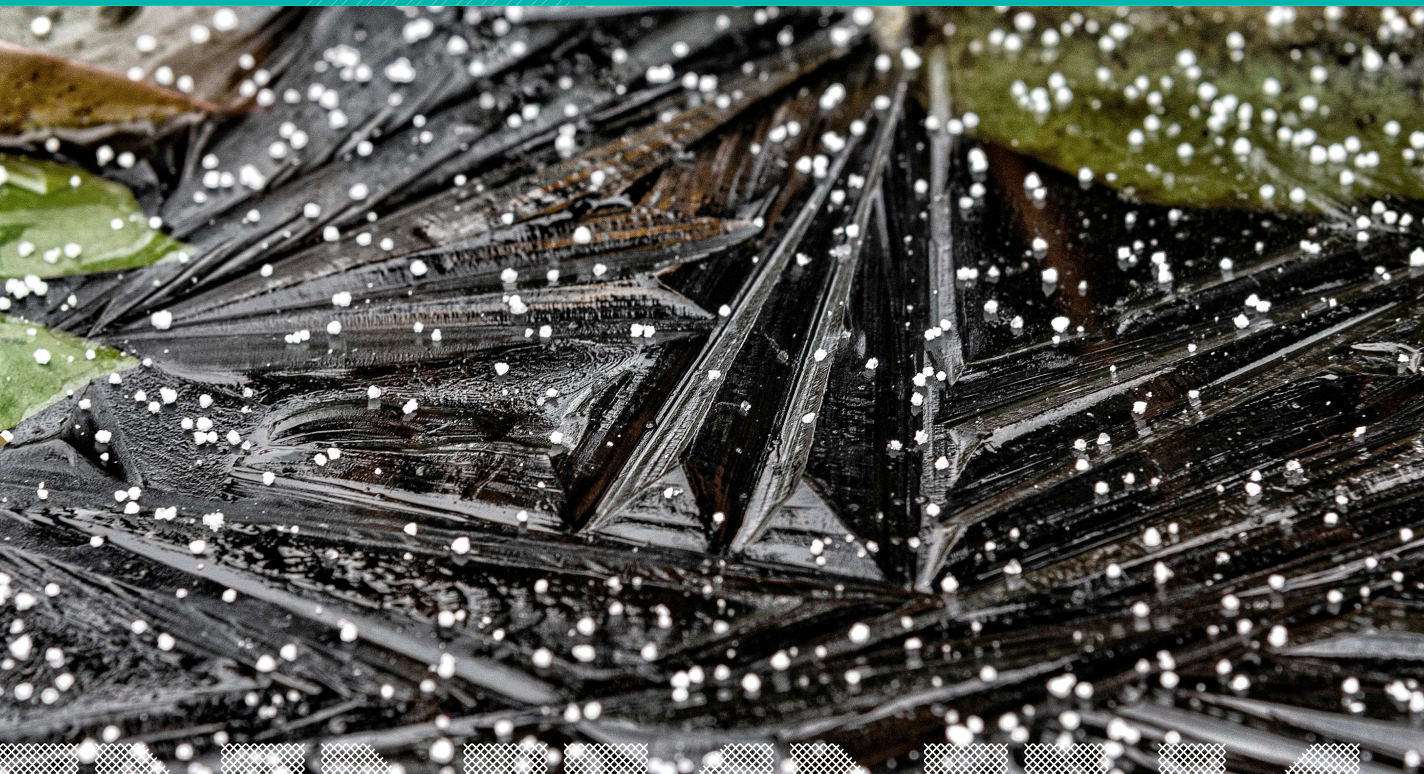




PRESEK



- LIU HUI IN V PRAVOKOTNI TRIKOTNIK VČRTANA LIKA
- NEKROGELNE LEČE
- OPAZOVANJE ASTEROIDA VESTA S TELESKOPOM GOCHILE

ISSN 0351-6652



Ohranjanje luči prižganih



→ Od kod pride električna energija, ko obrnemo stikalo sobne svetilke? V tradicionalnem električnem omrežju elektrika nastaja v ogromnih elektrarnah in se prenaša na velike razdalje. Dandanes pa lahko tudi samostojni domovi in manjša podjetja s sončnimi paneli generirajo dovolj energije za lastne potrebe in celo oddajo presežek v ostalo omrežje. Prilagajanje omrežja, da lahko energija teče v obe smeri, je odvisno od matematike. Z uporabo linearnega programiranja in operacijskih raziskav inženirji načrtujejo učinkovite in zanesljive sisteme, ki upoštevajo omejitve, kot so poraba na različnih lokacijah, cena solarnih inštalacij in distribucij, ter proizvodnja energije pri različnih vremenskih razmerah.

Podobna matematika pomaga ustvarjati mikroomrežja – majhne lokalne sisteme, ki lahko delujejo neodvisno od glavnega omrežja. Mikroomrežja lahko omogočajo dostop do energije, kadar večja naravna nesreča onemogoči glavno omrežje. Med uničujočim potresom in cunamijem na Japonskem leta 2011 je mikroomrežje dajalo energijo bolnišnici v mestu Sendai. Novo mikroomrežje v zgodovinskem delu mesta Chicago kaže, kako lahko moč tehnologije izboljša delovanje skupnosti na občutljivih območjih.

Razvijanje novih metod pogosto pomeni pretvorbo enačb v računalniške simulacije za vizualizacijo novih mikroomrežij. Povezano področje študija je tudi solarno napovedovanje. Z matematičnimi modeli lahko bolje načrtujemo pretok energije sonca v naše domove in okolico.

Več informacij najdete v gradivu »Solar Systems Integration Basics«, Solar Energy Technologies Office, US Department of Energy.

Izvirno besedilo: Keeping the Lights On, Mathematical moments from the AMS. Prevod in priredba: B. Kuzman.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 50, šolsko leto 2022/2023, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2022/2023 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2023 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2164

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Ohranjanje luči prižganih

UVODNIK

- 4 Doba velikih
(Andrej Guštin)

MATEMATIKA

- 5-7 Liu Hui in v pravokotni trikotnik včrtana lika
(Nada Razpet)
- 18-19 GeoGebrin kotiček – Ponazoritev limite zaporedja
(Boštjan Kuzman)

FIZIKA

- 8-10 Nekrogele leče
(Andrej Likar)
- 30-31 Naravoslovna fotografija – Množica mavric
(Luka Hadl)

ASTRONOMIJA

- 20-22 Opazovanje asteroida Vesta s teleskopom GoChile
(Alexander Gaydukov)

SLIKA NA NASLOVNICI: Nenavadna kristalizacija ledu na gladini mlake. Foto: Andrej Guštin

RAZVEDRILO

- 7 Barvni sudoku
- 14 Rešitev novoletne nagradne uganke
- 15 Tekmovanje π
(Jasna Prezelj)
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 19 Rešitve uganke s strani 14
- 23-27 Izbrane slike in fotografije v petdesetih letih Preseka – nadaljevanje
(Nada Razpet, Marko Razpet in Andrej Likar)
- 28 Rešitev nagradne križanke Presek 50/3
(Marko Bokalič)
- 29 Bilo je nekoč v reviji Presek – 33. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi

TEKMOVANJA

- 11-13 Odprava na 19. IJSO v Bogotá
(Primož Markovič, Tifani Bergel, Maj Bombek, Svit Miklavčič, Blaž Gašperlin in Martin Alojz Flisar)
- priloga** 13. tekmovanje v znanju astronomije za Dominkova priznanja – državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje v znanju fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje
- priloga** 60. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Doba velikih



ANDREJ GUŠTIN, UREDNIK ZA ASTRONOMIJO

→ Prejšnji »astronomski« uvodnik sem zaključil z odprtim vprašanjem o pomenu revije Presek. V časovnem intervalu med uvodnikoma pa se je zgodila 15. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike za srednješolce in srednješolke, na kateri so naši tekmovalci znova zabeležili izjemen uspeh. Peter Andolšek je še drugič zapovrstjo prejel zlato medaljo, kar je nekaj izjemnega. Pravzaprav je bila vsa ekipa izjemna in je k Petrovemu zlatu primaknila še dve srebrni in bronasto medaljo ter pohvalo. Olimpijade iz znanja pa niso pomembne le za tekmovalce in tekmovalke, temveč tudi za mentorje, saj so ti dogodki odlična priložnost za izmenjavo izkušenj med mentorji, spoznavanje različnih pristopov pri popularizaciji znanosti, v našem primeru astronomije in astrofizike. Na olimpijadah mentorji namreč skupaj preživimo na stotine ur in med razpravami o nalogah, prevajanjem in drugimi diskusijami se vedno najde čas za pogovor. Tako sva z vodjo bolgarske ekipe na vroči terasi hotela sredi Gruzije udarila eno o pripravah ekip v težkih časih pandemije. Z Nikolo se že dolgo pozna. Bolgari delajo dobro. Uspešni so. Pa pravi Nikola, da se na pripravah ne ukvarjajo

več z jezikovnimi težavami bolgarščine v astronomiji in vse lepo speljejo kar v angleškem jeziku, da se nalog in strokovnih vsebin ne splača prevajati, saj na ravni znanosti tako ali tako vse poteka v angleščini, da so tekmovalkam in tekmovalcem angleški pojmi bližje in tako dalje. Osupel sem sicer še malo pobezal vanj, a dobil lakonične odgovore o nepomembnosti domačega strokovnega izrazoslovja.

Moje mnenje pa je v diametralnem nasprotju z bolgarskim kolegom. Uporaba maternega jezika v znanstvenih in poljudnoznanstvenih člankih in vsebinah je nujna, saj prispeva k bogatenju jezika, bogatenju izrazoslovja in izraznih sposobnosti posameznikov ter družbe na splošno. Prakticiranje branja in pisanja strokovne in poljudne literature v maternem jeziku je za neko družbo in njeno občo kulturo nujno, sicer čez čas utone v globalnem oceanu na videz pomembnejših kultur. Morda sem iz napačnega stoletja, a prepričan sem, da je ohranjanje slovenske izraznosti v matematiki, fiziki, astronomiji in računalništvu tudi pomemben cilj Preseka.



Liu Hui in v pravokotni trikotnik včrtana lika

↓↓↓

NADA RAZPET

→ Ena najstarejših kitajskih matematičnih knjig, sestavljena iz devetih poglavij, je *Jiuzhang suanshu* (九章算术). Angleški prevod ima naslov *The Nine Chapters on the Mathematical Art* ali po slovensko *Devet poglavij matematičnih umetnosti*. Delo je nastajalo več stoletij, pisali so ga različni neznani avtorji, dokončno obliko pa mu je dal kitajski matematik Liu Hui (刘惠), ki je živel v 3. stoletju našega štetja in je problemom dopisal komentarje, s katerimi je natančno analiziral posamezne korake, ki vodijo do rešitve problema.

Devet poglavij je bil dolgo časa osnovni matematični učbenik. Besedilo se začne z opisom praktičnega problema, navadno s številskimi podatki, sledi postopek za reševanje in razlaga postopka, ki pripelje bralca do rešitve problema za konkretne podatke. Postopek za rešitev posebnega primera je prikazan tako, da ga lahko zapišemo s splošno enačbo z uporabo algebrske simbolike.

Deveto poglavje iz omenjene knjige obravnava pravokotni trikotnik. Na sliki 1 je ilustracija k 13. nalogi, ki je nastala v kasnejših izdajah *Devetih poglavij* (1261, povzeto po [2]).

Liu Hui geometrijske naloge navadno rešuje *slikovno*, to je z grafično predstavitvijo postopka reševanja, in sicer na dva načina:

- lik ali telo razreže na *gradnike*, katerih ploščino ali prostornino zna izračunati, ali pa
- iz razrezanih koščkov sestavi nov lik ali telo, ki mu zna izračunati iskano količino.

Pri rezanju Liu Hui navede, kakšne barve naj bodo posamezni kosi, jih pa sam ne obarva. Kose sestavlja tako, da kosi iste barve ležijo skupaj. Ker ne navaja dolžin stranic, je tako sestavljanje splošna rešitev problema. Oglejmo si dva primera iz njegove knjige.



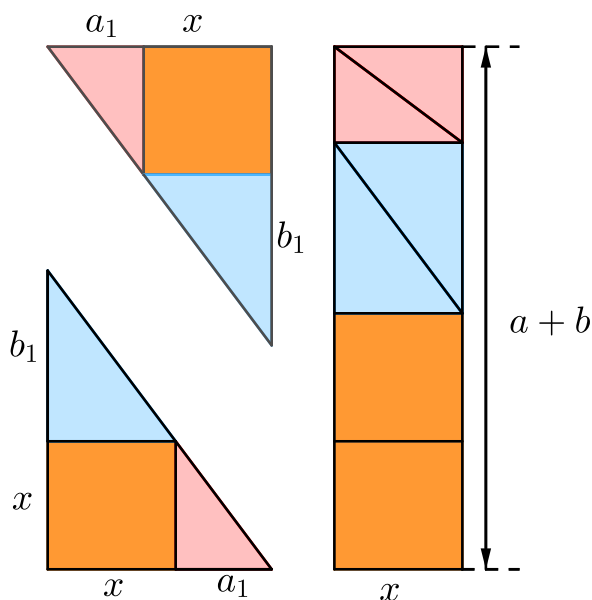
SLIKA 1.

Bambusovo steblo je visoko 1 zhang (10 chi ali 3,58 m). Veter ga zlomi tako, da njegov konec sega 3 chi od vznožja. Na kateri višini se steblo zlomi?



→ V pravokotni trikotnik včrtamo kvadrat

Pravokotnemu trikotniku s katetama a in b včrtaj kvadrat. Dve stranici naj ležita na katetah, eno oglišče kvadrata pa na hipotenuzi pravokotnega trikotnika. Izračunaj stranico kvadrata.



