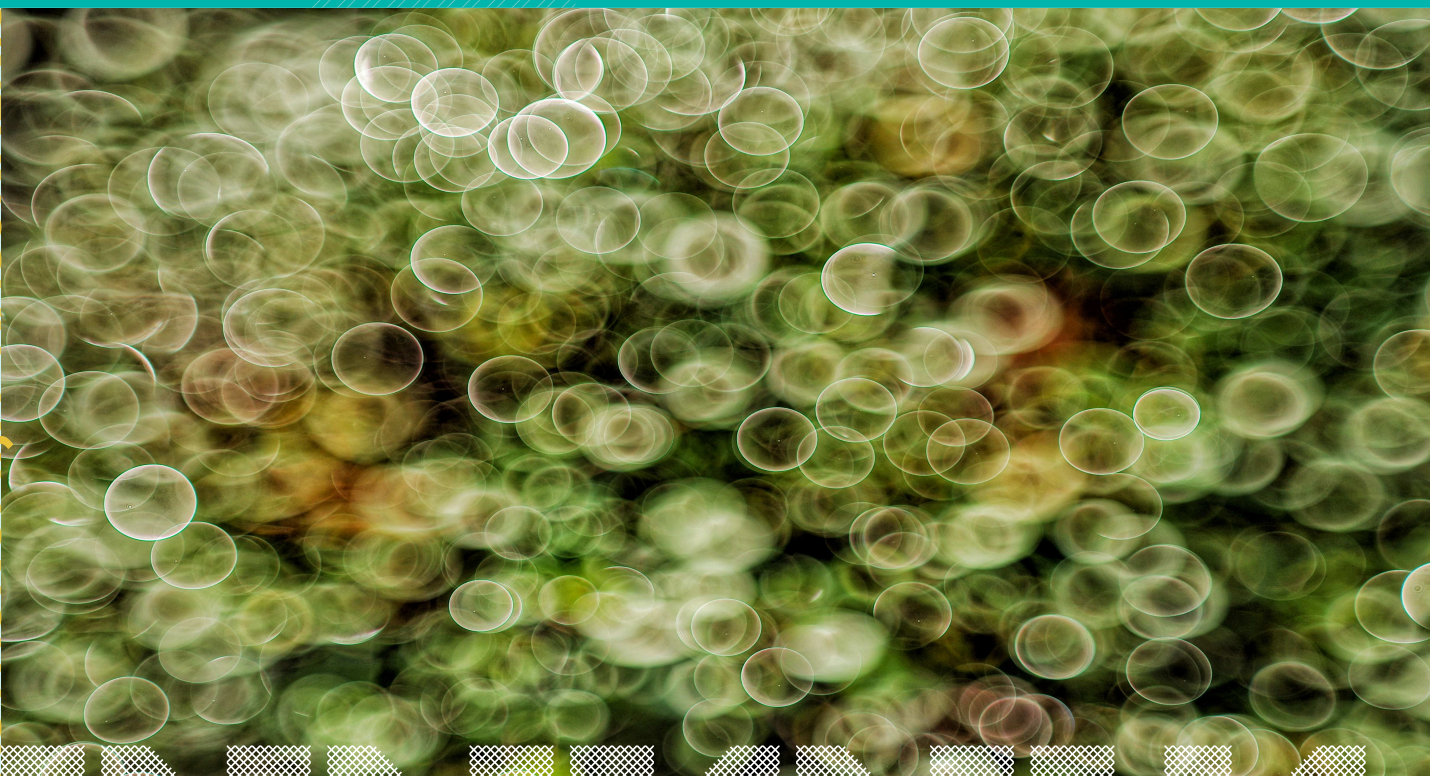




- GRAFIČNO REŠEVANJE NALOG
Z ULOMKI
- DINAMIČNO JADRANJE
- ASTRONOMSKO TEKMOVANJE TREH
DEŽEL 2022



Fieldsove medalje



→ Julija letos so na svetovnem matematičnem kongresu v Helsinkih podelili **Fieldsove medalje**, eno najprestižnejših mednarodnih nagrad v znanosti. Medalje, ki jih podeljujejo vsaka štiri leta za izjemne matematične dosežke dvema do štirim osebam v starosti do 40 let, si je zamislil kanadski matematik John Charles Fields (1863–1932), da bi z njimi povečal ugled matematike kot akademske discipline v Severni Ameriki. Starostna omejitev odraža njegovo željo, da z nagrado daje priznanje za že doseženo izjemnost, a obenem spodbuja tudi nadaljnje raziskovalno delo prejemnika. Prvič je bila nagrada podeljena leta 1936, doslej pa je bilo skupaj podeljenih 64 medalj.

Tokrat so podelili štiri Fieldsove medalje. Prejeli so jih ukrajinska matematičarka **Maryna Viazovska** (ekstremalni in interpolacijski problemi v Fourierjevi analizi), sicer šele druga ženska prejemnica v zgodovini nagrade, angleški matematik **James Maynard** (analitična teorija števil), ameriški matematik **June Huh** (algebraina geometrija in kombinatorika) in francoski matematik **Hugo Duminil Copin** (verjetnost in statistična fizika). Dan po slavnostni podelitvi so vsi štirje nagrajenci na kongresu nastopili tudi s predavanjem o svojem znanstvenoraziskovalnem delu. Videoposnetki njihovih predavanj so, tako kot posnetek slavnostne podelitve, prosto dostopni na spletnem kanalu YouTube »Fields Medals 2022«.



SLIKA 1.

Letošnji nagrajenci Maryna Viazovska, James Maynard, June Huh in Hugo D. Copin.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 50, šolsko leto 2022/2023, številka 1

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2022/2023 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2022 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2154

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Fieldsove medalje

UVODNIK

- 4-5 Za mlade po srcu in ne po letih
(Uredništvo)

MATEMATIKA

- 6-8 Grafično reševanje nalog z ulomki
(Vesna Iršič)
- 27-28 Geogebriin kotiček – S kotaljenjem krožnice
do astroide in kardioide
(Ema Češek)

FIZIKA

- 9-15, 18 Dinamično jadranje
(Jože Rakovec)
- 31 Naravoslovna fotografija – Preluknjana dlan
(Aleš Mohorič)

ASTRONOMIJA

- 21-26 Astronomsko tekmovanje treh dežel 2022
(Vid Kavčič)

RAZVEDRILO

- 8 Križne vsote
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 29 Rešitev nagradne križanke Presek 49/6
(Marko Bokalič)
- 30 Bilo je nekoč v reviji Presek – Bistrovidec:
Obhodi

TEKMOVANJA

- 18-20 Naša pot do mladinske naravoslovne
olimpijade
(Martin Alojz Flisar, Tomaž Holc, Aljaž
Erman, Enej Jauk, Aleksander Kosanović
in Žan Arsov)
- priloga 18. tekmovanje v znanju poslovne in
finančne matematike ter statistike za
srednje šole – državno tekmovanje
- priloga 31. tekmovanje iz razvedrilne matematike –
državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Buke, šopek lučk namesto šopka rožic
za častitljiv Presekov jubilej. Foto: Andrej Guštin

Za mlade po srcu in ne po letih



UREDNIŠTVO

→ Letos mineva 50 let, odkar je marca leta 1972 luč sveta ugledala prva številka revije Presek. To je bila poskusna številka, ki so ji takratni uredniki nadeli ljubkovalni vzdevek Prapresek, vseh 3000 natisnjenih izvodov pa so brezplačno razdelili osnovnim in srednjim šolam ter članom Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS. Poleg uvodnika ter matematičnega članka o množicah in fizikalnega o nevtronskih zvezdah so bralci v njem našli še intervju z dijakom, ki je trikrat zapored zmagal na matematičnem tekmovanju, poročila z nalogami iz matematičnih in fizikalnih tekmovanj, opis domačega laboratorijskega eksperimenta, nekaj nalog in različne zanimivosti.

