



- ZAPOREDJA IN EPIDEMIJE
- ZVENEČI KOZARCI
- Z DYSONOVO SFERO V BOJ PROTI ENERGETSKI DRAGINJI?
- DISTANCIRANJE



Število 42 je vsota treh kubov

↓↓↓

$$42 = 80435758145817515^3 + 12602123297335631^3 + (-80538738812075974)^3$$

→ Antični matematik Diofant je v svoji knjigi Aritmetika iz 3. stoletja našega štetja zapisal 130 nalog o enačbah. Iz njegovih zapisov je razvidno, da se je zavedal, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto največ štirih popolnih kvadratov (na primer $15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$). To ugotovitev je šele konec 18. stoletja dokazal Joseph Louis Lagrange. Z današnjimi metodami njen dokaz ni zelo zahteven, s sodobnimi računalniki pa lahko vse ustrezne zapise za dano naravno število zelo hitro tudi poiščemo.

Na podobno vprašanje, katera naravna števila je mogoče zapisati z vsoto treh kubov, pa točen odgovor še ni znan. Domneva se, da to velja za vsa števila, ki dajo pri deljenju z 9 ostanek, različen od 4 ali 5, in da za vsako tako število obstaja celo neskončno različnih zapisov. A konkretne rešitve enačbe

$$n = x^3 + y^3 + z^3$$

je za dani n izjemno težko najti. Do leta 2016 so z računalniškim preiskovanjem vseh možnih kombinacij ob pogoju $|x|, |y|, |z| < 10^{15}$ uspeli odkriti vsaj en zapis za vsako ustrezno število med 1 in 100, razen za števili 33 in 42. Leta 2019 pa sta A. Booker in A. Sutherland z novimi metodami uspela zapisati še preostali števili. Za zapis števila 42 z vsoto treh kubov na zgornji sliki je bilo porabljenih 1,3 milijona ur računskega časa v omrežju Charity Grid, ki uporablja proste procesorske kapacitete 500.000 domačih računalnikov po vsem svetu.

Več o tem lahko preberete v članku A. R. Booker, A. V. Sutherland, *On a question of Mordell*, 2020, arXiv:2007.01209.

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 50, šolsko leto 2022/2023, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2022/2023 je za posamezne naročnike 22,40 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2022 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 2159

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večina razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Število 42 je vsota treh kubov

UVODNIK

- 4 Slikovni pogovori
(Aleš Mohorič)

MATEMATIKA

- 5-8 Zaporedja in epidemije
(Tadej Starčič)
- 27-28 Geogebra kotiček – Babilonska metoda za računanje kvadratnega korena
(Boštjan Kuzman)

FIZIKA

- 11-14 Zveneči kozarci
(Ema Mlinar)
- 29 Naravoslovna fotografija – Boke
(Andrej Guštin)

ASTRONOMIJA

- 18-23 Z Dysonovo sfero v boj proti energetski draginji?
(Vid Kavčič)

RAČUNALNIŠTVO

- 24-26 Distanciranje, 1. del
(Nino Bašič)

RAZVEDRILO

- 8 Barvni sudoku
- 15 Bilo je nekoč v reviji Presek – Jakobova lestev
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 26 Križne vsote
- 28 Rešitev nagradne križanke Presek 50/1
(Marko Bokalič)
- 30 Barvni sudoku
- 30 Rimski dvboj
(Katarina Jelenc)

TEKMOVANJA

- 9-10 Mednarodna matematična olimpijada 2022
(Luka Horjak)
- priloga 13. tekmovanje osnovnošolcev v znanju astronomije za Dominkova priznanja – šolsko tekmovanje
- priloga 13. tekmovanje srednješolcev v znanju astronomije za Dominkova priznanja – šolsko tekmovanje
- priloga Tekmovanje v znanju fizike – šolsko tekmovanje
- priloga Tekmovanje srednješolcev v znanju fizike – šolsko tekmovanje

matematike odigrale pomembno vlogo pri »odkrivanju« kotnih funkcij. Stari arabski učenjaki so naredili natančne tablice za tangens in kotangens kotov in jih celo poimenovali »Tablice senc«. Stari Rimljani pa so tangens imenovali pokončna senca (umbra recta), dobljen iz sence gnomona na vodoravni podlagi, in obrnjena senca (umbra versa) za kotangens, dobljen iz sence gnomona na navpični steni. Fotografija: Andrej Guštin

SLIKA NA NASLOVNICI: »Ne sodi oblike po senci«, pripoveduje kolesa na naslovni sliki. To najbrž vsi vemo. Morda pa je manj znano, da so sence na stenah in na tleh v zgodovini

Slikovni pogovori



ALEŠ MOHORIČ

→ Slika 1 je prvi znani medicinski rentgenski posnetek. Na njej je slika dlani s prstani narejena s sevanjem, ki ga je odkril Wilhelm Röntgen in zanj prejel prvo Nobelovo nagrado iz fizike. Medicinska korist je očitna – jasno se vidijo kosti. Podobne slike so uspešno uporabljali za popularizacijo odkritja.



SLIKA 1.

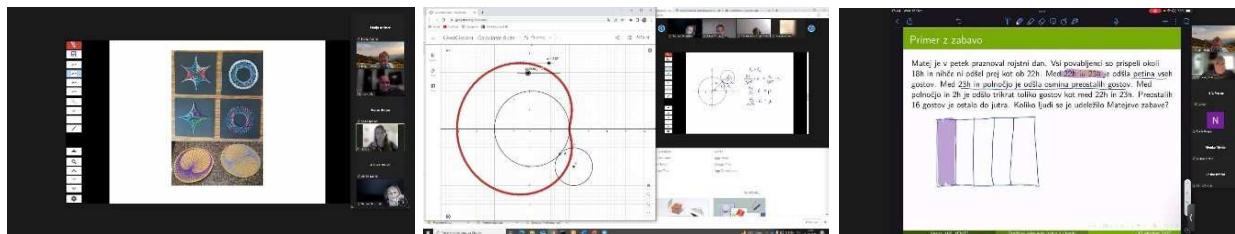
In slika pove več kot tisoč besed! V uredništvu se tega zavedamo, zato spodbujamo uporabo grafičnega gradiva v prispevkih. Poleg skrbi za bogato grafično opremo celotne vsebine namenjamo slikam tudi posebno rubriko Naravoslovna fotografija. V njej avtorji predstavijo utrinek, ujet v objektiv kamere. Nikoli ne vemo, kje in kdaj nas preseneti zanimiv fizikalni pojav ali nenavadna matematična simetrija. Skupaj s kratkim opisom nam zabeležena foto-

grafija razkriva novo skrivnost narave. S slikovnim gradivom nagovarjamo bralce tudi z naslovnice. Trudimo se izbirati čim lepše podobe, ki pa vsebujejo tudi naravoslovno noto. Seveda smo veseli fotografij, ki nam jih pošljete bralci. Če imate za katero od svojih zanimivih fotografij težave z iskanjem razlage, se obrnite na uredništvo in z veseljem vam bomo pomagali. Skozi častitljivo petdesetletno obdobje izhajanja revije se je tako nabrala pisana zbirka fotografij, slik, risb, skic in pripravljamo kratek povzetek nekaterih najbolj zanimivih, ki ga predstavimo v prihodnjih številkah.



SLIKA 2.

Bralce vabimo tudi na Presekov seminar, ki poteka na daljavo. Več informacij o seminarju najdete na spletni strani <http://www.rezultati.dmfa.si/ODrustvu/NovicaPrikaz.aspx?itemid=613>, do katere lahko dostopate s kodo QR (slika 2). Na seminarju se z avtorji in uredniki pogovorimo o vsebini aktualne revije. Prvo srečanje je že bilo in utrinki z njega so nanizani spodaj. Na srečanju nam je, med drugim, Vesna Iršič demonstrirala zanimivo metodo grafičnega reševanja nalog z ulomki in strli smo nekaj zanimivih primerov. Vid Kavčič je predstavil astronomsko tekmovanje treh dežel in pokazal rešitev zanimive naloge. Ema Češek pa je pokazala, kako v GeoGebri narišemo astroido in kardiodo. Prihodnjič se srečamo 23. novembra.



SLIKA 3.



Zaporedja in epidemije



TADEJ STARČIČ

→ Vse od nastanka prvih civilizacij se ljudje srečujemo z naravnim pojavom širjenja nalezljivih bolezni. Moderni matematični jezik za modeliranje zakonitosti tega in podobnih pojavov so diferencialne enačbe. Vendar pa si lahko pri reševanju enostavnejših in bolj idealiziranih problemov pomagamo tudi z zaporedji.

Z zaporedjem opišemo, kako se število ljudi z neko lastnostjo spreminja glede na enaka časovna obdobja, po dnevih, tednih, petdnevjih itd. V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj preprostih modelov, pri katerih poleg števila okuženih upoštevamo tudi inkubacijsko dobo, čas ozdravitve, hitrost širjenja okužb in podobno.

Zaradi lažjega razumevanja bomo uporabljali naslednje oznake:

- n ... število časovnih enot (npr. dni, tednov, petdnevij)
- O_n ... število vseh okuženih po n časovnih enotah
- N_n ... število okuženih, ki še niso zboleli in ne prenašajo virusa
- K_n ... število zbolelih, ki so v karanteni in ne prenašajo virusa
- Z_n ... število zbolelih, ki prenašajo virus

Prvi člen O_1 v zaporedju $O_1, O_2, O_3, \dots$ nam tako podaja število okuženih po prvem časovnem obdobju, člen O_3 pa število vseh okuženih ob koncu tretjega časovnega obdobja. Opazimo lahko, da za število vseh okuženih velja $O_n = N_n + Z_n + K_n$.

Za začetek si ogledjmo zelo enostaven zgled.

Primer 1. Denimo, da neki virus takoj ob okužbi povzroči lažjo, a neozdravljivo bolezen. Vsak zboleli nato vsak dan okuži po enega človeka. Če je prvi dan bolan en človek, potem je po n dneh število okuženih oziroma zbolelih enako

$$\blacksquare O_n = Z_n = 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iz opisanih pogojev sledi, da za število okuženih velja $O_1 = 1$ in $O_{n+1} = 2O_n$ (ter hkrati $N_n = K_n = 0$). Torej je O_n geometrijsko zaporedje s kvocientom dveh zaporednih členov enakim 2. Nekaj začetnih vrednosti je zbranih v tabeli 1.

n	1	2	3	4	5	...	n
O_n	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

TABELA 1.

Zaporedje O_n je geometrijsko.

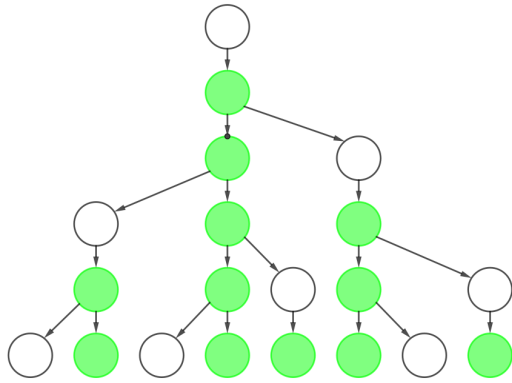
Naslednji primer je analog znanega modela, ki opisuje populacijo zajcev. Tega je v obliki naloge v svojem delu Liber Abaci opisal že znameniti italijanski matematik Fibonacci v 13. stoletju.

Primer 2. Naj velja, da vsak okuženi zboli po enem tednu, in od takrat naprej vsak teden okuži po enega človeka. Spet predpostavimo, da je bolezen neozdravljiva, a ne ogroža življenja, prvi teden pa je okužena ena oseba. Potem za tedensko širjenje virusa velja

$$\blacksquare O_{n+2} = O_{n+1} + O_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (Z_{n+2} = Z_{n+1} + Z_n).$$

Pri izbranih začetnih členih $N_1 = 1, Z_1 = 0$ in $O_1 = 1$ lahko grafično predstavimo prvih nekaj členov zaporedij N_n (bele kroglice) in Z_n (zelene kroglice); glejte sliko 1.



