati pa je vsaka številka, ki jo na podlagi algoritma dobimo, točna. Zavedati pa se moramo, da je algoritem v primerjavi z npr. Taylorjevim razvojem ali numeričnimi metodami počasnejši, zato sta slednji ustreznejši za sodobna računalna.

Naj zaključim, da je prispevek nastal na osnovi raziskovalne naloge z naslovom Ročno korenjenje, ki sem jo v šolskem letu 2019/20 napisal pod mentorstvom mojega nekdanjega profesorja matematike Tilna Šetine, ki je s svojimi nasveti in predlogi pripomogel tudi pri nastajanju tega članka.





Naloge bralcu

1. Ročno koreni:

(a) $\sqrt{2989441}$

(b) $\sqrt{9,8596}$

(c) $\sqrt[8]{5764801}$

2. Poišči prvih 5 decimalnih mest $\sqrt{2}$.

3. Dana števila zapiši v običajnem desetiškem stavu.

(a) $\overline{1(23)4(56)7(89)}$

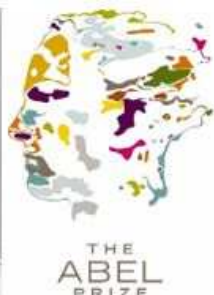
(b) $\overline{(123)(45)(6789)}$

(c) $\overline{(12)345(67)89}$

Literatura

- [1] »Ručno« izračunavanje kvadratnog korena, dostopno na <http://forum.matemarija.com/viewtopic.php?f=46&t=317>, ogled 19. 5. 2023.
- [2] *Methods of computing square roots*, dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots, ogled 19. 5. 2023.
- [3] F. Močnik, *Aritmetika za učiteljska*, Kleinmayr & Bamberg, Ljubljana, 1885.

× × ×



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

EDMO 2023

↓↓↓

ANA META DOLINAR IN LUKA HORJAK

→ V Portorožu je od 13. do 19. aprila 2023 potekala 12. Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO). Na tekmovanju je sodelovalo 213 tekmovalk iz 54 držav (do 4 najboljša srednješolska dekleta iz vsake države). Vključno z vodji ekip, koordinatorji (ocenjevalci), prostovoljci, organizatorji ipd. je bilo udeležencev dogodka 504. To je bil največji tovrstni dogodek v Sloveniji od leta 2006 naprej, ko smo v naši državi gostili Mednarodno matematično olimpijado.

Organizacija, potek

Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO) je namenjena spodbudi deklet k pripravi in udeležbi na matematičnih tekmovanjih, saj je razmerje spolov na drugih tekmovanjih zelo neuravnoteženo – deklet je na olimpijadah, kot je Mednarodna matematična olimpijada, le okoli 10 %. EDMO dekletom da motivacijo za pripravo na tekmovanja na višji ravni ter služi kot dogodek, kjer si lahko dokažejo, da so sposobne reševanja olimpijskih nalog. Poleg tega olimpijada tudi pripomore k ustvarjanju prijateljstev med dekleti s podobnimi interesi, kar dekletom, ki na svoji šoli med ljubitelji matematike morda vidijo le fante, pokaže, da niso edine s tem hobijem. Poleg tega pa lahko na EDMO dekleta spoznajo tudi uspešne matematičarke, ki jim lahko služijo kot vzornice.

Slovenija na EDMO sodeluje vsako leto od leta 2013. V teh letih je Slovenijo zastopalo 28 deklet, nekatera celo trikrat ali štirikrat.

Letos je EDMO organizirala Slovenija pod okriljem DMFA Slovenije.

Dogodek je bil organiziran v Portorožu, podprli pa so ga tudi predsednica RS dr. Nataše Pirc Musar, Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje, Ministrstvo za delo, družino, socialne zadeve in enake možnosti, ter univerze – Univerza na Primorskem, Univerza v Ljubljani in Univerza v Mariboru.

V organizacijskem odboru tekmovanja pod vodstvom Lucijane Kračun Berc so bili Gregor Dolinar, Klavdija Kutnar, Ana Meta Dolinar, Ciril Dominko, Tanja Labus, Sanja Sandič, Doris Keršič, Sandra Cigula, Mateja Grašič in Špela Kumer.

Za izvedbo tekmovalnega dela so poskrbeli Klemen Šivic (predsednik komisije za izbor nalog), Luka Horjak (vodja koordinacije), Brigita Mastnak (glavna nadzornica) ter Ana Meta Dolinar (predsednica žirije).

Eden izmed dogodkov v okviru tekmovanja je bila tudi okrogla miza – Uspešne ženske, pri kateri so svoje izkušnje predstavile prof. dr. Nežka Mramor Kosta, matematičarka na Univerzi v Ljubljani, prof. dr. Dunja Mladenčič, vodja Odseka za umetno inteligenco na Institutu Jožefa Stefana, Rosana Kolar, letalska mehaničarka v Adria Tehniki, in prof. dr. Maryna Viazovska, prejemnica Fieldsove medalje 2022. Tekmovalke so v govorkah gotovo lahko našle vzor in navdih.

Za vodje ekip je bila organizirana tudi delavnica Enakost, raznolikost, vključenost. Na njej so mentorji iz različnih držav, kultur, ozadij ter ver na podlagi primerov iz resničnega sveta razpravljali, kako se spopasti z delikatnimi situacijami ter kako zagotoviti, da bo okolje matematičnih tekmovanj prijazno do vseh.



SLIKA 1.

Skupinska slika tekmovalk na otvoritveni slovesnosti

Po tekmovanju so se dekleta udeležila različnih prostočasnih aktivnostih, od plesa in odbojke do ustvarjalnih in glasbenih delavnic. Na ekskurzijah v Ljubljano in Postojnsko jamo so spoznala slovenske turistične znamenitosti, veliko pa je bilo tudi priložnosti za druženje s tekmovalkami iz drugih držav.

Tekmovanje, dosežki slovenskih tekmovalk in rezultati

Kot država gostiteljica je Slovenija lahko poslala dve ekipi, torej 8 tekmovalk. Slovenijo so zastopale Katarina Grilj s SŠ Slovenska Bistrica, Kaja Rajter z II. gimnazije Maribor, Nives Gošnjak in Ema Hojan s ŠC Velenje, Gimnazija, Patricia Király, Zara Barbarić in Neca Camlek z Gimnazije Bežigrad ter Ekaterina Chizhova z Osnovne šole Trnovo, Ljubljana.

Ekipo so spremljali Jaka Vrhovnik, Lana Prijon in Jan Pantner.

Tekmovanje poteka v obliki individualnega reševanja nalog z različnih področij matematike – algebra, geometrija, kombinatorika in teorija števil. Tekmovalke dva zaporedna dni po 4 ure in pol rešujejo po tri naloge na dan, skupno 6 nalog, vsaka ocenjena z do 7 točkami. Tako je najvišje možno število doseženih točk 42.

Ocenjevanje nalog se izvede prek procesa koordinacije, kjer koordinatori (neodvisni strokovnjaki, ki jih izberejo organizatorji) z vodji ekip vsake države uskladijo število točk, ki so jih tekmovalke dosegle na posamezni nalogi.



SLIKA 2.

Tekmovalke pred začetkom tekmovanja



Ekipno je med evropskimi državami zmagala Ukrajina, absolutno pa Kitajska. 14 tekmovalk je doseglo vse točke in za popoln rezultat prejelo posebno nagrado. Skupno se je podelilo 119 medalj (26 zlatih, 36 srebrnih in 57 bronastih) ter 42 pohval.

Slovenske tekmovalke so se na tekmovanju izvrstno odrezale. Katarina Grilj je prejela srebrno medaljo in s 47. mestom (32. med Evropejkami) osvojila najboljšo relativno uvrstitev v zgodovini slovenske udeležbe na EDMO. Poleg tega so Kaja Rajter, Neca Camlek in Ema Hojan prejele pohvalo za popolno rešitev naloge.

Vsem našim tekmovalkam čestitamo za dosežen uspeh!

Nalogi s tekmovanja

Da si bomo lažje predstavljali izzive, s katerimi so se soočale naše tekmovalke na tej olimpijadi, si oglejmo dve nalogi s tekmovanja in njuni rešitvi:

Naloga 2. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik in naj bo D taka točka na njegovi očrtani krožnici, da je AD premer. Recimo, da točki K in L zaporedoma ležita na straneh AB in AC ter da sta DK in DL tangenti na krožnico očrtano trikotniku AKL .

Dokaži, da premica KL poteka skozi višinsko točko trikotnika ABC .

Rešitev. Kot pri vsaki geometrijski nalogi si tudi tu najprej narišimo natančno skico.



SLIKA 3.

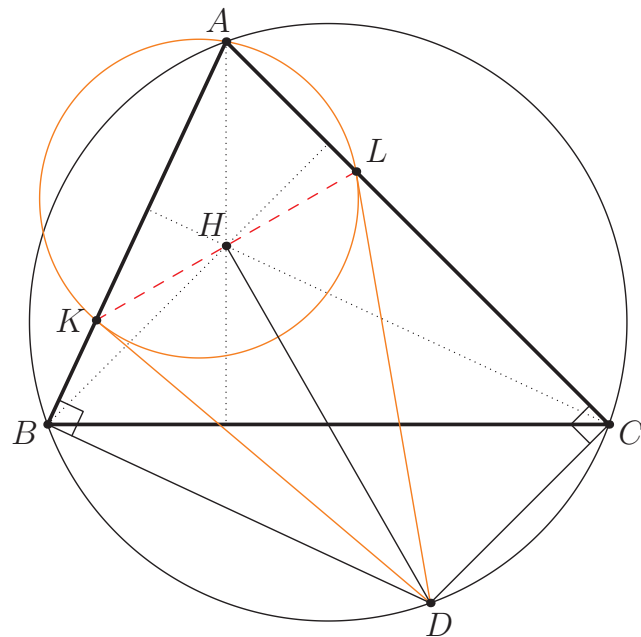
Tekmovalke s Katarininino srebrno medaljo in ekipno maskoto Kozo

Dobra intuicija nam pove, da bo višinska točka H najverjetneje kar razpolovišče daljice KL . V takih primerih je zelo dobra strategija ta, da označimo to razpolovišče z M in dokažemo, da leži na višinah trikotnika ABC . Pravzaprav je dovolj dokazati že $BM \perp AC$. Po enakem razmisleku bo namreč sledilo $CM \perp AB$, kar že implicira to, da je M višinska točka.

Oglejmo si trikotnik DKL . Ker sta DK in DL tangenti na krožnico očrtani trikotniku AKL , po izreku o kotu med tangento in tetivo dobimo $\angle DKL = \angle KAL = \angle KLD$. Od tod sledi, da je trikotnik DKL enakokrak, zato je $DM \perp KL$. Ker je DA premer krožnice, po Talesovem izreku sledi $\angle DBA = 90^\circ$. Po obratu Talesovega izreka tako sledi, da so točke B, D, M in K konciklične.

Naj bo točka X presečišče premic BM in AC . Oglejmo si kote v trikotniku ABX . Iz koncikličnosti točk B, D, M in K sledi, da je $\angle MBA = \angle MDK = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle BAX$. Tako dobimo, da je $\angle AXB = 90^\circ$, oziroma $BM \perp AC$. Premica BM je tako višina v trikotniku ABC , s tem pa je dokaz zaključen.

Naloga 5. Dano je naravno število $s \geq 2$. Za vsako



SLIKA 4.

Višinska točka leži na premici KL

naravno število k definiramo njegov zasuk k' na sledeč način: zapišemo k v obliki $as + b$, kjer sta a in b nenegativni celi števili in $b < s$; potem je $k' = bs + a$. Za naravno število n si oglejmo neskončno zaporedje $d_1, d_2, \dots$, kjer je $d_1 = n$ in je d_{i+1} zasuk števila d_i za vsako naravno število i .