SLIKA 2.

Imamo dva skladna pravokotna trikotnika. Vsakemu včrtamo kvadrat in ga razrežemo na dva pravokotna trikotnika in kvadrat. Dele zložimo v pravokotnik.

Liu Hui je nalogo rešil tako, da je vzel dva skladna pravokotna trikotnika s katetama a in b in vsakemu včrtal kvadrat. Označimo iskano stranico kvadrata z x . Nato je vsakega od trikotnikov razrezal, kot kaže slika 2, in dele sestavil v pravokotnik. Iz zlaganja kosov je razvidno, da je osnovnica pravokotnika kar stranica kvadrata x . Kaj pa višina pravokotnika? Kateta b je sestavljena iz oranžnega in modrega dela. Oranžni del ima stranico x , modri del pa označimo z b_1 . Kateto b zapišemo kot: $b = b_1 + x$ in kateto a kot $a = a_1 + x$. Ko kose sestavimo, je višina pravokotnika dolga $2x + b_1 + a_1 = a + b$. Ploščina dveh pravokotnih trikotnikov je ab , ploščina sestavljenega pravokotnika pa $x(a + b)$. Iz tega sledi:

$$\blacksquare ab = x(a + b) \quad x = \frac{ab}{a + b} \quad (1)$$

Našli smo stranico včrtanega kvadrata. V naših šolah navadno rešujejo tako nalogo s podobnimi trikotniki. Kvadrat v pravokotni trikotnik včrtamo tako, da poiščemo presečišče simetrale pravega kota s hipotenuzo, ta točka je eno od oglišč kvadrata. Naprej pa znajo bralci sami.

Liu Hui nadalje zastavi še tole vprašanje: če je dolžina katete pravokotnega trikotnika b sorazmerna z $a + b$, kateri dolžini je sorazmerna dolžina stranice kvadrata x ? Odgovor: kateti a .

$$\blacksquare b : (a + b) = x : a \quad (2)$$

To vidimo že iz enačbe (1), saj je enačba (2) le drugačen zapis enačb (1).

V pravokotni trikotnik včrtamo krožnico

V pravokotni trikotnik s katetama a in b včrtaj krožnico. Poišči polmer te krožnice.

Narišimo štiri skladne pravokotne trikotnike. Vsakemu včrtamo krožnico in ga razrežemo na pravokotne trikotnike in kvadrat, kot kaže slika 3. Dele smo obarvali tako, kot je zapisal Liu Hui. Stranica kvadrata je enaka polmeru včrtanega kroga, označimo ga z r . Kateta b je sestavljena iz rdečega in oranžnega dela, torej je $b = b_1 + r$, kateta a pa iz modrega in oranžnega dela $a = a_1 + r$, hipotenuza pa iz rdečega in modrega dela, torej $c = b_1 + a_1$.

Vse dele štirih pravokotnih trikotnikov zložimo v pravokotnik. Osnovnica pravokotnika je $2r$. Višina pa je sestavljena iz

$$\blacksquare v = 2b_1 + 2a_1 + 2r = b_1 + r + a_1 + r + b_1 + a_1 = b + a + c$$

Ploščina štirih pravokotnih trikotnikov je $2ab$, ploščina pravokotnika pa $2r(a + b + c)$. Torej:

$$\blacksquare 2ab = 2r(a + b + c) \quad r = \frac{ab}{a + b + c}$$

Vse dokazuje, da je predstavljena metoda res pravilna, pa prepuščamo bralcem. Odgovorite še na vprašanje, zakaj je Liu Hui v prvem primeru vzel dva skladna pravokotna trikotnika, v drugem pa štiri.

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

	8			4		7	3
	7	1				8	2
							8
	2		6	3			
2				7		6	
1			8				
6	1						4
		4				3	

→
→
→

REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	3	2	1	7	4	5	8
4	5	7	8	3	2	1	6
5	4	3	2	8	7	6	1
1	6	8	7	5	3	4	2
7	1	5	3	6	8	2	4
8	2	4	6	1	5	3	7
2	8	6	5	4	1	7	3
3	7	1	4	2	6	8	5

SLIKA 3.

Imamo štiri skladne pravokotne trikotnike. Vsakemu včrtamo krožnico in ga razrežemo na pet delov: kvadrat in štiri pravokotne trikotnike. Vse dele zložimo v pravokotnik.

Literatura

- [1] J.-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 300–301, 2006.
- [2] *Pythagorean Theorem*, dostopno na: <https://www.history-of-mathematics.org/PythagoreanTheorem.html>, ogled: 1. 2. 2023.

× × ×

× × ×

Nekrogelne leče



ANDREJ LIKAR

→ Leče so stara iznajdba. Poznali so jih že v starem Egiptu, pa v antiki, predvsem zbiralne kot sredstvo za prižiganje ognja. Menda je Neron, če verjame Pliniju, uporabil kristalno razpršilno lečo pri opazovanju gladiatorskih iger v Rimu. V srednjem veku so jih uporabljali kot bralne leče, preprosto so stekleno kroglo razpolovili. Steklene krogle napolnjene z vodo so donedavna uporabljali čevljarji v Tržiču, da so jim zbrale svetlobo iz petrolejke na delovno površino.

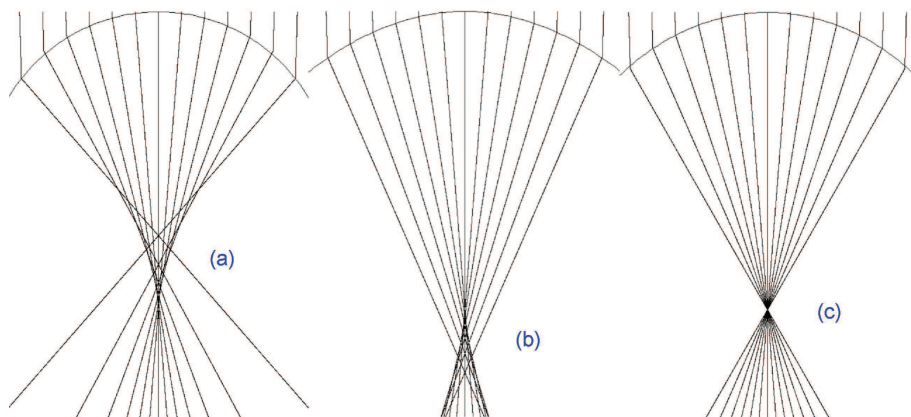
Pravo zanimanje za leče pa je nastopilo v drugi polovici 13. stoletja v severni Italiji, ko so jih začeli uporabljati kot očala za korekcijo vida. Takrat so masovno brusili in gladili steklene leče za očala, najprej v Firencah in Benetkah, pozneje pa tudi na Nizozemskem in v Nemčiji. Na Nizozemskem je bil okrog leta 1595 narejen prvi mikroskop, nekaj pozneje tudi daljnogled.

Leče so zanimiva tema v šolah, od osnovne preko srednje do prvih letnikov tehniških fakultet na univerzah. Geometrijsko optiko dandanes na fakultetah obravnavajo le pregledno in na hitro, v mojem

času šolanja pa smo leče in lečja obravnavali kar podrobno. Pri tem smo obravnavali napake pri preslikavanju s krogelnimi lečami, ki so bile takrat edino na voljo. Na predavanju profesorja Janeza Strnada sem si ga drznil vprašati, ali bi kakšna druga oblika leče imela manj napak ali pa sploh nobene. Takrat, pa seveda v preteklosti tudi, bi masovna izdelava takih leč bila povsem neizvedljiva. Odgovoril mi je, da z nekrogelnimi lečami ne bi kaj prida pridobili, saj imajo tudi te svoje muhe.

Z napredkom tehnologije, predvsem z iznajdbo laserjev in z neslutnim razvojem računalništva pa so nekrogelne leče postale zanimive. Danes njihova uporaba precej poenostavi zapletena lečja optičnih naprav.

Bistvena pridobitev nekrogelne ploskve (ali nesferične, kot radi rečemo s tujko) je odprava krogelne aberacije. Krogelne leče le približno zberejo vzporedni svetlobni curek v točko. To dobro vidimo pri lečah, ki so velike v primeri z njihovo goriščno razdaljo. Na sliki 1 so prikazani pred lečo vzporedni žarki po lomu na prvih ploskvah leče, in sicer na krogelni (a), paraboloidni (b) in iskani nekrogelni ploskvi (c). Prikazani so žarki in prerezi ploskev z ravnino, v kateri leži optična os. Ploskve imajo seveda enake prereze v vsaki ravnini, v kateri leži optična os. Pravimo, da so ploskve osno simetrične.

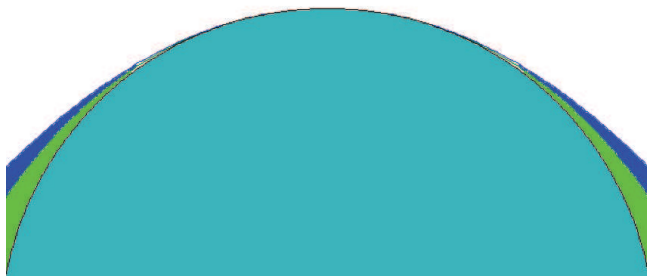


SLIKA 1.

Žarki po lomu na a) krogelni ploskvi, b) paraboloidni ploskvi, c) nekrogelni ploskvi

Da si ne grenimo življenja, bomo odslej obravnavali le lom žarkov, vzporednih z optično osjo, le na eni zakrivljeni ploskvi, ki omejuje steklo. Pri lečah imamo seveda dva loma, na prvi, vstopni, in drugi, izstopni strani leče. Slika, ki jo tvori prva zakrivljena ploskev, pa služi drugi ploskvi kot predmet. Če razumemo, kaj se dogaja s svetlobo na eni ploskvi, ni več težko obravnavati preslikave pri prehodu svetlobe skozi obe ploskvi.

Vidimo, da se robni žarki pri krogelni ploskvi lomijo preveč in ne zadenejo gorišča, ki ga tvorijo obojni žarki. Zakrivljenost krogelne ploskve je prevelika, če hočemo, da se vsi žarki po lomu zberejo v eni točki. Na misel nam pride, da bi paraboloidna oblika ploskve, ki se na robu ne krivi tako močno, bila boljša. Na sliki 1 (b) pa vidimo, da se paraboloidna ploskev premalo krivi, saj se obrobni žarki premalo lomijo. Krogelno in paraboloidno ploskev smo izbrali tako, da imajo pri obeh obosni žarki gorišče na istem mestu. Iskana ploskev bo torej nekje med tema ploskvama, glej sliko 2. Kako priti do nje?



SLIKA 2.

Oblike lomnih ploskev – krogelna ploskev (spodnja), paraboloidna ploskev (zgornja) in iskana ploskev brez krogelne aberacije (ki je med obema prejšnjima ploskvama).

Pri iskanju te ploskve si pomagamo s skico na sliki 3. Žarek A , vzporeden z geometrijsko osjo ploskve in od nje oddaljen za r , se v točki L lomi in zadene gorišče F . Vpadni kot α in lomni kot β in lomni količnik stekla n so povezani preko lomnega zakona:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n.$$

Kot γ je določen s trikotnikom $\triangle LFG$, kjer je točka G presečišče navpičnice skozi točko O in vodoravnice

skozi F . Takoj vidimo, da je kot γ kar razlika kotov α in β , kot α pa enak kotu nagiba ploskve v točki L . Računanje gre sedaj kot po maslu. Ker je

$$\beta = \alpha - \gamma,$$

velja:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma.$$

ali:

$$\sin \alpha \left(\frac{1}{n} - \cos \gamma \right) = -\sin \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Levo in desno stran kvadriramo, da odpravimo kvadratni koren na desni strani in dobimo:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \gamma}{\frac{1}{n^2} + 1 - \frac{2 \cos \gamma}{n}}.$$

Sledi izraz za tangens kota α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma - \frac{1}{n}}.$$

Ker je kot γ znan, trikotnik $\triangle LFG$ pa pove, da velja:

$$\sin \gamma = \frac{r}{\sqrt{(f+z)^2 + r^2}},$$

in

$$\cos \gamma = \frac{f+z}{\sqrt{(f+z)^2 + r^2}}.$$

Koordinatni sistem z absciso r in ordinato z na sliki 3 z izhodiščem v točki O smo postavili tako, da je $z(r) \leq 0$, goriščno razdaljo f pa obravnavamo kot pozitivno ($f > 0$).

Če smo dobili pravi izraz, preverimo s programom, ki lahko sledi žarkom tudi skozi lečje. Tega smo že uporabili pri risanju slike 1 a) in b). Napisali smo ga tako, da se žarek, ko naleti na ploskev, lomi v skladu z lomnim zakonom. Pri tem moramo vedeti za naklon lomne ploskve. Le-tega pa smo pravkar izračunali. Iskano nekrogelno ploskev najdemo prav zato, ker poznamo naklonski kot tangentne ravnine α v vsaki točki prostora. Začnemo pri $r = 0$, kjer je $z = 0$, si izberemo primerno majhen korak Δr in določimo spremembo Δz razdalje od osi r do ploskve.