Primer 2 za $N_1 = O_1 = 1$ in $Z_1 = 0$

- $O_{n+2} = Z_{n+2} + N_{n+2} = Z_{n+2} + Z_{n+1}$
 $= O_{n+1} + O_n.$

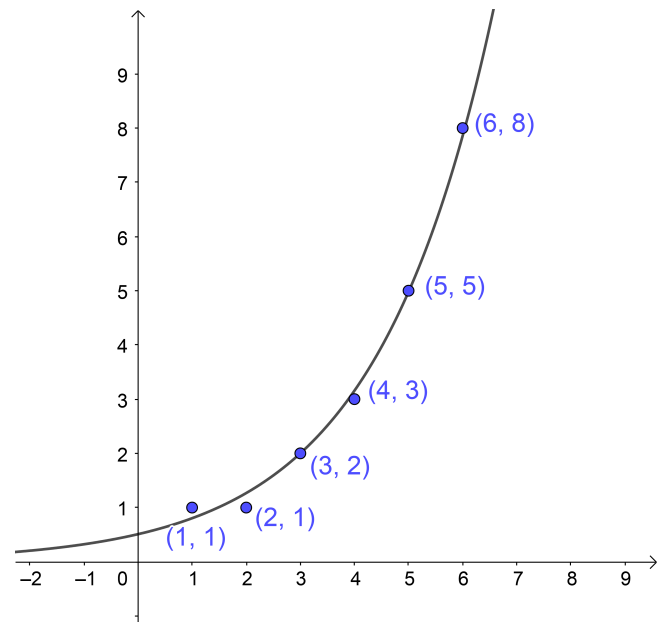
n	1	2	3	4	5	6
N_n	1	0	1	1	2	3
Z_n	0	1	1	2	3	5
O_n	1	1	2	3	5	8

Zaporedje O_n je Fibonaccijevo.

ka 2). In res. Bralci lahko pri danih začetnih dveh členih $O_1 = O_2 = 1$ poskusijo z indukcijo pokazati splošno formulo

- $$O_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Za dovolj velike n je izraz $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ poljubno majhen, zato je O_n približno enako $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, kar pomeni eksponentno rast.

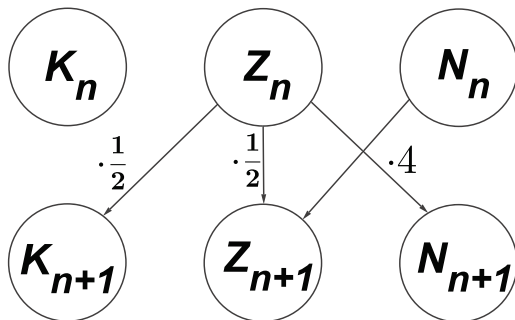


Grafu zaporedja O_n se lepo prilega eksponentna funkcija, ki jo v programu GeoGebra narišemo z ukazom EksponentnaTrendnaČrta(<seznam točk>).

Primer 3. Denimo, da ljudje po okužbi zbolijo po petih dneh. Polovica zbolelih takoj oddide v karanteno in v petih dneh ozdravijo, druga polovica zbolelih pa širi virus naprej tako, da vsak izmed njih v naslednjem petdnevju okuži po 8 ljudi. Potem velja naslednje:

- $O_{n+2} = \frac{1}{2}O_{n+1} + 4O_n, \quad n \geq 2.$

V tem primeru za začetek grafično predstavimo povezavo med ustreznimi zaporedji ter tabelirajmo nekaj njihovih členov. Ob tem privzemimo, da velja $N_1 = O_1 = 8$ in $K_1 = Z_1 = 0$ (slika 3).



n	1	2	3	4	5
N_n	8	0	32	16	136
Z_n	0	8	4	34	33
K_n	0	0	4	2	17
O_n	8	8	40	52	186

SLIKA 3.

Povezave med zaporedji in tabela vrednosti za začetne podatke $N_1 = O_1 = 8$ in $Z_0 = K_1 = 0$ v primeru 3.

Hitro opazimo, da velja $N_{n+1} = 8 \cdot \frac{1}{2} Z_n = 4Z_n$ (slika 3). Od tod izpeljemo $Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} + 4Z_n$. Zato velja tudi $4Z_{n+2} = 2Z_{n+1} + 16Z_n$ oziroma $N_{n+3} = \frac{1}{2} N_{n+2} + 4N_{n+1}$. Ker je $K_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$, tudi za člene K_n dobimo podobno zvezo. Končno sledi:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad O_{n+3} &= K_{n+3} + Z_{n+3} + N_{n+3} = \\
 &= \left(\frac{1}{2} K_{n+2} + 4K_{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2} Z_{n+2} + 4Z_{n+1}\right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} N_{n+2} + 4N_{n+1}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} (K_{n+2} + Z_{n+2} + N_{n+2}) + \\
 &\quad + 4(K_{n+1} + Z_{n+1} + N_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{2} O_{n+2} + 4O_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Z reševanjem ustrezne diferenčne enačbe bi lahko utemeljili, da je $O_n \approx c \cdot \left(\frac{1+\sqrt{65}}{4}\right)^n$ za velike n , kjer je $c > 0$ neka konstanta. To pomeni, da je rast števila okuženih ponovno eksponentna z osnovo približno 2,3. Če pa bi v primeru 3 v karanteno poslali vse zbolele, bi bil podoben primeru 1, kjer je število okuženih raslo eksponentno z osnovo 2. Karantena bi torej nekoliko upočasnila širjenje virusa.

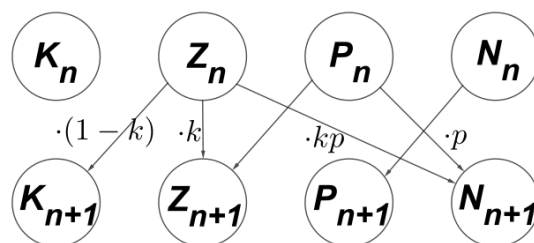
Za konec si oglejmo še situacijo, ki dokaj dobro (seveda ne povsem) spominja na trenutni koronavirus.

Primer 4. Denimo, da neki virus povzroča bolezen, ki jo je mogoče ozdraviti, a žal lahko tudi vzame kakšno življenje. Vsak okuženi s to boleznijo po petih dneh začne širiti virus in v naslednjih petih dneh okuži po p ljudi, zboli pa po desetih dneh. Predpostavimo, da delež k zbolelih zboli lažje in se ne testira oziroma izolira, zato virus širijo naprej (v petdnevju okužijo p ljudi), drugi pa v karanteni bodisi ozdravijo bodisi umrejo. Potem velja

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad O_{n+2} &= kO_{n+1} + pO_n, \quad n \geq 2 \\
 (Z_{n+2} &= kZ_{n+1} + pZ_n).
 \end{aligned}$$

Z oznako P_n tokrat dodatno označimo še število okuženih ljudi v n -tem petdnevju, ki še niso zboleli, vendar so že prenašalci virusa. Sledi (slika 4):

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad Z_{n+1} &= kZ_n + P_n, \quad N_{n+1} = kpZ_n + pP_n, \\
 P_{n+1} &= N_n, \quad K_{n+1} = (1-k)Z_n \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$



SLIKA 4.

Povezave med zaporedji v primeru 4.



Potem je

$$\begin{aligned} Z_{n+3} &= kZ_{n+2} + P_{n+2} = kZ_{n+2} + N_{n+1} \\ &= kZ_{n+2} + kpZ_n + pP_n \\ &= kZ_{n+2} + kpZ_n + p(Z_{n+1} - kZ_n) \\ &= kZ_{n+2} + pZ_{n+1} \end{aligned}$$

in nato

$$\begin{aligned} P_{n+3} &= Z_{n+4} - kZ_{n+3} \\ &= kZ_{n+3} + pZ_{n+2} - k(kZ_{n+2} + pZ_{n+1}) \\ &= k(Z_{n+3} - kZ_{n+2}) + p(Z_{n+2} - kZ_{n+1}) \\ &= kP_{n+2} + pP_{n+1}. \end{aligned}$$

Podobno kot v primeru 3 tudi sedaj izpeljemo enako rekurzivno zvezo še za druga zaporedja.

Tudi v tem primeru bo dobljena rast števil okuženih eksponentna, seveda pa je odvisna od izbire konstant $p \in \mathbb{N}$ in $k \in [0, 1]$. V primeru, ko je $p = 4$ in $k = 0, 5$, situacija sovпада s Primerom 3, v primeru, ko je $p = 1$ in $k = 1$, pa s Primerom 2.

S pomočjo računalniških programov lahko zdaj preprosto tabeliramo ustrezna zaporedja. V GeoGebra lahko denimo izdelamo drsnika za konstanti p in k , člene zaporedja pa tabeliramo tako, da v celice prvih treh vrstic stolpca A vnesemo začetne člene, v celico A4 pa vpišemo $=k*A3+p*A2$. Zadnji vnos nato prepišemo v preostale celice stolpca A.

Seveda se bralci in bralke gotovo zavedajo, da v članku opisani modeli zelo poenostavljajo resnično situacijo. Za modele, ki bi dejansko pomagali epidemiologom obvladovati razvoj epidemije, je potrebno še precej več matematičnega kot tudi epidemiološkega znanja.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.dmfa.si

www.presek.si

Barvni sudoku



→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

				1	6		3
			7		3		
2		4	3			5	
7							6
			6	8	4		
5					1	7	
8		2					

REŠITEV BARVNI SUDOKU



4	6	5	3	1	2	7	8
8	7	1	2	4	6	3	5
7	1	4	8	6	5	2	3
6	3	2	5	8	1	4	7
1	5	8	7	3	4	6	2
2	4	3	6	7	8	5	1
5	8	7	4	2	3	1	6
3	2	6	1	5	7	8	4

× × ×

Mednarodna matematična olimpijada 2022



LUKA HORJAK

→ Med 6. in 16. julijem je v Oslu na Norveškem potekala 62. Mednarodna matematična olimpijada. Na tekmovanju je sodelovala tudi slovenska ekipa, in sicer Katarina Grilj (Sr. šola Slovenska Bistrica), Vid Kavčič (Gimnazija Bežigrad), Juš Kocutar, Matija Likar in Kaja Rajter (vsi II. gimnazija Maribor) ter Matija Skrt (Gimnazija Nova Gorica). Ekipo sva na tekmovanju spremljala Gregor Dolinar in Luka Horjak.

Kljub izredno visokim mejam za medalje (najvišje od leta 1981) je Matija Skrt osvojil bronasto medaljo. Ekipni uspeh so dopolnili še Katarina Grilj, Juš Kocutar in Kaja Rajter, ki so osvojili pohvalo. Slovenija je med 104 sodelujočimi državami zasedla 72. mesto. Prvo mesto je zanesljivo osvojila Kitajska – vsi tekmovalci so namreč dosegli vse možne točke. Sledili sta ji Koreja in ZDA.

Za lažjo predstavo o težavnosti nalog, ki so jih tekmovalci reševali na tekmovanju, si oglejmo 2. in 4. nalogo s tekmovanja ter njuni rešitvi:



SLIKA 1.

Slovenska ekipa po zaključni slovesnosti

Naloga 2. Označimo z $\mathbb{R}^+$ množico pozitivnih realnih števil. Poišči vse take funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $y \in \mathbb{R}^+$, tako da velja

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Rešitev 2. naloge Nalogo lahko rešimo na veliko načinov, eden elementarnejših pa je naslednji:

Po navodilu naloge vemo, da za poljuben $a \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $b \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjena neenakost

$$af(b) + bf(a) \leq 2.$$

Če si izberemo $x = b$, imamo enolično rešitev neenačbe y . Ker število a reši neenačbo, je to edina možnost. Ugotovimo, da so pozitivna realna števila razdeljena v pare, pri čemer je neenakost izpolnjena natanko tedaj, ko sta števili v paru. Naš cilj bo pokazati, da je vsako število v paru samo s seboj.

Denimo nasprotno, torej, da obstajata različni števili x in y , ki sta v paru – velja

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo

$$2 \geq xf(y) + yf(x) \geq 2\sqrt{xf(y) \cdot yf(x)},$$

kar lahko preoblikujemo v

$$1 \geq xf(x) \cdot yf(y). \quad (1)$$

Ker je x v paru z y , ni v paru sam s seboj, zato velja neenakost

$$xf(x) + xf(x) > 2$$

oziroma $xf(x) > 1$. Podobno dobimo $yf(y) > 1$, kar pa je v protislovju z enačbo (1). Taki števili x in y zato ne obstajata.





Kot smo želeli, je vsako število v paru samo s seboj. Posebej,

$$\blacksquare xf(x) \leq 1.$$

Denimo, da obstaja tako število x_0 , da je $x_0 f(x_0) < 1$. Velja torej

$$\blacksquare f(x_0) = \frac{1}{x_1},$$

kjer je $x_1 > x_0$. Ker je $x_1 \neq x_0$, števili nista v paru, zato velja

$$\blacksquare 2 < x_0 f(x_1) + x_1 f(x_0) \leq x_0 \cdot \frac{1}{x_1} + x_1 \cdot \frac{1}{x_1} < 2,$$

kar je protislovje. Sledi, da za vsak x velja $xf(x) = 1$, torej je edina možna rešitev kar funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$.

Po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino velja

$$\blacksquare \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = y$. Neenakost

$$\blacksquare \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$$

je zato res izpolnjena natanko tedaj, ko je $x = y$, zato je zgornja funkcija res rešitev naloge.

Naloga 4. Naj bo $ABCDE$ tak konveksen petkotnik, da je $|BC| = |DE|$. Privzemimo, da obstaja točka T v notranjosti petkotnika $ABCDE$, tako da je $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ in $\angle ABT = \angle TEA$. Premica AB seka premico CD v točki P in premico CT v točki Q . Privzemimo, da so točke P, B, A, Q razporejene na premici v tem vrstnem redu. Premica AE seka premico CD v točki R in premico DT v točki S . Privzemimo, da so točke R, E, A, S razporejene na premici v tem vrstnem redu. Dokaži, da točke P, S, Q in R ležijo na krožnici.