Pokaži, da to zaporedje vsebuje število 1, natanko tedaj ko je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ bodisi 1 bodisi s .

Rešitev. Na prvi pogled se zdi, da je to zaporedje zelo enostavno – če je $n = as + b$, je tako $d_2 = bs + a$ in zato $d_3 = as + b = n$. Težava je v tem, da ne velja nujno $a < s$. Ko računamo zasuk števila d_2 , ga moramo tako najprej zapisati v obliki $a's + b'$, kjer je $b' < s$. Oglejmo si torej, kako delujejo večkratni zasuki.

Za neko naravno število k si oglejmo zasuk njegovega zasuk, torej $k'' = (k')'$. Če je $k = as + b$, kjer je $b < s$, sledi, da je $k' = bs + a$. Sedaj lahko po osnovnem izreku o deljenju zapišemo še $a = ps + q$, kjer je $0 \leq q < s$, in tako dobimo $k' = (p + b)s + q$.

Število k' smo s tem znova zapisali v želeno obliko, zato lahko izračunamo

$$\blacksquare k'' = qs + (p + b).$$

Tako lahko izračunamo razliko

$$\blacksquare k - k'' = as + b - qs - p - b = (a - q)s - p = p(s^2 - 1).$$

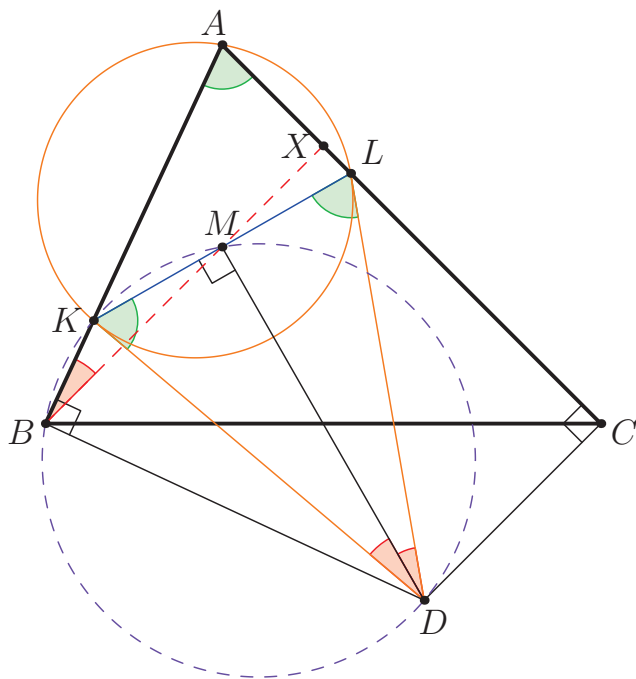
To nam pove veliko informacij o zaporedju $d_1, d_2, \dots$ – ker $s^2 - 1$ deli razliko $k - k''$ za vsak k , deli tudi $d_i - d_{i+2}$ za vsako naravno število i . Števila $d_1, d_3, d_5, \dots$ imajo tako vsa enak ostanek pri deljenju s $s^2 - 1$, enako pa velja za števila $d_2, d_4, d_6, \dots$.

Predpostavimo, da je eden izmed členov zaporedja $d_1, d_2, d_3, \dots$ enak 1 – naj bo to d_m . Če je m liho število, po zgornjem razmisleku sledi, da je ostanek števila $n = d_1$ pri deljenju s $s^2 - 1$ enak 1. Če pa je m sodo število, pa opazimo, da velja $1 = 0 \cdot s + 1$, zato sledi $d_{m+1} = 1' = 1 \cdot s + 0 = s$. Sledi, da je ostanek števila $n = d_1$ pri deljenju s $s^2 - 1$ enak s . V obeh primerih smo tako dokazali, da je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ enak 1 ali s .

Sedaj predpostavimo, da je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ enak 1 ali s . Najprej se vrnimo k enačbi $k - k'' = p(s^2 - 1)$. Opazimo lahko novo uporabno dejstvo – velja $k - k'' = p(s^2 - 1) \geq 0$. Tako lahko sklepamo, da sta zaporedji $d_1, d_3, d_5, \dots$ in $d_2, d_4, d_6, \dots$ padajoči. Še več, enakost $k = k''$ velja natanko v primeru $p = 0$, oziroma $a < s$, kar je ekvivalentno $k < s^2$.

Dokler so členi zaporedja $d_1, d_3, d_5, \dots$ večji ali enaki s^2 , je zaporedje tako strogo padajoče. Sklepamo lahko, da obstaja tako liho število m , da velja $d_m < s^2$. Spet ločimo dva primera – najprej predpostavimo, da je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ enak 1. Sledi, da je $d_m = 1$, saj je to edino število, ki da pri deljenju s $s^2 - 1$ ostanek 1 in je strogo manjše od s^2 . Če pa je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ enak s , po podobnem razmisleku dobimo $d_m = s$. Zaključek je sedaj preprost – velja namreč $d_{m+1} = d'_m = (1 \cdot s + 0)' = 1$, torej smo našli člen zaporedja, ki je enak 1.

× × ×



SLIKA 5.

Dovolj je pokazati, da je $BM \perp AC$

Žarnice in Stefanov zakon

↓↓↓

SIMON ČOPAR IN JOŠT STERGAR

→ Za fiziko zainteresiranim dijakom ne manjka izbire pri domačih in mednarodnih tekmovanjih, na katerih lahko svoje znanje in inovativnost postavijo na preizkušnjo. Med tovrstna tekmovanja spada tudi evropska fizikalna olimpijada, ki smo jo leta 2022 gostili prav doma, v Sloveniji. Organizacija je potekala pod okriljem DMFA Slovenije v sodelovanju s Fakulteto za matematiko in fiziko ter Pedagoško fakulteto Univerze v Ljubljani in s podporo ministrstva za šolstvo in Instituta »Jožef Stefan« (spletna stran dogodka: [1]). Takrat se je olimpijade udeležilo kar 182 dijakov iz 37 držav.

Teoretične naloge je priskrbel mednarodni znanstveni odbor, eksperimentalno nalogo, zasnovano okoli svetlobe in Stefanovega zakona, pa smo v celoti pripravili v Sloveniji. Razvoj naloge je trajal približno dve leti, čas praktičnega testiranja ter izbira in nabava opreme, pa sta zavzela približno devet mesecev. V tem prispevku avtorja predstavlja zasnovo eksperimentalne naloge in izzive pri njeni izvedbi ter pripravi.

S svetlobo se srečujemo vsakodnevno, pa naj bo pri izbiri in montaži svetil v bivalnih prostorih, v fotografiji, umetnosti, pri varnosti na cesti ali pri zaslonih elektronskih naprav. Ko so žarnice na žarilno nitko zamenjale varčne in kasneje LED-žarnice, so postale pomembne tudi razlike v barvi, ekonomičnosti razsvetljave in toplotnih učinkih svetlobe. Te lastnosti so tekmovalci v petih tekmovalnih urah te-



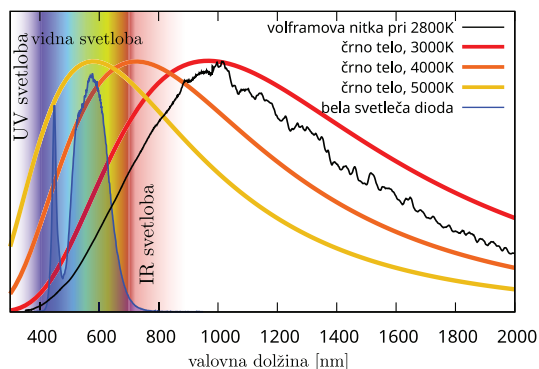
SLIKA 1.

Utrinek z olimpijade. Eksperiment se je izvajal v zatemnjeni telovadnici, da ni bilo motenj pri fotometričnih meritvah. Foto: Jan Šuntajs

meljito raziskali, zasnovati pa so morali tudi primeren postopek, ki jim je omogočal izvedbo kvantitativnih meritev. Pri svojem delu so uporabljali kombinacijo tako laboratorijskih pripomočkov, kot bolj vsakdanjih merilnih naprav. Natančneje, za izvedbo naloge so imeli na voljo nastavljivi laboratorijski napajalnik, ki lahko služi kot napetostni ali tokovni izvor, svetlomer in infrardeči termometer, spoznali pa so se tudi s fotometričnimi količinami. Posebnost eksperimentalne naloge na Evropski fizikalni olimpijadi je njena odprtost; tekmovalci so imeli na razpolago vso potrebno opremo, z vprašanji pa jim je bil podan končni cilj. Pot do rešitve, in njena dejanska izvedba, je bila pri nalogi skoraj v celoti na ramenih tekmovalca.



Avtorica stripa: Ana Marin

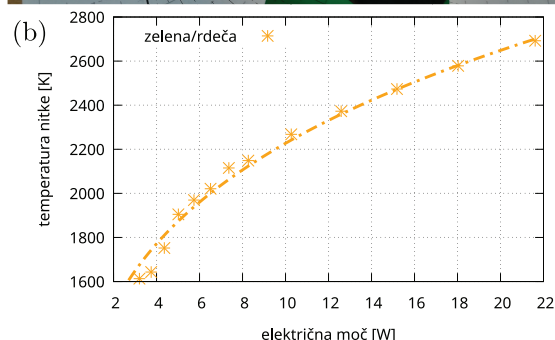
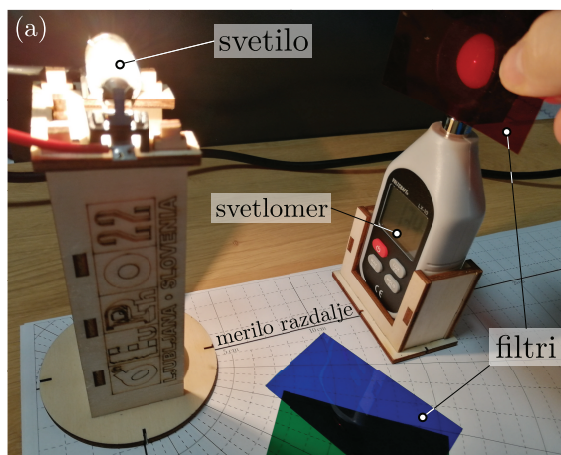


SLIKA 2.

Primerjava spektra svetleče diode (LED), spektra žarnice na volframovo nitko, in idealnih spektrov črnih teles pri treh temperaturah. Svetila, ki svetijo zaradi visoke temperature, oddajo veliko svetlobe v infrardečem območju.

Pri prvi izmed treh nalog so tekmovalci ugotavljali, kolikšno temperaturo doseže volframova žarilna nitka v avtomobilski žarnici. Žarilna nitka je prevroča in premajhna, da bi njeno temperaturo lahko direktno izmerili z infrardečim termometrom, ki je bil sicer del priložene opreme. Pot do rešitve leži v dejstvu, da žarilna nitka seva kot črno telo, njen spekter pa posledično sledi Planckovemu zakonu (glej sliko 2). Najbolj zastopana valovna dolžina se z višanjem temperature premika od rdečih in oranžnih proti modrim delom spektra, kar se odraža tudi v opaženi barvi telesa (pojav imenujemo tudi Wienov zakon). To lastnost svetlobe podajamo kot »barvno temperaturo«, ki je pogojena s temperaturo vročega svetila. Poskušajo jo oponašati tudi svetila, ki ne delujejo več na principu sevanja črnih teles, na primer varčne sijalke in LED-svetila.