Takole so avtorji zapisali v uvodniku: »PRESEK naj bi bil naslov lista mladih matematikov, fizikov in astronomov – mladih po srcu in ne po letih. Presek je pojem iz teorije množic, ki trenutno pretresa pod naslovom NOVA MATEMATIKA slovenski šolski prostor. V simbolu treh krogov, kjer se prekrivajo barve, kot ukazuje fizika, smo hoteli povezati vse tri vede s tremi barvami v celoto: rdeča – matematika, zelena – fizika, modra – astronomija. S Presekom želimo vzga-

jati mlade ljudi in jim vzpodbuditi na nevsiljiv način ljubezen do matematike, fizike in astronomije. Priporočati vam želimo branje primernih knjig in sploh matematičnih, fizikalnih in astronomskih tekstov. V Preseku poskušamo prikazati matematiko, fiziko in astronomijo na zanimiv in prijeten način.«

Trajalo je še leto in pol, da so v društvu pridobili dovolj podpore tedanjih republiških institucij, da je lahko v šolskem letu 1973/74 Presek začel redno izhajati s štirimi rednimi števkami letno. Prva urednika sta postala odgovorni urednik Tomaž Skulj in pomočnik Franci Oblak, tehnični urednik je bil Ciril Velkovrh. Poleg njih je pri nastajanju prvega letnika revije sodelovala še vrsta ljudi – 9 članov uredniškega odbora, več zunanjih avtorjev besedil, pa strojepiska, lektorica, 4 ilustratorji in 2 oblikovalca. Bogata in domišljena vsebinska struktura revije je razvidna tudi iz njenega kazala, v katerem poleg uvodnika in člankov s treh področij najdemo še novice, slovarček, strip, pogovore, naloge iz tekmovanj, nagradne uganke, poročila o delu krožkov, novih knjigah, laboratorijsko delavnico in šaljivi kotiček.



P R E S E K, osnutek lista za mlade matematike, fizike in astronome. Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

Uredili: Avsec Franc, Batagelj Vladimir, Dover Jože, Ferbar Janez, Fortuna Tomaž, Hribar Marjan, Kadunc Srečko, Mikoš Biserka, Oblak Franci, Pisansky Tomo, Prosen Marjan, Skulj Tomaž, Tomažič Davorin, Vagaja Marjan, Velkovrh Ciril, Zajc Pavel.

Slike je narisal Tomažič Davorin

List sta opremila Fajfek Janez in Delak Borut

Rokopis je natipkala Fabjančič Martina

Tiskano v tovarni Rog – Savlje, Savlje 89 v nakladi 3000 izvodov

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS, Jadranska 26, pp 227 Ljubljana. Izšlo v marcu 1972. Brezplačni izvod za učence osnovnih šol, dijakke srednjih šol in člane Društva.

SLIKA 1.

Naslovnica in kolofon poskusne številke revije Presek, marec 1972

Skozi obstoj revije so se med avtorji in uredniki zvrstila številna prepoznavna imena slovenske znanosti in poljudnega pisanja – nekoliko bolj sistematičen pregled bi zahteval poseben članek, zato ga prihranimo za katero od prihodnjih števil. V obdobju sredi osemdesetih let je imela revija več kot 20.000 naročnikov, bralci pa so urednikom redno pošiljali pisma z vprašanji in predlogi. Ob štirih do šestih rednih številkah je v vsakem letniku izšla še kakšna posebna tematska številka revije o izbrani matematični ali fizikalni temi. Revija je nekajkrat zamenjala tudi obliko naslovnice in celotno podobo, zadnja večja sprememba je bila leta 2004.

Petdeset let pozneje naša revija še vedno izhaja, vsako leto izdamo 6 tiskanih števil z vloženo priloženo tekmovalnih nalog. Čeprav so tiskani mediji v zatonu in imamo vse manj naročnikov, je v današnji uredniški ekipi še vedno dovolj želje, da mlade po starosti ali po srcu še naprej navdušujemo za



SLIKA 3.
Nekaj naslovnice iz različnih obdobjev revije

VSEBINA		
	Str.	
UVOODNIK	1	M.Poljanšek: Dragi dijaki
	2	T.Skulj: Dragi bralci
MATEMATIKA	4	F.Oblak: Začetni pojmi geometrije
	10	N.Ja.Vilenkin: Nenavadni hotel
FIZIKA	17	R.Kladnik: Sipanje svetlobe
ASTRONOMIJA	23	M.Prosen: Nikolaj Kopernik
	25	Sončev in zvezdni čas
NOVICE-ZANIMIVOSTI	29	Zanimiv nebesni pojav
SLOVARČEK	30	Presekov slovarček
STRIP	32	T.Pisanski: V premislek
POGOVORI	34	J.Dover in J.Kotnik: Razgovor
NALOGE-TEKMOVANJA 72	36	P.Zajc: Vegova tekmovanja
MATEMATIKA	39	B.Kolenko: Zvezno tekmovanje učencev 7.in 8.razredov
	41	M.Munda: Republiško tekmovanje
	44	T.Pisanski: Matematična olimpiada
	45	F.Oblak: Naloga o Preseku
NALOGE-TEKMOVANJA 72	48	F.Perne: Republiško tekmovanje
FIZIKA		
NALOGE-ASTRONOMIJA	52	M.Prosen: Naloge
KROŽKI 1971/72	53	Krožki na I.gim.v Ljubljani
	55	D.Repovš: Letna šola
PREMISLI IN REŠI	56	Nagradni razpis
IZ LABORATORIJA	57	J.Ferbar: Iztekanje vode
NOVE KNJIGE	61	I.Štalec in C.Velkovrh: SIGMA
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	64	V.Batagelj: Trik s kartami

SLIKA 2.
Kazalo prve redne številke iz leta 1973 kaže bogato vsebinsko zasnovo revije

naše čudovite vede, matematiko, fiziko in astronomijo (pa tudi računalništvo). Ponosni smo, da ohranjamo dolgoletno tradicijo revije, za katero so vrsto let skrbeli najbolj prepoznavni slovenski poljudnoznanstveni avtorji. V današnji poplavi spletnih informacij in tudi zelo atraktivnih matematičnih ali fizikalnih videoposnetkov želimo slovenske bralce vsaj občasno opomniti, da so miselni procesi ob zahtevnejšem branju tiskanih člankov in reševanju problemov s svinčnikom in papirjem v roki vendarle nujni za poglobljeno razumevanje in razvoj matematično fizikalnih spretnosti.

Zavedamo se sicer, da bo za obstanek revije treba že v bližnji prihodnosti marsikaj osvežiti in posodobiti, tako glede vsebine in oblike kot tudi glede njene spletne prisotnosti in na splošno komunikacijskih kanalov za komunikacijo z mladimi bralci in njihovimi učitelji, ki bodo, upamo, še vedno spodbujali mlade, da revijo vsaj prelistajo. Potrudili se bomo vključevati mlajše avtorje in čimbolj prisluhniti morebitnim pobudam s strani bralcev, med katerimi bo, upamo, čimveč (novih) srednješolcev in študentov, pa tudi velik del učiteljev matematike in fizike v slovenskih šolah.

Vljudno vabljeni k branju!

XXX

Grafično reševanje nalog z ulomki



VESNA IRŠIČ

→ Ste kdaj sošolcu ali prijatelju razlagali ulomke in si želeli, da bi mu lahko kako olajšali razumevanje postopka reševanja? Ste se kdaj spraševali, ali obstaja tudi kakšen bolj vizualen način reševanja tovrstnih problemov? V članku predstavimo grafični način reševanja nalog z ulomki [1], ki pri nekoliko zahtevnejših problemih postane presenetljivo uporaben.¹

Splošen recept za tovrsten način reševanja je naslednji. Celoto predstavimo s pravokotnikom ali krogom, ki ga nato ustrezno delimo na manjše dele, kakor zahteva tekst naloge. Oglejmo si preprost primer.

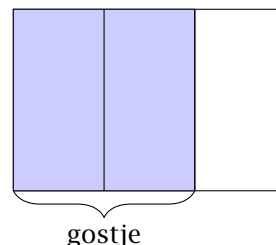
Naloga 1.

Mama je za Alenkino rojstnodnevno zabavo pripravila torto. Gostje na zabavi so pojedli $\frac{2}{3}$ torte, polovico preostanka pa je ponoči pojedel Alenkin pes. Kolikšen delež torte je Alenko počakal do jutra?

Rešitev.

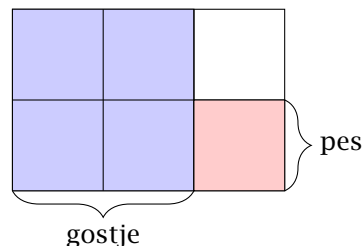
Torto predstavimo s pravokotnikom. Ker so gostje pojedli $\frac{2}{3}$ torte, pravokotnik razdelimo na tri enake dele in dva od teh označimo z modro barvo, ki predstavlja delež, ki so ga pojedli gostje (slika 1).

Alenkin pes je pojedel polovico preostanka torte, torej moramo preostali del razdeliti na dva enaka



SLIKA 1.

dela. Rdeče obarvan del predstavlja delež, ki ga je pojedel pes (slika 2).



SLIKA 2.

Nepobarvan del sheme predstavlja preostanek torte. Torej vidimo, da Alenko do jutra počaka $\frac{1}{6}$ torte.

Nekoliko bolj zapleten je naslednji primer.