Rešitev 4. naloge Opazimo, da lahko enakosti dolžin v navodilu naloge prepisemo v pogoj, da sta trikotnika TBC in TDE skladna. To lahko preprosto uporabimo pri računanju kotov – velja namreč

$$\blacksquare \angle TCB = \angle TED, \quad \angle CBT = \angle EDT \quad \text{in} \\ \angle BTC = \angle DTE.$$

Sledi, da je

$$\blacksquare \angle TSE = 180^\circ - \angle SET - \angle TED - \angle EDT \\ = 180^\circ - \angle TBA - \angle TCB - \angle CBT \\ = \angle BQT.$$

Če definiramo točko X kot presečišče premic AB in TD , točko Y pa kot presečišče premic AE in TC , sledi, da so točke X, Y, S in Q konciklične.

Ker velja

$$\blacksquare \angle ETY = 180^\circ - \angle CTD - \angle DTE \\ = 180^\circ - \angle CTD - \angle BTC \\ = \angle XTB,$$

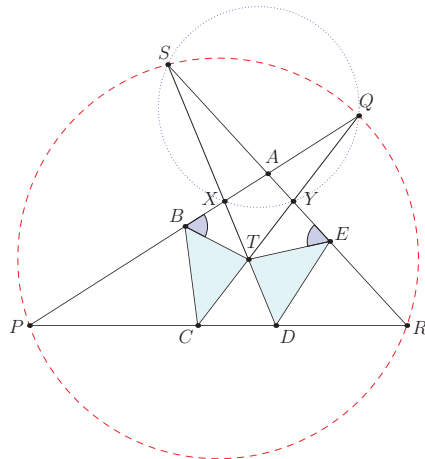
sta trikotnika TBX in TEY podobna (ujemata se v kotu pri T , kot pri B pa je enak kotu pri E). Posebej, velja

$$\blacksquare \frac{TX}{TY} = \frac{TB}{TE} = \frac{TD}{TC}.$$

Opazimo, da sta zaradi zgornjih razmerij podobna tudi trikotnika TXY in TDC . Sledi, da sta premici XY in CD vzporedni. Rešitev naloge lahko sedaj zaključimo z novim računom s koti, saj velja

$$\blacksquare \angle SQP = \angle SYX = \angle SRP,$$

torej so točke res konciklične.



SLIKA 2.

Skica za 4. nalogo

xxx

Zveneči kozarci



EMA MLINAR

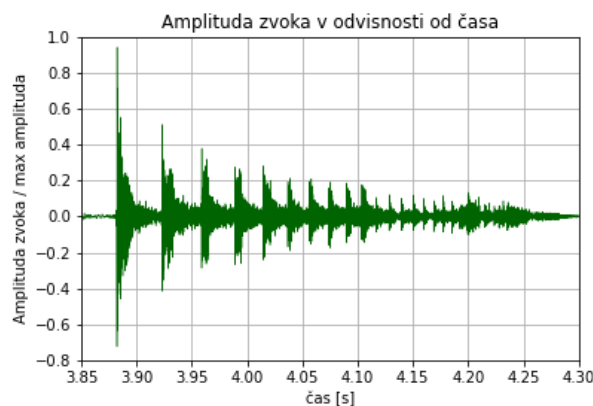
→ Vsi smo že kdaj z eno roko prijeli dva kozarca. Če ju stisnemo skupaj na prav poseben način (glej sliko 1) in hkrati dvignemo, se zasliši značilen zvok. Zanima nas, od kod ta zvok in splošen opis dogajanja. Tako se je glasila ena izmed nalog na mednarodnem IPT (International Physicists Tournament) tekmovanju študentov v reševanju fizikalnih problemov leta 2020. Poskus lahko brez težav izvedemo doma, potrebujemo le kozarce s čim bolj ravnim robom, velikost ni pomembna. Za bolj natančno opazovanje pa prav pridejo tudi mikrofoni, vmesnik za zajem zvoka ter program, ki omogoča analizo natančnega časovnega poteka (npr. Audacity).



SLIKA 1.

Kozarca primemo na vrhu in ju dvignemo. Zaslišimo zvok trkanja kozarcev.

Ob poslušanju zvoka trkanja kozarcev dobimo idejo, da bi lahko bili za pojav odgovorni trki med kozarcema in spreminjanje časa med njimi. Da bi to bolj videli, posnamemo zvok in ga prikažemo kot jakost zvoka (oz. bolj natančno zračni tlak) v odvisnosti od časa, glej krivuljo na sliki 2. Opazimo vrhove, ki predstavljajo trke med kozarcema, ti so



SLIKA 2.

Časovna odvisnost amplitude zvoka, ki jo dobimo s pomočjo zvočnega posnetka in obdelamo v programu Audacity. Konice na grafu predstavljajo trke, opazimo, da je razmik med njimi vedno krajši. To slišimo kot višanje frekvence. Opazimo lahko tudi, da se amplituda manjša, kar pomeni, da se očitno energija izgublja. Domnevamo, da gre za dušeno nihanje.

vedno manjši. Hkrati pa vidimo tudi soroden pojav krajšanja intervalov med trki, ki se na koncu zlijejo v enoten zven. Ugibamo, da bi to lahko bilo povezano z zvokom, ki ga slišimo. Opazimo pa tudi, da po vsakem trku kozarec zveni še s svojo lastno frekvenco, ki pa se zaduši po zelo kratkem času (že do naslednjega trka), zato ne prispeva bistveno k pojavu. Oblikujmo hipotezo: značilni zvok je posledica vedno krajših časovnih razmikov med trki, kar slišimo kot višanje frekvence trkov. Krivulja jakosti zvoka v odvisnosti od časa je na sliki 2.

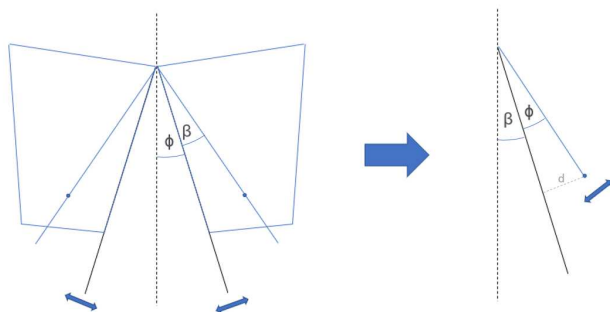
Najprej lahko opazimo, da če sta kozarca enaka, je gibanje drugega kozarca simetrično prvemu. Odbijanje med kozarcema lahko zaradi simetrije opišemo kot odbijanje enega kozarca od navpične stene. Ker težišče kozarca ni na robu kozarca, je gibanje ekvivalentno odbijanju točkaste mase od rahlo nagnjene stene. Pri tem gre v bistvu za nihanje okoli točke, kjer kozarca držimo. Ker pa vemo, da so v točki dr-





žanja in v točki odboja prisotne energijske izgube (npr. trenje, nepopolna prožnost), pričakujemo, da bo šlo za neko vrsto dušenega nihanja.

Začnimo s preprostim opisom gibanja enega kozarca, natančneje z njegovim nihanjem. Ta niha kot enostavno fizično nihalo (to je posplošitev matematičnega, le da imamo namesto mase vztrajnostni moment, ki opisuje razporeditev mase v nihalu). Kot odmika v odvisnosti od časa lahko zapišemo kakor $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$. Tukaj θ_0 predstavlja amplitudo odmika. Krožna frekvenca nihanja enega kozarca ω je odvisna od njegove velikosti - velikosti in položaja težišča, ki vplivata na vztrajnostni moment. Višji kozarci bodo nihali počasneje. To frekvenco bi lahko izmerili z ločenim eksperimentom, bolj nas pa zanima mehanizem, ki vodi v značilen zvok.



SLIKA 3.

Trkanje dveh kozarcev lahko opišemo z odbijanjem obeh od »stene« na sredini. Če pogledamo še drugače, lahko kota ϕ in β zamenjamo, saj je pot težišča kozarca nespremenjena. Dobimo torej odbijanje točkastega telesa od nagnjene stene.

Nadaljujemo z opisom odbijanja točkaste mase od nagnjene stene. Vpeljimo kót β kot nagib navidezne stene oziroma kot med navpičnico in zveznico osišča in težišča v ravnovesju - glej sliko 3. Kót θ_0 lahko zapišemo kakor vsoto kotov $\phi_0 + \beta$, kót θ pa kakor $\phi + \beta$:

$$\phi + \beta = (\phi_0 + \beta) \cos(\omega t),$$

Sedaj lahko zapišemo zvezo ob trku, polovični razmik med kozarcema je v tem primeru β . Čas začnemo šteti, ko je razmik med kozarcema maksimalen. Kozarca trčita na polovici časa med dvema tr-

koma:

$$\beta = (\beta + \phi_0) \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right), \quad (1)$$

kjer je T čas med dvema trkoma ob steno (glej sliko 3). Nadalje opazimo, da je kot ϕ zelo majhen v primerjavi s kotom β , še posebej na koncu pojava, ko slišimo značilen zvok. Trk se torej zgodi na začetku periode nihanja enega kozarca $\phi_0 + \beta$, z drugimi besedami, ob majhnem času T . Zato je tudi produkt $x = \omega \frac{T}{2}$ majhen in kosinus lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

S to zvezo lahko enačbo 1 poenostavimo:

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta + \phi_0) \left(1 - \frac{\left(\omega \frac{T}{2}\right)^2}{2}\right) \\ \frac{\beta}{\beta + \phi_0} &= 1 - \frac{\omega^2 T^2}{8} \\ 1 - \frac{\phi_0}{\beta + \phi_0} &= 1 - \frac{\omega^2 T^2}{8} \\ \frac{\phi_0}{\beta + \phi_0} &= \frac{\omega^2 T^2}{8} \end{aligned}$$

Ker je β precej večji od ϕ_0 , lahko ϕ_0 v imenovalcu zanemarimo. Nato iz izraza izluščimo amplitudo nihanja ϕ_0 :

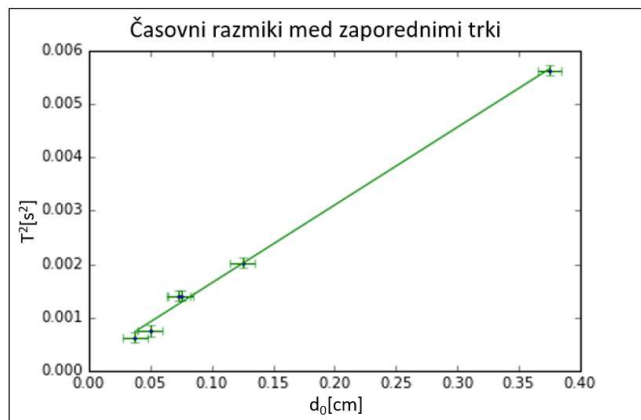
$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\omega^2 T^2 \beta}{8} \\ \phi_0 &\propto T^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Kot vidimo, količini ϕ_0 in T nista neodvisni, med njima obstaja jasno določljiva zveza. To lahko razložimo s tem, da točkasto telo dlje časa pada do »stene«, če ga spustimo z večje višine (oz. večje amplitude ϕ_0) kot pa z manjše. Čas med dvema skrajnima legama pa je ravno polovica časa med trkoma.

Ker so koti majhni, velja med maksimalno amplitudo kota ϕ_0 in maksimalnim fizičnim razmikom (tekoma enega nihaja) d_0 približna zveza $d_0 = l \sin \phi_0 \approx l \phi_0$. Razdalja l med osjo vrtenja in težiščem je konstanta, značilna za izbrani kozarec. Torej lahko enačbo 2 zapišemo tudi z maksimalnim fizičnim razmikom med kozarcema kakor:

$$d_0 \propto T^2 \quad (3)$$

To zvezo lahko preverimo tudi eksperimentalno. Eksperiment smo izvedli tako, da smo s pomočjo hitre kamere (uporabili smo kamero s 1200 sličic na sekundo, zadošča pa tudi manjša časovna ločljivost) posneli kozarca, ki trkata. Za vsak nihaj smo izmerili čas med sosednjima trkoma in maksimalni fizični razmik med robovoma kozarcev spodaj. Ujemanje z napovedano potenčno zvezo nakazuje, da smo z razlago na pravi poti, glej sliko 4.



SLIKA 4.

Eksperimentalna zveza med fizičnim razmikom d_0 in časovnim razmikom med dvema trkoma T . Med d_0 in T^2 je linearna odvisnost (polna črta), kar pomeni kvadratno odvisnost med d_0 in T , tako kot to napoveduje enačba 3.