Tekmovalci so temperaturo torej lahko določili na podlagi barve svetlobe. Podobno metodo uporabljajo tudi astronomi, ki temperaturo določajo iz barvnega indeksa. Slednjega smo za namen tekmovalne naloge priredili v razmerje svetlosti izmerjenih skozi dva izbrana barvna filtra. Za meritev svetlosti (natančneje, osvetljenosti v točki merilnika) so imeli tekmovalci na voljo svetlometer, ki meri osvetljenost v vidnem delu spektra, v enoti luks, ki je umerjena na človeški vid. S pomočjo priložene umeritvene tabele so tako lahko pretvorili dobljene barvne indekse v temperaturo, ki narašča z močjo žarnice tja do 2800 K (glej sliko 3).



SLIKA 3.

(a) Postavitev eksperimenta za meritev barve svetlobe. (b) Temperature nitke pri različnih električnih močeh, izračunane iz razmerja svetlosti skozi zelen in rdeč filter. Črtna črta je rezultat prilaganja podatkov Stefanovemu zakonu.

Druga naloga se je posvetila raziskovanju razlike v svetlobnem izkoristku med žarnicami na žarilno nitko in LED-sijalkami – koliko vidne svetlobe dobimo na enoto moči. Svetila na žarilno nitko veliko energije izgubijo z emisijo človeškim očem nevidne infrardeče svetlobe, ki v resnici predstavlja znaten del značilnega spektra črnega telesa. Po drugi strani LED-sijalke svoj visok izkoristek dosežejo tako, da oddajajo praktično vso svetlobo v vidnem delu spektra (slika 4). Pomembno se je torej zavedati, da s pojmom izkoristek običajno označujemo le delež energije, ki služi nekemu namenu, v našem primeru svetlobi, ki je očem zaznavna. Ker svetloba v infrardečem delu spektra povzroča le gretje, gre v tem primeru torej za izgubljeno energijo in posledično slabši izkoristek.

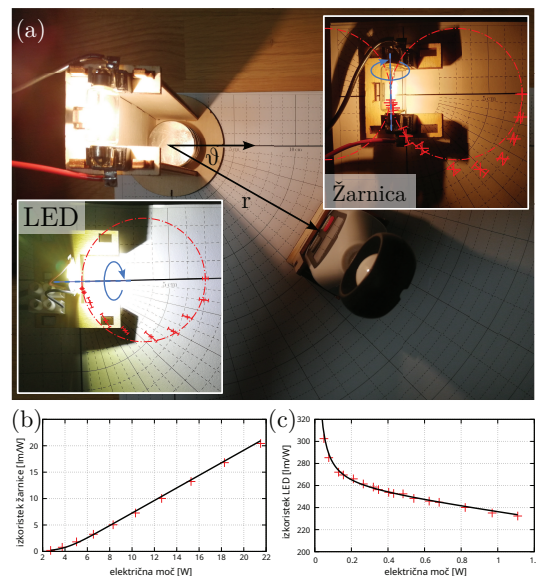




Eden izmed poudarkov naloge je bilo spoznavanje radiometričnih enot. Že omenjena enota luks, ki jo meri tudi merilnik osvetljenosti, opisuje intenziteto svetlobe; na splošno je odvisna tako od razdalje kot tudi smeri glede na svetilo. Skupno količino svetlobe, ki jo svetilo odda v vse smeri, poimenujemo tudi svetlobni tok in ga merimo v luminih (luks = lumen na kvadratni meter). Lumne iz vsakdanjega življenja poznamo kot količino, ki je zapisana na običajnih žarnicah poleg porabe električne moči v vatih. Izkoristek svetil lahko opišemo v luminih na vat – z razmerjem med izsevanim svetlobnim tokom v vidnem področju in skupno porabljenjo močjo. Sončna svetloba ima na primer izkoristek 93 lm/W. Pri električnih svetilih za porabljenjo moč običajno vzamemo kar električno moč.

Za ugotovitev izkoristka je treba torej ugotoviti skupno količino vidne svetlobe, ki jo oddaja svetilo. Ker svetila ne svetijo v vse smeri enako, so tekmovalci morali izmeriti svetlost v različnih smereh in prispevke ustrezno sešteti. Pri tem delo močno olajša dejstvo, da sta bili obe svetili namensko izbrani tako, da sta bili simetrični na rotacijo okrog ene osi. Šele z upoštevanjem te prostorske porazdelitve svetlobe je bilo mogoče dobro določiti svetlobni izkoristek. Slika 4 prikazuje eksperimentalno postavitve in dobljene izkoristke – zanimiva ugotovitev je, da se izkoristek navadne žarnice pri povečevanju moči izboljšuje, saj vedno več svetlobe odda v vidnem spektru, pri LED-svetilu pa je situacija obrnjenjena – pri višjih močeh je izkoristek slabši, večinoma zaradi pregrevanja svetila. Tudi v redni prodaji najdemo svetilke, ki ženejo LED-čipe s prevelikim tokom, kar negativno vpliva na izkoristek in na dolgoživost svetila.

Tretji, in hkrati tudi zadnji del naloge, je tekmovalce usmerjal v razmislek, koliko svetloba vročih teles greje okoliške površine. S tem pojavom se soočamo vsak dan, ko nam sonce segreje temna oblčila ali parkiran avto. Tekmovalci so imeli na razpolago črno ploščico, ki so ji morali določiti koeficienta toplotne prevodnosti in toplotne prestopnosti. To so dosegli z merjenjem temperature na obeh straneh osvetljene ploščice s pomočjo infrardečega termometra. Ker se toplota izgublja tako v okolico kot tudi prevaja na drugo stran ploščice, je naloga zahtevala tudi nekaj računske spretnosti za razklopitev teh dveh učinkov in uspešno izluščenje obeh iskanih količin.

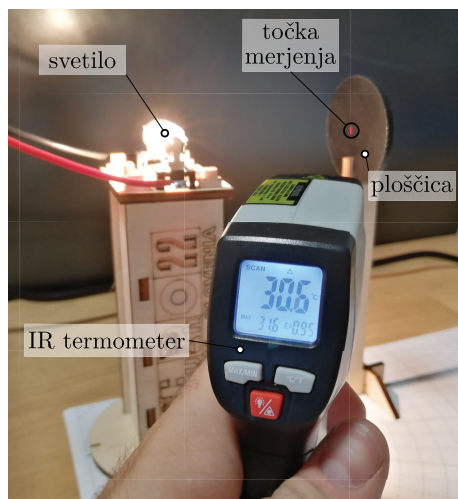


SLIKA 4.

(a) Postavitev eksperimenta za meritev kotne porazdelitve svetlobe z izmerki pod 9 koti v enem kvadrantu. LED sveti samo v pol prostora in ima simetrijo okrog pravokotnice na sredino diode, žarnica pa sveti v celoten prostor in je simetrična na rotacijo okrog prečne osi (smer žarilne nitke). Črtkana črta predstavlja poenostavljen model kotne odvisnosti, križci pa meritve z napakami. Sence, ki jih ogrodje meče na podlago, niso težava za svetlomer, ki meri na višini svetila. (b,c) Izkoristek žarnice (b) in LED (c) v odvisnosti od vhodne moči. Povečanje strmine okrog ničle pri diodi (c) je posledica netočne regulacije toka pri zelo nizkih tokovih – napajalnik oddaja nekaj toka tudi, ko prikazuje ničelni tok.

Kot smo videli že pri opisu posameznih delov tekmovalne naloge, je bil problem zastavljen zelo odprto, tako da so imeli tekmovalci popolno svobodo pri izvedbi in zasnovi poskusa. V tej obliki se odražajo moderne smernice fizikalnih nalog, ki se vedno bolj odmikajo od »sledenja receptom«. Tovrstna zasnova hkrati spodbuja znanstveni način razmišljanja in kreativnost tekmovalcev, saj je odločitev o postavitvi točne hipoteze in zasnovi primernih opazovalnih in preverjevalnih poskusov v celoti prepuščena njim samim.

Takšna oblika naloge je kakopak terjala večjo skrb, tako pri snovanju naloge, kot pripravi ocenjevalnih obrazcev. Rešitev namreč ni nujno enolična, poti do njih pa je mnogo. Tekmovalec sam je moral



SLIKA 5.

Postavitev eksperimenta za meritev temperature ploščice. Vgrajeni laser pomaga pri ciljanju sredine tarče.

izbirati primerne razdalje in merske instrumente, pri čemer je često iskal kompromis med (pre)majhnimi vplivi pri (pre)velikih razdaljah in pregrevanjem ter geometrijskimi natančnostmi pri (pre)majhnih.

Med snovanjem naloge se je za poseben izziv izkazala primerna izbira svetil, ki omogoča različne pristope do reševanja druge naloge. Avtomobilska žarnica, izbrana za meritve v drugem delu naloge, je morala zadoščati dvema pomembnima pogojema: oddajati je morala zadosten energijski tok, da je omogočala merjenje s temperaturo povezanih količin, hkrati pa je morala biti njena geometrija čim bolj preprosta in zadosti simetrična. Tovrstna posebna skrb je omogočila tekmovalcem, da so lahko z upoštevanjem cilindrične simetrije žarnice brez kompleksnih računskih prijemov in manjšim številom meritev prišli do zelo dobre analitične ocene o celotnem

izsevu svetila. No, očitno pa je, da takšnih žarnic ni preprosto dobiti. Kot anekdota: za potrebe tekmovalneja (300 žarnic in še 300 rezerv) smo pokupili toliko žarnic, da smo porabili večino evropske zaloge in posledično dvignili cene žarnice pri prodajalcih.

Poleg izkušenj z znanstveno metodo so bili pedagoški cilji naloge tudi bolj praktično usmerjeni. Preko uporabe laboratorijskih usmernikov in instrumentov so se tekmovalci navajali na delo z različno opremo. Za uspešno izvedbo tekmovalne naloge je bilo potrebno natančno upoštevanje tehničnih specifikacij naprav; neupoštevanje je lahko vodilo v okvare opreme, ki so posledično že same po sebi otežile delo tekmovalcem. Kljub jasnim opozorilom je vendar svoj prerani (in s strani sestavljalcev naloge precej nepričakovani!) konec med tekmovalcem doživelo nekaj infrardečih termometrov, ki so jih tekmovalci skušali uporabiti za kontaktno merjenje temperature razgrete žarnice. Tudi barvni filtri in črne ploščice so nekajkrat postali žrtev vročih žarnic, kar je mogoče še en pokazatelj, da je prehod na LED-razsvetljavo na splošno dobra ideja tudi s stališča varnosti. Tovrstne »zlorabe« opreme je bilo treba pri snovanju eksperimenta predvideti in zagotoviti, da tudi v primeru napačne uporabe eksperiment ni predstavljal nevarnosti za zdravje udeležencev.

Po vseh izzivih sva avtorja z nalogo bila zelo zadovoljna, prav tako so bili pozitivni tudi odzivi tekmovalcev. Verjetno gre velik del zasluge tudi izbrani tematiki – eksperimenti s svetlobo so privlačna tema, ki mlade fizike hitro zamoti za nekaj ur, čeprav je treba za to ugasniti luči.

Literatura

- [1] *6th European Physics Olympiad 2022*, dostopno na <https://www.eupho2022.si/>, ogled 16. 5. 2023.

× × ×



Avtorica stripa: Ana Marin

A large, smooth, light-colored radish root lying horizontally on a green lawn dotted with many small white daisies. The radish has a small green leafy sprout at its right end.

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. avgusta 2023**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Sferna trigonometrija in čas v astronomiji

↓↓↓

Vid Kavčič

→

Uvod

Lahko bi rekli, da je sferna trigonometrija veja matematike, ki se ukvarja z razmerji med koti in stranici sferičnih trikotnikov na površini krogle, hkrati pa je tudi temeljno orodje v astronomiji in astrofiziki, saj omogoča opis položajev nebesnih teles na nebesni sferi. Zato predstavlja eno izmed pomembnejših znanj, s katerim morajo biti seznanjeni tudi srednješolke in srednješolci, ki se pripravljajo na Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (IOAA), ki bo letos avgusta potekala na Poljskem.