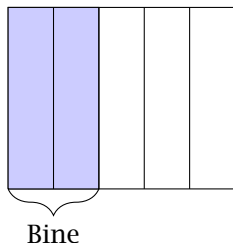
Naloga 2.

Prijatelji so barvali zid. Bine je pobarval $\frac{2}{5}$ zidu, potem je Cene pobarval $\frac{1}{4}$ preostalega dela zidu. Nato je Črt pobarval še $\frac{4}{9}$ nepobarvanega dela zidu. Zadnji je barval Dan. Kolikšen del zidu je moral pobarvati, če je bil zid na koncu v celoti pobarvan?

¹Pozoren bralec bo opazil, da tovrsten način reševanja dobro deluje le, če so številke v nalogi pravilno nastavljene. Običajen, algebrski način je torej v splošnem boljši, grafičen pa lahko služi kot dodatna razlaga in pomoč pri razumevanju zahtevnejših nalog.

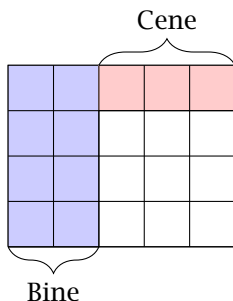
Rešitev.

Celoten zid predstavimo s pravokotnikom. Bine je pobarval $\frac{2}{5}$ zidu, kar označimo z modro barvo (slika 3).



SLIKA 3.

Cene je pobarval $\frac{1}{4}$ preostalega zidu, kar označimo z rdečo barvo (slika 4).



SLIKA 4.

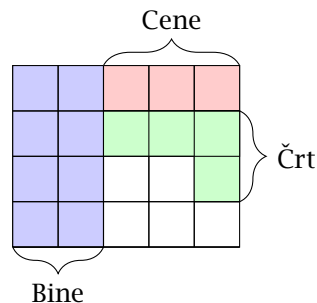
Ker je Črt pobarval $\frac{4}{9}$ preostalega dela zidu opazimo, da pravokotnika ni treba nadalje deliti, ampak lahko označimo le Črtov delež (slika 5).

Preostanek zidu je pobarval Dan. Če si ogledamo zgornjo shemo, opazimo, da je nepobarvanega še $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ zidu. Torej je moral Dan pobarvati $\frac{1}{4}$ celotnega zidu.

Z opisano metodo lahko uspešno razrešimo tudi naslednji tip nalog.

Naloga 3.

Babica Ester na gredice pred hišo sadi tulipane in vrtnice. Do zdaj je posadila že 16 vrtnic in 4 tulipane. Koliko dodatnih tulipanov mora posaditi, da bodo $\frac{3}{7}$

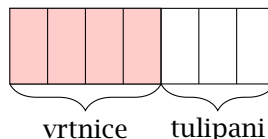


SLIKA 5.

rož pred hišo predstavljali tulipani?

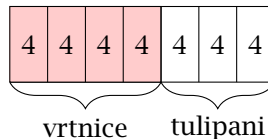
Rešitev.

Ker babica Ester želi, da bo $\frac{3}{7}$ rož pred hišo tulipanov, to pomeni, da bo $\frac{4}{7}$ rož vrtnic. Celotno gredico predstavimo s pravokotnikom in z rdečo barvo označimo delež vrtnic (slika 6).



SLIKA 6.

Ker je posajenih 16 vrtnic, vsak manjši pravokotnik na shemi predstavlja natanko 4 rože (slika 7).



SLIKA 7.

Torej mora biti na gredici skupno $4 \cdot 3 = 12$ tulipanov. Ker so 4 že posajeni, mora babica Ester posaditi še 8 tulipanov.

Na podoben način lahko rešimo tudi naslednje naloge. Nadobuden bralec jih lahko reši na tri različne načine: na pamet, z enačbami in grafično.



Naloga 4.

Fani je skuhala lonec kave in spila $\frac{1}{4}$ vsebine. Njen sostanovalec Gorazd je zavohal kavo in si postregel s $\frac{1}{2}$ preostale kave. Ko je že nekoliko ohlajeno kavo opazila njuna sostanovalka Helena, si je privoščila $\frac{1}{6}$ preostale kave. Ko je Fani opazila, kako hitro izginja kava, je hitro spila še vso preostalo kavo. Kolikšen delež lonca kave je spila Fani?

Naloga 5.

Na mednarodnem kulinaričnem srečanju je navada, da vsak udeleženec prinese tradicionalno jed svoje dežele na spoznavni večer. Tretjina povabljenih je iz Italije, $\frac{2}{5}$ je Kitajcev, $\frac{3}{4}$ preostalih povabljenih so Angleži, preostanek pa predstavljajo Norvežani. Zaradi zamude letala, še nobeden od Norvežanov ni prispel, drugi gostje pa so že vsi prispeli. Kolikšen delež jedi, ki so že bile prinesene na spoznavni večer, predstavljajo angleške jedi?

Naloga 6.

V parku za pse se je igralo 9 hrtov in 7 mejnih škotskih ovčarjev. Koliko mejnih škotskih ovčarjev se mora pridružiti igri v parku, da bo njihov delež predstavljal $\frac{5}{8}$?

Naloga 7.

Petina mojih sošolcev najraje posluša klasično glasbo, $\frac{7}{8}$ preostalih pa najraje posluša rock glasbo. Preostala dva sošolca imata najraje pop. Koliko sošolcev imam?

Naloga 8.

Lara, Tim in Katja so šli na pohod. Na vrhu je Katja ugotovila, da je s seboj pozabila vzeti sendvič! Na srečo je imela Lara s seboj pet sendvičev, Tim pa jih je imel sedem. Vsi sendviči so bili enaki. Prijatelji so se odločili, da si bodo sendviče razdelili tako, da bo vsak izmed njih lahko pojedel štiri.

Med malico je Katja v nahrbtniku našla tablico z 12 koščki čokolade. V zahvalo je čokolado podarila prijateljema. Tu pa se je zapletlo!

Tim je bil mnenja, da bi moral on dobiti 7 koščkov in Lara 5 koščkov, saj je vsak prispeval toliko sendvičev. Po drugi strani je bila Lara prepričana, da bi

moral vsak od njiju dobiti 6 koščkov čokolade, saj so si sendviče razdelili enakomerno.

Ali lahko pomagaš Katji najti pravičnejšo delitev koščkov čokolade?

Rešitve.

- 4. Fani je skupno spila $\frac{9}{16}$ kave.
- 5. Angleške jedi predstavljajo $\frac{3}{14}$ vseh jedi, ki so že bile prinesene.
- 6. Pridružiti se mora 8 mejnih škotskih ovčarjev.
- 7. Imam 20 sošolcev.
- 8. Tim naj dobi 9 koščkov čokolade in Lara 3 koščke.

Literatura

[1] Malgorzata Dubiel, FAN X99 The Book, Chapter 3: Fractions, 2018.



Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	6	11		
3			12	
20				5
		3		
		8		



Dinamično jadranje



JOŽE RAKOVEC

Uvod

Skoraj vsak je že kdaj videl kako ptico, kako se dviga s kroženjem v vzgorniku – torej nad območjem, nad katerim se dviga tudi zrak. En primer je dviganje nad območjem, kjer se nad močno ogreti tlemi zrak dviga, drugi primer je dviganje navzgor ob pobočju, ob katerem se je veter prisiljen dvigati čez hrib. Še tretji primer so valovanja gor-dol v stabilnem ozračju. V vzgornikih se z zrakom dviga navzgor tudi ptica, potem pa poleti čim dlje ter išče novo območje z vzgorniki. Kaj pa, če vzgornikov ni?

Nekatere ptice, npr. albatrosi, znajo izkoristiti tudi spremembo hitrosti vetra z višino za svoje jadranje praktično brez zamahov s krili (nekater vrste albatrosov imajo celo zelo šibke krilne mišice). Tako jadrajo daleč – tudi več sto kilometrov na dan s povprečnimi hitrostmi potovanja blizu 100 km/h (pri čemer jih zanaša tudi veter). To pomeni, da se gibljejo skoraj brez lastnega pogona (le sem in tja morda kakšen zamah s krili). Tak način jadriranja imenujemo dinamično jadranje.

Tako bi načelno lahko letela tudi jadralna letala (ki pa morajo za zadosten vzgon leteti precej hitreje kot ptice), a po pripovedovanju izkušenega jadralnega pilota se je navdušenje nad to možnostjo izpred nekaj desetletij že precej poglelo, saj tako letenje zahteva hitro menjavanje režima letenja, kar pa je zelo utrudljivo. Zadnje čase pa se s tem veliko ukvarjajo v zvezi z letenjem majhnih lahkih brezpilotnih letal: namesto povečevanja kapacitet baterij in/ali moči motorja bi morda lahko pomagalo posnemanje tega, kar počnejo albatrosi. Tako se veliko ukvarjajo z iskanjem najugodnejšega načina letenja glede na vetrovne razmere.² (npr. Sachs in sod., <https://www.mdpi.com/2226-4310/7/4/47>, Alexandre in

sod. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0229746> in še številni drugi).