Iz časovne odvisnosti amplitude zvoka na sliki 2 opazimo, da se amplituda nihanja s časom manjša;

ugotovimo, da gre za dušeno nihanje. Za dušeno nihanje je značilno, da amplituda (ϕ_0) pada eksponentno s časom. Do izgub energije oziroma dušenja lahko pride zaradi različnih pojavov – na primer zaradi zračnega upora, neprožnosti trkov med kozarcema, ter stika z našimi prsti v točki, kjer ju držimo (energija gre v toploto ali zvok). Zaradi zelo majhnih odmikov in hitrosti bomo zračni upor zanemarili. Za preostala dva pojava pa moramo poiskati matematični model, ki bo opisoval zmanjševanje amplitude. Predpostavimo, da stalno izgubljammo enak delež amplitude, kar opisuje eksponentna funkcija:

$$\Phi_0 = \phi_0 e^{-t/\tau}$$

kjer je t čas, τ pa neki karakteristični čas (konstanta). V tem primeru je dušenje prisotno ves čas, saj sta kozarca ves čas v kontaktu z roko. V drugem primeru, torej, če zanemarimo izgube v točki, kjer držimo, pa se energija izgublja diskretno (to pomeni, da dušenje »deluje« samo ob trkih, in ob vsakem trku izgubimo enak delež energije), zato dobimo odvisnost od števila trkov in ne od časa. Zapišemo diskretno odvisnost amplitude od števila trkov:

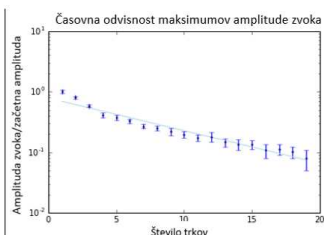
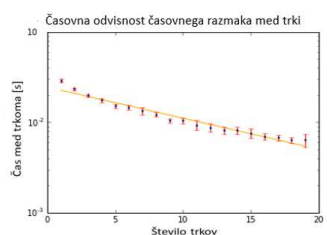
$$\Phi_0 = \phi_0 e^{-N/N_0}$$

Kjer je N število dosedanjih trkov, N_0 pa karakteristično število trkov (konstanta, ki je odvisna od energijskih izgub ob trku).

S pomočjo prilagajanja obeh krivulj na podatke določimo, ali je več dušenja v točki stika ali v točki trka (glej sliko 5). Ugotovimo, da je dušenje zaradi

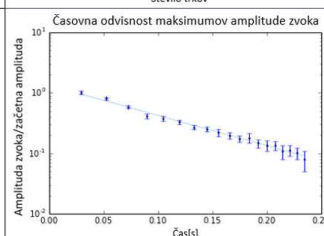
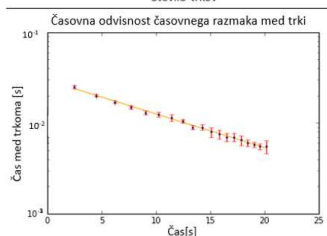
1. model:

Dušenje ob trkih



2. model:

Dušenje v stiku med kozarcema



SLIKA 5.

Primerjava prilagajanja teoretičnega modela meritvam v primeru dušenja v točki stika med kozarcema in dušenja zaradi energijskih izgub med trki. Nakloni premic so odvisni od jakosti dušenja. Ordinarna os je v logaritemski skali, da eksponentne oziroma geometrijske zveze ustrezajo premicam.



trenja v stiku med kozarcema precej večje od energijskih izgub med trki, saj je prileganje na spodnja grafa precej boljše.

Iz desnih dveh grafov na sliki 5 pa opazimo še eno posebno značilnost. Časovna odvisnost razmika med sosednjima trkoma se obnaša zelo podobno kot časovna odvisnost amplitude zvoka. Iz tega sklepamo, da bi lahko bili ti dve količini povezani.

Poskusimo torej teoretično pojasniti odvisnost med razmikom med sosednjima trkoma ter amplitudo zvoka (oz. bolj natančno zvočnega tlaka).

Za amplitudo zvočnega tlaka predpostavimo, da velja zveza:

$$\blacksquare W_{\text{nih}} \propto W_{\text{zvoka}} \propto A_{\text{zvoka}}^2$$

kjer je W_{nih} energija nihanja, W_{zvoka} energija zvoka (ki je izgubljena med trkom) in A_{zvoka} amplituda zvočnega tlaka, ki ga posname mikrofoni. Iz ohranitve energije nato sledi

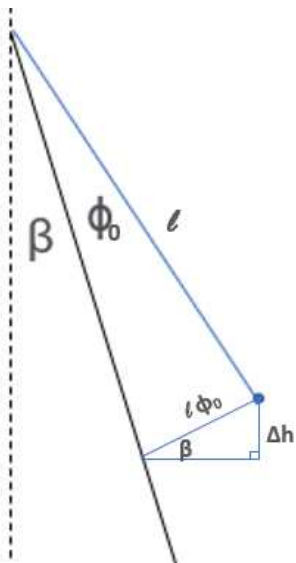
$$\blacksquare W_{\text{nih}} \propto mg\Delta h \propto \Delta h = l\phi_0 \sin \beta \propto \phi_0 \propto T^2,$$

glej sliko 6.

Dobimo torej

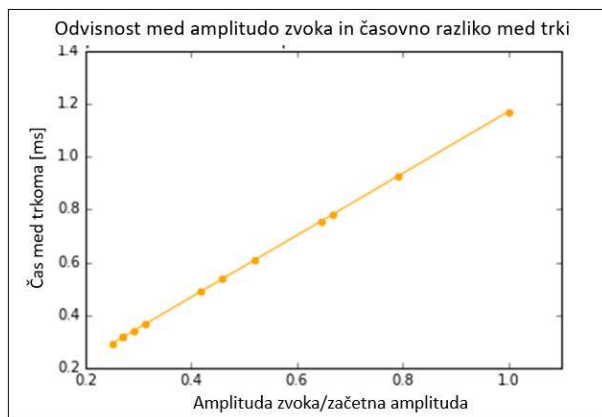
$$\blacksquare A_{\text{zvoka}} \propto T$$

(4)



SLIKA 6.

Skica količin, uporabljenih pri oceni odvisnosti energije zvoka. Tu smo uporabili dva približka, in sicer $\beta + \phi_0 \approx \beta$ ter $l \sin \phi_0 \approx l \phi_0$



SLIKA 7.

Eksperimentalna zveza med amplitudo zvoka in časovnim razmikom med sosednjima trkoma.

Sedaj preizkusimo, ali dobimo isto zvezo tudi s pomočjo eksperimenta. Zvok smo posneli z mikrofonom, nato smo s pomočjo programa Audacity obdelali zvočne posnetke. Dobili smo točno tako zvezo, ki smo jo izpeljali tudi teoretično (glej sliko 7).

Obravnavali smo pojav specifičnega zvoka, ki ga zaslišimo, ko kozarca dvignemo s prsti. Zvok, ki ga slišimo, je posledica trkov med kozarci. Med pojavom se izgublja energija, kar zaznamo kot nižanje amplitude zvoka ter višanje frekvence trkov. S pomočjo eksperimenta ter prilagajanja dveh modelov podatkom smo ugotovili, da se večina energije izgubi v točki stika med kozarcema, medtem ko je energija, izgubljena pri samem trku, zanemarljiva.

Ugotovili smo, da obstaja med časom med zaporednima trkoma in amplitudo zvoka povezava, še več, med njima velja korenska zveza, $T \propto \phi_0^{1/2}$, kjer je T časovni razmik med zaporednima trkoma, ϕ_0 pa amplituda kota med kozarcema. Z eksperimenti smo podprli teoretično vpeljano zvezo med amplitudo zvoka in časovnim razmikom, $A_{\text{zvoka}} \propto T$, kjer je A_{zvoka} amplituda zvoka.

Predstavili smo nekaj zanimivih zvez, seveda pa ste tudi sami povabljeni, da vzamete v roke kozarce ter še sami odkrijete kakšno zanimivo povezavo. Za eksperiment potrebujete le telefon, s katerim posnamete zvok, ter program, ki pokaže amplitudo zvoka v odvisnosti od časa, in seveda kozarce. Želimo vam veliko veselja!

× × ×

Jakobova lestev

ŠTEVILKA 1, LETNIK 19, 1991/92



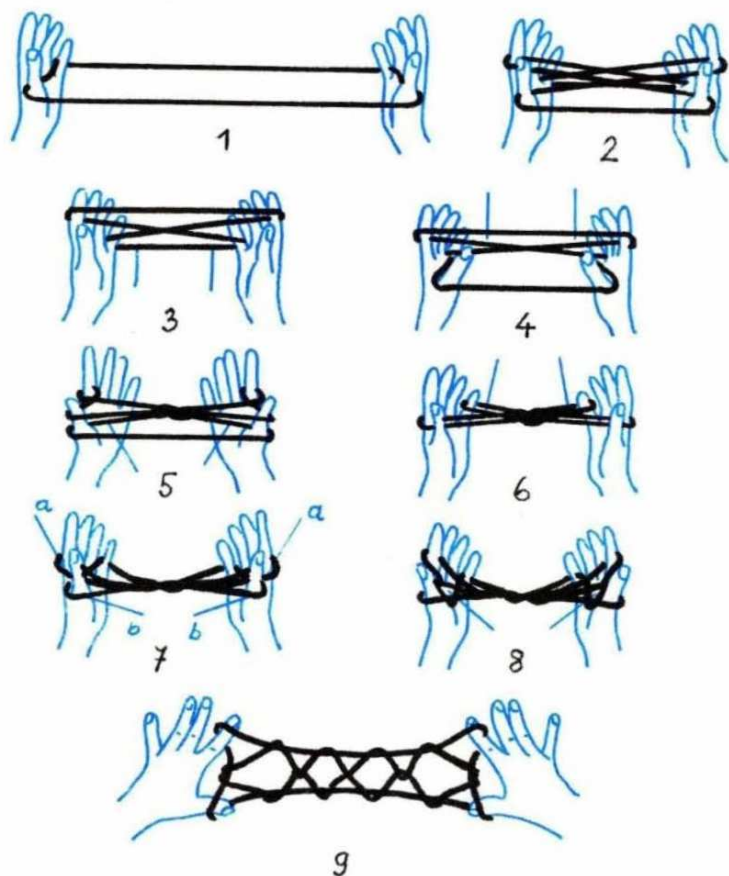
→ Leta 1991 je glavna urednica revije Presek postala **mag. Marija Vencelj (1941–2020)**, dolgoletna sodelavka Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani in od leta 2002 tudi častna članica DMFA Slovenije, ki se je veliko posvečala predvsem vzgoji bodočih profesorjev in profesorice matematike. Njeno uredništvo je pustilo reviji močan pečat, saj je znala k pisanju spodbuditi dobre avtorje in je tudi sama za revijo napisala vrsto kvalitetnih člankov. Vedno znova pa se je potrudila bralce pritegniti k reviji tudi z raznovrstnimi krajšimi prispevki, ki obujajo igrivost in radovednost. Navodilo za gradnjo Jakobove lestve je danes, ko mladi rokujejo predvsem še z mobilniki, morda celo bolj aktualno kot kadarkoli prej.

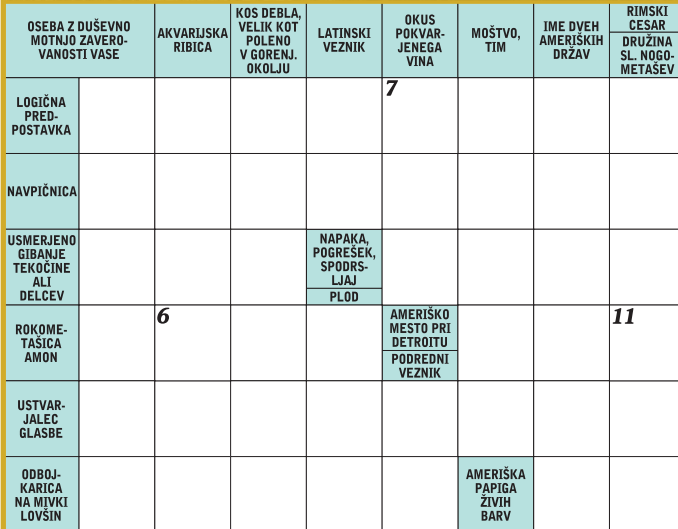


JAKOBOVA LESTEV

Za Jakobovo lestev potrebujete približno dva metra voljne vrvce in nekaj spretnosti. Zvežite oba konca vrvce in poskusite! Da bosta izziv in končno zadovoljstvo večja, so na sliki posamezne poteze samo označene. Veliko zabave!

Izbrala Marija Vencelj



A festive Christmas scene featuring a single red bauble with gold leaf patterns, nestled in white snow. The background is a vibrant yellow with soft bokeh and sparkling light effects.

[illegible]

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. decembra 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Z Dysonovo sfero v boj proti energetski draginji?

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ V zadnjem času se vse bolj soočamo z energetsko draginjo. Reševanja resne težave, ki jo predstavlja draginja, se je država lotila na več različnih načinov, med drugim s spodbujanjem energetske samooskrbe. Pri tem finančno podpira investicije v izgradnje sistemov za uporabo alternativnih virov energije, kamor spada tudi sončna energija.