V članku bomo spoznali osnovne pojme sferne trigonometrije, izpeljali ključne enačbe, s katerimi lahko opišemo lego nebesnih teles in njihovo gibanje po nebesni sferi, nato pa se bomo seznanili še s tematikami, povezanimi z različnimi definicijami časa. V prihodnjih številkah bomo v članku obravnavane vsebine podkrepili z dodatnimi rešenimi vajami z izbirnih testov in mednarodnih astronomskih tekmovalij.

Preden pa zagrizemo v sferno trigonometrijo, bomo spoznali osnovne pojme orientacije na Zemlji in običajnimi koordinatnimi sistemi, ki jih pri tem uporabljamo.

Osnovne točke in krogi na nebesni sferi in koordinatni sistemi

Nebesna sfera

Da bi bolje opisali položaje objektov na nebu, uvedemo **nebesno sfero**, na katero projiciramo nebesna telesa in pri tem pozabimo, kako daleč so v resnici. Če nebesno sfero presekamo z ravnino, ki poteka skozi središče krogle, dobimo **glavni** ali **veliki krog**. Delu glavnega kroga pravimo **glavni lok**.

Glavne točke in krogi nebesne sfere

Nebesna sfera je namišljena sfera s poljubnim polmerom in središčem v Zemlji, na katero projiciramo nebesna telesa. **Veliki krog** je presečišče sfere z ravnino, ki poteka skozi njeno središče. Navpičnica, ki gre skozi opazovalčevo oko, prebode nebesno sfero v **zenitu** (nadglavišču) in **nadirju** (podnožišču).

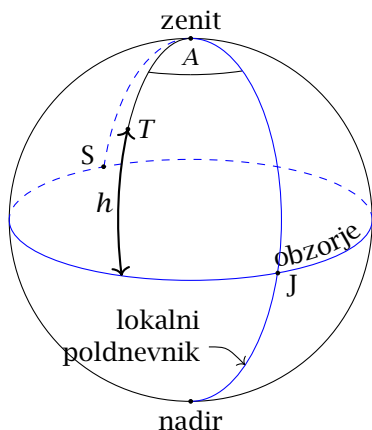
Obzorje je ločnica med zemeljskim površjem in nebom. **Matematično obzorje** je presečišče vodoravne ravnine opazovališča in nebesne krogle. Zastirajo ga drevesa, gore in zgradbe. Takšno presečišče imenujemo **vidno** ali **naravno** obzorje. **Nebesna os** je podaljšek Zemljine navidezne osi, okoli katere se vrti. Nebesna os seka nebesno sfero v **severnem** in **južnem polu**. V bližini severnega je zvezda Severnica. Višina nebesnega pola v danem kraju je enaka geografski širini kraja.

Nebesni ekvator je projekcija Zemljinega ekvatorja na nebesno sfero, torej najdaljši nebesni vzporednik. **Nebesni meridian** je veliki krog na nebesni krogli, ki povezuje severno točko na obzorju, nebesni pol, zenit, južno točko na obzorju in nadir, ter je pravokoten na matematično obzorje. Nebesni meridian seka horizont v **severišču** in **južišču**, nebesni ekvator pa v **vzhodišču** in **zahodišču**.

Horizontski koordinatni sistem

Pri **horizontskem koordinatnem sistemu** sta osnovna velika kroga **horizont** in **nebesni meridian**. Koordinatno izhodišče je točka **južišče**. Pri tem vpeljemo koordinati višino in azimut.

Višinski krog je veliki krog, ki poteka skozi dano telo in zenit. **Višina** h je dolžina loka na višinskem krogu od horizonta do izbranega telesa. Višina telesa na obzorju je enaka 0° . Nad obzorjem zavzame pozitivne vrednosti vse do $+90^\circ$ v zenitu, pod obzorjem pa zavzame negativne vrednosti vse do -90° v nadirju. Zvezde z enako višino ležijo na istem krogu, ki mu pravimo **almukantarat**. **Zenitna razdalja** z je



SLIKA 1.

dolžina loka na višinskem krogu od zenita do telesa. Zenitno razdaljo štejemo od 0° v zenitu pa do 180° v nadirju. Zenitno razdaljo z višino telesa tako očitno povezuje zveza $z = 90^\circ - h$.

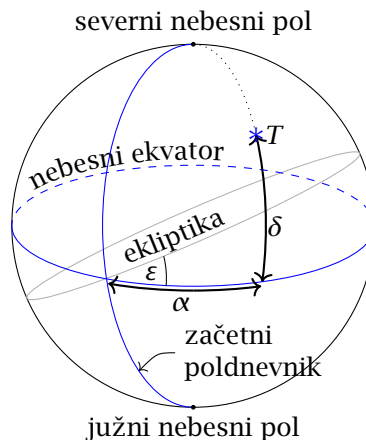
Azimet A je lok od južišča do presečišča višinskega kroga s horizontom. Merimo od 0° do 360° od južišča proti zahodu. **Časovni kot** H je kot med meridianom in deklinacijskim krogom.

Ker se horizontski koordinati teles neprestano spreminjata, je ta sistem vezan na kraj in čas.

Ekvatorialni koordinatni sistem

Pri **ekvatorialnem koordinatnem sistemu** sta osnovna kroga **nebesni ekvator** in glavni krog, ki poteka skozi pol P in **pomladišče** – točko γ . Pomladišče je točka nebesnega ekvatorja, v katero pride Sonce ob spomladanskem enakonočju, in je začetek tega koordinatnega sistema. Z drugimi besedami, je točka, v kateri ekliptika, to je navidezna pot Sonca po nebesni sferi, seka nebesni ekvator.

Deklinacijski krog telesa T je veliki krog skozi to telo in nebesni pol P . **Rektascenzija** α je lok na ekvatorju od pomladišča do presečišča deklinacijskega kroga z ekvatorjem. Merimo jo v obratnem smislu navideznega vrtenja nebesne krogle. Podajamo jo v urah in lahko zavzame vrednosti med 0^h in 24^h , pri čemer 1^h ustreza kotu 15° . **Deklinacija** δ je dolžina loka na deklinacijskem krogu od ekvatorja do telesa T . Štejemo od 0° na nebesnem ekvatorju do $+90^\circ$ na severnem polu in do -90° na južnem polu. Zvezde z enako deklinacijo ležijo na istem **vzporedniku**.



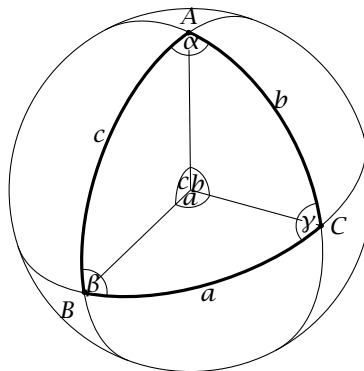
SLIKA 2.

Osnove sferne trigonometrije

Po spoznanih osnovah orientacije in koordinatnih sistemov se lahko končno nadobudni seznanimo z osnovnimi pojmi in obrazci sferne trigonometrije.

Osnovni obrazci sferne trigonometrije

Sferični trikotnik določajo trije glavni krogi, njegove stranice so glavni loki. Dolžine stranic sferičnega trikotnika a, b in c izražamo s koti z vrhom v središču sfere. Kot sferičnega trikotnika definiramo kakor kot med tangentama na dve strani v oglišču trikotnika. Vsota notranjih kotov sferičnega trikotnika α, β in γ je večja od 180° .



SLIKA 3.

Tako kot za ravninski trikotnik tudi za stranice in kote sferičnega trikotnika velja več trigonometrijskih zvez. Osnovni obrazci sferne trigonometrije so





sinusni, kosinusni in sinus-kosinusni izrek za sferični trikotnik:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

$$\cos \beta \sin a = -\cos \alpha \sin b \cos c + \cos b \sin c,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Če so središčni koti stranic majhni: $a, b, c \ll 1$, je sferični trikotnik v približku ravninski trikotnik. Če upoštevamo, da pri majhnih kotih x velja $\sin x \approx x$ in $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, ugotovimo, da sinusni in kosinusni izrek za sferični trikotnik preideta v klasični sinusni in kosinusni izrek za ravninski trikotnik.

Če poznamo tri zaporedne podatke v sferičnem trikotniku (kot in priležni stranici, stranico in priležna kota), lahko četrtega (sosednjega) izračunamo s **formulo štirih delov**:

$$\cos a \cos \gamma = \sin a \cot b - \sin \gamma \cot \beta.$$

S pomočjo osnovnih obrazcev sferne trigonometrije izpeljemo formule za gibanje teles na nebesni sferi.

Primeri uporabe obrazcev sferne trigonometrije v astronomiji

Razdalja med točkama na sferi

Imejmo dve zvezdi na nebesni sferi s koordinatami (δ_1, α_1) in (δ_2, α_2) . Če z glavnimi loki povežemo lego prve zvezde, lego druge zvezde in severni nebesni pol, dobimo sferični trikotnik s stranicama z dolžinama $90^\circ - \delta_1$ in $90^\circ - \delta_2$, ki oklepata kot $\alpha_1 - \alpha_2$. Če za ta sferični trikotnik zapišemo kosinusni izrek, lahko izrazimo kotno razdaljo θ med zvezdama kot

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Če upoštevamo $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, dobimo **formulo za razdaljo objektov na nebesni sferi**:

$$\cos \theta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Višinska enačba

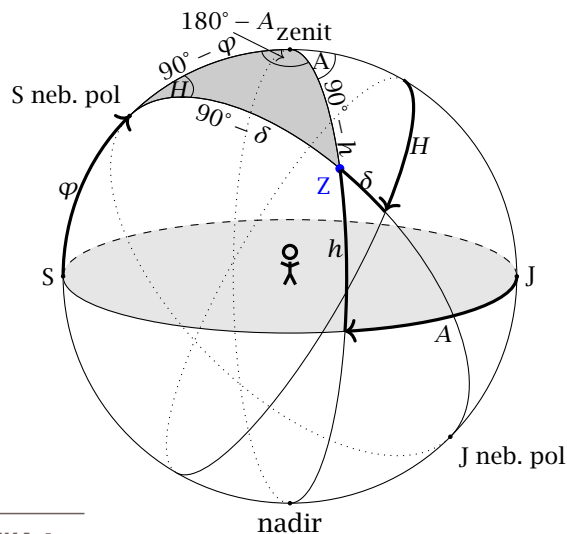
Zamislimo si zvezdo z deklinacijo δ , ki se za opazovalca na geografski širini φ nahaja na višini h , azimutu A in na časovnem kotu H . Oglejmo si sferični trikotnik zvezda–severni nebesni pol–zenit.

Ker poznamo dolžine njegovih stranic (slika 4) in kar dva notranja kota, lahko poskusimo na njem zlorabiti kakšno od trigonometrijskih formul za sferični trikotnik. Za začetek lahko poskusimo s kosinusnim izrekom za kot pri severnem nebesnem polu, ki ustreza H . Velja:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos H.$$

Če spet upoštevamo $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, dobimo **višinsko enačbo**:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$



SLIKA 4.