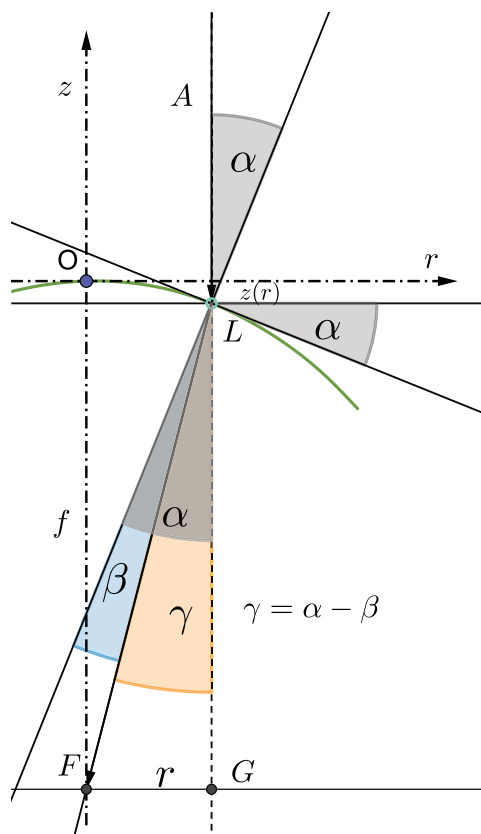


Vedno znova izračunamo $\tan \alpha$ in se po korakih oddaljujemo od središča pri $r = 0$, pri čemer spremembo Δz vsakokrat izračunamo takole:

$$\Delta z = -\tan \alpha \Delta r.$$

Tako smo prišli do ploskve brez aberacije, na sliki 2 prikazane v prerezu z robom zelenega lika.

S slike c) vidimo, da smo prav zadeli, saj se prav vsi žarki, tudi obrobni, sekajo v gorišču. Krogelno aberacijo smo tako povsem odpravili.

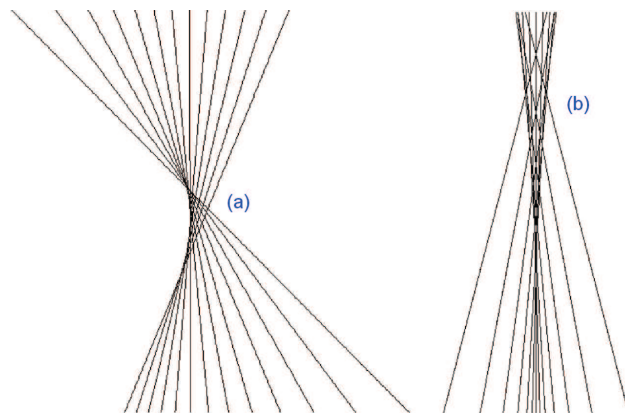


SLIKA 3.

Skica pri iskanju ustrezne nekrogelne ploskve

Seveda to velja le za vzporeden snop žarkov v smeri optične osi ploskve. Kaj pa, če pade snop poševno? Ali se bodo vsi lomljeni žarki spet zbrali v eni točki? Pa poskusimo! Program za sledenje žar-

kov nam bo spet prišel prav. Na sliki 4 (a) vidimo potek žarkov po lomu v tem primeru. Žal, kot vidimo, se žarki ne sekajo v eni sami točki. Prav to je mislil profesor Strnad v odgovoru na moje vprašanje. Pri krogelni leči je zaradi simetrije krogelna aberacija neodvisna od nagiba vpadnega snopa. Pri majhnih kotih vpada pa se nesferična leča dobro odreže.



SLIKA 4.

Žarki po lomu poševnega vzporednega snopa na nekrogelni ploskvi (a) in po lomu žarkov iz bližnjega točkastega predmeta na tej ploskvi (b)

Doslej smo obravnavali le snop vzporednih žarkov, torej svetlobo zelo oddaljenih točk. Za konec si oglejmo, kako dobro nesferična leča preslika bližnjo točko. Na sliki 4 (b) imamo potek žarkov po lomu na nekrogelni ploskvi. Vidimo, da robni žarki precej zgrešijo sliko točke, ki jo tvorijo obosni žarki. V primeri s krogelno ploskvijo pa je nekrogelna tudi v tem primeru še vedno boljša.

Spoznanja, do katerih smo prišli v obravnavi nekrogelnih leč, s pridom izkoriščajo pri načrtovanju lečij za objektivne v sodobnih kamerah, med drugim tudi v kamerah pametnih telefonov. Tudi v očala vgrajujejo nekrogelne leče. Dajejo ostrejši in nepopačen vid, oči so bolj sproščene kot pri krogelnih lečah. Leče v očalih so tudi tanjše in zato lažje. Posebno pri večjih dioptrijah nekrogelne leče skoraj ne popačijo pogleda na oči očaljarja, kar je lahko pri krogelnih lečah precej moteče.

× × ×

Odprava na 19. IJSO v Bogotó



PRIMOŽ MARKOVIČ, TIFANI BERGEL, MAJ BOMBKEK, SVIT MIKLAVČIČ, BLAŽ GAŠPERLIN IN MARTIN ALOJZ FLISAR



Tole je kratko poročilo o tem, kako smo preživeli 19. Mednarodno mladinsko naravoslovno olimpijado (IJSO, *International Junior Science Olympiad*), ki je potekala decembra 2022 v živo v glavnem mestu južnoameriške države Kolumbije. Udeležili smo se je dijakinja in dijaki Tifani Bergel (lani devetošolka na OŠ 16. decembra Mojstrana, letos dijakinja 1. letnika Gimnazije Jesenice), Maj Bombek (lani devetošolec na OŠ Tabor I Maribor, letos dijak 1. letnika Tehniške gimnazije SERŠ Maribor), Martin Alojz Flisar (lani devetošolec na OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja Črnuče, zdaj dijak 1. letnika Gimnazije Bežigrad), Blaž Gašperlin (lani devetošolec na OŠ Franceta Prešerna Kranj, zdaj dijak 1. letnika Gimnazije Kranj), Svit Miklavčič (lani devetošolec na OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana, letos dijak 1. letnika Gimnazije Vič), ter edini še vedno osnovnošolec, Primož Markovič z Osnovne šole Milana Šuštaršiča v Ljubljani. Spremljali so nas vodje ekipe Domen Vautpotič, Margareta Obrovnik Hlačar in Barbara Rovšek.

Na letališču El Dorado v Bogotí v Kolumbiji smo varno pristali 1. decembra 2022 ob 21:45 (oziroma 2. decembra ob 3:45 po našem času), po mirnem 10-urnem čezoceanskem letu in 7-urnem čakanju na ta let na hladnem letališču Charles de Gaulle v Parizu, kamor smo prifrčali iz Zagreba. Potovali smo vsega skupaj več kot 24 ur. Pa poti še ni bilo konec; z El Dorada do sobe v prvem hotelu so minile še vsaj 3 ure. Naslednji dan smo se po kratkem čakanju na avtobus napotili k našemu pravemu hotelu, kjer smo vsi mladoletni udeleženci olimpijade preživeli naslednjih deset dni. Vodje vseh ekip so ostali v prvem hotelu, kjer so opravili tudi vse svoje delo z nalogami, ki smo jih kasneje reševali.

Istega dne, kot smo se vselili v svoj hotel, se je olimpijada z otvoritveno slovesnostjo tudi uradno začela. Posnetek dogodka je še vedno na voljo za

ogled na strani <https://www.facebook.com/uniantonionarino/videos/1121811235165257/> (naša skupina prikoraka na oder v 59. minuti). Naslednji dan je bil za nas prost in smo ga izkoristili, da se spoznamo s hotelom in z drugo mladino s celega sveta. Hitro smo se spoprijateljili s hrvaško ekipo, s katero smo si delili vodnika Felipeja. Felipe se je pred tremi leti tudi sam kot član kolumbijske ekipe udeležil iste olimpijade v Katarju, zdaj pa tako kot drugi naši vodniki končuje srednjo šolo. Felipe je kljub nerazumevanju naših pogovorov, ki so potekali večinoma v mešanici slovenščine in hrvaščine, vedno ostal radoživ.

Vsak od naših naslednjih 10 dni se je začel ob šestih zjutraj, ko nas je po sobnem telefonu poklical zaskrbljeni Felipe. Če se nismo takoj oglasili na telefon, je prišel trkat na naša vrata. Ob sedmih nas je v prvem nadstropju hotela čakal zajtrk, kjer smo se, če



SLIKA 1.

Nas 6 (z leve: Svit, Maj, Primož, Martin, Blaž in Tifani) in vodnik Felipe (med Majem in Primožem) pred planetariumom.





smo bili dovolj hitri, najedli rogljičkov, vafeljev, vroče čokolade, ananasa in napili pomarančnega soka. Zajtrk je običajno trajal do osmih, ko smo se odpravili v pritličje, kjer smo počakali na nadaljnje aktivnosti (na teste, ekskurzije ali slovesnosti). Po aktivnostih smo se vrnili v hotel, kjer smo dobili kosilo, ki ga je velikokrat predstavljal le pomarančni sok, nekoliko posušen riž ter precej trdo meso. Za kosilo smo zato pogosto praznili škatle piškotov, ki smo jih imeli na srečo kar precej s sabo. Popoldnevi so bili prosti, porabili smo jih za prekuhanje vode v kavomatu, igranju gob (igra s kartami, priporočljivo trde platnice), osla in za gledanje ameriškega nogometa po televiziji.



SLIKA 2.

Varovanci vodiča Felipeja, 4 od nas 6-ih in celotna hrvaška ekipa na hribu Monserrat nad Bogotá.

Medtem ko smo se prvi dan spoznavali s hotelom in mladino s sveta, so vodje ekip pripravljali naloge za naš prvi test. Test smo pisali naslednji dan in je trajal 3 ure. Sestavljen je bil iz tridesetih vprašanj z izbirnimi odgovori. Na sliki 4 je ena od nalog, ki nam je dala največ vetra in smo jo pravilno rešili le redki.

Po dnevu za prvi test smo imeli spet dan za počitek. Obiskali smo planetarij. Pot do planetarija je bila kar precej dinamična. Odlikovale so jo kolumbijske ceste z vsemi svojimi vijugami, vdolbinami (luknjami) in neravninami, ki so potnikom v avtobusu preverjale gibljivost hrbtenice. Planetarij je bil muzej, na katerem je sedela velikanska kupola, v notra-

njosti prekrita z zasloni. Po ogledu razstave smo si pod kupolo ogledali dokumentarec o vesolju in temni snovi.

In že je tu torek, in z njim tudi drugi test – teorija. Ta je bil obsežnejši, zato smo imeli za reševanje štiri ure časa. Po drugem tekmovalnem dnevu je sledil obisk Monserrata, bližnjega hriba, ki bi mu v naših krajih gotovo rekli gora, ker je višji od Triglava in pravzaprav celo višji od 3000 m. Z vzpenjačo, podobno tisti, ki vodi na Ljubljanski grad, smo se predstavili na vrh. Tam smo si s težkim dihom ogledali cerkev, otroško razposajeno svetlobno okrasitev celega območja in razne ulične trgovince.

Še zadnji, eksperimentalni del testa je bil pred nami, sestavljen iz dveh fizikalnih nalog (elektrika), dveh kemijskih (viskoznost polimerov in kislost neke pijače) in ene biološke (določanje kakavovca). Ta del nam je razmeroma dobro šel, čeprav je primanjkovalo upornikov in časa, še posebej pri fiziki. Po koncu eksperimentiranja smo si oddahnili, saj je bilo prav do zadnjega trenutka napeto, še posebej nas je vznemirjal odštevalnik časa na velikem platnu.

V petek smo se z avtobusi peljali na drugo stran mesta, kjer smo si ogledali rudnik soli v Zipaquiri. Rudarji so že izčrpan rudnik spremenili v podzemno katedralo, ki je splet rogov in votlin, okrašenih in predelanih z verskimi motivi. Labirint podzemnih rogov se je končal s komercialnim delom, dobrih dvesto metrov pod površjem, kjer je večina obiskovalcev spremljala nogometno tekmo med Hrvaško in Brazilijo, ki je ravno potekala, ter ob tem glasno navijala.

V soboto smo imeli predavanja na Univerzi Antioño Nariño, ki so se na koncu prelevila v tekmovanje talentov. Tam smo preždeli vse do mraka.

Naša odprava v Kolumbijo se je počasi bližala koncu z zaključno slovesnostjo, na kateri smo ponosno pobrali zaslužena odličja in šteli dosežke tudi drugih pozancev. Kot že lani smo tudi letos prav vsi člani slovenske ekipe prejeli odličja: Primož Markovič in Maj Bombek sva prejela srebrni medalji (in si, potem ko so vsakega od naju poklicali na oder, pošteno oddahnili), drugi člani ekipe Tifani Bergel, Martin Alojz Flisar, Svit Miklavčič in Blaž Gašperlin pa bronaste. To ni nič čudno, ker smo se na to olimpijado zelo resno pripravljali.

Na oder nas sicer niso klicali po nekem določenem vrstnem redu, ampak malo mešano (vsaj tako so nam

zatrldili vodje ekipe, ki poznajo naše rezultate); prej nismo vedeli, ali smo naloge reševali dovolj dobro, da bo sploh kdo od nas prejel odličje. Zato nas je tudi kar malo stisnilo, ko so kot prvega na oder poklicali Martina. Nanj smo polagali največje stave, ker je bil med nami najbolj izkušen. Olimpijade se je namreč udeležil že lani (in takrat prejel srebrno odličje).



SLIKA 4.

Mi z odličji, levo od nas Barbara, desno Margareta, vodji ekipe.

To je bilo zadnje dejanje 19. Mednarodne mladinske naravoslovne olimpijade. Naslednji dan smo se že napotili domov. Slovo od novih prijateljev in Felipeja je bilo veselo, ker smo prepričani, da se bomo še kje srečali. Dogodivščine ne olimpijadi nam bodo za vedno ostale v nepozabnem spominu.

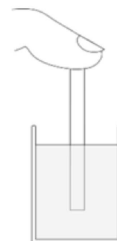
Pokrovitelja priprav in udeležbe slovenske ekipe na IJSO sta Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zveza za tehnično kulturo Slovenije.