Sončna energija je na Zemlji prisotna v zelo velikih količinah. Količina sončne energije, ki obseva modri planet, je kar 10 000-krat večja od naših trenutnih letnih potreb po energiji, kar pomeni, da bi lahko s premišljeno izrabo tega alternativnega vira energije na čist in okolju prijazen način kaj hitro pokrili vse letne potrebe po energiji.

V članku bomo proučili idejo o Dysonovi sferi kot zanimivo rešitev, s katero bi lahko človeštvo zelo dobro izkoristilo sončno energijo. Ob nalogi o Dysonovi sferi si je nohte grizlo tudi pet slovenskih srednješolcev na teoretičnem delu 15. Mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike, ki je letos avgusta potekala v Kutaisiju v Gruziji.

O bolj ali manj naprednih civilizacijah in Dysonovi sferi

Ruski astronom **Nikolaj Kardašev** je leta 1964 predlagal teoretično lestvico za merjenje stopnje tehnološkega napredka civilizacije, ki se je po svojem avtorju prijelo ime **Kardaševa lestvica**. Lestvica je le teoretična in hipotetična, vendar pa kljub temu porabo energije celotne civilizacije postavi v kozmično perspektivo. Kardaševa lestica tako na podlagi dostopnosti in uporabe energije kot tudi stopnji kolonizacije vesolja razlikuje tri razvojne stopnje civilizacij, imenovane tip I, tip II in tip III.

Civilizacija **tipa I** naj bi bila sposobna izkoristiti vire svojega domačega planeta, kar ustreza energij-

ski porabi okoli $4 \cdot 10^{16}$ W. Civilizacija **tipa II** naj bi bila zmožna izkoristiti energijo, ki jo seva zvezda v njihovem osončju, kar ustreza porabi energije okoli izseva našega Sonca, to je približno $4 \cdot 10^{26}$ W. Civilizacija **tipa III** pa naj bi izkoriščala energijo celotne galaksije Rimske ceste, kar ustreza porabi energije $4 \cdot 10^{37}$ W. Trenutno je naša civilizacija **tipa nič**, saj ne porabimo niti 100 % energije, ki od Sonca prihaja na Zemljo, s tem pa ne ustrezamo niti pogoju za civilizacijo tipa I, ki zahteva, da bi izkoristili vso sončno energijo na Zemlji. Trenutno se naša civilizacija na Kardaševi lestvici nahaja na stopnji približno 0,7.

En način, kako bi lahko postali civilizacija tipa II, je izgradnja tako imenovane **Dysonove sfere**. To je gromozanska sfera, zgrajena okoli Sonca, ki ima notranjo površino pokrito s sončnimi celicami in tako absorbira velik delež izsevane sončne energije, ki bi jo do zbiralnika na Zemlji prenašali brezžično. Ime je dobila po angleško-ameriškem fiziku **Freemanu Dysonu** (slika 1), ki je idejo zasnoval na podlagi romana *Star maker*. Znanstvenofantastični roman iz pod peresa Olafa Stapledona iz leta 1937 namreč opisuje civilizacijo, ki je svojo materinsko zvezdo zavoljo zbiranja energije obdala s posebno tančico. Ameriškem fiziku se je zdelo, da je izgradnja takšne sfere logičen korak v razvoju civilizacije tipa II – vsak planet v svojem osončju namreč prejme le trohico energije svoje matične zvezde, civilizacija pa za svoj napredek potrebuje vedno več in več energije.

V nadaljevanju bomo z izračuni proučili model Dysonove sfere in premislili o pomembnih dejavnikih, ki jih moramo upoštevati pri njeni izgradnji.

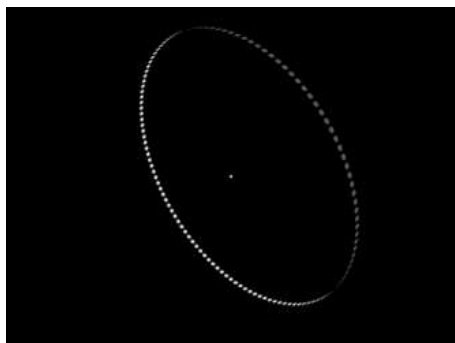
Kaj zmore Dysonova sfera?

Z računi se prepričajmo, kaj Dysonova sfera dejansko zmore in kakšne bi bile njene lastnosti. Recimo, da bi za izgradnjo sfere uporabili solarne panele. Zaradi ocene predpostavimo, da solarni paneli absorbi-



SLIKA 1.

Freeman John Dyson (1923–2020), teoretični fizik in matematik ter zaslužni profesor na Inštitutu za napredne študije v Princetonu, je razen po svojih zaslugah na področju astrofizike znan po svojem delu na področju naključnih matrik, kvantne teorije polja, fizike kondenzirane snovi in jedrske fizike. Poleg Dysonove sfere se po njem imenuje tudi Dysonovo drevo, hipotetična gensko spremenjena rastlina, ki je zmožna rasti v kometu. Zanimivo pa je pripomniti, da je Dyson zanikal človekov vpliv na podnebne spremembe.

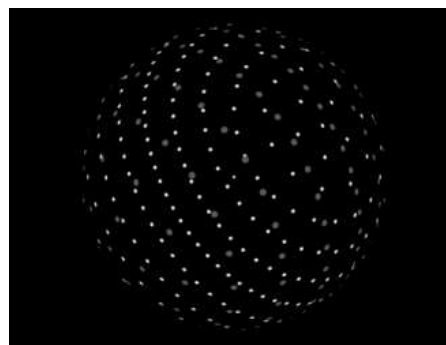


SLIKA 2.

Dysonov roj je različka, ki je najbližja prvotni Dysonovi zamisli. Sestavljen je iz velikega števila neodvisnih sončnih panelov, ki na gosto krožijo okoli zvezde. Prednost tega načina gradnje je, da je sestavne dele mogoče ustrezno dimenzionirati in konstruirati postopoma. Najenostavnejša taka ureditev je na sliki prikazan **Dysonov obroč**, v katerem vsi paneli krožijo po isti orbiti.

rajo in spremenijo v notranjo energijo okoli $k = 30\%$ vpadnega sevanja, v električno energijo spremenijo okrog $\eta = 20\%$ vpadnega sevanja.

Upoštevali bomo, da seva Sonce kot črno telo, in zanemarili odboj na solarnih panelih ter tudi kateri



SLIKA 3.

Sestavni deli **Dysonovega mehurčka** v nasprotju z Dysonovim rojem niso v orbiti okoli zvezde, ampak so mirujoči statiti z ogromnimi svetlobnimi jadrji, ki zaradi sevalnega tlaka uravnotežijo gravitacijo zvezde. Ker je razmerje med silo sevalnega tlaka in gravitacijsko silo zvezde konstantno ne glede na razdaljo, lahko svojo oddaljenost od zvezde poljubno spreminjajo, poleg tega pa zaradi mirovanja ne bi bili v nevarnosti trčenja.

koli učinek, pri katerem se energija ne spremeni v notranjo energijo ali v električno energijo solarnega panela. Predpostavimo, da je emisivnost hrbtna strani solarnih panelov $\varepsilon = 0,8$.

Najprej poskusimo izraziti ravnovesno temperaturo sfere T_{rav} v odvisnosti od njenega polmera R . V notranjo energijo se pretvori energijski tok $kL_{\odot}$, pri čemer smo z $L_{\odot}$ označili Sončev izsev, ki ima vrednost približno $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26}$ W. V ravnovesju mora sfera prejeti energijski tok tudi izsevati. Po Stefanovem zakonu velja, da sfera izseva energijski tok $4\pi R^2 \varepsilon \sigma T^4$, iz česar lahko izrazimo ravnovesno temperaturo sfere kot

$$kL_{\odot} = 4\pi R^2 \varepsilon \sigma T_{\text{rav}}^4,$$

$$\therefore T_{\text{rav}} = \sqrt[4]{\frac{kL_{\odot}}{4\pi R^2 \varepsilon \sigma}}.$$

Po eni strani želimo, da bi bila sfera čim manjša in bi tako zmanjšali količino uporabljenega materiala, vendar moramo pri tem varčevanju paziti, saj sfera prav poljubno majhna vendarle ne sme biti. Iz zgornje enačbe je jasno razvidno, da manjša kot je sfera, višja je njena efektivna temperatura. To pa lahko predstavlja težavo, saj je **najvišja temperatura delovanja modernih solarnih panelov** okoli $T_{\text{max}} = 105^{\circ}\text{C}$, pri višji temperaturi pa učinkovitost znatno upade. Da bi zmanjšali količino uporablje-





nega materiala, nam je v interesu, da je sfera čim manjša, kljub temu pa želimo, da je kar najbolj učinkovita. Iz teh dveh pogojev lahko izračunamo najmanjši možni polmer sfere, da bodo solarni paneli še vedno učinkovito delovali, kot

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad kL_{\odot} &= 4\pi R^2 \epsilon \sigma T_{\max}^4, \\ R &= \sqrt{\frac{kL_{\odot}}{4\pi \epsilon \sigma T_{\max}^4}}, \\ \therefore R &\approx 1,0 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0,665 \text{ ae}. \end{aligned}$$

To pomeni, da bi optimalna Dysonova sfera ležala **znotraj Zemljine orbite** okoli Sonca, ki je približno krožna s polmerom 150 milijonov kilometrov, kar ustreza eni **astronomski enoti** (ae).

Poleg tega pa lahko izračunamo še energijski tok, ki bi ga Dysonova sfera dejansko pretvarjala v električno energijo za potrebe človeštva. Ta preprosto znaša

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad P &= \eta L_{\odot}, \\ \therefore P &= 7,65 \cdot 10^{25} \text{ W}. \end{aligned}$$

Kaj to v resnici pomeni? Za predstavo napravimo primerjavo: danes je povprečna moč, ki jo koristi celotno človeštvo, okoli 17 teravatov. Če bi ta Dysonova sfera energijo zbiralala le eno samo sekundo, bi s to energijo lahko zadovoljila naše energijske potrebe za kar

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \tau &= \frac{7,65 \cdot 10^{25} \text{ W} \cdot 1 \text{ s}}{17 \cdot 10^{12} \text{ W}} = 4,5 \cdot 10^{12} \text{ s} \\ &\approx 143\,000 \text{ let}, \end{aligned}$$

kar je nepredstavljivo veliko.

Pa vendar ni vse tako sončno lepo. Če bi namreč v skladu s tem modelom Dysonova sfera prestregla delež Sončeve svetlobe, bi se **temperatura Zemlje znatno znižala**. Izračunajmo, kolikšna bi bila povprečna temperatura površine Zemlje v tem primeru. Pri tem lahko predpostavimo, da je Zemlja krogla z albedom $A = 0,3$, kar pomeni, da A prejetega energijskega toka odbije, absorbira pa le $1 - A$ prejetega energijskega toka, poleg tega pa zaradi ocene zanemarimo učinke Zemljine atmosfere. Če z $R_{\oplus}$ označimo polmer Zemlje in z $a_{\oplus}$ srednjo oddaljenost Zemlje od Sonca (eno astronomsko enoto), lahko zapišemo sledečo enačbo, iz katere izrazimo povprečno tempera-

turo na Zemlji v primeru postavitve Dysonove sfere:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (1 - A)kL_{\odot} \frac{\pi R_{\oplus}^2}{4\pi a_{\oplus}^2} &= 4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T_{\text{nova}}^4, \\ T_{\text{nova}} &= \sqrt[4]{\frac{(1 - A)kL_{\odot}}{16\pi \sigma a_{\oplus}^2}}, \\ \therefore T_{\text{nova}} &= 188 \text{ K} = -85^{\circ} \text{C}. \end{aligned}$$

Trenutna povprečna temperatura Zemlje je okoli 15°C . Če bi v Osončju namestili Dysonovo sfero, bi se povprečna temperatura Zemlje zmanjšala za 100°C , in sicer na -85°C , kar pa najbrž ne bi bilo najbolj prijetno. Za primerjavo, najnižja temperatura na Zemlji je bila namerjena leta 2018 na Antarktiki, in sicer $-98,6^{\circ} \text{C}$.

Kljub vsemu bi imeli v tem primeru prav gotovo dovolj električne energije, da nas tudi pozimi ne bi zeblo, pojavi pa se na primer vprašanje, kaj bi jedli, saj bi cene živil, čeprav morda iz osnovne košarice, pobegnile v nebo. Poleg tega pa bralec najbrž povsem upravičeno mršči obrvi z mislijo, da je izgradnja trdnega sferičnega objekta takih dimenzij, kot je Dysonova sfera v našem modelu, v današnjih časih in s trenutno tehnologijo praktično nemogoča, hkrati pa bi izdelava take količine panelov z današnjimi postopki vseeno terjala precej onesnaženja, solarna energija pa bi se sprevrgla v nekaj ne tako zelo čistega.