Kulminacija

Poglejmo, kaj nam enačba pove o legi zvezde, ko ta kulminira. Takrat leži na meridianu in velja $H = 0$. Višinska enačba se nam v tem primeru poenostavi v

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta. \quad (1)$$

Desna stran enačbe spominja na adicijski izrek za kosinus razlike; zapišimo jo kot

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos(\pm(\varphi - \delta)) = \sin(90^\circ \pm (\delta - \varphi)),$$

iz česar sledi, da je višina zvezde ob kulminaciji $h = 90^\circ \pm (\delta - \varphi)$. Kadar je objekt najvišje v južni

smeri, je njegova največja višina enaka $h_1 = 90^\circ + \delta - \varphi$, ko pa je objekt najvišje v severni smeri, je njegova višina enaka $h_2 = 90^\circ - \delta + \varphi$. Zvezi si najlažje zapomnimo z enačbo za zenitno razdaljo ($z = 90^\circ - h$) ob zgornji kulminaciji:

$$\blacksquare z = |\varphi - \delta|.$$

Ob spodnji kulminaciji velja $H = 180^\circ$, iz česar podobno kot zgoraj izpeljemo zvezo

$$\blacksquare \varphi + \delta + z = 180^\circ.$$

Glede na to kako poteče kulminacija, zvezde na nebesni sferi razdelimo na **nadobzornice** (cirkumpolarne zvezde), **vzhajalke** in **podobzornice**. Prve v danem kraju nikoli ne zaidejo, zato lahko vidimo tako zgornjo kot tudi spodnjo kulminacijo. Po drugi strani podobzornice v danem kraju nikoli ne vzidejo, zato se v tem primeru obe kulminaciji zgodita pod obzorjem. Vse preostale zvezde so vzhajalke – te vzhajajo in zahajajo, vidimo pa le njihovo zgornjo kulminacijo.

Vzid in zaid

Kaj lahko povemo o zvezdi, vzhaja oziroma zahaja? Takrat zvezda leži na obzorju in velja $h = 0$, zato višinska enačba takrat preide v:

$$\blacksquare 0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Če enačbo delimo z $\cos \varphi \cos \delta$, dobimo enačbo za časovni kot $\cos H_{v,z}$ vzida oziroma zaida:

$$\blacksquare \cos H_{v,z} = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

V primeru vzida upoštevamo negativno vrednost časovnega kota, v primeru zaida pa pozitivno.

Azimutni enačbi

Zdaj smo uporabili kosinusni izrek za kot $180^\circ - A$, kjer je A azimut zvezde. Velja

$$\blacksquare \begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \varphi) \\ &+ \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A), \\ \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A, \end{aligned}$$

iz česar lahko izrazimo $\cos A$ in dobimo prvo azimutno enačbo:

$$\blacksquare \cos A = -\frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h}.$$

Ponovno lahko pogledamo posebni primer, ko zvezda vzide bodisi zaide in velja $h = 0$. Za azimut $A_{v,z}$ vzida oziroma zaida zgornja enačba preide v

$$\blacksquare \cos A_{v,z} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Za opazovani trikotnik lahko zapišemo tudi sinusni izrek, s katerim povežemo kota H in $180^\circ - A$ ter njuni nasproti ležeči stranici. Tako dobimo drugo azimutno enačbo, ki azimut zvezde poveže z njenim časovnim kotom H , deklinacijo δ in višino h :

$$\blacksquare \cos A = -\frac{\sin H \cos \delta}{\cos h}.$$

Položaj Sonca na nebu

Ker se Zemlja giblje okoli Sonca, se njegov položaj na nebu s časom spreminja. Naj bo L kotna razdalja Sonca od pomladišča, gledano v smeri, kot je označena na skici. Kot med ekliptiko in nebesnim ekvatorjem ustreza ravno kotu $\varepsilon = 23,5^\circ$, kar je posledica nagnjenosti Zemljine osi glede na pravokotnico na njen tir okoli Sonca. Če za sferični pravokotni trikotnik zapišemo sinusni izrek, dobimo

$$\blacksquare \frac{\sin \delta}{\sin L} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 90^\circ},$$

iz česar sledi zveza za deklinacijo Sonca:

$$\blacksquare \sin \delta_\odot = \sin \varepsilon \sin L.$$

Za isti trikotnik lahko zapišemo tudi dva kosinusna izreka:

$$\blacksquare \begin{aligned} \cos \delta &= \cos \alpha \cos L + \sin \alpha \sin L \cos \varepsilon, \\ \cos L &= \cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta \cos 90^\circ, \end{aligned}$$

iz česar lahko pridemo enačbo za Sončevo rektascenzijo:

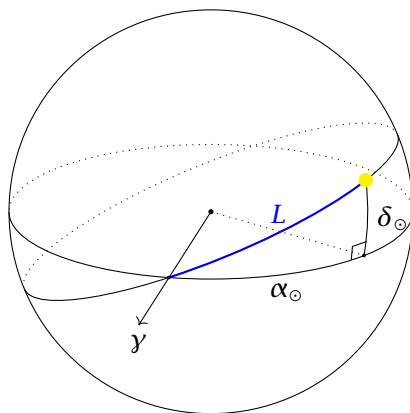
$$\blacksquare \operatorname{tg} \alpha_\odot = \cos \varepsilon \operatorname{tg} L.$$

Ker se Zemlja giblje okoli Sonca skoraj po krožnem tiru, tudi L v prvem približku narašča enakomerno. Njegovo velikost lahko izračunamo kot

$$\blacksquare L = \frac{\Delta t}{365,25} \cdot 360^\circ,$$

kjer je Δt število dni od spomladanskega enakonočja.





SLIKA 5.

S pomočjo skice, ki prikazuje pot Sonca po ekliptiki, lahko izpeljemo formuli za spreminjanje deklinacije in rektascenzije Sonca med letom.

Čas

Abstraktnost časa je eno izmed najbolj skrivnostnih in zapletenih filozofskih vprašanj, ki se zdi, da nikoli ne izgubi svoje aktualnosti. Čeprav je čas tako osnovni in morebiti samoumeven koncept, pa je pravzaprav zelo težko opredeljiv in razumljiv.

V astronomiji v grobem ločimo pojma zvezdni in Sončev čas. Oba načina opredelitve časa temeljita na opazovanju gibanja Zemlje glede na gibanje zvezd in Sonca. **Zvezdni čas** je povezan s časom, ki ga potrebuje Zemlja, da se enkrat zavrti okoli svoje osi glede na zvezde. Zvezdni dan je tako časovni razmik, ki ga potrebuje Zemlja, da se zavrti za 360 stopinj glede na primer na oddaljeno zvezdo, ki se nahaja na isti točki na nebu.

Sončev čas pa je povezan s časom, ki ga potrebuje Zemlja, da se vrti enkrat okoli svoje osi glede na Sonce. To pomeni, da je Sončev dan časovni interval, ki ga potrebuje Zemlja, da se zavrti za 360 stopinj glede na Sonce. Ker pa se Zemlja giblje okoli Sonca po eliptični orbiti, se dolžina Sončevega dne v različnih delih leta razlikuje. V zimskem času je Sončev dan krajši, v poletnem pa daljši. V povprečju pa je zaradi vrtenja Zemlje okoli Sonca zvezdni dan za približno 4 minute krajši od Sončevega.

Zvezdni čas se uporablja za določanje časa v zvezdnih navigacijskih sistemih, medtem ko se Sončev čas uporablja v vsakdanjih časovnih enotah, kot so ure, minute in sekunde. Vendar pa so v sodobni dobi

časovne enote, kot jih poznamo v vsakdanjem življenju, določene s pomočjo mednarodnega časa (UTC), ki temelji na osnovi atomske ure, ki pa ne sledijo zvezdnemu ali Sončevemu času.

V nadaljevanju bomo pojme, kot sta zvezdni čas in Sončev čas, natančneje definirali, hkrati pa ju bomo povezali s časom, ki ga kaže naša ura in s katerim se srečamo v še tako dolgočasnem vsakdanu.

Zvezdni čas

Zvezdni čas merimo s časovnim kotom točke pomladišča in je enak vsoti rektascenzije α zvezde in njenega časovnega kota H :

$$t_* = H_\gamma = \alpha + H. \quad (2)$$

Ko je pomladišče v kulminaciji, je zvezdni čas enak nič. Časovni kot H_A zvezde na geografski dolžini λ_A in časovni kot istega telesa na greenwiškem poldnevniku H_G sta povezana z enačbo

$$H_A = H_G + \lambda_A.$$

Sončev čas

Za vsakdanjo rabo zvezdni čas ni praktičen, saj točka pomladišča ni očitna na nebu in tudi ne določa ritma našega življenja, tako kot ga Sonce. Za bitja na Zemlji, ki so odvisna od Sončeve svetlobe, je torej čas bolj praktično meriti glede na Sonce. Kot mero za pravi Sončev čas $t_\lambda^\odot$ lahko izberemo časovni kot pravega Sonca, en pravi Sončev dan pa je presledek med zaporednima kulminacijama pravega Sonca.

Pravi Sončev čas $t_\lambda^\odot$ je časovni presledek med dvema zaporednima kulminacijama Sonca na meridianu. Sonce za zvezdami vsak dan napravi 4 minute zaostanka, kar v enem letu nanese za en dan.

Če bi med letom merili ta presledek oziroma dolžino pravega Sončevega dneva, bi ugotovili, da se spreminja, ker rektascenzija Sonca ne narašča linearno s časom zaradi dveh učinkov: zaradi eliptičnosti Zemljinega tira se Sonce neenakomerno giblje po ekliptiki in enkrat prehiteva, drugič zaostaja. Ta učinek ima periodo enega leta. Poleg tega je ravnina ekliptike nagnjena glede na nebesni ekvator, zaradi česar se v trigonometričnih funkcijah skriva dodatna funkcija časa, ki ima periodo pol leta.

Zato za potrebe merjenja časa definiramo **srednje Sonce** in **srednji Sončev čas** t_λ^S . To je namišljeno

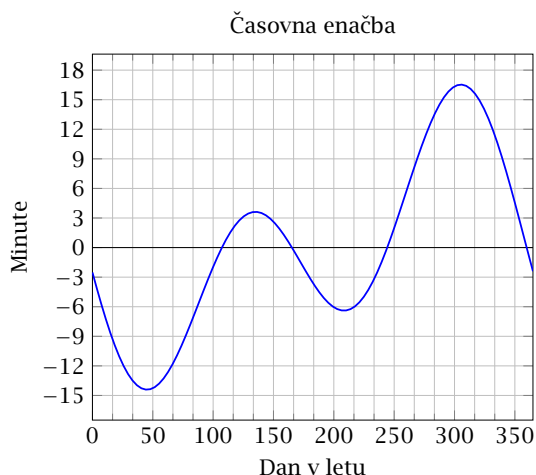
telo, ki se giblje enakomerno po nebesnem ekvatorju in, tako kot pravo Sonce, naredi en obhod v enem letu. Ob pomladnem enakonočju je, tako kot pravo Sonce, v točki pomladišča (γ) in ima rektascenzijo $\alpha_S = 0^h$, nato pa njegova rektascenzija narašča linearno s časom.

Definirajmo, da je srednji Sončev čas časovni kot srednjega Sonca:

$$t_\lambda^S = H_S,$$

en srednji Sončev dan pa je presledek med zaporednima kulminacijama srednjega Sonca. Ker narašča $\alpha_S^\odot$ linearno s časom, je dolžina srednjega Sončevega dneva vedno enaka. Razliko med pravi sončevim časom $t_\lambda^\odot$ in srednjim sončevim časom t_λ^S imenujemo **časovna enačba**:

$$ET = t_\lambda^\odot - t_\lambda^S.$$



SLIKA 6.

Časovna enačba za posamezni dan v letu.

Meščanski čas

Ker je dolžina srednjega Sončevega dneva vedno enaka (24 h), za merjenje časa uporabimo srednje Sonce. A ker je za praktično življenje nekoliko nerodno, da se srednji Sončev dan začne sredi belega dne (ob zgornji kulminaciji srednjega Sonca), so uvedli **meščanski čas** t_λ^m , ki ima začetek štetja oziroma dneva premaknjen za pol dneva, zato moramo srednjemu

Sončevemu času prišteti 12 h:

$$t_\lambda^m = t_\lambda^S + 12 \text{ h.}$$

Vsi do zdaj definirani časi: zvezdni, pravi Sončev, srednji Sončev in meščanski, so krajevni časi, kar pomeni, da so odvisni od zemljepisne dolžine kraja λ , zato smo jim tudi pripisali pripadajoči indeks, ki nas na to opozarja.