Sliši se nenavadno – kako leteti brez lastnega pogona? Če ne drugega, ptica vendar zavira zračni upor in silo upora je pač treba premagovati. Med letom skozi miren zrak je to možno samo pri vsaj delnem spuščanju. Za dviganje pa so potrebni zamahi s krili, ali pa je treba zajemati energijo iz vetra. No, saj poznamo podobne primere, npr. spuščanje zmaja v vetru. Pa tudi jadranje na vodi: kobilica jadrnice je spodaj v mirni vodi, jadro pa je zgoraj, v vetru (in jadrnica lahko pluje celo nekoliko proti vetru). Ali pa zmajarstvo na vodi (»kajtanje«): jadralec s pomočjo kobilice pod desko uravnava smer, zmaj v zgornjem močnem vetru pa mu zagotavlja hitrost (včasih ga celo rahlo dvigne nad vodo). In tudi na vodi lahko jadralec dela obrate in se na koncu vrne tja, od koder je začel.

Torej so mogoči preleti brez lastnega pogona na zelo dolge razdalje. Trije primeri za dolge prelete nekaterih ptic so narisani po podatkih, ki so jih zbrali predvsem japonski raziskovalci in jih objavili na spletu: <https://dataadryad.org/stash/dataset/doi:10.5061/dryad.3pb86>. Glavni namen raziskovalcev sicer ni bil iskanje dolgih preletov, temveč da bi z majhnimi napravami GPS na hrbtih ptičev pridobili podatke o vetrovnih razmerah nad površino oceanov. Pri tem so vseeno zabeležili nekatere ekstremno dolge prelete.

Na slikah 1–3 so primeri nekaterih precej dolgih preletov ptic.

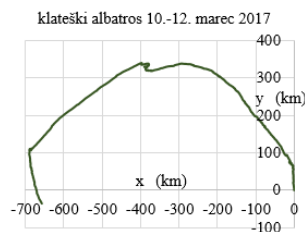
Nekaj drugih podatkov iz sledenja ptičem: klateški albatros (*Albatros Diomedea Exulans*) se nad morjem dviga in spušča za kakih 15 do 20 metrov, en cikel opravi v okrog 7 do 10 sekundah, dosega hitrosti okrog 20 m/s (okrog 70 km/h) itd.

Leonardo da Vinci in Lord Rayleigh

Kar precejkrat omenjajo, da je že Lord Rayleigh spomladi 1883 poslal v znanstveni časopis *Nature* svoje razmišljanje o tem, zakaj ptice lahko letijo tudi brez

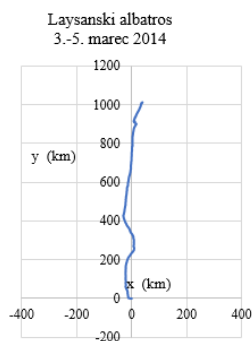
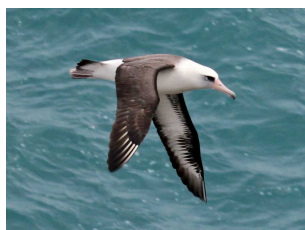
²V Preseku sicer ni v navadi, da bi natančno navajali vso v članku upoštevano literaturo. V tem primeru pa smo uporabili kar precej virov – a samo take, ki so dostopni na svetovnem spletu, zato bomo nekatere spletne naslove navajali sproti. Ker pa je spodobno, da navedemo tudi ime avtorja ali avtorjev, bomo dodali tudi to.





SLIKA 1.

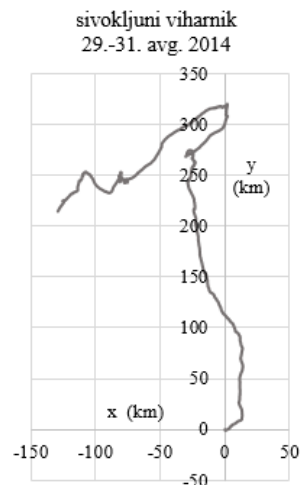
Levo: klateški albatros – *Diomedea exulans* gnezdi na subantarktičnih otokih. Foto JJ Harrison CC-BY-SA 3.0 <https://tiny.cc/jjharrison.com.au/t/fCEq0JC1cJUcoIOa>. Desno: let enega od klateskih albatrosov severno od Île de la Possession v jugozahodnem Indijskem oceanu med Južno Afriko in Antarktiko: najprej na severozahod, potem na jugozahod – 1660 km v okrog 47,5 ure (od 10. marca 2007 ob 17:54 do 12. marca ob 17:28). Koordinate x kažejo proti vzhodu, y pa proti severu.



SLIKA 2.

Levo: Laysanski albatros – *Phoebastria immutabilis* gnezdi na Havajih in na drugih peščenih otokih severnega Tihega oceana, npr. na Midwayu. Foto DickDaniels, <http://theworldbirds.org/CC-BY-SA-30>. Desno: let enega od laysanskih albatrosov od havajskega otoka Oahu proti severu – skupaj z manjšimi zavoji – ki na sliki niso opazni – okrog 1400 km v nekaj več kot 46 urah (od 3. februarja 2014 ob 17:14 do 5. februarja ob 15:31). Koordinate x kažejo proti vzhodu, y pa proti severu.

zamahov s krili. Manjkrat pa omenjajo, da je glavne vzroke za tako jadranje kar dobro razumel že štiri stoletja prej Leonardo da Vinci. Na Leonarda je opozoril npr. Philip Richardson v svoji objavi leta 2018 pri Royal Society, in sicer na kar nekaj Leonardovih skic v Atlantskem kodeksu E in v Kodeksu o letenju



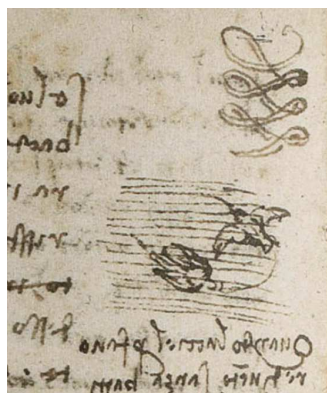
SLIKA 3.

Levo: sivokljuni viharik – *Calonectris leucomelas* gnezdi na Japonskem in na Korejskem polotoku. Foto Steven Pratt, <https://ebird.org/species/strshe>. Desno: let enega od sivokljunih viharikov od severozahodne obale največjega japonskega otoka Honšu na sever in potem na jugozahod; dolžina poti je okrog 790 km v približno 40,7 ure (od 29. avgusta 2014 ob 17:43 do 31. avgusta ob 10:18). Koordinate x kažejo proti vzhodu, y pa proti severu.

ptic (v Biblioteci Ambrosiani v Milanu, tudi na spletu <https://www.codex-atlanticus.it/#/> in v Biblioteci Reale v Torinu, tudi na spletu <https://airandspace.si.edu/exhibitions/codex/codex.cfm#page=78>), eno od njih povzemamo na sliki 4.

Ob sliki 4 je Leonardo zapisal: *Ko se ptica ob pomoči vetra dvigne, ne da bi udarila s krili, in naredi krožno gibanje ter ko pokaže rep proti izvoru vetra, ga poganjata dve moči (Leonardo misli seveda na sili), od katerih je ena moč (sila) vetra, ki ga udari v vdolbino pod njegovimi krili. Druga je teža ptice, ki se zapleteno spušča. In s to pridobljeno hitrostjo se zgodi, da ko je obrnjen s prsmi proti prihajajočemu vetru, gre ta veter pod ptico kot klin, ki dviguje težo (maso) navzgor. In tako se ptica pri obrnjenem gibanju (vzpenjanju) dvigne precej višje, kot je bila v začetnem gibanju (spustu). In to je pravi razlog, da se ptice dvignejo, ne da bi zamahnile s krili.*

Leonardo je bil levičar in je pisal zrcalno, od desne proti levi – razen, kadar je pisal, da bi lahko brali drugi (<https://www.mos.org/leonardo/activi->



SLIKA 4.

Ena od risb Leonarda da Vincija o jadraniu ptic, povzeta iz Richardsonove objave na <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rsnr.2018.0024>. Veter na sliki piha z leve, torej se ptič spušča z vetrom v hrbet, dviga pa proti vetru.

ties/mirror-writing). Eni pa mislijo, da je s tem načinom pisanja skrival svoja odkritja.