Seveda se je tudi Dyson zavedal, da bi takšna toga struktura zahtevala nepredstavljivo trden material, poleg tega pa je tudi v svojem izvirnem članku zapisal, da je **tovrstna trdna lupina mehansko nemogoča tvorba**. Dysonova sfera je mogoča le v primeru, če je sestavljena iz roja manjših predmetov, ki okoli zvezde potujejo po neodvisnih orbitah. Zaradi tega je razmišljal o možnih alternativnih različicah Dysonove sfere, kot so, denimo, **Dysonov roj** (v najenostavnejši obliki **Dysonov prstan**, slika 2), **Dysonov mehurček** (slika 3), **Dysonova mreža** in druge.

Kako in iz česa zgraditi Dysonovo sfero?

Zato bi vsekakor treba razmisliti o drugih načinih izgradnje Dysonove sfere. Eden obetavnejših je vsekakor **Dysonov roj** (slika 2). Ideja o Dysonovem roju predvideva, da se posamične solarne panele pošlje v orbite z različnim naklonom okoli Sonca na razdaljo R . Obhodni čas T katerega koli objekta v orbiti okrog

Sonca na tej razdalji izračunamo po III. Keplerjevem zakonu. Pri tem predpostavimo, da je masa Sonca veliko večja od mase sfere. Velja

$$\begin{aligned} \frac{R^3}{T^2} &= \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{\odot}}}, \\ \therefore T &= 0,542 \text{ leta} = 198 \text{ dni.} \end{aligned}$$

Zelo pomembno vprašanje pa je tudi **vprašanje materiala**, iz katerega bi zgradili solarne panele. Želeli bi namreč porabiti kar najmanj materiala, saj govorimo o izgradnji gromozanske megastrukture, pri kateri vsaka varčnost ni odveč. Najtanjši in hkrati najlažji material, ki so ga do zdaj izdelali na Zemlji, je iz ultralahkih ogljikovih nanocerk s površinsko gostoto $1,4 \text{ g/m}^2$, kar pa ne bi bil najbolj primeren material za proizvodnjo panelov, ki jih danes izdelujemo predvsem iz silicija, nekaj malega mu dodamo tudi fosforja in bora. Zaradi ocene predpostavimo, da bodo paneli tanki listi silicija s površinsko gostoto $\rho = 1 \text{ kg/m}^2$.

Vendar se v primeru rabe materiala z relativno majhno površinsko gostoto pojavi kočljivo vprašanje, v kolikšni meri na orbito panela učinkuje **svetlobni tlak** Sonca. Pa pogledjmo in ocenimo razmerje α med gravitacijsko in sevalno silo na enoto površine na razdalji R . Pri tem predpostavimo, da je vsa vpadna svetloba absorbirana.

Primerjajmo ti dve sili na primeru panela s površino S . Upoštevamo, da velikost svetlobnega tlaka za telesa, ki absorbirajo vso vpadno sevanje, izračunamo po formuli $p_s = \frac{j}{c}$, kjer je j gostota svetlobnega toka in c velikost svetlobne hitrosti v vakuumu. Preprosto zapišemo izraza tako za silo sevalnega tlaka kot tudi za silo gravitacije in izrazimo razmerje α med njima:

$$\begin{aligned} F_s &= p_s S = \frac{jS}{c} = \frac{L_{\odot} S}{4\pi R^2 c}, \\ F_g &= \frac{GM_{\odot} S \rho}{R^2}, \\ \alpha &= \frac{F_s}{F_g} = \frac{L_{\odot}}{4\pi c G M_{\odot} \rho}, \\ \therefore \alpha &= 7,65 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Tako se na prvi pogled morda zdi, da je učinek svetlobnega tlaka povsem zanemarljiv. Vendar si za

vsak primer oglejmo spremembo obhodnega časa zaradi tega učinka. Hkrati pa ne pozabimo na varčnost, zato pri oceni upoštevajmo optimalni polmer $R = 0,665 \text{ ae}$. Če upoštevamo, da je $\alpha \ll 1$, lahko uporabimo formulo za računanje z relativno majhnimi količinami $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$. Velja:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)F_g &= m\omega_1^2 R, \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{GM_{\odot}(1 - \alpha)}{R^3}}, \\ T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{\odot}}}(1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{T_1}{T} &= (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}, \\ \Delta T &= \frac{\alpha T}{2}, \\ \therefore \Delta T &= 1,8 \text{ h,} \end{aligned}$$

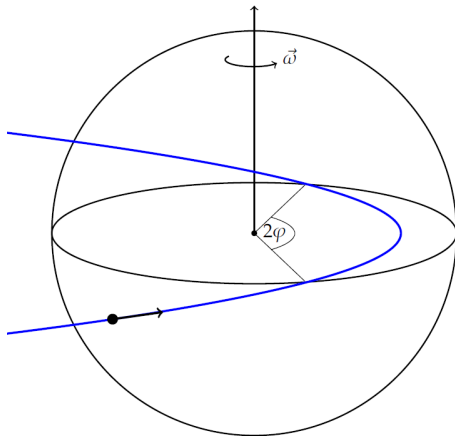
kar pa pomeni, da bi v tem modelu svetlobni tlak dejansko imel nezanemarljiv oziroma merljiv učinek na orbito panelov, in bi ga pri izgradnji morali posebej upoštevati.

Možnost materialne škode?

Ideja o Dysonovi sferi trči tudi ob številne druge težave. Naše Osončje namreč ni prazen prostor – v njem namreč kratkomalo mrgoli raznoraznega vesoljskega kamenja, od asteroidov do kometov, ki bi utegnili našo megastrukturo pogosto nevarno poškodovati. Zato bi jo bilo smiselno zgraditi tako, da bi ponekod v njej pustili luknje na tak način, da bi vsaj periodična telesa lahko sfero prečkala, ne da bi se zaletela in s tem povzročila materialno škodo.

Na konkretnem primeru nekega asteroida pogledjmo, kako bi lahko materialno škodo preprečili. Za oceno predpostavimo, da je Dysonova sfera trdno telo s polmerom $R = 0,665 \text{ ae}$ in z obhodnim časom $T = 0,542 \text{ leta}$, kot smo izračunali v prejšnjih razdelkih. Astronomi so odkrili asteroid v orbiti, ki se giblje v ekliptični ravnini, in sicer v isti smeri kot Dysonova sfera. Napovedi kažejo, da bo asteroid vstopil v sfero 24. novembra in izstopil 31. decembra istega leta. Izračunajmo kotno razdaljo med obema luknjama v sferi, ki ju je treba narediti, da bo asteroid varno prečkal sfero.





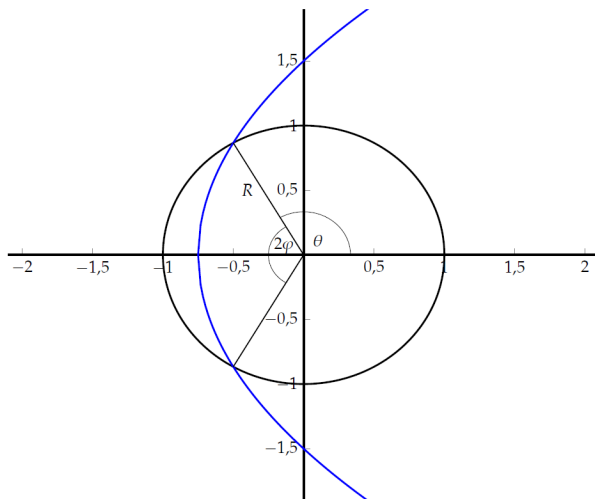
SLIKA 4.

Shematski prehod asteroida skozi Dysonovo sfero.

V heliocentričnih cilindričnih koordinatah naj gibanje asteroida po parabolični orbiti opisuje enačba

$$r = \frac{a}{1 - \cos \theta},$$

ker je $a = 1,00$ ae.



SLIKA 5.

Tirnica asteroida in Dysonova sfera v preseku.

Preprosto lahko določimo kota vstopa v sfero in izstopa asteroida iz nje, to je v točkah, ko je asteroid na razdalji R od Sonca. V skladu z zgornjo enačbo

velja

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{1 - \cos \theta}, \\ R - R \cos \theta &= a, \\ \cos \theta &= 1 - \frac{a}{R}, \\ \cos \theta &= -0,5046, \\ \therefore \theta_1 &= 120,2^\circ, \\ \therefore \theta_2 &= 239,8^\circ, \end{aligned}$$

iz česar izračunamo kotno razliko 2ϕ med pozicijama lukenj:

$$2\phi = \theta_2 - \theta_1 = 119,5^\circ.$$

Vemo, da bo asteroid znotraj sfere približno $\tau_0 = 37$ dni. V tem času se bo sfera zavrtela za kot

$$\begin{aligned} \Delta y \omega \tau_0 &= \frac{2\pi \tau_0}{T}, \\ \therefore \Delta y &= 67,0^\circ. \end{aligned}$$

Potrebna kotna razdalja med luknjama β , da bo asteroid varno vstopil v sfero in jo prav tako varno zapustil, je tako

$$\begin{aligned} 2\phi &= \Delta y + \beta, \\ \beta &= 2\phi - \Delta y, \\ \therefore \beta &\approx 52,3^\circ. \end{aligned}$$

S podobnimi izračuni bi tudi na primerih drugih asteroidov in kometov ugotovili, kje v sferi bi morali pustiti luknje, da bi ti nemoteno potovali skozi sfero. Seveda pa se pri tem ne bi mogli izogniti vsaj nekaj materialni škodi zaradi nepredvidljivega gibanja teles v Osončju.

Kako pa bi sfero videli v drugih galaksijah?

V katerem območju valovnih dolžin pa bi morali opazovati Dysonovo sfero, ki jo je ustvarila neka civilizacija tipa II v zelo oddaljeni galaksiji? Recimo, da je njena oddaljenost do Zemlje d in lahko sfera deluje med temperaturama T_1 in T_2 , za kateri velja $T_1 < T_2$. V nadaljevanju bomo privzeli samo nerelativistične učinke.

Po **Wienovem zakonu** velja, da je valovna dolžina, pri kateri črno telo, v našem primeru sfera, seva najmočnejše, obratno sorazmerna z njegovo efektivno

temperaturo. Za naši robni valovni dolžini tako velja:

$$\lambda_1 = \frac{k_w}{T_1},$$

$$\lambda_2 = \frac{k_w}{T_2},$$

kjer smo s k_w označili **Wienovo konstanto**, ki ima vrednost $k_w = 2,9 \cdot 10^{-3}$ mK.

Zdi se, da smo na tej točki prišli do končnega odgovora na zastavljeno vprašanje, vendar moramo pri izračunu intervala valovnih dolžin upoštevati še dejstvo, da se pogovarjamo o Dysonovi sferi v zelo oddaljeni galaksiji. Na velikih razdaljah namreč zaradi **raztezanja vesolja** pride do tako imenovanega **kozmološkega rdečega premika**.

Do ugotovitve, da se vesolje razteza, je s svojim pomembnim kozmološkim odkritjem v letih 1928–1929 prišel ameriški astronom **Edwin Hubble**. Šarmantni prežvekoalec pipe je z merjenjem premika spektralnih črt ugotovil, da se galaksije (večinoma) oddaljujejo od nas. Zaključil je, da je izmerjeni rdeči premik spektralnih črt z sorazmeren z oddaljenostjo galaksij d , kar zapišemo kot

$$z = \frac{H_0 d}{c},$$

kjer je $H_0 \approx 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ **Hubbleova konstanta** danes. Zvezi danes pravimo **Hubble-Lemaîtrejev zakon**, saj se je pozneje razvedelo, da je do istega odkritja že leta 1927 prišel tudi belgijski astronom **Georges Lemaître**.

Zaradi kozmološkega rdečega premika, ki ga opisuje Hubble-Lemaîtrejev zakon, je opazovana valovna dolžina v resnici nekoliko večja od izsevane. Zaradi tega za robni valovni dolžini, med katerima lahko opazujemo Dysonovo sfero, v resnici velja

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \left(1 + \frac{H_0 d}{c} \right),$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 \left(1 + \frac{H_0 d}{c} \right),$$

iz česar zaključimo, da bi Dysonovo sfero v oddaljeni galaksiji zaznali v pasu valovnih dolžin

$$\frac{k_w}{T_2} \left(1 + \frac{H_0 d}{c} \right) < \lambda_{\text{opazovana}} < \frac{k_w}{T_1} \left(1 + \frac{H_0 d}{c} \right).$$

Zaključek

Kljub temu da se na koncu članka zdi boj proti energetski draginji z Dysonovo sfero vse manj učinkovita rešitev, izkušnje astronomov kažejo, da je bila hipoteza od Dysonovi sferi pred nekaj leti posebno aktualna.

Pred leti so ugotovili, da je **Tabbyjeva zvezda** povsem neperiodično zmanjšala svojo svetlost za vse do 22 %. Po odkritju se je med astronomi razširila ideja, da je vzrok za to zelo verjetno ravno megastruktura, kot je Dysonova sfera, ki jo je za svoje potrebe okoli matične zvezde namestila inteligentna oblika življenja. Vendar so nadaljnje raziskave pokazale, da je najverjetnejši vzrok za te spremembe v resnici le prah ... pa vendar!