Univerzalni čas – UT

Po dogovoru je krajevni meščanski čas na Greenwichu določen kot UT (**Universal time**). S tem so meščanski časi v drugih krajih enaki

$$t_\lambda^m = UT + \lambda.$$

Conski čas

V praksi je uveljavljen **conski čas**, ki za vse meridianske pasove širine 15° določa enak čas:

$$t_\lambda^m = UT + n.$$

Krajevni zvezdni čas t_λ^* in čas, ki ga kaže naša ura t_n^z , povezuje zveza

$$t_\lambda^* = H + \alpha = S(0^h UT) + \lambda + \gamma(t_n^z - n),$$

kjer je $\gamma = \frac{366,25}{365,25}$ faktor pretvorbe med zvezdnimi in časovnimi sončevimi enotami, n časovni pas in $S(0^h UT)$ krajevni zvezdni čas na Greenwichu ob $UT = 0$ h, ki ga za vsak dan v letu najdemo v tabelah.

V poletnem času so številne države zaradi energetskih razlogov uveljavile **poletni čas**, ki za eno uro prehitveva običajni čas. V državah Evropske unije se poletni čas začne zadnjo nedeljo v marcu ob 1. uri zjutraj, ko se ura premakne za eno uro naprej, in konča zadnjo nedeljo v oktobru ob 1. uri, ko se ura premakne nazaj. Tako v Sloveniji v zimskem času pripadamo časovnemu pasu $UT + 1$, v poletnem času pa časovnemu pasu $UT + 2$.

Literatura

- [1] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental astronomy, fifth edition*, Helsinki, Springer, 2007.
- [2] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2006.

× × ×

Fittsov zakon

↓↓↓

MATJAŽ KLJUN

→ Pri izdelavi uporabniških vmesnikov za različne naprave pogosto uporabljamo Fittsov zakon. Največkrat kar podzavestno, saj ga večina programerjev niti ne pozna. Zakon se imenuje po psihologu Paulu Morrisu Fittsu mlajšem (6. maj 1912–2. maj 1965), ki je leta 1954 objavil članek z opisom modela človeškega gibanja [1]. Kot polkovnik v ameriških zračnih silah je Fitts raziskoval vplive človeških dejavnikov in ergonomije na varnost pri letenju in s tem postavil temelje za svoj model, ki je eden najbolj raziskanih in uporabljenih modelov pri izdelavi grafičnih vmesnikov in razumevanju uporabnikov pri interakciji z njimi.

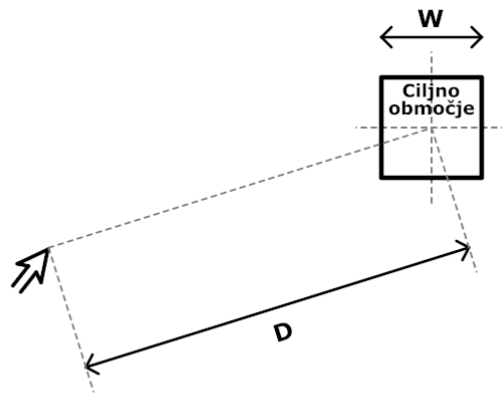
Raziskovanje človeških dejavnikov in ergonomije temelji na razumevanju vpliva fizioloških in psiholoških značilnosti uporabnikov na upravljanje izdelkov, procesov in sistemov. Z razumevanjem teh značilnosti lahko načrtujemo in oblikujemo izdelke, procese in sisteme po meri uporabnika. Štirje glavni cilji pri tem so:

- zmanjšanje človeških napak,
- povečanje produktivnosti,
- izboljšanje varnosti/razpoložljivosti sistema in
- povečanje udobja uporabnika.

Omenjeno raziskovanje črpa iz številnih disciplin in se hkrati v njih uporablja. Te discipline so na primer psihologija, sociologija, inženiring, biomehanika, industrijsko oblikovanje, fiziologija, antropometrija, oblikovanje interakcije, vizualno oblikovanje, uporabniška izkušnja in oblikovanje uporabniških vmesnikov. Ravno pri slednjem se danes pogosto sklicujemo na Fittsov zakon.

Fittsov zakon nam pomaga pri oceni časa, ki je potreben za premik kazalne naprave (npr. miškega kazalca) na določeno ciljno območje (npr. ikona na

zaslonu). Je funkcija razmerja med razdaljo (D) do sredine ciljnega območja in širino tega območja (W), kot je prikazano na Sliki 1. Dokazano je, da Fittsov zakon velja za premike človeških okončin na ciljno območje [6] (npr. premik roke na stikalo za prižig luči), za človeški pogled [7] (npr. kako hitro najdemo s pogledom določeno informacijo na spletni strani), za vnosne naprave na računalniških sistemih (npr. premik miškega kazalca na določeno ikono na namizju računalniškega zaslona) in druge dele človeškega telesa. Velja tako za starejše kot mlajše uporabnike [4], uporabnike z določenimi posebnimi potrebami [2], uporabnike pod vplivom THC [5] in tudi za premike pod vodno gladino [3].



SLIKA 1.

Prikaz razdalje D od trenutnega položaja miškega kazalca do sredine ciljnega območja prikazanega s kvadratom širine W .

Fitts je svoj model osnoval na podlagi teorije informacij in določil indeks težavnosti (angl. index of difficulty ali ID) zadetka ciljnega območja z naslednjo formulo:

$$ID = \log_2 \left(\frac{2D}{W} \right).$$

Razdaljo (D) lahko razumemo kot moč signala, širino ciljnega območja (W) pa kot šum v danem signalu. Dvojiški logaritem se v teoriji informacij uporablja

za določitev števila bitov, potrebnih za kodiranje določenega sporočila. V Fittsovem zakonu pa logaritemska funkcija predvidi, da je majhno povečanje velikosti ciljnega območja veliko bolj učinkovito za majhna ciljna območja kot za velika. Majhno povečanje velikega ciljnega območja tako ne bo prineslo velike razlike v indeksu težavnosti. Podobno velja za razdaljo. Vidimo tudi lahko, da na sliki 1 in v formuli ni upoštevana višina ciljnega območja. Vendar je pri uporabniških vmesnikih smiselno za širino vzeti najkrajšo dimenzijo ciljnega območja, kar je lahko tudi višina.

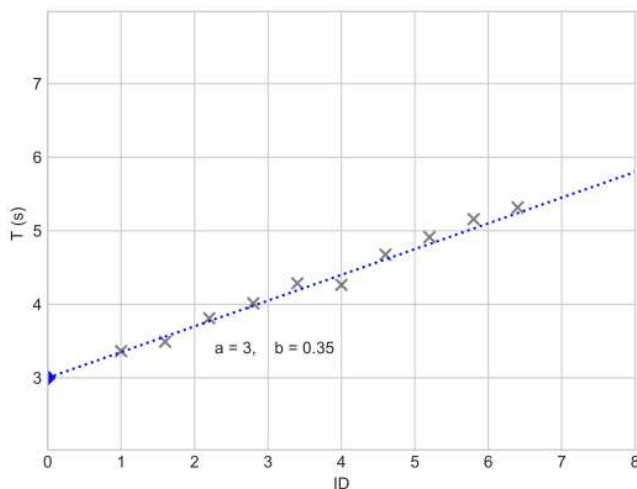
Danes se najpogosteje uporablja formula, ki so jo raziskovalci sestavili na podlagi proučevanja korelacije med časom izvajanja naloge in indeksom težavnosti. Korelacija med obema količinama je linearna, formula pa naslednja:

$$T = a + b \cdot ID = a + b \cdot \log_2 \left(\frac{2D}{W} \right).$$

T predstavlja čas, ki ga uporabnik potrebuje za premik na ciljno območje. Parametra a in b se razlikujeta glede na obravnavano vhodno napravo na našem računalniškem sistemu in se določita z opazovanjem – tj. empirično z regresijsko analizo. Parameter b je odvisen od naklona D (naklona daljice potrebne poti do ciljnega območja) in opisuje pospešek. Parameter a pa dodamo, da se premica odvisnosti ne začne v izhodišču. Določa presečišče na osi y , kot je vidno na sliki 2, in se pogosto razlaga kot zakasnitev, ker čas klika na ciljno območje ne more biti 0.

Prva zabeležena uporaba Fittsovega zakona za računalniške uporabniške vmesnike je bila leta 1978 izvedena primerjava učinkovitosti različnih vhodnih naprav: računalniške miške, krmilne palice in smer-nih tipk na tipkovnici. Ravno ta študija je pripomogla k temu, da je Xerox k prvemu komercialnemu računalniku z grafičnim uporabniškim vmesnikom Xerox Star, dodal miško. Posledično je danes miška vseprisotna vhodna naprava.

Kako pa Fittsov zakon vpliva na oblikovanje uporabniških grafičnih vmesnikov, ki jih uporabljajo vsi današnji operacijski sistemi na namiznih računalnikih? Fittsov zakon pravi, da mora biti ciljno območje čim bližje začetnemu položaju na primer miškega kazalca, da uporabnik hitreje pride do ciljnega območja. Zakon ravno tako pravi, da mora biti širina ciljnega območja čim večja, da ga lahko uporabnik



SLIKA 2.

Graf linearne odvisnosti T od ID .

lažje doseže. To pomeni, da moramo interaktivne elemente v programih ali na spletnih straneh oblikovati tako, da jih bo uporabnik karseda hitro in lahko dosegel ter kliknil nanje.

Najkrajšo pot do ciljnega območja predstavlja trenutni položaj miškega kazalca. Ta položaj se imenuje čarobni (angl. magic) ali glavni piksel (angl. prime pixel). Ravno zato lahko dodamo k desnemu gumbu miškega kazalca razne pojavne menije (angl. pop-up menus), pri čemer smo zmanjšali razdaljo D na 0. Primer pojavnega menija v oblikovalniku besedil vidimo na sliki 3. Na celotnem območju lista z besedilom in v njegovi okolici lahko kliknemo in dobimo isti meni z najpogostejšimi funkcijami. To pomeni, da je ciljno območje zelo veliko in se na njem miškin kazalec vseskozi nahaja.

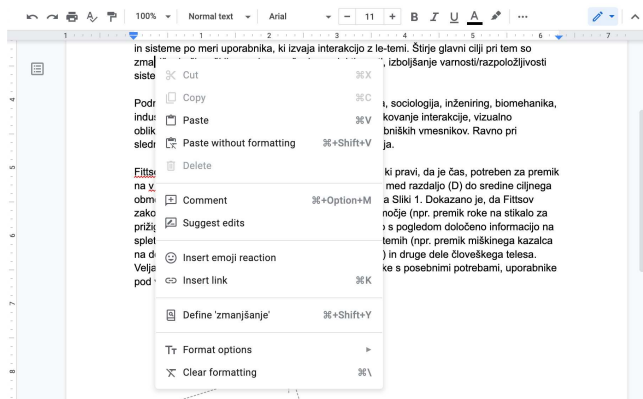
Glavni piksel lahko predvidimo vnaprej. Če uporabnik na spletni strani klikne na gumb z napisom »Prijava«, je smiselno postaviti prijavni obrazec z vnosnima poljema uporabniškega imena in gesla čim bližje izbranemu gumbu. Seveda moramo poskrbeti tako za primerno velikost gumba kot tudi za druge lastnosti in funkcionalnosti vmesnika. Na primer, da se fokus prestavi v polje uporabniškega imena, da lahko uporabnik takoj začne tipkati, in da je gumb za potrditev prijavnih podatkov karseda blizu obrazca.