Rešitev naloge

Ko s prstom zatesnimo odprto krajišče cevke dolge $l = 20$ cm, je v njem stolpec zraka, dolg $l/2 = 10$ cm, tlak v stolpcu pa je enak zunanemu zračnemu tlaku p_0 . Ko cevko dvignemo iz posode z živim srebrom, nekaj živega srebra zaradi svoje teže izteče iz cevke. Stolpec živega srebra je potem dolg le x (manj od 10 cm), stolpec zraka v zgornjem delu cevke se podaljša na $l - x$, njegova prostornina se poveča, tlak

4. Polovica 20 cm dolge valjaste cevke, odprte na obeh krajiščih, je potopljena v živo srebro. Zgornje krajišče cevke zamašimo s prstom, potem pa cevko v celoti počasi dvignemo iz živega srebra. Pri tem del živega srebra izteče iz cevke. Kolikšna je višina stolpca živega srebra, ki ostane v cevki? Zanemari površinsko napetost in prenos toplote s prsta na pipeto. Normalni zračni tlak je 1 bar = 760 mmHg.

- A. 1.8 cm
- B. 4.5 cm
- C. 8.7 cm
- D. 9.3 cm



SLIKA 5.

Primer naloge s prvega testa.

v njem pa zmanjša na p . Predpostavimo, da se temperatura stolpca zraka ne spremeni, zato lahko iz plinske enačbe zapišemo

$$p_0 \cdot \frac{l}{2} = p \cdot (l - x),$$

odkoder dobimo tlak p v podaljšanem stolpcu zraka

$$p = \frac{p_0 \cdot l}{2(l - x)}.$$

Naslednji razmislek je o ravnovesju sil na ploskvico živega srebra, ki je ob odprtem spodnjem krajišču cevke: nanjo z ene strani pritiska zunanji zrak z zunanjim zračnim tlakom p_0 , z notranje strani pa živo srebro s hidrostaticnim tlakom $p + \rho g x$, kjer je ρ gostota živega srebra, g pa težni pospešek. Ta dva tlaka sta seveda enaka (ploskvica je v ravnovesju) in velja $p_0 = p + \rho g x$.

Izenačimo oba izraza za tlak p , novi izraz preuredimo in dobimo kvadratno enačbo za x ,

$$x^2 [-2\rho g] + x [-2l\rho g + 2p_0] - p_0 l = 0.$$

Upoštevamo, da je normalni zračni tlak $p_0 = \rho g \cdot l_0$, kjer je $l_0 = 760$ mm in kvadratno enačbo zapišemo v prikladnejši obliki,

$$x^2 \left[-\frac{2}{l_0} \right] + x \left[\frac{2l}{l_0} + 2 \right] - l = 0.$$

Smiselna rešitev kvadratne enačbe je $x = 8.7$ cm. Kvadratne enačbe smo se naučili reševati na prvih pripravih.

× × ×

Rešitev novoletne nagradne uganke

↓↓↓

→ V prejšnji številki smo bralcem zastavili nalogo s tremi vprašanji o 2023 enakih kockah. Prejeli smo tri rešitve: Andrej Jakobčič, Eva Šolinc in Ivan Lisac iz Kopra bodo prejeli knjižno nagrado. Vsi so nalogo reševali s pomočjo računalnika. Pravilne rešitve so naslednje:

- Ana je iz 2023 kock sestavila nekaj večjih kock in pri tem uporabila vse kocke. Koliko najmanj kock je sestavila?

Rešitev: Najmanj 5 kock, velja $2^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3 = 2023$.

- Iz svojih kock je sestavila nekaj kvadratnih ploškev (višine 1) in pri tem uporabila vse kocke. Koliko najmanj kvadratov je sestavila?

Rešitev: Najmanj 4 kvadrate, ena od možnih rešitev je $43^2 + 13^2 + 2^2 + 1^2 = 2023$. Na to vprašanje lahko sicer odgovorimo brez računanja, če poznamo klasične izreke teorije števil. Znano je namreč, da lahko vsa naravna števila izrazimo kot vsoto največ štirih kvadratov (Lagrangejev izrek). Že trije kvadrati pa zadoščajo, če število ni oblike $4^a \cdot (8k + 7)$ (Legendrov izrek). Ker je $2023 = 4^0 \cdot (8 \cdot 252 + 7)$, zanj res potrebujemo vsoto štirih kvadratov.

- Ana je 2023 enakim kockam dodala še nekaj enakih kock, ki jih je dobila z razstavljanjem večje kocke. Zdaj lahko iz vseh kock skupaj sestavi dve večji kocki. Koliko najmanj kock je dodala?

Rešitev: Najmanj $9^3 = 729$ kock, velja $2023 + 9^3 = 2^3 + 14^3$.

Andrej Jakobčič pa nam je poslal še nekaj zanimivih vprašanj o številu 2023. Tokrat objavljamo štiri na temo enačb.



Še nekaj enačb za leto 2023 (Andrej Jakobčič)

Naloga: Vsaki od naslednjih enačb poiščite vsaj eno rešitev in določite število vseh njenih rešitev.

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2023}, x, y \in \mathbb{N}$$

$$2. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2023}, x, y \in \mathbb{N}$$

$$3. xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2023, x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$4. \sin x = \frac{x}{2023}, x \in \mathbb{R}$$

Namig: Z nekaj matematične spretnosti je mogoče na vsa vprašanja odgovoriti brez računalnika, manj vztrajni bralci pa lahko poiščete rešitve tudi na zadnjih straneh v tej številki revije.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

Tekmovanje π

VABILO K SODELOVANJU NA TEKMOVANJU V DOLOČANJU
PRIBLIŽKA ŠTEVILA π Z MERJENJEM ALI PREŠTEVANJEM



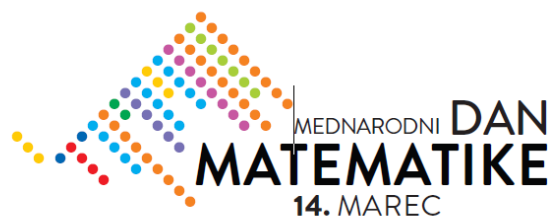
JASNA PREZELJ

→ Letošnji **Mednarodni dan matematike 14. marec 2023** poteka pod sloganom »**Matematika za vsakogar**«, ki se mu bomo pridružili pri DMFA Slovenije. Poleg že tradicionalnega likovnega natečaja, ki bo tudi objavljen na spletnih straneh DMFA Slovenije, vas vabimo k sodelovanju na tekmovanju v določanju približka števila π z merjenjem ali preštevanjem.

Kaj natančno imamo v mislih? Kvadrat z dolžino osnovne stranice r lahko postavimo v krog s polmerom r , na krog čimbolj enakomerno potresemo rižev zrnje in izračunamo razmerje med številom zrn v krogu in tistim v kvadratu. Lahko primerjamo tudi teži. Izbiramo lahko različne polmere in različne vrste zrnja. Druga možnost je merjenje ploščine kroga tako, da na krog z radijem 1 m postavimo centimetrsko mrežo in preštejemo kvadratke znotraj, potem pa na delu do krožnice še milimetrsko mrežo in preštejemo še te manjše kvadratke. Lahko se peljemo s kolesom in izračunamo π glede na to, kolikšna je prevožena razdalja, kolikokrat se je kolo v celoti zavrtelo in kolikšen je njegov premer. Isti poskus lahko večkrat ponovimo. Dopusten je kakršenkoli postopek, ki vključuje merjenje ali preštevanje, dobljene rezultate pa je dopustno računsko obdelati (npr. izračunati povprečje).

Natečaj je namenjen skupinam učenk in učencev osnovnih šol in dijakinjam in dijakom srednjih šol v naslednjih kategorijah:

- Kategorija OŠ1 (1.–3. razred): Razredni izdelek
- Kategorija OŠ2 (4.–6. razred): Razredni izdelek
- Kategorija OŠ3 (7.–9. razred): Razredni izdelek ali izdelek skupine vsaj 5 učencev istega razreda.



- Kategorija SŠ (vsi letniki): Razredni izdelek ali izdelek skupine vsaj 3 dijakov iste šole.

Pri razrednem izdelku naj sodeluje celoten razred, mlajšim lahko pomagajo učitelji. Posamezna šola lahko na natečaj prijavi največ 3 izdelke.

Oddaja izdelkov. Za sodelovanje na natečaju je treba oddati prispevek, v katerem je opis postopka, do 3 fotografije postopka in izračunani približki. Prispevek skupaj s podatki o avtorjih boste oddali v elektronski obliki (pdf) najkasneje do 1. marca 2023 preko spletnega obrazca na spletni strani DMFA, ki bo aktiven do 28. februarja 2023. Rezultati bodo objavljeni na Mednarodni dan matematike, 14. marca 2023.

Strokovna komisija pri DMFA Slovenije bo glede na izvirnost, zanimivost in kvaliteto približka za π izbrala nekaj izdelkov in jih nagradila s poliedrskimi kompleti in drugimi simboličnimi darili, ki jih bomo predvidoma podelili na prireditvi Bistroumi 2023 v Ljubljani. Kontaktni naslov za morebitna dodatna vprašanja je matematicnidan@dmfa.si.





Nagradna križanka



GLASEN, SUNKOVIT
IZDIH ZRAKA

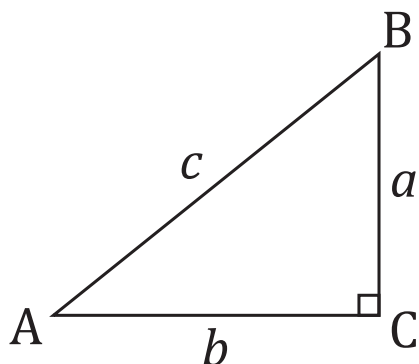
MNOŽIČNO
UBIJANJE,
MORJENJE

SNEMALNA
ELEKT-
RONKA PRI
STAREJŠIH
KAMERAH

GLAVNO
MESTO
VIETNAMA



AVTOR MARKO BOKALIČ	FRANCOSKI PISATELJ (GUSTAVE)	OBDELO- VANJE ZEMLJE S KULTI- VATORJEM	IGRALKA KRAJNC BAGOLA	RIBJA KOŠČICA	KOBLAT	PRETIRANO HVALJENJE	VELIK ATOL V SEJSELIH	DISCIP- LINSKI UKREP
AVSTRIJ. MATEMATIK, GEODET IN GORNIK (JOHANNES)								
RUSKI PLESALEC IN KOREO- GRAF (LEONID)					1			
POLDRAG KAMEN RAZLIČNIH BARV					GRADNIK MOLEKULE FRANEK TREFALT			
UROŠ LIPUŠČEK SOFOKLOV TRAGIČNI JUNAK			EDEN	RASTLIN- STVO 14. GRŠKA ČRKA				
								TISKALNIK
					GLASBENIK (MOJMIR) IZREK SODBE O KRIVDI			
			LETOVIŠČE PRI OPATIJI PRIMORSKI GLASBENIK HROVATIN				FR. REVOL- UCIONAR, VODJA MONTA- GNARDOV	
				RADON ANGLEŠKI IGRALEC (MICHAEL)			RISBA OB TEKSTU NEMŠKI FILOZOF (GEORG)	
		ZDRAVILNA GORSKA ROŽICA						
	KRMLJEN POLPRE- VODNIŠKI ELEMENT	ZAGNANOST ZA KAJ, ELAN	ZAVEDANJE SVOJEGA BIVANJA POŠKODO- VANKA					
						PREDPONA ZA BILJON OSN. ENOT DELA SE NE- OPAZNEGA		
IZSTOP ORGANA IZ TELESNE VOTLINE				DEL OBRAZA GOVORICA SKUPINE LJUDI			RDEČA MRAVLJA ANTIČNI NIN PRI ZADRU	
ESTETSKA UREJE- VALKA		5						STOICIZEM NEMŠKI GEOGRAF (ALBRECHT)
PRIPRAVA ZA IZDE- LOVANJE MASLA					MESANICA ČREVESNIH ENCIMOV SMUČARKA HECTOR			
UROŠ SLAK		AMERIŠKI PISATELJ (JOHN) PEVKA FRECE				10		
LJUDSKI IZRAZ ZA DROG						ZAZNAMO GA Z NOSOM RIM. ZNAK ZA 500		
UJEMANJE, SKLADNOST								
AMERIŠKA PEVKA GRANDE						NAŠ POLITIČNI ANALITIK IN UREDNIK (ROK)		

[illegible]

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. marca 2023**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Ponazoritev limite zaporedja

↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN

→ **Koncept limite zaporedja** je verjetno eden zahtevnejših v srednješolski matematiki. Čeprav se limito zaporedja naučimo izračunati s pomočjo računskih pravil, je marsikomu težko pojasniti, kaj limita zaporedja sploh pomeni. Nekoliko približno lahko povemo, da se členi zaporedja v neskončnosti približujejo limiti na tak način, da so v majhni okolici limite vsi dovolj pozni členi zaporedja. S pomočjo GeoGebre bomo to poskusili natančneje ilustrirati.

Spomnimo se formalne definicije limite. Realno število L je limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neko naravno število $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - L| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$.

Oglejmo si, kaj to pomeni v konkretnem primeru.