Morda pa vseeno nekje v vesolju vendarle obstaja civilizacija, ki je uspešno postavila megastrukturo, podobno Dysonovi sferi ... in ki morda zato nima težav z energetsko draginjo, še manj pa skrbi, da bi jo prihodnjo zimo zeblo.

Sicer pa bi se na samem koncu članka za konstruktivne komentarje in nasvete zelo rad zahvalil Simonu Bukovšku, Urbanu Razpotniku in Jakobu Juriju Snoju.

Literatura

- [1] *Dyson sphere*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Dyson_sphere, ogled: 26. 9. 2022.
- [2] *Dysonova sfera sphere*, Wikipediija, dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Dysonova_sfera, ogled: 26. 9. 2022.
- [3] *Freeman Dyson*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Freeman_Dyson, ogled: 26. 9. 2022.
- [4] *Kardaševa skala*, Wikipedia, dostopno na: <https://hr.wikipedia.org/wiki/Kardaševaskala>, ogled: 26. 9. 2022.
- [5] *Teoretične naloge na Mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike 2022*, IOAA 2022, dostopno na: <https://ioaa2022.ge/problems>, ogled: 26. 9. 2022.

× × ×

Distanciranje, 1. del



NINO BAŠIĆ

→ Naloga, ki se je lotevamo tukaj, je poenostavljena različica naloge *Measures*, ki se je pojavila na srednjeevropski računalniški olimpijadi leta 2022. Ta je potekala med 24. in 30. julijem v Varaždinu na Hrvaškem [1].

Na ravni dolgi cesti stoji n ljudi. Ker so razdalje med njimi relativno velike, lahko cesto predstavimo s številsko premico, ljudi na njej pa s točkami. Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinate točk, kjer ti ljudje stojijo. Brez škode lahko predpostavimo, da velja $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Velja tudi, da so $x_1, x_2, \dots, x_n$ cela števila.

Zaradi smrtonosne pandemije je treba poskrbeti, da razdalja med nobenima dvema oseba ne bo manjša kot D , pri čemer je D neko predpisano celo število, ki ga izbere ekspertna skupina. Vsi ljudje se hkrati odpravijo na svoje nove položaje $y_1, y_2, \dots, y_n$, tako da bo veljalo $|y_i - y_j| \geq D$ za $i \neq j$, tj., da bo razdalja med vsakima dvema vsaj D . Pri tem želimo, da bo razdalja, ki jo prehodi tisti človek, ki prehodi i -ta oseba, je $|x_i - y_i|$. Drugače povedano, položaje $y_1, y_2, \dots, y_n$ je treba izbrati tako, da bo vrednost

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad (1)$$

čim manjša.

Oglejmo si preprost primer, kjer je $n = 5$, $D = 3$ ter

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6 \text{ in } x_5 = 7.$$

Denimo, da prva oseba ostane na svojem mestu, tj. $y_1 = x_1 = 1$. Pogoji, da bo razdalja med vsakima vsaj $D = 3$, lahko dosežemo na primer z naslednjim izborom končnih položajev:

borom končnih položajev:

$$y_2 = 4, y_3 = 7, y_4 = 11 \text{ in } y_5 = 14.$$

Poglejmo, kolikšna je dolžina poti, ki jo morajo prehoditi posamezne osebe:

$$|1 - 1| = 0, |4 - 2| = 2, |7 - 4| = 3, \\ |11 - 6| = 5 \text{ in } |14 - 7| = 7.$$

Najdaljšo pot je prehodil tisti, ki je bil v začetnem položaju x_5 . Njegova pot je bila dolžine 7. To seveda ni najmanjša mogoča vrednost izraza (1). Minimum znaša namreč 3, ustrezne končne položaje $y_1, y_2, \dots, y_5$ pa za vajo poiščite sami. (V določenih primerih lahko obstaja več različnih izborov vrednosti $y_1, \dots, y_n$, ki minimizirajo izraz (1).)

Program, ki reši nalogo, bomo napisali v programskem jeziku Python. Še preden pa se lotimo reševanja, si naredimo funkcijo `testni_primer(a, n)`, ki bo naključno zgenerirala testni primer. Pri tem je seveda n število oseb, argument a pa omeji možen izbor števil $x_1, x_2, \dots, x_n$, tako da bo veljalo $|x_i| \leq a$ za vse $1 \leq i \leq n$. Ker imamo opravka z naključnimi števili, bomo uporabili modul `random`, ki je del standardne knjižnice jezika Python.

```
import random
```

```
def testni_primer(a, n):
    return sorted([random.randint(-a, a)
                   for i in range(n)])
```

Ni se težko prepričati, da med optimalnimi rešitvami obstaja tudi takšna, kjer velja $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Denimo, da osebi, ki svojo pot začneta na x_i in x_{i+1} , končata na y_i in y_{i+1} , kjer je $y_i > y_{i+1}$. To pomeni, da se nekje na svoji poti srečata. Če bi se dogovorili za izmenjavo svojih končnih položajev, se pot nobeni od njiju zaradi tega ne bi podaljšala.

Označimo vrednost izraza (1) s T . Če ne vemo, kako bi poiskali optimalni T^* (tj. najmanjši možni T , za katerega še obstajajo $y_1, y_2, \dots, y_n$, da velja $|y_i - y_j| \geq D$ za $i \neq j$), si lahko zastavimo nekoliko drugačno vprašanje: *Ali obstaja razporeditev, ki upošteva pravilo distanciranja, če predpišemo največjo dovoljeno razdaljo T , ki jo posamezna oseba sme prehoditi?*

Na to vprašanje pa ni tako težko odgovoriti. Seveda je lahko pri optimalni rešitvi veliko ljudi, pri katerih je prehojena razdalja manjša od T . (Lahko imamo tudi kakšno nepremično osebo, ki ostane na svojem mestu.) Seveda pa iskana rešitev ne bo nič slabša, če poleg tistega nesrečnega, ki »mora« prehoditi razdaljo T , obstajajo še drugi ljudje, ki tudi prehodijo pot največje dovoljene dolžine.

Začnimo pri osebi, ki stoji skrajno levo, tj. na položaju x_1 . Za y_1 mora veljati $x_1 - T \leq y_1 \leq x_1 + T$. Nič ne bo narobe, če izberemo $y_1 = x_1 - T$, saj se na tak način razdalja med y_1 in y_2 lahko samo poveča. Tistim, ki stojijo desno od prve osebe, slednja pusti samo še več manevrskega prostora, če se sprehodi na položaj $x_1 - T$ in se tako še bolj oddalji od preostanka skupine.

Podobno, za y_2 mora veljati $x_2 - T \leq y_2 \leq x_2 + T$. Zaradi distanciranja pa mora hkrati veljati še $y_1 + D \leq y_2$. Ker želimo tistim, ki so desno od druge osebe, pustiti kar se da veliko manevrskega prostora, se bo druga oseba sprehodila čim dlje proti levi. Hkrati pa moramo paziti, da se ne približa preveč prvi osebi. Zato postavimo $y_2 = \max\{x_2 - T, y_1 + D\}$, da zadostimo obema pogojema. Če pa je druga oseba že preblizu prve, se bo sprehodila na desno in sicer ravno dovolj, da bosta na medsebojni razdalji D . Pri tem se nam lahko zgodi, da je $y_1 + D > x_2 + T$. To pa pomeni, da se druga oseba nikakor ne more dovolj oddaljiti od prve osebe. Takoj lahko zaključimo, da rešitev pri izbrani vrednosti T ne obstaja.

Za vse nadaljnje osebe lahko razmišljamo na podoban način. Ker velja $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_i$, je dovolj, če pri izbiri y_{i+1} upoštevamo le y_i (ne pa tudi končnega položaja vseh predhodnih oseb). Če je $y_i + D > x_{i+1} + T$, rešitev ne obstaja, sicer pa postavimo $y_{i+1} = \max\{x_{i+1} - T, y_i + D\}$.

Glede na zgornji razmislek lahko napišemo funkcijo `preveri(x, D, T)`, ki kot prvi argument dobi seznam x s položaji vseh oseb, kot drugi in tretji argument pa vrednosti D in T iz naloge. Funkcija

preveri, ali sploh obstaja rešitev, kjer je prehojena razdalja pri posamezni osebi kvečjemu T . Če rešitev ne obstaja, funkcija vrne `None`, sicer pa seznam končnih položajev.

```
def preveri(x, D, T):
    y = [None for i in range(len(x))]
    y[0] = x[0] - T
    for i in range(1, len(x)):
        if y[i - 1] + D > x[i] + T:
            return None
        y[i] = max(x[i] - T, y[i - 1] + D)
    return y
```

Zdaj lahko preverimo, ali obstaja rešitev za naš prvi zgled, kjer je denimo $T = 2$ ali pa $T = 5$.

```
>>> zgled_1 = [1, 2, 4, 6, 7]
>>> preveri(zgled_1, 3, 2)
None
>>> preveri(zgled_1, 3, 5)
[-4, -1, 2, 5, 8]
```

Naj bo T^* najmanjši možen T , za katerega obstaja rešitev. Kako pa poiščemo T^* ? Ni se težko prepričati, da če rešitev ni mogoča za nek T , potem tudi ni mogoča za nobeno manjšo vrednost, saj je dovoljen premik posamezne osebe manjši, tako da imajo na voljo še manj manevrskega prostora. Če rešitev obstaja za neki T , potem lahko to isto rešitev uporabimo za vse večje vrednosti parametra T . To pa pomeni, da lahko T^* poiščemo z *binarnim iskanjem*. Če vemo, da je $T_a \leq T^* \leq T_b$, za neka T_a in T_b , lahko preverimo, ali obstaja rešitev za $(T_a + T_b)/2$. Če obstaja, potem je $(T_a + T_b)/2 \leq T^* \leq T_b$; sicer pa vemo, da je $T_a \leq T^* \leq (T_a + T_b)/2$. Postopek ponavljamo toliko časa, dokler je razlika med T_a in T_b dovolj velika.

Potrebujemo še primerni začetni vrednosti za T_a in T_b . Za T^* velja $0 \leq T^* \leq D(n - 1)$. V najboljšem primeru ljudje na cesti že na samem začetku stojijo dovolj daleč, zato se nikomur ni treba premikati (od tod $0 \leq T^*$). V najslabšem primeru so vsi na istem mestu, torej $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. V tem primeru se lahko razporedijo takole: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + D$, $y_3 = x_3 + 2D$, ..., $y_n = x_n + (n - 1)D$. Največjo razdaljo prehodi najbolj desna oseba, in sicer $(n - 1)D$ (od tod $T^* \leq D(n - 1)$). Sami se prepričajte, da je to res najbolj neugoden scenarij.





Zdaj lahko napišemo funkcijo `distanciranje` (x , D), ki kot argumenta dobi seznam x s položaji vseh oseb in vrednost D . Funkcija vrne iskano vrednost T^* .

```
def distanciranje(x, D):
    T_a = 0
    T_b = D * (len(x) - 1)
    while T_b - T_a > 1e-12:
        T_c = (T_a + T_b) / 2
        if preveri(x, D, T_c):
            T_b = T_c
        else:
            T_a = T_c
    return T_b
```

Zdaj pa funkcijo preizkusimo še na našem začetnem zgledu:

```
>>> zgled_1 = [1, 2, 4, 6, 7]
>>> distanciranje(zgled_1, 3)
3.0
```

Za vajo lahko funkcijo prilagodite tako, da bo poleg T^* vrnila še ustrezen seznam vrednosti $y_1, y_2, \dots, y_n$. Preizkusite funkcijo še na kakšnem drugem primeru; te si lahko enostavno naredite s pomočjo funkcije `testni_primer`. V uvodnem odstavku smo zahtevali, da so vrednosti $x_1, \dots, x_n$ in D cela števila. Naša rešitev te predpostavke nikjer ne uporabi in še vedno pravilno deluje, tudi če zahtevo po celoštevilstvu opustimo. Testni seznam, ki jih naredimo s pomočjo funkcije `testni_primer`, pa vsebujejo samo cela števila. Kaj pri tem opazite? Je rešitev T^* vedno celo število? Ali to ni nujno res?

Povejmo še nekaj besed o časovni zahtevnosti rešitve. Funkcija `preveri` ima zanko `for`, ki naredi $O(n)$ iteracij, vse operacije pa so elementarne, torej je časovna zahtevnost te funkcije $O(n)$. Funkcija `distanciranje` kliče funkcijo `preveri` v svoji zanki `while`. Koliko klicev naredimo? Začetni interval pri binarnem iskanju je $[T_a, T_b] = [0, D(n-1)]$. Tega razpolavljamo toliko časa, dokler ne pridemo do $T_b - T_a < 10^{-12}$. Torej naredimo $O(\log_2(nD))$ iteracij. Časovna zahtevnost funkcije `distanciranje` je zato $O(n \log_2(nD))$.

V drugem delu prispevka bomo rešitev še izboljšali. Nato si bomo ogledali še nekoliko zahtevnejšo različico naloge, pri kateri lahko na cesto dodamo še

dodatnih M oseb, po vsakem dodajanju pa moramo izpisati T^* . Vso izvorno kodo iz pričujočega članka lahko najdete na GitHub repozitoriju [2].