Naslednja lastnost, ki jo lahko izrabimo na namizju računalniškega zaslona, je pravilo neskončnih

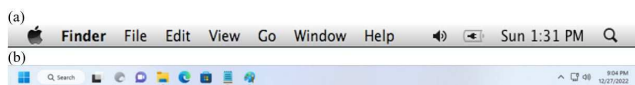


→ robov (angl. rule of infinite edges). Ko se z miškinim kazalcem premaknemo na rob računalniškega zaslona, ne moremo dalje, saj se kazalec ustavi. Torej lahko na rob zaslona pridemo z največjo možno hitrostjo premikanja miške in še vedno zadenemo cilj, saj je le-ta neskončen v eni dimenziji. Uporaba tega pravila je na primer vidna v operacijskem sistemu macOS, ki menijsko vrstico (angl. Menu bar) vedno postavi na zgornji rob zaslona, namesto na okvir okna trenutnega programa. Drugi primer predstavlja opravilna vrstica (angl. taskbar) sistema Windows. Oba primera sta vidna na sliki 4.

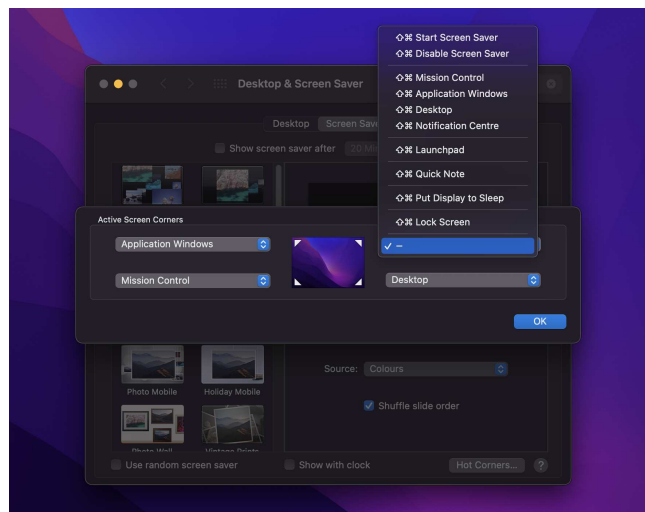
Lastnost neskončnih robov pride najbolj do izraza v vseh štirih vogalih namizja, ki predstavljajo neskončno ciljno področje v obeh dimenzijah. Te točke se imenujejo tudi čarobni vogali (angl. magic corners), ker predstavljajo teoretično neskončno velik gumb (ciljno območje). Operacijski sistem Windows ima v spodnjem levem vogalu gumb »Start«, Micro-


SLIKA 3.

Pojavni meni v oblikovalniku besedil. Z desnim klikom miške lahko na celotni površini lista z besedilom in njegovi okolici pridemo do pojavnega menija z najpogostejšimi funkcijami.


SLIKA 4.

Zgoraj je menijska vrstica operacijskega sistema macOS (a), spodaj pa opravilna vrstica operacijskega sistema Windows (b).


SLIKA 5.

Neskončne vogale (imenovane Hot corners) v operacijskem sistemu macOS lahko nastavimo tako, da nam poženejo različne funkcije.

soft Office 2007 pa uporablja zgornji levi vogal za meni »Office«. V operacijskem sistemu macOS lahko celo nastavimo posebne funkcije, ko se s kazalcem miške premaknemo v vogal zaslona, kot je vidno na sliki 5.

Kaj pa vmesniki naprav, ki niso namizni računalniki? Za prvi iPhone telefon so pri podjetju Apple na podlagi Fittsove formule določili najmanjšo še dovoljeno velikost posameznega gumba/ikone. Ta je bila 44 točk na zaslonu 320×480 točk, pri čemer je bil indeks težavnosti pri tej velikosti zelo nizek [8]. Težavnost dosega ciljnega območja na zaslonih na dotik je odvisna od načina držanja telefona in interakcije (ista roka drži telefon in izvaja interakcijo, ena roka drži telefon, medtem ko druga izvaja interakcijo) ali pa obe držita telefon in izvajata interakcijo, a na splošno velja, da sta sredina in spodnji del zaslona lažje dosegljiva kot zgornji del in vogali. Ravno tako so Googlevi oblikovalci namenoma postavili polje za iskanje na sredino zaslona, saj ga tam s pogledom najhitreje najdemo (za pogled je sredina zaslona pogosto glavni piksel). Predstavljajte si, da bi bilo polje v kotu zaslona, kar bi predstavljalo našim očem dodatno delo pri iskanju. Dodatno delo pa lahko uporabnike »odvrne« od uporabe.

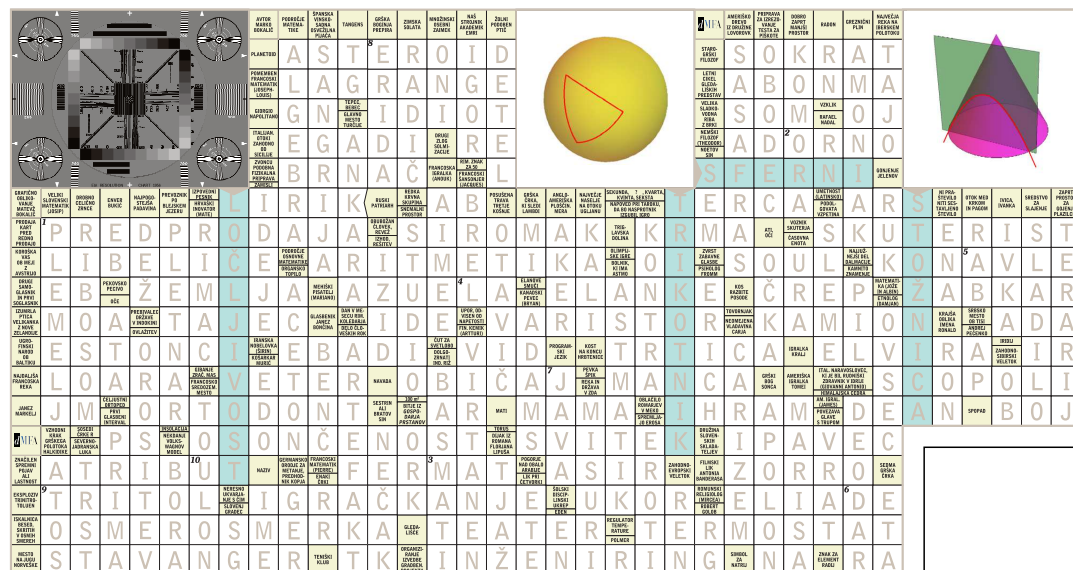
Na splošno nam kot oblikovalcem grafičnih vmesnikov ni treba poznati podrobnosti Fittsovega zakona ali pa računati indeks težavnosti in potreben čas za doseči ciljno območje. Vedeti moramo, da je čas za premik do ciljnega območja odvisen od njegove velikosti in oddaljenosti. Pri oblikovanju uporabniških vmesnikov moramo torej razmisliti o optimizaciji teh dveh spremenljivk. Ciljna območja morajo biti dovolj velika in razporejena tako, da so blizu najverjetnejše predhodne lokacije uporabnika.

Literatura

- [1] P. M. Fitts, *The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of movement*, Journal of experimental psychology, **47(6)** 1954, 381.
- [2] B. C. M. Smits-Engelsman, P. H. Wilson, Y. Westenberg, in J. Duysens, *Fine motor deficiencies in children with developmental coordination disorder and learning disabilities: An underlying open-loop control deficit*, Human movement science, **22(4-5)** 2003, 495-513.
- [3] R. Kerr, *Movement time in an underwater environment*, Journal of Motor Behavior, **5(3)** 1973, 175-178.
- [4] G. E. Brogmus, *Effects of age and sex on speed and accuracy of hand movements: And the refinements they suggest for Fitts' Law*, In Proceedings of the Human Factors Society Annual Meeting, **35** 1991, 3, 208-212. Sage CA: Los Angeles, CA: SAGE Publications.
- [5] T. O. Kvalseth, *Effects of marijuana on human reaction time and motor control*, Perceptual and motor skills, **45(3)** 1997, 935-939.
- [6] E. R. Hoffmann, *A comparison of hand and foot movement times*, Ergonomics, **34(4)** 1991, 397-406.
- [7] R. H. So in M. J. Griffin, *Effects of a target movement direction cue on head-tracking performance* Ergonomics, **43(3)** 2000, 360-376.
- [8] *Gaia/Design/FlexibleUI* - MozillaWiki, dostopno na <https://wiki.mozilla.org/Gaia/Design/FlexibleUI>, ogled 16. 5. 2023.

XXX

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 50/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke Preseka letnika 50 je **Pomlad je tu**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Eva Šolinc iz Ljubljane, Izak Pelicon iz Šempasa in Andrej Uranjek iz Velenja, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

XXX

Izbrane slike in fotografije v petdesetih letih Preseka – nadaljevanje in konec

↓ ↓ ↓

NADA RAZPET, MARKO RAZPET IN ANDREJ LIKAR

→ Pred nami je še zadnji izbor slik in fotografij, in sicer od 32. do 50. letnika. Velikost lista se je povečala na 21 cm × 25 cm, spremenila pa se je tudi njegova notranja podoba.

Nekateri Presekovi članki se lahko dobijo na spletnem naslovu <http://www.dlib.si/> v rubriki *Periodika*. Veliko starejših prispevkov pa hitro najdemo na spletnem naslovu <http://www.presek.si/> v *Arhivu revij*.

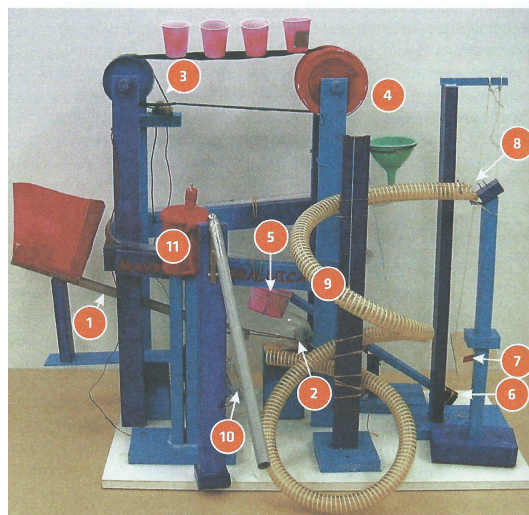
Aleš Mohorič je v 5. številki 32. letnika Preseka objavil članek *Vzporedno parkiranje*. Z geometrijskimi metodami je razložil, kako se parkira avtomobil ob pločniku v prazen prostor med dvema parkiranima avtomobiloma. Razlago je opremil s slikami, med njimi je tudi ena nekoliko hudomušna (slika 1).



SLIKA 1.

Leto 2005 je bilo razglašeno za Svetovno leto fizike. Takrat so po naših šolah potekali številni veržni eksperimenti. Nataša Vaupotič je temu namenila v 3. številki 33. letnika članek *Deveti in deseti člen verige eksperimentov*. Primer postavitve ilustrira slika 2.

Andrej Taranenko je za 3. številko 34. letnika prispeval članek *Mreže*. Obravnava trikotniške in šestkotniške mreže. Prispevek je nadaljevanje članka iz



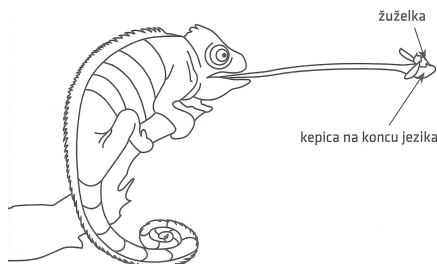
SLIKA 2.

prejšnje številke. Trikotniška mreža se uporablja pri igri *kitajska dama* (slika 3), šestkotniško pa srečamo pri čebeljem satovju.