Naj bo zaporedje dano s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+5}.$$

Limita tega zaporedja je enaka

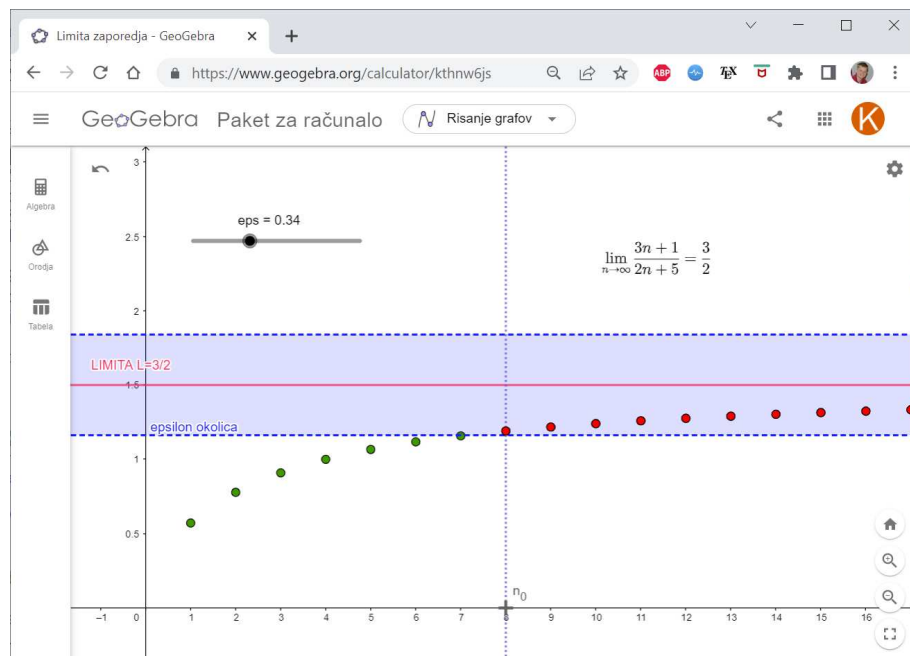
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{3}{2}$$

(imenovalec in števec ulomka smo delili z n ter ugotovili, da gresta člena $\frac{1}{n}$ in $\frac{5}{n}$ proti 0, ko gre $n \rightarrow \infty$).

Izberimo si konkreten $\varepsilon = 0,5$. Potem definicija limite pove, da obstaja takšno število n_0 , da je $|a_n - \frac{3}{2}| < 0,1$ za vse $n \geq n_0$. To število lahko določimo z reševanjem neenačbe

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

S preurejanjem jo hitro preoblikujemo v enakovredno neenačbo $4 < n$. Členi a_n se torej od limite razlikujejo za manj kot $1/2$, če je n vsaj 5. Iskano število n_0 je v tem primeru torej enako 5.



SLIKA 1.

Interaktivna ponazoritev limite zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{3n+1}{2n+5}$.

Nalogo pa bi lahko rešili tudi za splošen $\varepsilon > 0$. V tem primeru dobimo neenačbo

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

ki jo preuredimo v enakovredno neenačbo $13 < \varepsilon(4n+10)$ oziroma $n > \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon}$. Ker je n naravno število, bi torej lahko rekli, da je $n_0 = \lfloor \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon} \rfloor + 1$ (za 1 povečani celi del števila).

Izračunane pojme lahko zdaj ponazorimo grafično z naslednjimi koraki.

- Z ukazom `Zaporedje((n,(3n+1)/(2n+5)),n,1,30)` narišemo prvih 30 členov zaporedja kot točke v ravnini.
- Definiramo vrednost $L=3/2$, ki predstavlja limito zaporedja. Na grafu jo ponazorimo s premico, ki jo vnesemo kot $y=L$ in ustrezno pobarvamo.
- Ustvarimo drsnik z vrednostmi med 0 in 1 in ga poimenujemo `eps`.
- Ustrezno ε -okolico limite na grafu ponazorimo s pasom med premicama $y = 3/2 \pm \varepsilon$, kar v GeoGebro vnesemo kot $L-eps < y < L+eps$.
- Zdaj že lahko opazujemo, kako je od vrednosti `eps` odvisno število členov zaporedja, ki ležijo v ustreznem pasu.
- Izračunajmo vrednost $n_0 = \text{floor}((13-10*eps)/(4*eps))+1$ (ukaz `floor` pomeni celi del števila). Na grafu jo ponazorimo s premico $x=n_0$.
- Zdaj lahko točke zaporedja, ki v celoti ležijo znotraj pasu, obarvamo z drugo barvo tako, da narišemo še eno zaporedje z ukazom `Zaporedje((n,(3n+1)/(2n+5)),n,n_0,30)`. Dodane točke seveda pobarvamo z drugo barvo.
- S spremembo vrednosti drsnika `eps` se zdaj interaktivno spreminjata širina pasu in mejna vrednost n_0 , za katero ustrezni členi zaporedja ležijo znotraj tega pasu.

Na podoben način lahko ponazorimo tudi limito kakšnega drugega zaporedja, ki pa naj ne bo prekomplikirano, da bomo lahko zares izračunali vrednost n_0 v odvisnosti od ε . Bralke in bralce vabimo, da svojo spretnost pri računanju in konstrukcijah v GeoGebri preizkusijo še na primeru zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$.

× × ×

Rešitve uganke s strani 14

↓↓↓

→

1. Upoštevamo, da je $2023 = 7 \cdot 17^2$, in kvadriramo enačbo $\sqrt{y} = \sqrt{2023} - \sqrt{x}$. Dobimo $y = 2023 - 34\sqrt{7x} + x$. Ker so števila cela, velja $x = 7k^2$ za neko celo število $k \leq 17$. Če to vstavimo v prejšnjo enačbo, po preurejanju sledi $y = 7(k-17)^2$. Za $k=1$ dobimo rešitev $x=7, y=1792$. Za $k=2, \dots, 8$ dobimo še 7 bistveno različnih rešitev, preostale rešitve so enakovredne že znanim zaradi simetrije neznank x, y .
2. Izraz z nekaj spretnosti preoblikujemo v $(x-2023)(y-2023) = 2023^2 = 7^2 \cdot 17^4$. Rešitve zdaj dobimo z različnimi kombinacijami prafaktorjev na desni strani enakosti. Ena rešitev je denimo $x-2023=1$ in $y-2023=2023^2$, torej $x=2024$ in $y=4094552$. Vseh bistveno različnih rešitev je 8.
3. Izraz preoblikujemo v $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2024$, torej rešujemo enačbo $(1+x)(1+y)(1+z) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ v naravnih številih. Ena rešitev je denimo $1+x=2^3, 1+y=11$ in $1+z=23$ oziroma $x=7, y=10$ in $z=22$. Z drugačnim kombiniranjem prafaktorjev dobimo še preostale rešitve. Vse rešitve je nekoliko sitno prešteti, a izkaže se, da je bistveno različnih le 8. Podrobnosti prepustimo bralcem in bralkam.
4. Ena rešitev je očitno $x=0$. Da bi našli vse, moramo prešteti vsa presečišča sinusne krivulje $\sin x$ s premico $\frac{x}{2023}$. Za rešitve seveda velja $|x| \leq 2023$. Za $0 \leq x \leq 2023$ je funkcija $\sin(x)$ nenegativna na intervalih $[0, \pi], [2\pi, 3\pi], \dots, [642\pi, 643\pi]$ (velja $644\pi > 2023$). Na vsakem takem intervalu torej premico seka dvakrat, kar da skupaj 644 presečišč. Podobno preštejemo 644 presečišč za $-2023 \leq x \leq 0$. Pri tem pa smo rešitev $x=0$ šteli dvakrat, vseh presečišč je torej 1287.

× × ×

Opazovanje asteroida Vesta s teleskopom GoChile



ALEXANDER GAYDUKOV

→ V članku bom na kratko predstavil svojo izkušnjo iz udeležbe na poletni šoli GoChile. Povedal bom nekaj besed o orbitalni mehaniki, asteroidih in o računalniškem programu, ki sem ga napisal za avtomatično obdelavo podatkov.

Uvod

Konec avgusta 2022 sem se udeležil prve poletne astronomske šole GoChile, ki jo je v Ajdovščini organizirala Univerza v Novi Gorici. Petdnevne šole se je udeležilo 16 dijakinj in dijakov iz različnih gimnazij v Sloveniji. Podnevi smo poslušali zanimiva predavanja, ponoči smo opazovali nebo: malo z lastnimi teleskopi, pretežno pa na daljavo s slovenskim robotskim teleskopom v Čilu. Opazovanja s teleskopom v Čilu smo opravljali v dvojicah. Vsaka dvojica se je lotila svojega projekta.

Moja skupina se je osredotočila na raziskovanje asteroidov. Ti so izjemnega pomena za proučevanje zgodovine Osončja, ker so ostali večinoma nespremenjeni od njegovega nastanka. Trki asteroidov z Zemljo so v preteklosti opazno spremenili našo biosfero. Poleg tega bodo morda asteroidi predstavljali neprecenljiv vir surovin v prihodnosti.

Najprej sva poiskala primeren asteroid za ta projekt. Moral je biti neprekinjeno viden v čilski noči, konec avgusta v času vsaj enega obrata okoli svoje

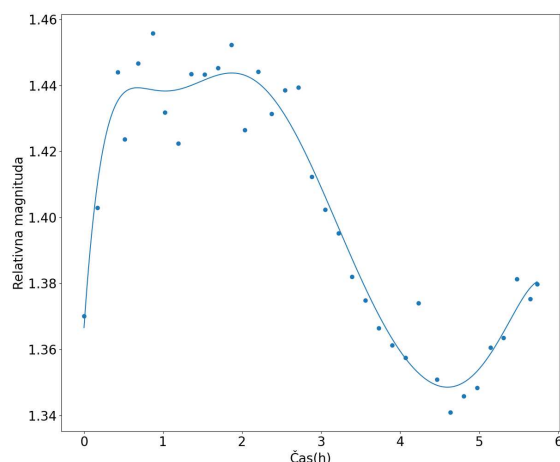
osi. Pri izbiranju sva uporabila podatkovno bazo JPL malih teles Osončja [2]. Izbrala sva asteroid Vesto – najsvetlejši na nebu in največji v asteroidnem pasu. Imela sva še mnogo drugih kandidatov, ampak ta je izstopal po svojih lastnostih. Iz meritev sva določila njegove orbitalne elemente, svetlobno krivuljo in periodo vrtenja.

Na opazovanje sva se temeljito pripravila. Izdelala sva podroben načrt za opazovanje, preverila vremensko napoved, določila frekvenco slikanja, filter in ekspozicijo. Vse to sva naredila pod skrbnim vodstvom mentorjev. Ko je prišel čas za opazovanje, sva se prijavila na nadzorni računalnik Vega. Zagnala sva snemanje in vnesla nastavitve. Potem je bilo treba čakati pri računalniku. Naslednji dan sva obdelala slike na Vegi in si jih prenesla na najina računalnika.

Iz slik se je dalo razbrati relativno svetlost in položaj objekta glede na bližnje zvezde. Iz meritev relativne svetlosti sva narisala svetlobno krivuljo asteroida (slika 1). Pike ustrezajo posameznim meritvam, modra črta pa je polinomska aproksimacija svetlobne krivulje. Ocenjen čas rotacije asteroida je 5,4 h, kar se dobro ujema z znanim časom 5,34 h.

Na podlagi dobljenih geocentričnih ekvatorialnih koordinat sva lahko ocenila orbito Veste.

Ker je teleskop samo en, smo ga uporabljali v različnih terminih. Moja skupina je lahko uporabljala teleskop predzadnjo noč pred koncem poletne šole. V preostalih kratkih 30 urah sva morala obdelati vse pridobljene podatke in na koncu predstaviti najin projekt drugim udeležencem poletne šole.



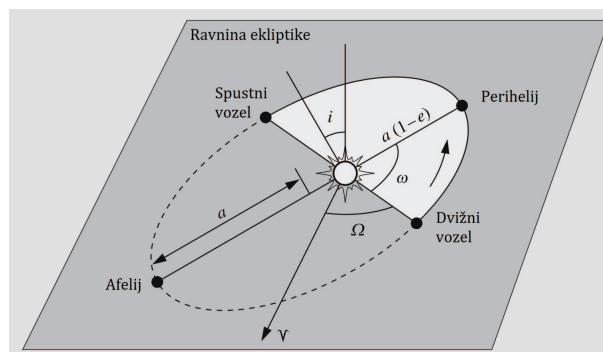
SLIKA 1.

Svetlobna krivulja

Določanje tirnice

Pri obdelavi velike množice podatkov v kratkem času sva si pomagala s programom, ki sva ga napisala še pred opazovanjem. Ko sva opravila opazovanje in pridobila vse podatke, sva jih vstavila v programe in takoj dobila rezultate. Program, ki ga bom predstavil v nadaljevanju, sva napisala, da bi lažje vizualizirala razliko med znano in izmerjeno orbito asteroida.

Da bi si lažje predstavljali orbito asteroida, sva dodala še nekaj teles v animacijo: Zemljo, Mars in Jupiter. Za vsako telo v animaciji sem izračunal Keplerjevo orbito. Upošteval sem le gravitacijski privlak med telesom in Soncem. Keplerjeva orbita je določena s šestimi orbitalnimi elementi. Obliko elipse, po kateri kroži nebesno telo, določata velika polos in izsrednost (ekscentričnost). Tretji element je kot, ki nam pove orientacijo orbite v njeni ravnini. Določen mora biti tudi čas, ko telo prečka neko posebno točko, za katero je običajno vzeta perihelij. Ko preskočimo v tretjo dimenzijo, potrebujemo še dva parametra: inklinacijo – kot, za katerega je nagnjena ravnina tira, in dolžino dvižnega vozla oz. kot, ki nam pove orientacijo ravnine tira glede na izhodiščno ravnino (npr. ekliptiko). Prikaz orbitalnih elementov je na sliki 2.



SLIKA 2.