Lord Rayleigh pa je dinamično jadranje opisal kot spuščanje navzdol z vetrom in dviganje navzgor proti vetru – torej letenje skozi plasti z različno močnim vetrom. Pri tem je za krožni let poenostavil: namesto zveznega povečevanja hitrosti vetra z višino je predpostavil spodaj popolno brezvetrje, zgoraj pa enakomeren veter. Obravnaval je let v krogih: spuščanje navzdol, spodaj let skozi miren zrak, zavoj in dviganje navzgor v smeri proti vetru, prehod v veter in spet spuščanje z vetrom. To je osnovni način dinamičnega jadranja, ki ga danes na splošno imenujemo Rayleighovo kroženje. Pri tem je za krožni let skozi taki dve plasti, ki se začne v zgornji vetrovni plasti, zapisal:

Najprej je potreben obrat v smer vzdolž vetra, nato pa postopno spuščanje navzdol skozi prehodno plast. Pri tem se hitrost sicer povečuje, vendar to za ta opis ni pomembno, saj ptica pridobiva hitrost na račun izgube višine. Ob vstopu v spodnjo mirujočo plast se hitrost ne spremeni, vendar pa je glede na zrak povečana. Ptica se mora zdaj v spodnji plasti toliko obrniti, da je smer njenega gibanja proti vetru, nato pa se vrniti v zgornjo plast in pri vstopu v zgornjo plast se hitrost glede na zrak ponovno, drugič poveča. Ta proces se lahko očitno ponavlja v nedogled; in če so zaporedni prirastki kvadrata relativne hitrosti (op.:

glede na zrak) dovolj veliki, da odtehtajo neizogibne izgube, ki se dogajajo ves čas, lahko ptica ohrani svoj nivo letenja in celo poveča razpoložljivo energijo, ne da bi opravila delo.

Vredno je omeniti, da so opazili, da ptiči s pridom uporabljajo tudi spremembe hitrosti vetra z višino ob močno vzvalovanem morju: nad vrhovi valov je veter močan, v dolinah med njimi pa šibkejši. Torej načeloma podobne razmere, kot jih je opisal Lord Rayleigh, toda na precej manjših razlikah v višinah.

Verjetno je koristno povedati tudi, kako ptiči sploh krmarijo. Že 1893 je angleški ornitolog Heddley (<https://www.nature.com/articles/048293b0>) na osnovi opazovanj v reviji Nature navedel kar precej načinov. Z dviganjem ali spuščanjem desnih ali levih repnih peres dosežejo nekaj podobnega, kot letala z repnim smernim krmilom. Spuščajo lahko eno ali drugo nogo in dvigajo ali spuščajo ter obračajo eno ali drugo krilo, kar je podobno učinkom zakrilc pri letalih, ali pa premikajo peresa na koncih kril – tako se bočno nagibajo levo in desno. Ker pa njihovo telo ni togo, si včasih pomagajo celo z zvijanjem svojega telesa in z obračanjem glave – tega pa toga letala ne zmorejo.

Nekateri ptiči so res neverjetni dinamični jadranci, ne da bi znali niti toliko kinematike in dinamike, kot jo bomo mi uporabili v naslednjem opisu dinamičnega jadranja!

Malo dinamike

V prvem delu smo jadranje ptic v spreminjajočem se vetru opisali precej na splošno. Sedaj pa vseeno malo več o silah, nato pa še o opravljenem delu in o izgubljeni in pridobljeni energiji.

Sile, ki delujejo pri letenju brez zamahov kril (oz. pri jadralnih letalih brez pomoči motorja), so teža F_t , dinamični vzgon F_{vzg} in zračni upor F_{up} . Težo vsi poznamo, vzgon in upor, pa sta sorazmerna s površino kril S in s kvadratom hitrosti glede na zrak V_A , a z različnimi koeficientoma c_L in c_D : $F_{vzg} = \frac{1}{2} c_L \rho S V_A^2$ in $F_{up} = \frac{1}{2} c_D \rho S V_A^2$ (ρ je gostota zraka). V vetru $\vec{U}$ je hitrost $\vec{V}_A$ glede na zrak različna od hitrosti $\vec{V}$ glede na tla: $\vec{V}_A = \vec{V} + \vec{U}$. Torej je $F_{vzg}/F_{up} = c_L/c_D$. Že Ludwig Prandtl je ugotovil, da sta koeficienta med seboj nekoliko povezana preko t. i. vitkosti kril. Ptice, ki letijo daleč, imajo zelo vitka krila – zelo majhen

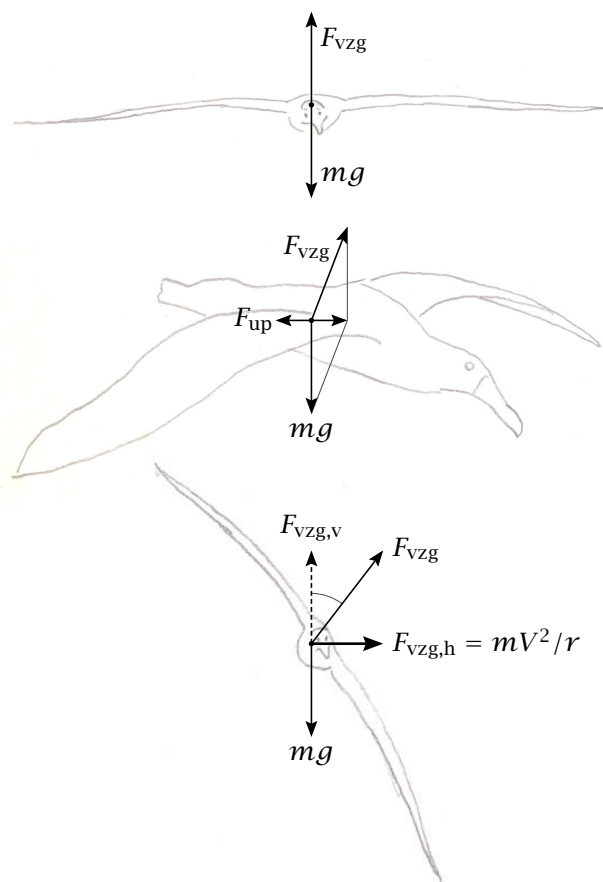




upor skozi zrak, pa tudi dobra jadralna letala imajo vitka krila (vojaška in akrobatska pa ne). Poleg vitkosti kril je pri jadraniu pomembno tudi, kako daleč (kako dolgo pot s) lahko jadralec (ptič ali jadralno letalo) z neke višine h preleti skozi miren zrak – tudi to razmerje, t. i. jadralno ali drsno število s/h , določata predvsem dinamični vzgon in zračni upor in zato dokaj dobro velja: $s/h = c_L/c_D$. Veliko jadralno število (v žargonu tudi »finesa«) je bistveno za dolge prelete (npr. za albatrose znaša okrog 22, za najboljše jadralna letala tudi blizu 50). Povejmo še, da $F_{vzg}/F_{up} = c_L/c_D$ le približno upošteva vse vplive: npr. poleg upora $\frac{1}{2}c_D\rho SV^2$, ki upošteva površino kril S , gibanje zavira še upor drugih delov jadralca, pa turbulenca okrog jadralca in še kaj.

Pospešek na jadralca je pri večjih hitrostih in predvsem v zavojih lahko tudi dosti, dosti večji od teže: izraža ga razmerje $n = F/mg$, ki se imenuje *faktor obtežbe* ali *faktor obremenitve*. Dodatni pospešek (navidezna dodatna »teža«) se močno poveča ob ostrih, hitrih zavojih, zato je ocena za n ob take vrste obremenitvi lahko tudi $ng = F/m \approx V^2/r$. Najboljše jadralna letala lahko glede njihove trdnosti prenesejo tudi zelo, zelo velike faktorje obremenitev, ki pa jih piloti pač ne zdržijo; vrhunsko trenirani preskusni piloti zdržijo faktorje obremenitve nekako do n okrog 8, torej »pospeške $8g$ « – vse, kar je več, je že zelo nevarno. Ptiči albatrosi pa večinoma krožijo tako, da dosegajo n okrog 3.

Nekaj o ravnotežjih sil. Teža vpliva na gibalno količino (in s tem na hitrost) navzdol, a če ji drži ravnotežje dinamični vzgon F_{vzg} navzgor, kot pri letu naravnost na sliki 5 zgoraj, bi se ptič nič ne spuščal. Toda pri letu skozi miren zrak pa se mora vsekakor vsaj toliko spuščati, da je doseženo tudi horizontalno ravnotežje na sliki 5 sredina. Sila zračnega upora F_{up} namreč zavira hitrost v smeri leta in le če je rezultanta teže in dinamičnega vzgona ravno enako velika in nasprotna uporu, se velikost hitrosti ne spreminja. Vzgonnik lahko to kompenzira in omogoča letenje brez izgube višine ali pa celo pridobivanje višine – odvisno od vertikalne hitrosti dviganja zraka v vzgorniku. Pri letenju po krogu pa radialni pospešek V^2/r omogoča spremembo smeri letenja: zaradi horizontalne komponente pri vzgonu ptič zavija v smer te komponente (slika 5 spodaj). Navada je, da tudi vsoti horizontalne sile mV^2/r in vertikalne sile $F_{vzg,v}$ pravijo kar dinamični vzgon.