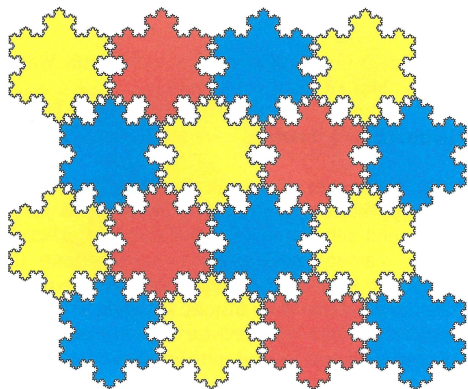
SLIKA 3.

Znano je, da kameleon prilagaja barvo okolju, pa tudi, da z jezikom bliskovito zagradi plen na precejšnji razdalji. Andrej Likar je v 5. številki 35. letnika v članku *Kako kameleon iztegne jezik?* po fizikalno razložil, kako mu to uspe (slika 4).



SLIKA 4.

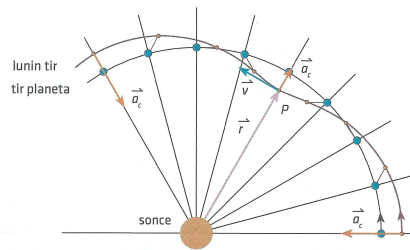
V 5. številki 36. letnika je Ciril Petr v članku *Stare krivulje, moderna orodja* s takrat (2009) modernimi računalniškimi orodji obravnaval nekatere posebne krivulje (Kochova snežinka, obratna Kochova snežinka, Peanova krivulja, zmajeva krivulja, preproga Sierpińskega, Hilbertova krivulja). Z nekaterimi se da prekriati ravnino. Slika 5 kaže, kako lahko ravnino prekrijemo s Kochovo in obratno Kochovo snežinko.



SLIKA 5.

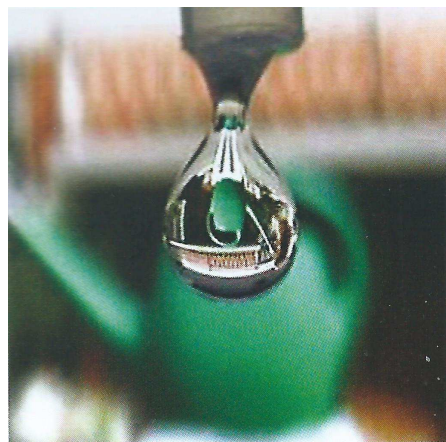
Četrta številka 37. letnika prinaša zanimiv članek *Po takem tiru se giblje Luna* avtorjev Nade Razpet in Tomaža Kranjca. To je nadaljevanje članka s podobnim naslovom iz prejšnje številke. Avtorja z računi pokažeta, da Lunin tir, če bi ga gledali s Sonca, nima

zank (slika 6). Marsikdo bi brez premisleka in računov menil, da jih ima.



SLIKA 6.

Tine Golež je za 4. številko 38. letnika prispeval tri fotografije padajoče vodne kapljice. Na prvi je v stanju, ko se ravno še drži pipe (slika 7), v drugem je vertikalno podaljšana, v tretjem pa vertikalno skrčena. V vseh stanjih pa deluje kot leča.



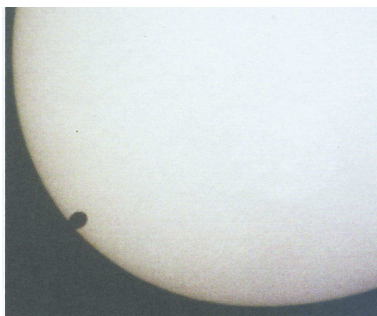
SLIKA 7.

Andrej Guštin je v 6. številki 39. letnika pisal o prehodu Venere čez Sončevo ploskev. Pojasnil je pomen tega redkega dogodka za astronomijo in podal nekaj nasvetov za opazovanje. Zadnja prehoda sta bila leta 2004 in 2012. S primerno opremo se da prehod Venere tudi fotografirati (slika 8 iz leta 2004).

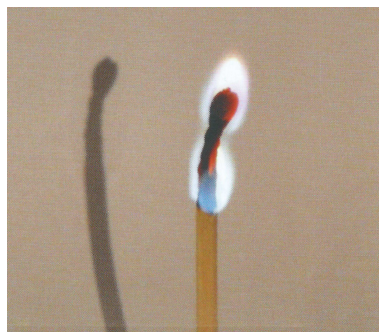
Aleš Mohorič je v 4. številki 40. letnika objavil zanimivo fotografijo (slika 9) totalnega odboja svetlobe. Pojasnil je tudi, zakaj do njega pride.

V 4. številki naslednjega letnika je Aleš Mohorič opisal nastanek ivja, Peter Legiša pa je k opisu pri-





SLIKA 8.



SLIKA 11.

pojava.



SLIKA 9.

speval dve fotografiji. Ena od teh je na sliki 10.



SLIKA 10.

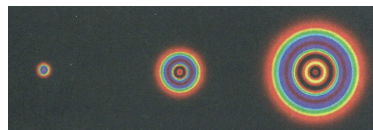
Isti avtor je v 4. številki 42. letnika pojasnil, zakaj sence plamena goreče vžigalice, na katero svetimo z lučko, na zaslonu ne opazimo (slika 11).

Nada Razpet je v prvi številki 43. letnika objavila fotografijo sosedice (slika 12) in pojasnila nastanek



SLIKA 12.

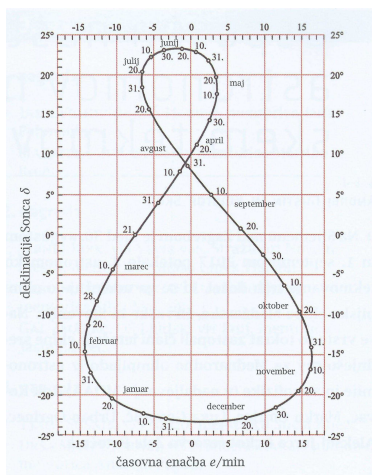
Andrej Likar je za 4. številko 44. letnika prispeval dobro predstavljen članek *Barvna lestvica*. Na sliki 13 je vodikov atom v treh stanjih: 1s, 2s in 3s.



SLIKA 13.

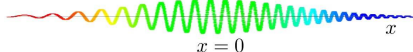
Andrej Guštin in Krištof Skok sta v 3. številki 45. letnika objavila članek *Uspešen nastop naših mladih astronomov na 3. astronomskem tekmovanju treh dežel*. Pri prvi teoretični nalogi so tekmovalci uporabili analemo, to je krivuljo na sliki 14.

Andrej Likar je v 3. številki 46. letnika v članku *Svetlobni žvrgolej* obravnaval poseben svetlobni su-



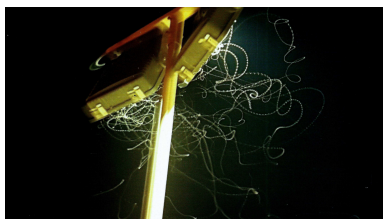
SLIKA 14.

nek, pri katerem se vzdolž njega spreminja valovna dolžina. Primer ponazarja slika 15.



SLIKA 15.

Aleš Mohorič je v prvi številki 47. letnika v članku *Tirnica* predstavil, kako nastane fotografija (slika 16) nočnih žuželk, ki letajo okoli ulične svetilke.

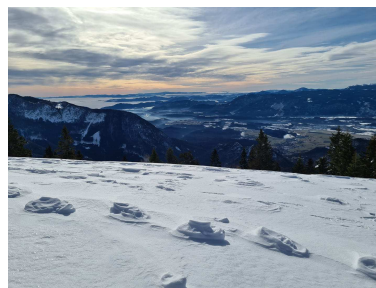


SLIKA 16.

V 6. številki 48. letnika je Nada Razpet razložila, kako nastanejo dvignjene stopinje v snegu (slika 17).

Ista avtorica je v 6. številki 49. letnika opisala zanimivo oblikovane svetlobne zajčke, ki nastanejo po odboju sončne svetlobe na velikih okenskih šipah (slika 18).

V prvi številki jubilejnega 50. letnika je Aleš Moho-



SLIKA 17.



SLIKA 18.

rič v članku *Preluknjana dlan?* pojasnil, od kod se je na sliki 19 vzela svetla pika na sredi sence človeške dlani.



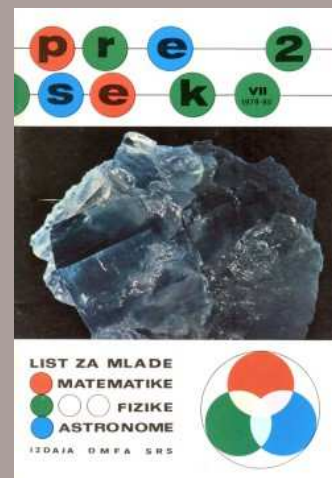
SLIKA 19.

Listu Presek želimo naslednjih 50 let uspešnega izhajanja.

× × ×

Plemljeva spominska soba na Bledu

Ob letošnji 150. letnici rojstva znamenitega slovenskega matematika Josipa Plemlja bo DMFA Slovenije na njegovem rojstnem Bledu v mesecu septembru organiziralo Konferenco slovenskih matematikov. Gotovo si bodo udeleženske in udeleženci konference ob tej priložnosti ogledali tudi hišo, ki jo je zapustil našemu društvu. V tej hiši so preživeli prijetne trenutke na poletnih šolah ali pripravah na mednarodna tekmovanja tudi številni učenci in dijaki, mnogi člani in članice društva pa tudi kakšen poletni dopust. Spominska soba, ki je bila v vili urejena leta 1977, sicer v zadnjih letih pretežno sameva. Morda pa se najde kdo, ki jo bo vsaj v poletni sezoni občasno razkazal obiskovalcem, tako kot so to nekoč vsako soboto počeli učenci blejske šole.



PLEMLJEVA SPOMINSKA SOBA NA BLEDU

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je v letu 1977 opremilo in odprlo za javnost Plemljevo spominsko sobo na Bledu, Prešernova 39. Obiskovalcev ni bilo zelo veliko. Prihajali so posamezniki, domači in tuji turisti ob najrazličnejšem času. Veseli smo bili skupinskih ogledov spominske sobe. Nekatere osnovne in srednje šole so obiskale ob ekskurzijah na Gorenjsko tudi Bled. Obiskovalci so si lahko ogledali razstavljene predmete, ki nas spominjajo na življenje in delo velikega slovenskega matematika. Kupili so lahko tudi nekaj v spomin: brošuro o prof. Plemlju, dve različni razglednici s portretom prof. Plemlja ter tri različne Plemljeve značke. Za leto 1980 pa smo pripravili še natis štirih dodatnih razglednic, ki jih je financirala Kulturna skupnost Radovljica. Na razglednicah so tile posnetki: notranjost Plemljeve spominske sobe, Bled s Plemljevim domom, gradom in otokom v ozadju, karikatura prof. Plemlja ter barvna slika rojstne hiše. Vse štiri razglednice so tudi natisnjene na 2. in 3. strani te številke Preseka. Skupinska naročila (cena 2.-din) sprejema Komisija za tisk DMFA SRS, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, pp 227.

V letošnjem letu je Plemljeva spominska soba na Bledu dobila novega pokrovitelja. Skrb za sobo je prevzela osnovna šola prof. dr. Josipa Plemlja na Bledu, za kar se ji, predvsem pa njenemu direktorju prof. Petru Nuku, najlepše zahvaljujemo. Osebnostno pa je nadzorstvo sobe prevzela učiteljica matematike na tej šoli Alenka Plestenjak. Vsi, ki si bodo želeli ogledati sobo, se za ogled lahko dogovorijo pri tovarišici Plestenjak na osnovni šoli Bled (tel. št. 064-77-861), ali na njenem domu (tel. št. 064-77-828) na Bledu, Prešernova 34, ki je le nekaj deset metrov oddaljen od Plemljeve hiše. Do nadaljnjega pa bodo v sobi dežurali učenci blejske šole vsako soboto od 15h - 16h.