Orbitalni elementi

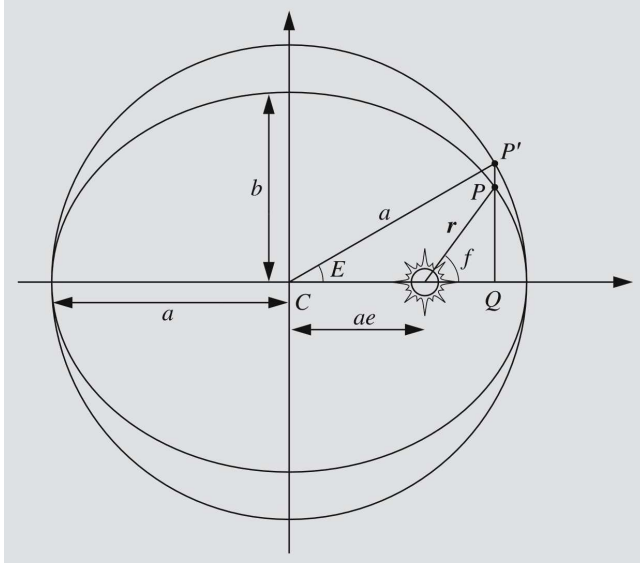
Iz teh podatkov lahko izračunamo lego telesa v odvisnosti od časa. Če poznamo vse orbitalne elemente, si to tirnico zelo nazorno predstavljamo. Namesto orbitalnih elementov lahko uporabimo vektorja začetne hitrosti in položaja (skupaj 6 vektorskih komponent), kar je bolj primerno za numerično rešitev. Ta metoda je bolj univerzalna, saj je z njo mogoče upoštevati vplive drugih teles, ki popačijo orbito. V bistvu so analitično rešljive naloge le manjšina od vseh matematičnih nalog: eden od znanih primerov je problem 3 teles. Tu pride prav uporabno znanje programiranja, ki je izjemnega pomena tudi za obdelavo podatkov, še posebej v astronomiji.

Program

Napisati sem moral program, ki izračuna položaje telesa na danem časovnem intervalu in jih potem nariše v tridimenzijem prostoru. Obstaja več načinov storiti to. Za tirnico sem računal posamezne točke s pomočjo analitične metode, za koordinate telesa pa sem uporabil numerično metodo.

Pri prvi metodi sem najprej izračunal pravo anomalijo in razdaljo od Sonca. Potem sem te pretvoril v heliocentrične ekliptične koordinate. Pri drugi metodi sem sledil istemu postopku za začetni položaj in hitrost. In zatem sem integriral po času s funkcijo *odeint* iz knjižnice *scipy*. Za risanje točk sem uporabil knjižnico *matplotlib*, za animacijo pa sem uporabil funkcijo *FuncAnimation* iz *matplotlib.animation*, ki v enakih časovnih intervalih pokliče drugo funkcijo za posodobitev položajev teles (v mojem programu se imenuje *animate()*).





SLIKA 3.

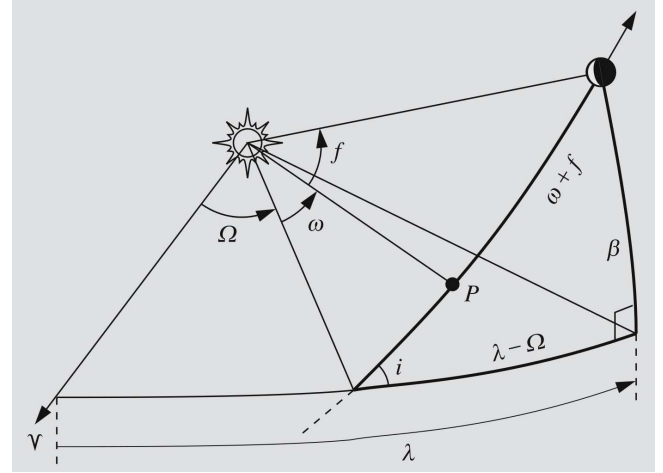
Anomalije

Za koordinate telesa je najprej treba dobiti pravo anomalijo: lahko jo imamo že podano ali jo lahko izračunamo v odvisnosti od časa. Za to uporabimo Keplerjevo enačbo $E - e \sin(E) = M$, kjer je E ekscentrična anomalija, M srednja anomalija.

Enkrat, ko imamo ekscentrično anomalijo, lahko dobimo pravo anomalijo f : $\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$. Pri računanju s koti moramo paziti, da so v pravih kvadrantih. Izračunajmo razdaljo telesa od gorišča orbite: $r = a(1 - e \cos(E)) = a \frac{1-e^2}{1+e \cos(f)}$.

Zdaj lahko pretvorimo pravo anomalijo in orbitalne elemente v ekliptične heliocentrične koordinate z nekaj sferične trigonometrije (slika 4).

Pri numerični metodi pa bo treba rešiti znano diferencialno enačbo: $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}$. Začnemo z znanimi začetnimi pogoji - imamo že vektorja položaja in hitrosti ob času $t = 0$. Nato izračunamo nov položaj in hitrost po času dt . In tako se postopoma premikamo naprej. Oglejmo si enačbe gibanja. Pospešek lahko izračunamo iz Newtonovega gravitacijskega zakona. Vemo tudi, da je hitrost sprememba razdalje v času dt : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; pospešek pa je sprememba hitrosti v času dt : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. V funkciji `calcPos()` ustvarimo zanko, ki bo s pomočjo funkcije `updateVect()` raču-



SLIKA 4.

Orbitalni elementi

nala nove vrednosti hitrosti in položaja:

$$\begin{aligned} \text{acc} &= -\frac{GM}{(\text{pos}[0]^2 + \text{pos}[1]^2 + \text{pos}[2]^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{pos} \\ \text{vel} &+= \text{acc} \cdot dt \end{aligned}$$

Pos, acc in vel so vektorji položaja, pospeška in hitrosti zapisani s tabelami knjižnice `numpy.array()`, ki nam omogoča lažjo manipulacijo tabel.

Z adaptacijo funkcij `drdtd()` in `calcPos()`, bi se dalo trivialno prilagoditi program za sistem več teles.

Bralci, ki si želijo ogledati program, ga lahko najdejo na spletni strani <https://github.com/Alex-Outis/animationOrbits/>.

Literatura

- [1] Notes on celestial mechanics (chapters 1, 9, 10, 13), Fundamental astronomy(chapter 6), Wikipedia in dokumentacija uporabljenih knjižnic.
- [2] https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/ in <https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbwobs.html#/>

× × ×

Izbrane slike in fotografije v petdesetih letih Preseka – nadaljevanje

↓↓↓

NADA RAZPET, MARKO RAZPET IN ANDREJ LIKAR

→ V tretji številki letošnjega Preseka smo predstavili izbor slik in fotografij iz njegovih začetnih osmih letnikov. Končali smo z mojstrskim črno-belim portretom Josipa Broza Tita, ki ga je ustvaril Božidar Jakac. Ta izjemni umetnik je portretiral številne znane Slovence, med drugimi tudi našega najbolj znanega matematika, profesorja Josipa Plemlja. Letos praznujemo častitljivo 150. obletnico Plemljevega rojstva.

V nadaljevanju predstavljamo izbor slik in fotografij do 20. letnika. Tudi tu najdemo portreta Jurija Vege in Josipa Plemlja, to pot deli karikaturista Boruta Pečarja. Kdor pa ima rad naravoslovno fotografijo, ne bo razočaran nad našim izborom. V še dveh nadaljevanjih bomo predstavili izbor do zadnje številke jubilejnega petdesetega letnika Preseka.

Posamezni Presekovi članki se dobijo na spletnem naslovu <http://www.dlib.si/> v rubriki *Periodika*. Veliko starejših prispevkov pa hitro najdemo na spletnem naslovu <http://www.presek.si/> v *Arhivu revij*.

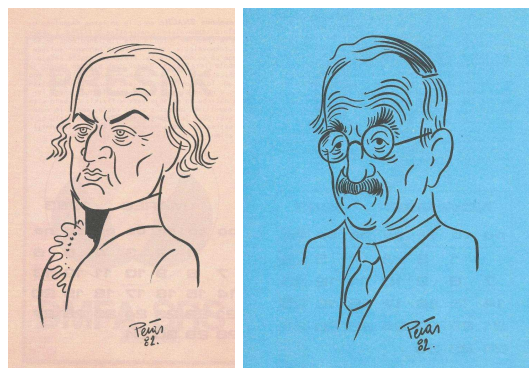
Ali ste se že kdaj vprašali, zakaj sneg okoli dreves hitreje skopni (slika 1)? Odgovor na to in razlago še drugih zanimivih pojavov v naravi boste našli v 5. številki 9. letnika Preseka z naslovom *Enajsta šola iz fizike*, ki jo je napisal Ivan Kušcer in ji dodal tudi fotografije teh pojavov.

Borut Pečar je s karikaturami opremil 5. številko 10. letnika Preseka, ki ima naslov *Presekov koledar*. Med drugim so v tej številki objavljeni kratki življenjepisi nekaterih domačih matematikov in fizikov. Na sliki 2 sta upodobljena Jurij Vega (levo) in Josip Plemelj (desno).

Z 12. letnikom je prostor v Preseku dobilo tudi računalništvo. Takrat so v naše domove že nezadržno



SLIKA 1.



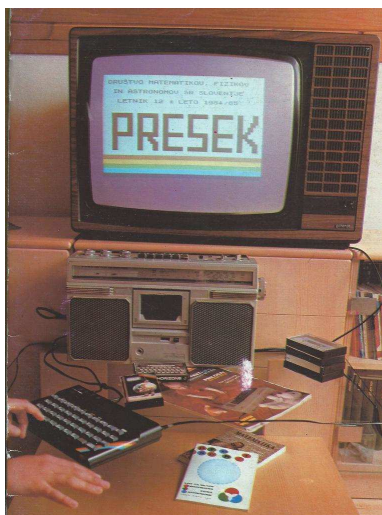
SLIKA 2.

prodirali hišni računalniki, na primer Commodore 64 in Sinclair Spectrum. Slika 3 je naslovna stran 2. številke tega letnika. Kot vidimo, sta bila za uporabo Spectruma potrebna televizor in kasetofon.

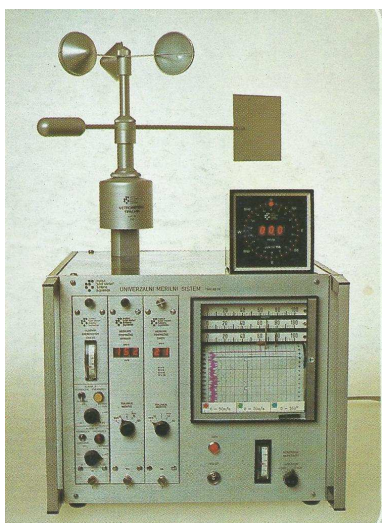
Jože Rakovec je v 3. in 4. številki 12. letnika Preseka objavil v dveh delih članek *Merjenje hitrosti vetra*, v katerem je poleg preproste fizikalne razlage opisal tudi v ta namen primerne instrumente. Slika 4 kaže meteorološko napravo, ki v teku časa zapisuje hitrost, moč in smer vetra, to je anemograf domače izdelave.

V 3. številki 13. letnika Preseka je Janez Stepišnik opisal magnetno resonanco in njeno uporabo v medicinski diagnostiki. Takrat se je ravno začela uveljavljati v medicini. Danes si brez naprav za magne-





SLIKA 3.

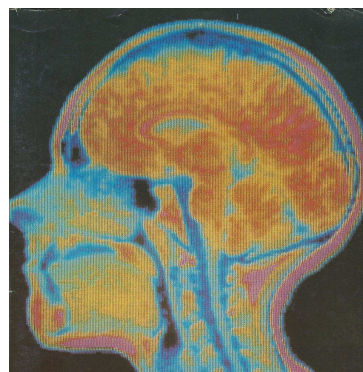


SLIKA 4.

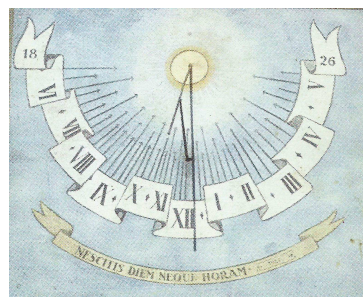
tno resonanco kliničnih centrov ne moremo več zamisliti. Na sliki 5 vidimo sliko človeške glave, slikane z magnetno resonanco.

Presek že od vsega začetka ne pozablja na astronomijo. V naslednji številki je Andrej Čadež razložil, kako deluje sončna ura. Na sliki 6 je sončna ura na južni steni ljubljanske stolnice.

Janez Strnad je v 4. številki 14. letnika Preseka objavil članek z zgovornim naslovom *O naravi svetlobe in o lomu*. V njem je razložil načine za merjenje hi-

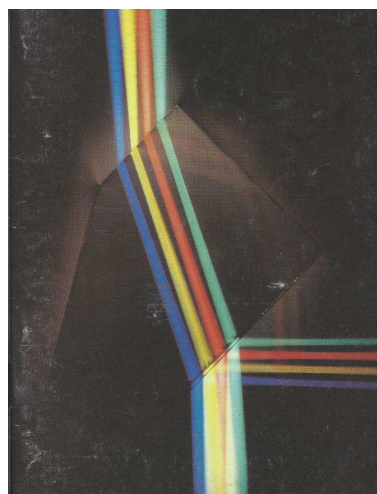


SLIKA 5.



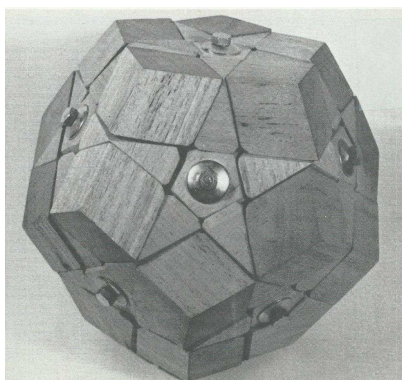
SLIKA 6.

trosti svetlobe, lomni zakon in katere lastnosti svetlobe lahko podpre delčna in katere le valovna teorija svetlobe. Na sliki 7 vidimo lom svetlobe na steklenem telesu.