SLIKA 5.

Nekaj ravnotežij med silo teže $m\vec{g}$, silo dinamičnega vzgona $\vec{F}_{vzg}$ in silo upora $\vec{F}_{up}$.

Zgoraj: Let v ravni črti, pogled od spredaj. Sredina: Let v ravni črti, a nekoliko navzdol, pogled od strani. Rezultanta vzgona F_{vzg} in teže mg drži ravnotežje upor F_{up} . Spodaj: Let skozi zavoj, pogled od spredaj. Ob bočnem nagibu horizontalna komponenta vzgona $F_{vzg,h}$ omogoča zavijanje.

Kako pojema hitrost pri dviganju?

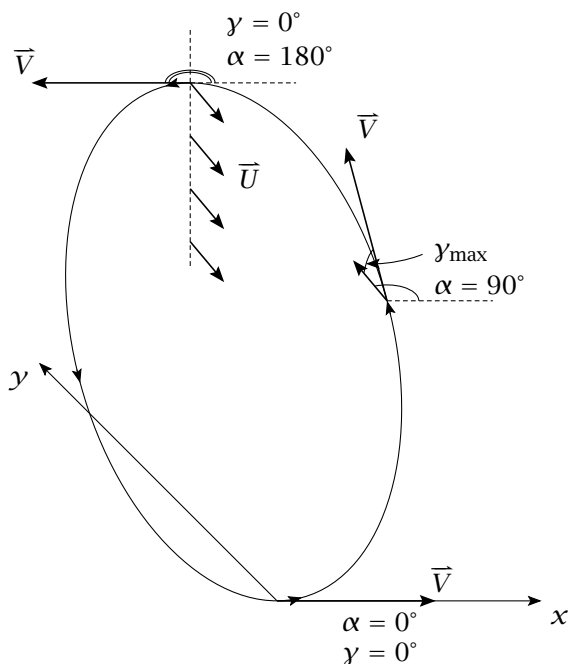
Spremembe hitrosti in smeri leta opisujejo enačbe, ki upoštevajo delovanje sil. Hitrost zmanjšuje komponenta sile teže v smeri, nasprotni smeri gibanja jadralca: pri vodoravnem letu torej teža ne vpliva na hitrost, pri vzpenjanju pod kotom γ pa je treba pri pojemu hitrosti $a = \Delta V/\Delta t$ upoštevati komponento sile $m\Delta V/\Delta t = -mg \sin \gamma$. Zračni upor je odvisen od kvadrata hitrosti glede na zrak, zato $m\Delta V/\delta t = 1/2\rho S c_D V_A^2 = -kV_A^2$. Vpliv vetra na hi-

trost relativno na zrak, ko se jadralec vzpne iz brezvetrja gor v veter, ki piha s hitrostjo U : ta poveča relativno hitrost glede na vertikalni kot vzpenjanja γ in horizontalni kot Ψ med hitrostjo in smerjo vetra – torej za $U \cos \gamma \cos \Psi$.

Za spremembo hitrosti glede na zrak je torej treba poznati začetno hitrost, dva kota γ in Ψ , kar vse se med letenjem spreminja, ter g in vse parametre upora, zajete v koeficientu $k = 1/2\rho S c_D$. Da bi opis poenostavili, si zamislimo Rayleighov krog kot na sliki 6. Namesto kota Ψ v tem poglavju uvedemo kot $\alpha = \Psi - 90^\circ$, ki ga štejemo od horizontalne smeri v levo od smeri x (ki je pravokotna na veter – glej skico). Kot α je tako 0° na dnu spodnjega loka, 90° ob prehodu iz brezvetrja v veter, ter 180° ob vrhu zgornjega loka. Glede kota vzpenjanja pa pri gibanju po krogu tudi ni težav: spodaj in na vrhu vzpenjanja velja $\gamma = 0^\circ$, vmes pa kot sinusno narašča do največje vrednosti pri vstopu v veter, potem pa proti vrhu spet sinusno upada: $\gamma = \gamma_{\max} \sin \alpha$.

Pri letu po krogu s hitrostjo V opravi jadralec v času Δt pot $\Delta s = V\Delta t$, pri čemer je Δs pot po loku dolžine $r\Delta\alpha$, torej $\Delta t = r\Delta\alpha/V$. Torej lahko spremembo v času nadomestimo s spremembo vzdolž pomika po delu krožnega loka $r\Delta\alpha/V$. Za vpliv zračnega upora to pomeni $\Delta V = -(\rho S c_D/2m)V^2 r\Delta\alpha/V$. Po urejanju enačbe (rečemo, da se V »pokrajša«), ostane: $\Delta V = -(r\rho S c_D/2m)V\Delta\alpha$ ali $\Delta V = -k_1 V\Delta\alpha$. Kdor malo pozna upadanje količin, ki je sorazmerno tem količinam, bo vnaprej zaslutil, da bi se hitrost zmanjševala eksponentno glede na α . Ta eksponentni upad pa lahko dobimo tudi, če enačbo zapišemo s končnimi razlikami med dvema točkama na krožnem loku: $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha) = -k_1 V(\alpha)\Delta\alpha$ in se lotimo računanja tako, da določimo vrednost konstantnega parametra k_1 in postavimo začetno vrednost $V(\alpha_0)$ in iz nje izračunamo novo: $V(\alpha + \Delta\alpha) = V(\alpha) - k_1 V(\alpha)\Delta\alpha$ ter tako naprej po korakih $\Delta\alpha$ vedno znova in znova izračunavamo nove vrednosti hitrosti pri vedno večjih kotih α .

Toda tak povsem eksponentni upad bi dobili samo, če ne bi bilo nobenih drugih vplivov na hitrost! Ob dviganju pa se hitrost ne zmanjšuje samo zaradi zračnega upora, saj se kinetična energija porablja za povečevanje potencialne energije. To pomeni, da moramo vsakič pri vplivu zračnega upora upoštevati hitrost, ki je zmanjšana zaradi obeh vplivov, upora in vpliva sile teže. Komponento sile teže v smeri hi-



SLIKA 6.

Krožni lok pri dviganju iz brezvetrja spodaj v veter zgoraj. Naj jadralec kroži tako, da je smer letenja na dnu spodnjega loka pravokotno v levo od smeri vetra U in od te smeri tudi štejemo kot α do projekcije hitrosti na horizontalno ravnino. Kot vzpenjanja γ je spodaj in zgoraj enak nič, ob prehodu v veter pa $\gamma_{\max}$. Ker ptiči krožijo zelo položno, je ta kot majhen, tam okrog 10° . Risba je torej narisana z močno pretirano strmino kroženja – pravi nagib je v resnici dosti manjši.

trosti pri vzpenjanju navzgor opišemo kot $mg \sin \gamma$ in zato $m\Delta V/\Delta t = -mg \sin(\gamma_{\max} \sin \alpha)$, pri čemer $\gamma_{\max}$ predstavlja največjo strmino vzpenjanja (npr. če je ta 10° , je $\gamma_{\max} = 0,174$). Spet nadomestimo Δt z $r\Delta\alpha/V$ in dobimo za vpliv teže $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha) = [-mgr \sin(\gamma_{\max} \sin \alpha)/V(\alpha)]\Delta\alpha$. Pa še nekaj – saj je za dinamično jadranje vendar bistveno, da se hitrost glede na zrak poveča ob vstopu v veter. Zato dodamo pri $\alpha = 90^\circ$ še enkratno povečanje hitrosti glede na zrak, in sicer komponento v smeri hitrosti $U \cos \gamma$. Za vse troje – upor, težo in sunek vetra U – skupaj torej za hitrost glede na zrak:

$$\begin{aligned} V_A(\alpha + \Delta\alpha) - V_A(\alpha) &= \\ &= [-k_1 V_A(\alpha) - mgr(\sin(\gamma_{\max} \sin \alpha)/V_A(\alpha))]\Delta\alpha \\ &\quad (+U \cos \gamma_{\max}, \text{ samo, ko je } \alpha = 90^\circ). \end{aligned}$$