Literatura

- [1] Central European Olympiad in Informatics (CEOI 2022), Varaždin, Hrvaška, 24.–30. julij 2022, Naloge z rešitvami, dostopno na <https://ceoi.hsin.hr/competition/>, ogled 11. 10. 2022.
- [2] N. Bašić, Distanciranje (GitHub), dostopno na <https://github.com/nbasic/presek-distanciranje>, ogled 11. 10. 2022.



Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	14	11					
16						14	8
6			6		20		
	4			16			
		22		10			
			7				



Babilonska metoda za računanje kvadratnega korena



BOŠTJAN KUZMAN

→ Arheološke najdbe kažejo, da so mezopotamska ljudstva (Babilonci, Sumerci) med leti 1800 in 1600 pred našim štetjem verjetno poznala postopke za reševanje preprostih kvadratnih enačb. Domnevajo, da so Babilonci približke za kvadratni koren iz danega števila poiskali s postopkom, ki ga je prvi eksplicitno opisal grški matematik Heron okoli leta 60. Postopek je preprost in ga v GeoGebri pravzaprav uženemo že z dvema vrsticama kode. A še prej se malo ogrejmo z razlago in nekaj računanja na papirju.

Naj bo $N > 1$ dano število, katerega kvadratni koren želimo izračunati. Babilonska metoda pravi nekako takole: za prvi približek korena izberi kar N . Nato trenutnemu približku prištej začetno število, deljeno s tvojim približkom, in dobljeno vsoto deli z 2. Tako dobiš nov približek, s katerim ponavljaš prejšnji korak, dokler s približkom nisi zadovoljen.

V sodobnejšem jeziku ta postopek opišemo z rekurzivnimi zaporedji. Zaporedje približkov je podano z začetnim členom $a_1 = N$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right), n \geq 1.$$

Oglejmo si, kaj to pomeni v primeru, ko je $N = 2$. Z zaporednim vstavljanjem vrednosti dobimo

$$a_1 = N = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{N}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1,500$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{N}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{17}{12} \doteq 1,4166$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(a_3 + \frac{N}{a_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right) = \frac{577}{408} \doteq 1,4142159$$

Iz primera je razvidno, da se vrednosti a_n res približujejo¹ številu $\sqrt{2} \doteq 1,41421356 \dots$

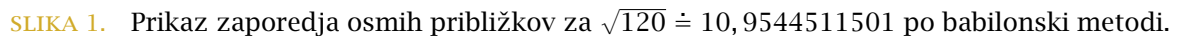
Za izračun zaporedja približkov bomo v GeoGebri uporabili ukaz `SeznamPonavljanj(f,N,n)`. V njem nastopajo funkcija f , ki pove, na kakšen način iz dane vrednosti dobimo novo, začetna vrednost N , in število ponovitev (iteracij) n . Koraki za izračun zaporedja so naslednji:

- Izberimo število, ki ga želimo koreniti, na primer $N=2$, in število korakov, na primer $n=10$.
- Definirajmo funkcijo z ukazom $f(x)=(x+N/x)/2$.
- Nato z ukazom $priblizki=SeznamPonavljanj(f,N,n)$ izračunamo seznam približkov, ki ga GeoGebra vrne v algebrskem oknu.
- Z ukazom $Element(priblizki,n)$ iz seznama približkov izberemo zadnjega, ki je najboljši.

Seveda si želimo v GeoGebri izkoristiti tudi možnost grafične ponazoritve zaporedja približkov v koordinatnem sistemu. Zato lahko vse skupaj nekoliko delamo, na primer na naslednji način:

- Število N določimo z izborom točke A na osi y , ki jo lahko poljubno premikamo, in ukazom $N=y(A)$.
- Dejansko vrednost $\sqrt{N}$ prikažemo s premico $y=sqrt(N)$.
- Vstavimo drsnik za število n in kot prej definiramo funkcijo f in seznam približkov $priblizki$.
- Nato upodobimo približke z ukazom $Zaporedje((k,Element(priblizki,k)),k,1,n)$.
- Za lepši prikaz prilagodimo koordinatne osi in morda še kaj.

¹Tudi na splošnem velja, da je tako definirano zaporedje a_n konvergentno z limito $\sqrt{N}$. Bralci, ki bi se želeli o tem prepričati z dokazom, naj najprej preverijo, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno s $\sqrt{N}$. Za njegovo limito $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ zato velja $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{N}{A} \right)$, kar lahko preuredimo v kvadratno enačbo $A^2 = N$ in sklepamo, da je $A = \sqrt{N}$.



✕ ✕ ✕

↓ ↓ ↓



→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka letnika 50 je **Petdesetletnica**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Maja Antončič iz Celja, Janko Rušt iz Nove Gorice in Evita Košir Basle iz Žalca, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

✕ ✕ ✕

Boke



ANDREJ GUŠTIN



SLIKA 1.

Na fotografiji zanalašč niso odpravljene aberacije, da jih je mogoče proučevati.

→ Naslovnica prve letošnje številke Preseka je bila nenavadna. Sami svetli krožci, nikjer nobenega objekta. Temu v fotografiji pravimo boke (tudi bokeh). To je območje fotografije, ki ni izostreno. Kaj se zgodi pri preslikavi neizostrenih objektov, je stvar preslikave objektivna (zbiralno lečje), njegovih karakteristik (goriščna razdalja, zaslonka) in aberacij. Če je izostreni objekt na fotografiji bistven, pa boke daje fotografiji dušo. Marsikateri fotograf išče in ceni določen boke, ki obogati fotografijo in na poseben način izpostavi izostreni objekt.

Z enostavno geometrijsko optiko je najlažje razumeti, kakšna bo neizostrena slika točkastih svetil. Seveda, svetel krožec. Bolj kot je svetilo oddaljeno od izostrenega objekta, večji je krožec. Toda to je idealizacija. Pri realni fotografiji se izkaže, da je svetlost in oblika teh krožcev odvisna od lastnosti objektivna, sploh za točkasta svetila, ki niso na njegovi optični osi. Še bolj zapletena je preslikava neizostrenih razsežnih objektov.

Pri Preseku izzivamo mlade bralce, da napišejo teoretično razlago za boke. Najboljši prispevek bomo objavili, za nagrado pa bo poskrbel zavod Cosmolab. Prispevke pošljite najpozneje do 31. decembra 2022 po elektronski pošti na: andrej_gustin@t-2.net.

Na sliki 2 je primer izražanja bokeja. Posnetki so bili narejeni s 50-milimetrskim objektivom in pri naslednjih zaslonkah: $f/1,4$, $f/2$, $f/2,8$, $f/4$, $f/8$, $f/22$.



SLIKA 2.

× × ×

Barvni sudoku



→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

	5			2			6
			4				1
		6	2				4
3		5			2		
	7				6		
				3		1	
	2			5	7		

REŠITEV BARVNI SUDOKU

3	8	7	5	9	1	2	4
2	4	1	9	3	7	8	5
7	1	8	3	5	4	9	2
5	2	9	4	8	3	7	1
8	9	2	1	7	5	4	3
4	5	3	7	2	9	1	8
1	7	5	8	4	2	3	9
9	3	4	2	1	8	5	7



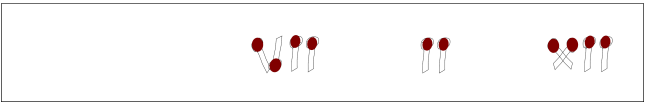
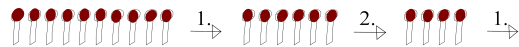
Rimski dvoboj



KATARINA JELENC

→ Predstavljaš si, da se s svojim prijateljem igraš naslednjo igro: Na mizi je na začetku kup 10 vžigalic. Igralec na potezi iz kupa vzame poljubno število vžigalic in iz njih sestavi poljubno rimsko število med 1 in 15 (oziroma *I* in *XV*), tako da za zapis števila porabi vse vžigalice, ki jih je vzel, in ne sme sestaviti rimskega števila, ki je bilo v isti igri že sestavljeno. Igro izgubi tisti igralec, za katerega zmanjka vžigalic, ali pa iz preostalih vžigalic ne more več sestaviti ustreznega rimskega števila.

Zgled. Prvi igralec je najprej vzel štiri vžigalice in iz njih zapisal število *VII*. Drugi igralec je nato vzel dve vžigalici in zapisal število *II*. Prvi igralec je nato vzel vse štiri preostale vžigalice, iz njih zapisal število *XII* in tako zmagal.



SLIKA 1.

Zgled igre rimski dvoboj.

Razmisli.

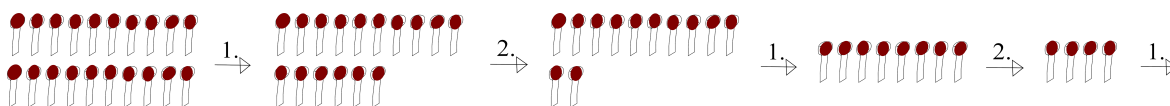
1. Kdo od igralcev lahko vselej zmagaja – tisti, ki igro začne prvi ali tisti, ki igro nadaljuje kot drugi igralec? Kako mora igrati, da bo vselej zagotovo zmagal?
2. Kdo pa bi lahko vselej zmagal, če bi imela igralca na začetku na mizi 20 vžigalic in bi lahko z njimi zapisovala rimska števila do 20?

Namig. Za lažjo analizo ustrezna rimska števila razvrstite po številu porabljenih vžigalic.

Rešitev. Najprej določimo število vžigalic v posameznih rimskih številih do 15: 1 vžigalica (*I*), 2 vžigalici (*II*, *X*, *V*), 3 vžigalice (*III*, *IV*, *VI*, *IX*, *XI*), 4 vžigalice (*VII*, *XII*, *XV*), 5 vžigalic (*VIII*, *XIII*, *XIV*).

1. Pri igri z 10 vžigalicami in rimskimi števili od 1 do 15 lahko vselej zmaga igralec, ki začne igro. Na začetku mora vzeti štiri vžigalice in iz njih zapisati število *VII*, *XII* ali *XV*. Drugemu igralcu ostane šest vžigalic. Če sedaj za svoje število vzame eno vžigalico, jih bo prvemu igralcu ostalo še pet, kar je dovolj za števila *VIII*, *XIII* ali *XIV*. Če prvi igralec vzame dve vžigalici, bo drugi igralec vzel tri in tako naprej. V vsakem primeru zadnje vžigalice porabi prvi igralec, zato drugi ne more več sestaviti novega števila.
2. Pri igri z 20 vžigalicami in rimskimi števili do *XX* lahko še vedno vselej zmaga prvi igralec, vendar mora sedaj igrati malo drugače. Najprej opazimo, da za dodana števila med 16 in 20 potrebujemo 4 vžigalice (*XX*), 5 vžigalic (*XVI*, *XIX*), 6 vžigalic (*XVII*) ali 7 vžigalic (*XVIII*). Zmagovalna strategija za prvega igralca je naslednja. V prvi potezi naj vzame štiri vžigalice.

- Če nato drugi igralec vzame $x = 1, 2, 3, 5, 6$ ali 7 vžigalic, lahko prvi igralec v naslednji potezi vzame $8 - x$ vžigalic in iz njih gotovo sestavi novo rimsko številko (potrebno je preveriti vse kombinacije). Tako drugemu igralcu na mizi ostane osem vžigalic in igre še ne more zaključiti. To prvega v naslednji potezi gotovo pripelje do zmage (zopet je treba preveriti vse možnosti).
- Če pa drugi igralec vzame štiri vžigalice, mora prvi igralec nadalje vzeti šest vžigalic, s katerimi zapiše edino možno število *XVII*. Če bi se namreč poslužil prejšnje strategije, bi mu za zadnjo potezo ostale štiri vžigalice, števil, ki jih s štirimi vžigalicami lahko zapiše, pa bi zmanjkalo. Na mizi tako ostane še 6 vžigalic. Ker je edino število, ki ga lahko zapišemo s šestimi vžigalicami, ravno zapisal prvi igralec, drugi igralec v tej potezi ne more zmagati, saj lahko vzame največ pet vžigalic in tako zmaga prvi igralec v naslednji potezi.



?

SLIKA 2.

Potek igre rimski dvoboj, če prvi igralec uporabi napačno strategijo.

× × ×

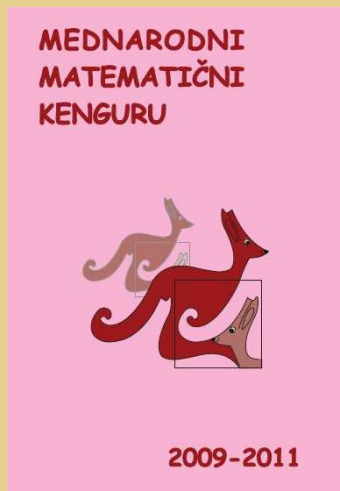
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



8,00 EUR



10,00 EUR



15,00 EUR

Pri DMFA – založništvo je izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!