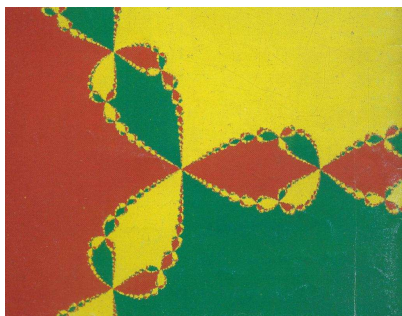
SLIKA 7.

V osemdesetih letih preteklega stoletja se je med ljudmi po vsem svetu razširila igrača, imenovana *Rubikova* ali *magična kocka*. Takrat še študenta, Boris Horvat in Mirko Lozej, sta izdelala lesen prototip *magičnega dodekaedra* (slika 8) in celotno zgodbo o tem objavila v prvi številki 15. letnika *Preseka*.



SLIKA 8.

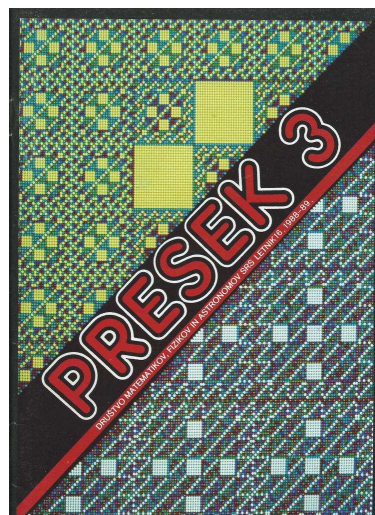
V naslednjih dveh številkah istega letnika *Preseka* so Emil Beloglavec, Mitja Lakner in Andrej Vitek objavili v dveh delih članek *Juliajeva množica*. Kljub takratnim skromnim računalniškim možnostim jim je uspelo na računalniškem zaslonu predstaviti Juliajevo množico (slika 9).



SLIKA 9.

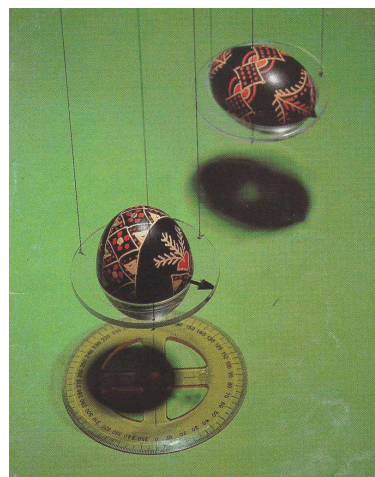
S člankom *Šahovski kralj izbira vzorec* je Marko Razpet začel 3. številko 16. letnika *Preseka*. Pokazal je, kako z ostanki po deljenju števil posebnih mrežnih poti pridemo do zanimivih slik. Na sliki 10 imamo primera takih slik, ki sta bili uporabljeni za naslovnico.

Za predzadnjo številko istega letnika *Preseka* je Janez Strnad prispeval članek *Ali je jajce kuhano?*



SLIKA 10.

V njem podrobno razlaga, kako s preprostimi fizikalnimi eksperimenti ugotovimo, ali je bilo mehko skuhanu jajce preveč surovo ali pretrdo (slika 11).

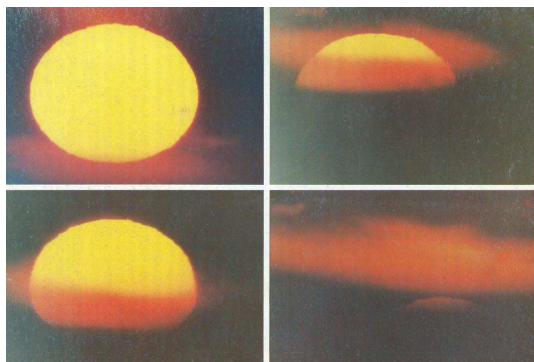


SLIKA 11.

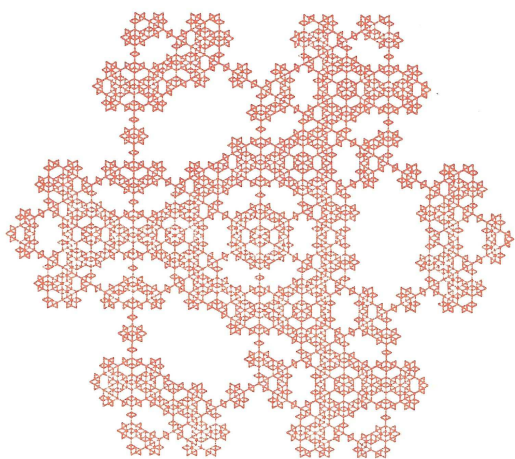
V 4. številki 18. letnika *Preseka* je Marijan Prosén v člankih *Zakaj vidimo Sonce ob obzorju sploščeno* in *Koliko časa zahaja Sonce* natančno pojasnil, zakaj Sonce ob zahajanju ni videti okroglo in kako opazujemo in merimo čas njegovega zahajanja (slika 12).

V zadnji številki istega letnika *Preseka* je objavljeno nekaj nenavadnih krivulj, ki jih je po navodilih iz prve številke konstruiral Andrej Zalar iz Šentjurja. Ena od teh je predstavljena na sliki 13.





SLIKA 12.

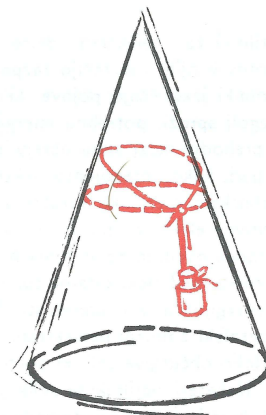


SLIKA 13.

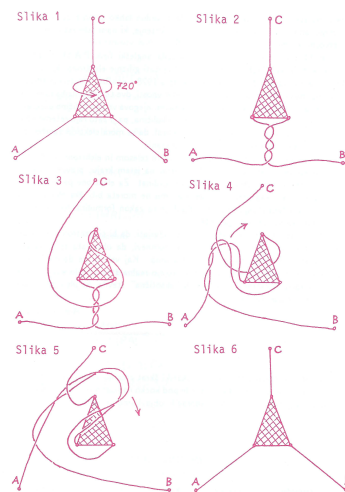
Marija Vencelj je za prvo številko 19. letnika pripevala zanimivo nalogo. Kakšno obliko zavzame vrtna zanka na plašču stožca? (slika 14) Podobna naloga za plašč valja je bila na 6. evropski fizikalni olimpijadi leta 2021.

V naslednji številki istega letnika je Anton Cedilnik v članku *Vrtenje je čudna reč* obravnaval trikotno ploščo, ki je s tremi elastičnimi vrvicami privezana na fiksno okolico. Pojasni dogajanje, če ploščo vrtime okrog simetrijske osi (slika 15).

V isti številki je Andrej Likar v članku *Plavajoče kapljice* pisal o kapljicah vode, ki zaradi površinske napetosti plavajo na mirni ali valujoči vodni gladini (slika 16).



SLIKA 14.

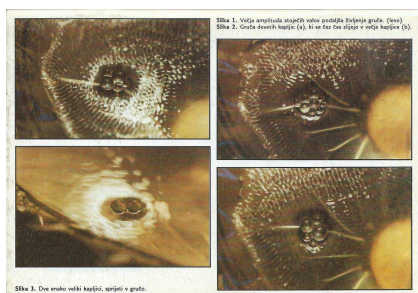


SLIKA 15.

V 4. številki istega letnika je Marija Vencelj objavila zanimivo nalogo *Ribiška* z ustreznimi risbo treh ribičev (slika 17).

Ista avtorica je v zadnji številki *Slučaj ali pravilo?* bralce vzpodbudila k reševanju nenavadne naloge (slika 18).

V začetni številki 20. letnika je Andrej Likar v članku *Valovni stroj* opisal stroj, s katerim lahko izvajamo nekatere eksperimente na temo valovanja (slika 19). Take stroje še vedno uporabljajo za predstavitev širjenja valovanja.



SLIKA 16.



SLIKA 17.

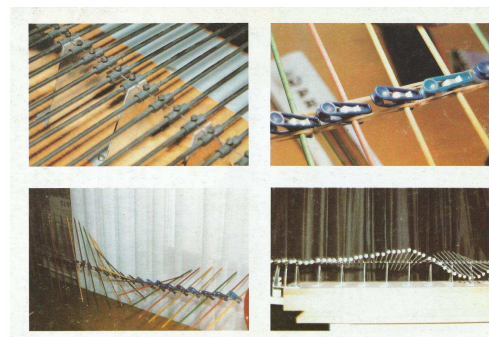


SLIKA 18.

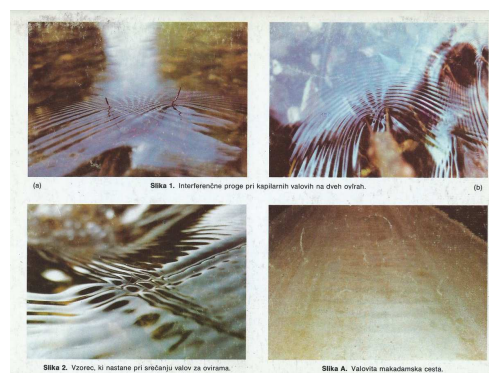
Isti avtor je v 3. številki 20. letnika Preseka *Mirujoče interferenčno polje* obravnaval interferenco več vrst valov, med drugimi tudi kapilarne valove na vodni gladini (slika 20).

Andrej Likar je v zadnji številki istega letnika Preseka v članku *Čebela na paši* ocenil, koliko dela opravi čebela pri iskanju in prinašanju cvetnega prahu v panj (slika 21).

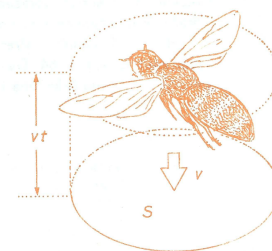
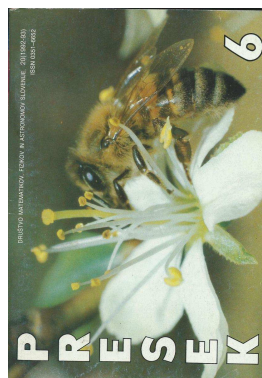
(Se nadaljuje.)



SLIKA 19.



SLIKA 20.



SLIKA 21.

XXX

Nekaj iz naše ponudbe

V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature. Predstavljamo vam dve ponudbi:

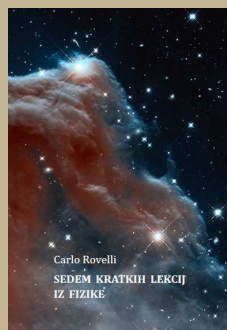


Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA DOPPLERJEVEGA POJAVA

120 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

15,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ
IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



**REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE**
PRESEK 50/3

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz tretje številke Preseka letnika 50 je **Barvanje grafov**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Izak Pelicon iz Šempasa, Eva Šolinc iz Ljubljane in Jasna Jakobčič iz Novega mesta, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

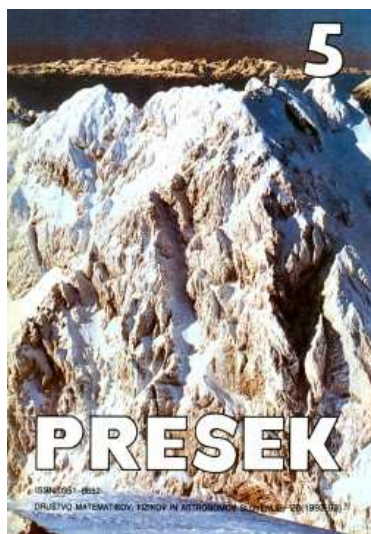
x x x

33. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi

LETNIK 20, ŠTEVILKA 5, 1992/93

↓↓↓

→ Slovenija se je Mednarodne matematične olimpijade kot samostojna država prvič udeležila leta 1993, torej pred tridesetimi leti. Že leto dni prej pa se je olimpijade kot gost švicarske ekipe udeležil tedanji dijak Gimnazije Bežigrad Tomaž Cedilnik, ki je o svojih doživetjih poročal v reviji Presek. Odtlej se Slovenija s šestčlansko ekipo udeležuje olimpijade vsako leto. Naši tekmovalci in tekmovalke so v tem času osvojili že lepo število odličij, med njimi tudi zlato, ki ga je osvojil Luka Horjak leta 2020. Še vedno pa velja, da je najpomembnejši del matematične olimpijade prijetno druženje z vrstniki iz vsega sveta. Upamo, da bo tako tudi letos!



33. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA V MOSKVI

Mednarodna matematična olimpiada je bila organizirana v Moskvi. Udeležilo se je 65 držav. Slovenija ni bila povabljen. Ruska federacija, ki je po razpadu Sovjetske zveze prevzela organizacijo matematične olimpiade, se je sklicevala na dejstvo, da pravno nasledstvo Jugoslavije še ni rešeno, zato se Slovenija obravnava kot država, ki se hoče na novo vključiti. Pravilnik pa določa, da se iz take države prvo leto povabi samo opazovalca. Tekmovalci lahko sicer sodelujejo že prvo leto, vendar tekmujejo izven konkurence in na lastne stroške. Ker sem na 32. matematični olimpiadi na Švedskem osvojil bronasto kolajno, smo poskušali najti način, da bi se lahko udeležil tekmovanja. Ugotovili smo, da lahko sodelujem kot gost kake druge države, ki nima kompletne ekipe. Švicarski ekipo smo predlagali, da me vzamejo medse, kar so z navdušenjem sprejeli. Dan pred odhodom švicarske ekipe v Moskvo sem se tako odpeljal v Bern.