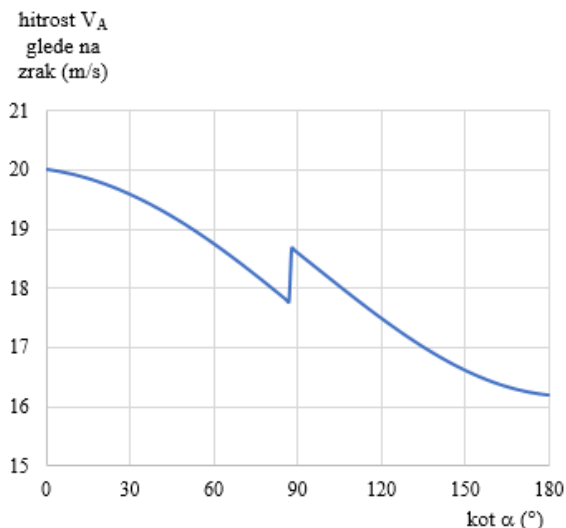




Ker v tej enačbi nastopata tako kot vzpenjanja (in spuščanja) jadralca γ kot tudi kot α , bi bilo seveda treba uporabiti še dve enačbi za ti dve količini $\Delta\gamma = \dots$ in $\Delta\alpha = \dots$. A prepustimo to tistim, ki te enačbe uporabljajo za simuliranje letov pri dinamičnem jadranju in za optimiziranje takega načina letanja. Mi pa kar izberimo majhen kot vzpenjanja γ , ki se – tako kot α – tudi sinusno spreminja. Ob prehodu iz spodnjega brezvetrja ptič prileti proti vetru, zato tam torej povečamo hitrost glede na zrak za $+U \cos \gamma_{\max}$.

Torej je treba računanja vse tri vplive na hitrost upoštevati hkrati, da po postopnem napredovanju vzdolž loka (po zaporednih $\Delta\alpha$) dobimo potek hitrosti, kot ga kaže slika 7.

Na sliki 7 se jasno vidi, da sila zračnega upora in komponenta sile teže vzdolž hitrosti hitrost glede



SLIKA 7.

Upadanje hitrosti glede na zrak ob vzpenjanju zaradi teže in zračnega upora ter enkratno povečanje te hitrosti ob prehodu iz spodnjega brezvetrja v zgornjo plast z vetrom. Izberemo kratke odseke poti $\Delta s = r\Delta\alpha$ – vzdolž polovice krožnega loka od spodnjega do zgornjega obrata naj jih bo npr. 180. Nato po zaporednih kratkih odsekih izračunavamo vedno nove vrednosti hitrosti v naslednji točki pri $(\alpha + \Delta\alpha)$ iz poznanih vrednosti v prejšnji točki pri α . Za začetno hitrost smo pri tej sliki vzeli 20 m/s ter za $r = 20$ m, $\rho = 1$ kg/m³, $S = 0,5$ m² in $c_D = 0,03$, ter za $k_2 = 0,17$, $g = 9,81$ m/s² in za jadralca maso $m = 8,5$ kg. V tem primeru smo za hitrost vetra U izbrali 1 m/s.

na zrak zmanjšujeta, prehod v veter pa jo hipoma poveča.

Vse te vplive za potrebe simuliranja dinamičnega jadranja upoštevajo z enačbo za spremembo hitrosti V_A glede na zrak:

$$\frac{dV_A}{dt} = -F_{\text{up}}/m - g \sin \gamma - \cos \gamma \cos \Psi \frac{dU}{dt}.$$

V tej enačbi smo spet pri kotu $\Psi = \alpha + 90^\circ$, dU/dt pa razložimo takole: ko se z vertikalno hitrostjo $\cos \gamma dz/dt$ povzpne v veter, se hitrost glede na zrak spremeni za $\cos \gamma dU/dt$, kajti $dU/dt = dU/dz \cdot dz/dt$.

Povejmo samo še to, da seveda katerakoli kombinacija vhodnih podatkov ne privede do simulacije uspešnega dinamičnega jadranja. Npr. če ob močnem zračnem upor ni dovolj velikega sunka vetra, se hitrost ne bo vzdrževala iz enega cikla v drugega. Ali pa: pri optimizacijah se je pokazalo, da je bolje jadрати z več majhnimi pridobivanji energije iz vetra kot pa z manjšim številom večjih pridobivanj te energije. In vse take stvari so se albatrosi, vihariki in drugi uspešni dinamični jadralci očitno zelo uspešno »naučili«!

Nadomeščanje izgubljene energije

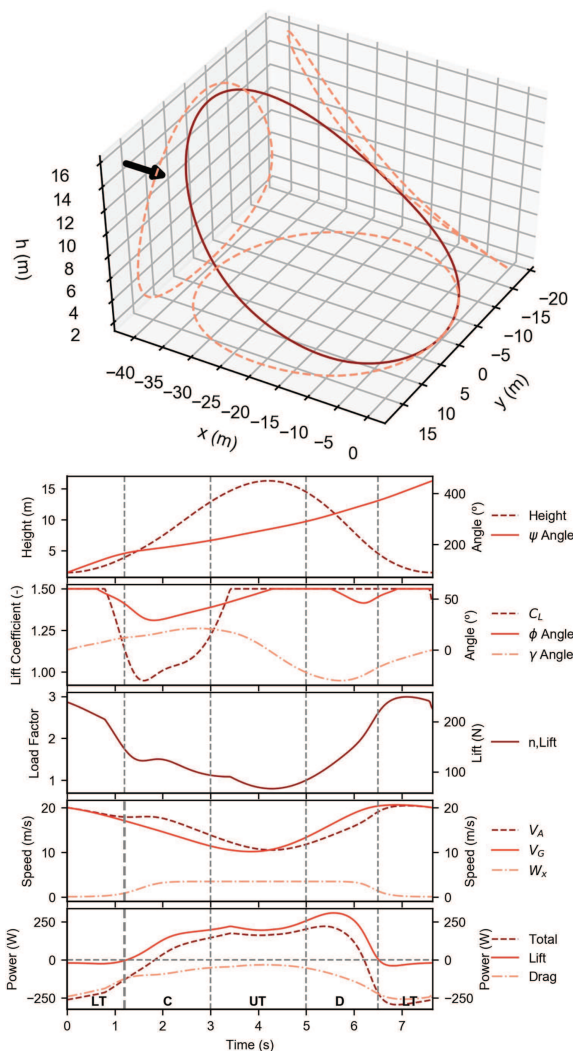
Ker sila zračnega upora zavira, je treba za letenje nadomeščati vsaj toliko energije, kot se je porabi za delo proti tej sili. Popolna obravnava tega, kako ptiči pridobivajo energijo v vetru, ki se z višino spreminja, bi bila z reševanjem gibalnih enačb, ki opisujejo spremembe gibalne količine v smeri vzdolž trenutne hitrosti letenja ter v dveh smereh pravokotno na to smer: v smeri gor-dol (kot γ glede na horizontalo) in v smeri levo-desno (kot Ψ). V enačbah nastopa sicer tudi kot bočnega nagiba, ki pa pri obravnavi točkaste mase seveda ne nastopa. Zato za bočni nagib po navadi vzamejo kar kako konstantno vrednost (recimo 60°), ali pa ga določajo ob optimiziranju letov. S takimi enačbami zajemajo vse vplive vseh sil, izračunavajo trajektorije leta, velikost in smer hitrosti v odvisnosti od časa, iz tega pa tudi kinetično in potencialno energijo v vsakem trenutku leta. Na ta način so naredili že celo množico izračunov; zadnje čase predvsem z željo najti optimalni način dinamičnega jadranja – npr. za potrebe brezpilotnih letal. Kakšne so te enačbe in primer simulacije Rayleighovega kroženja navzgor v veter in

nazaj navzdol v brezvetrje, smo za velikost hitrosti glede na zrak že opisali, več si lahko ogledamo v povsem prosto dostopnem članku Alexandreja in sod. (2020, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0229746>), od koder povzemamo sliko kroženja in nekaj rezultatov (slika 8).

Možne so tudi (manj natančne) posredne ocene spreminjanja kinetične in potencialne energije, ki pa seveda tudi upoštevajo, da mora ptič s pomočjo povečanega vzgona v vetru dobiti vsaj toliko energije, kot je zaradi zračnega upora izgublja. Ko s hitrostjo $\vec{V}$ prileti iz spodnje brezvetrne plasti (v kateri je hitrost $\vec{V}$ glede na tla seveda enaka hitrosti $\vec{V}_A$ glede na miren zrak) navzgor v smeri nasproti vetru $\vec{U}$, se njegova hitrost $\vec{V}_A$ relativno glede na zrak zaradi vetra poveča: $\vec{V}_A = \vec{V} + \vec{U}$. Ob tej povečani relativni hitrosti je tudi dinamični vzgon večji, kar ga dviga v višino – in s tem pridobi večjo potencialno energijo, kot bi jo v brezvetrju. Ta mu omogoča, da ob spuščanju zelo poveča svojo hitrost in kinetično energijo – najmanj za toliko, kolikor je izgublja v spodnji plasti brezvetrja zaradi dela A proti sili upora vzdolž poti $\vec{s}$: $A = \vec{F}_{up} \cdot \vec{s}$.