V ponedeljek, 13. julija smo se tekmovalci zbrali v hotelu Izmailovo. Naslednji dan smo se odpeljali na ogled Moskve. Med drugim smo si ogledali tudi Rdeči trg z znamenitimi palačami preteklih in sedanje dobe. Popoldne je bila otvoritev tekmovanja. Med pozdravnimi govori so nam predstavili svojo kulturo. Za razvedrilo so nam pokazali tudi nekaj cirkuških točk.

V sredo je bil prvi dan tekmovanja. Organizacija je bila ob sprejemu komaj še sprejemljiva, ob tekmovanju pa je praktično odpovedala. Do Univerze v Moskvi, kjer je bilo tekmovanje, smo prišli prepozno, vendar smo vseeno morali čakati skoraj dve uri na začetek tekmovanja. Dodatni zapleti so bili, ker sem hotel naloge v angleščini, dobil sem jih pa v nemščini. Vendar sem naloge dobil še pravočasno.

Naslednji dan, ko je bil drugi dan tekmovanja, ni bilo bistveno drugače. Bile so podobne jezikovne težave, naloge so mi prinesli nekoliko prepozno, vendar sem lahko tudi toliko pozneje oddal rešitve.

V ponedeljek dopoldne je bila zaključna slovesnost in podelitev nagrad. Za las (za eno točko) sem zgrešil bronasto kolajno. Kljub temu sem bil najboljši tekmovalec v ekipi (se ve, kateri). Po zaključni slovesnosti smo si še enkrat ogledali muzej, zvečer pa so priredili skupno večerjo za vse udeležence. Izmenjevali smo si darila in se poslavljali.

V prostem času in na izletih smo se udeleženci tekmovanja spoznavali in družili med seboj. Druženje z vrstniki istih interesov je vedno zelo prijetno, še posebej, če so ti doma z različnih koncev sveta. Čeprav so se organizacijske nerodnosti vrstile druga za drugo, niso mogle pokvariti vzdušja ob olimpiadi.

Za tiste, ki bi se radi preizkusili v reševanju, je tu še naloga, ki se mi je zdela sorazmerno lahka:

Naj bo $\mathbb{R}$ množica vseh realnih števil. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$f(x)^2$

Tomaž Cedilnik

× × ×

Množica mavric

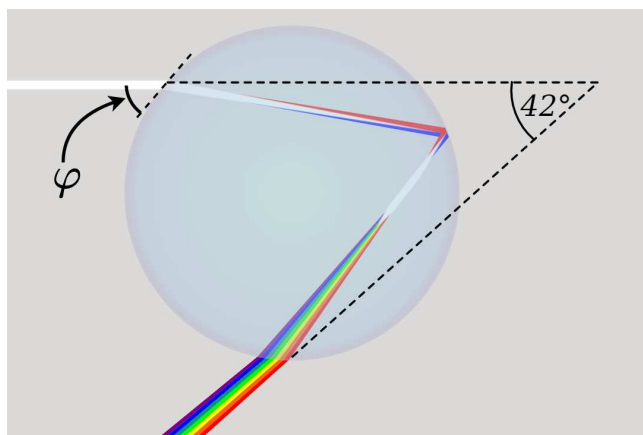
↓↓↓

LUKA HADL

→ Mavrico smo videli že vsi, večina nas je videla tudi dvojno mavrico. Redkeje pa dobimo priložnost videti šest mavric hkrati. Najvišji mavrici na predstavljeni sliki (slika 5) sta »običajni« mavrici – čez celotno sliko se krivi primarna, v kotu nad njo najdemo sekundarno. A posebno pozornost pritegnejo štiri dodatne mavrice pod nižjim robom primarne. Imenujejo se interferenčne mavrice in njihovo ime že nakazuje način njihovega nastanka.

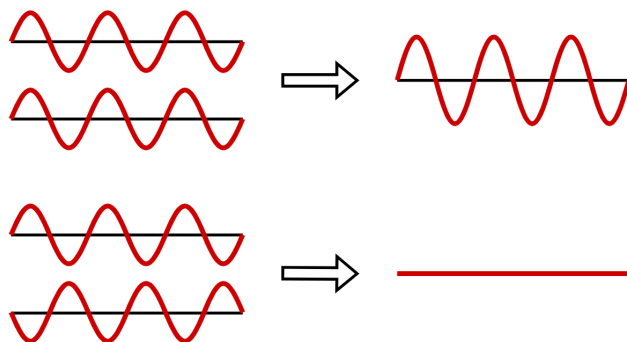
Oglejmo si, kako nastane primarni lok mavrice. Kadar je v zraku veliko kapljic vode in skozi njo posveti sončna svetloba, ta na poti skozi kapljice spremeni smer, kot prikazuje slika 1. Prvič se to zgodi ob vstopu svetlobe v kapljico; na meji zrak-voda se žarek lomi za kot, ki ga določata barva svetlobe (rdeča se lomi manj kot modra) ter kot med žarkom in vodno površino. V kapljico pa ne vstopi vsa svetloba, temveč se je na meji med snovema nekaj tudi odbije. Delež odbite svetlobe določata ista vpliva kot kot loma.

Lomljena svetloba spet zadene ob površino kapljice



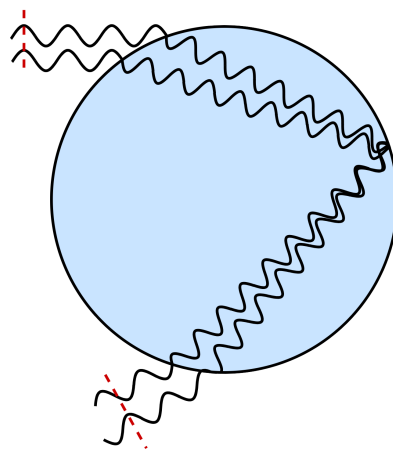
SLIKA 1.

Nastanek mavrice. Kot φ označuje kot med žarkom in površino kapljice. Zaradi preglednosti skica prikazuje le svetlobo, ki prispeva k primarnemu lok mavrice.



SLIKA 2.

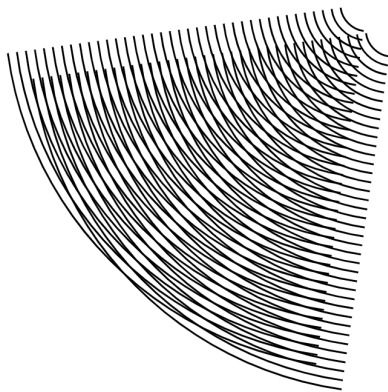
Interferenca: konstruktivna zgoraj, destruktivna spodaj. V obeh primerih sta na levi valovanji, ki se srečata, na desni rezultat.



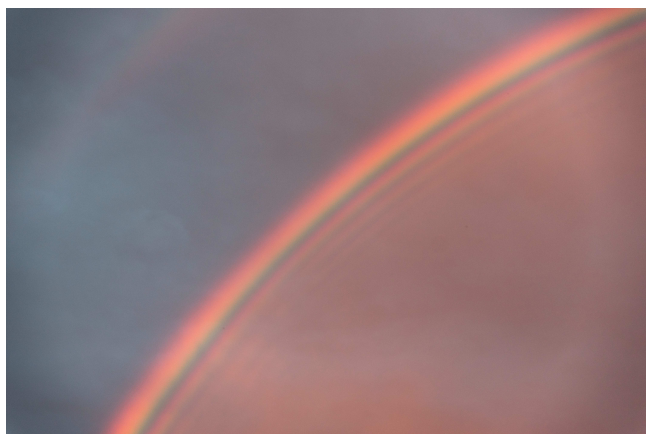
SLIKA 3.

Zamik pri prehodu skozi kapljico. Rdeči črtkani črti sta pravokotni na smer potovanja valovanja.

ce, kjer se je del ponovno lomi ter pobegne iz nje in del odbije nazaj vanjo. Odbita svetloba se ob naslednjem stiku s površino spet delno lomi in delno odbije. Oglejmo si svetlobo, ki iz kapljice izstopi. Ker pot svetlobe skozi kapljico in intenzivnost odbojev določata ista parametra, svetloba različnih barv pod različnimi koti izstopi z različno intenziteto. Pri določenem izstopnem kotu tako prevladuje rdeča svetloba, pri drugem pa modra – dobili smo mavrični lok.


SLIKA 4.

Vzorec pri interferenci valovanj iz dveh virov.


SLIKA 5.

Množica mavric. Znotraj primarnega loka lahko opazimo zaporedje šibkejših interferenčnih mavric.

Ker je izstopna smer za svetlobo z največ rdeče barve bolj navpična kot za svetlobo z največ modre, jo v mavrici vidimo najvišje. Pri preostalih kotih med intenzivnostmi različnih barv ne bo velikih razlik in videli bomo belo svetlobo.

Če se svetloba na poti skozi kapljico odbije dvakrat, dobimo sekundarno mavrico, a seveda nikoli ne vidimo obeh mavric iz iste kapljice. Tudi raz-

lični pasovi iste mavrice izvirajo iz različnih kapljic. Oglejmo si zdaj le svetlobo, ki prispeva k mavričnim lokom.

Ko poskusimo razložiti zaporedje mavric pod primarnim lokom, naletimo na težave. Svetlobo zato opišemo kot valovanje, zaporedje hribov in dolin. Med dvema hriboma ali dolinama je vedno enaka razdalja, ki določa tudi barvo svetlobe in jo imenujemo valovna dolžina. Rdeča svetloba se ponaša z malce večjo valovno dolžino kot modra. Ko se srečata žarka svetlobe z enako valovno dolžino, se valovanji seštejeta in pride do interference. Če se seštejeta dva hriba ali dve dolini, dobimo močnejše valovanje (konstruktivna interferenca), če se seštejeta hrib enega žarka in dolina drugega žarka, pa se žarka izničita (destruktivna interferenca). Shematsko to prikazuje slika 2.

Žarka svetlobe iste barve, ki v kapljico vstopita na različnih mestih, bosta na poti skozi prepotovala različni razdalji in pri tem pridela »zamik« drug glede na drugega, odvisen od vstopnih kotov (slika 3). A valovi se v resnici ne širijo le naprej, temveč tudi vstran. Če označimo vsak vrh valovanja, tako ne dobimo zaporedja pik, temveč ukrivljene loke. Loki dveh valovanj, ki iz kapljice izstopita na različnih točkah, se ponekod sekajo – tam dobimo konstruktivno interferenco –, drugod pa pade lok valovanja iz prve točke ravno na sredino med lokoma valovanja iz druge točke, kjer je dolina – dobimo destruktivno interferenco. Če bomo kapljico opazovali pod različnimi koti, bomo torej opazili močnejšo ali šibkejšo svetlobo iste barve (slika 4). Primarna mavrica predstavlja najmočnejši tako dobljeni žarek, interferenčne mavrice pa stranske žarke. Ker je zamik (kot) med žarki, nastalimi z interferenco odvisen tudi od velikosti kapljice, interferenčne mavrice vidimo le, kadar so kapljice dovolj majhne in podobne velikosti.

Zdaj torej razumemo, od kod množica mavric na sliki in vidimo, kako kompleksne izvore imajo lahko že enostavno opazljivi pojavi. Za razmislek pa naj ostane, h koliko loncem zlata te mavrice vodijo.

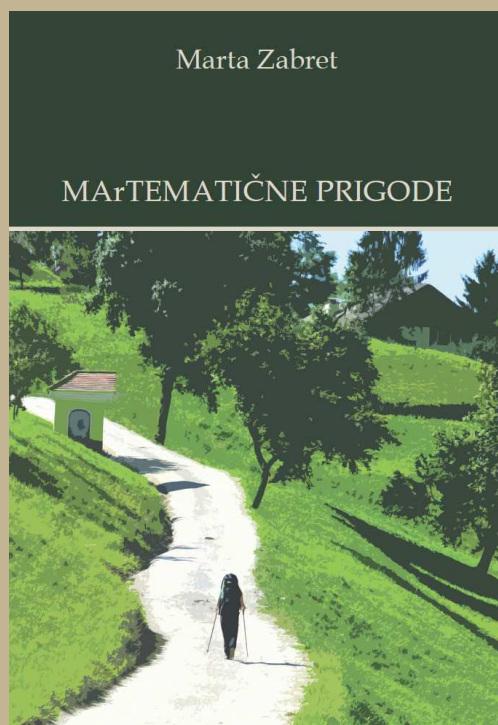
Literatura

- [1] *Atmospheric Optics*, dostopno na <https://atoptics.co.uk>, ogled 5. 2. 2023.

× × ×

MaRtematične prigode

To je knjiga, ki jo je na police treba odložiti poleg Svetega pisma, Iliade in Integralov Srečka Kosovela. Radi jo bodo imeli vsi, ki nikoli niso marali matematike, in so sklep, da zanjo niso nadarjeni, prenesli na svoje otroke. Z matematiko se v življenju srečamo dvakrat. Prvič, ko dokončno propademo pri integralnem računu in takoj za tem za vedno pobegnemo pred enačbami. Drugič, ko svojim otrokom poskušamo razložiti, kako preprosta stvar je matematični izračun, in se nam začne kolcati pri poštevanji. Kdor z matematiko nikoli ni imel težav, se bo ob branju lahko zabaval. Vsi drugi ga doživimo kot odrešitev. V tem svetu nismo sami. In na drugi strani je nekdo, ki ve za našo stisko in je o njej napisal knjigo. Govori o srečanju z neskončnostjo in večnostjo in njunimi povezavami z vsakdanjo šolsko politiko našega časa.



12,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!