Omenimo dve od takih posrednih ocen, ki sta bili sicer narejeni za radijsko vodene modele letal, ki dosegajo zelo visoke hitrosti in zato za jadranje ptic nista povsem realni, a vseeno marsikaj pojasnita.

Prva posredna ocena (povzeta in predelana po Sachsu in sod., <https://www.mdpi.com/2226-4310/7/4/47>) skuša oceniti delo proti sili upora F_{up} skozi spodnjo plast mirnega zraka. Pri tem se izogne nepoznavanju upora s tem, da privzame, da se upor F_{up} in dinamični vzgon F_{vzg} razlikujeta samo po koeficientih c_D in c_L , da torej velja $F_{up} = c_D/c_L F_{vzg}$. Za to, kolikšen pa je pri kroženju dinamični vzgon F_{vzg} , pa še enkrat pogledjmo sliko 5 spodaj: $\vec{F}_{vzg} = \vec{F}_{(vzg,v)} + \vec{F}_{(vzg,h)} = m\vec{g} + mV^2\vec{r}/r^2$. Faktor povečanega pospeška $n = F_{vzg}/mg$ oz. faktor obtežbe ali faktor obremenitve, je po sliki 5 spodaj, $n = \sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{rg}\right)^2}$. Pri radijsko vodenih modelih je n zelo velik in enico pod korenem lahko zanemarimo. Pri albatosih pa je n okrog 3 in zato bi lahko le približno (zelo, zelo približno!) zanemarili mg v primerjavi z $\frac{V^2}{r}$, če vseeno uporabimo kar $F_{vzg} \approx \frac{mV^2}{r}$. Tedaj je sila upora $F_{up} \approx \frac{c_D}{c_L} F_{vzg} \approx \frac{mc_D}{c_L} \frac{V^2}{r}$, ki deluje vzdolž polovice spodnjega



SLIKA 8.

Sliki sta iz članka Alexandre in sod. 2020. Zgoraj: optimalna trajektorija Rayleighovega krožnega dinamičnega jadrnaja. Spodaj: spremembe spremenljivk in parametrov skozi razne faze leta: LT-spodnji obrat (»lower turn«), C-dviganje (»climb«), UT-zgornji obrat (»upper turn«) in D-spuščanje (»descend«). Spredaj, zgornji graf: višina leta h in smerni kot Ψ . Drugi graf: koeficient dinamičnega vzgona c_L , kot bočnega nagiba Φ in kot vzpenjanja/spuščanja γ . Tretji graf od zgoraj – faktor obremenitve n . Četrti graf – hitrosti glede na zrak V_A , glede na tla V_G in hitrost vetra W_x (v smeri x na zgornji sliki; naša oznaka je U), spodnji graf – skupno opravljeno delo proti silam in posebej proti vzgonu F_{vzg} in uporu F_{up} .







ZGODOVINSKI KRAJ
OB SUTJESKI V BOSNI

VELIKO
JEZERO
V SREDNJI
AZIJI,
KI IZGINJA

2



GRAFTČNO
OBLIKO-
VANJE
MATEVŽ
BOKALIČ

GREZNIČNI
PLIN

OSNOVNA
ENOTA
ZA ČAS

NASLOVNA
JUNAKINJA
ROMANA
IVA
ZORMANA

RAFKO
IRGOIČ

EVROPIDI
Z INDIJ-
SKEGA
POLOTOKA

JAHALEC

ŠOSEDI
CRKE B

STARO-
VEŠKA
DRŽAVA
V AZIJI

PETI
PRST

RUSKA
REKA,
V KATERO
SE IZLIVA
MOSKVA

NATAŠA
URBANIČ

NASPROTJE
OUTSIDERJA

ČRKA PRA-
SLOVANSKE
AZBUKE

7

DRŽAVNI
ZBOR

SKLEPNA
TEKMA
ZA PRVAKA

ZGODO-
VINSKA
DOBA

MEDNAROD.
ŠAHOVSKA
ZVEZA

SLOVAN
Z BALKANA

4

ANDREJ
PERLAH

PRIKLOPNA REŽA
PRI ELEKTRONSKIH
NAPRAVAH ZA
RAZŠIRITEV ALI
NADGRADNJO

KOS LESA
ZA
KURJAVO

ROK
GOLOB

LETOVIŠČE
OB
MURTER-
SKEM
KANALU

PREDNJI
DROG
PRI VOZU

JORDANSKO
MESTO
OB MORJU
GLASBENIK
PIHALEC

NEVTRAL
ZA
MNOŽENJE

PREGLED-
NICA,
RAZPRE-
DELNICA

HRVAŠKO
NASELJE
OB KOLPI

SKREGA-
NOST

OBSTOJ

8

FIZIK
PETERLIN
IN MATE-
MATIK
SUHADOLC

KVADRAT
ŠTEVILA
DVE

NAVADNO
IMA 365 DNI
ENOTA ZA
ČISTOTO
ZLATA

VZHODNO-
EVROPSKI
JUD

ENAKI
ČRKI

LETOVIŠČE
NA BRAČU

OJDIPOVA
POSVOJITELJICA

PREMICA
SEČNICA

RIBJE
JAJČECE

JADRANSKA
KOŠAKAR-
SKA LIGA

SOYINKOV
ROMAN

ZLOGLAŠNI
AMERIŠKI
POSILJE-
VALEC
(JEFFREY)

HČERIN
MOŽ

KRAJ PRI
SLOVENJ-
GRADCU

11

ZIMBAB.
POLITIČ
(JOSHUA)

IZOLACIJ.
MATERIAL

ZBADLJIVO
LITERARNO
DELO

MAMA

PREROC-
IŠČE

PERZIJKA

15

ČRKA L

SPLETNA
DOMENA
ETIOPIJE

13

AM. IGRAL-
KA (MARY)

NAŠ NAROD-
NOZABAVNI
ANSAMBL

NAKLO-
NJENOST,
NAGNENJE
KAMNITE
GMOTE

PAPUANSKA
DENARNA
ENOTA

JADRANSKI
OTOK

ANGLEŠKA
DOLŽINSKA
MERA,
PALEC
IRIDIJ

ENA IZMED
OSNOVNIH
FIZIKALNIH
KOLIČIN

10

DEFEKT

ALUMINIJ

SUŽNJA
V HAREMU

RIMSKA
BOGINJA
SVOBODE

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

krožnega loka dolžine $s = \pi r$. Torej je opravljeno delo zoper zračni upor $F_{\text{up}} \cdot s = \frac{c_D}{c_L} F_{\text{vzg}} \cdot s \sim \pi m \frac{c_D}{c_L} \bar{V}^2$ in tolikšna je tudi izguba kinetične energije vzdolž te spodnje polovice poti: $\Delta E_{\text{sp}} \sim -\pi m \frac{c_D}{c_L} \bar{V}^2$. Vsaj takšna mora biti razlika kinetičnih energij ob spustu iz vetrovne plasti z veliko hitrostjo V_1 navzdol v miren zrak in ponovnem dvigu vanjo z zmanjšano hitrostjo V_2 : $\Delta E_{\text{sp}} = \frac{m}{2} V_1^2 - \frac{m}{2} V_2^2$. To pa lahko prepišemo v obliko $\frac{m}{2} (V_1 - V_2) \cdot (V_2 + V_1) = m \Delta V \cdot \bar{V}$, kjer je $\bar{V} = (V_2 + V_1)/2$ povprečje obeh hitrosti. Iz primerjave med obema izrazoma $m \Delta V \cdot \bar{V} \sim \pi m \frac{c_D}{c_L} \bar{V}^2$ sledi ocena za zmanjšanje hitrosti skozi spodnjo plast mirnega zraka $\Delta V \sim \pi \frac{c_D}{c_L} \bar{V}$. Iz tega izračunamo (če upoštevamo največkrat navajano razmerje $c_D/c_L \approx 0,03/1,3$), da je relativno zmanjšanje hitrosti skozi spodnji mirujoč zrak za okrog 0,30 od povprečne hitrosti. Za pol tega je začetna hitrost V_1 večja od povprečne hitrosti: $V_1 = \bar{V}(1 + 0,15)$ in končna hitrost V_2 manjša: $V_2 = \bar{V}(1 - 0,15)$. Ocenili so tudi, da ptiči pri dinamičnem jadranju letijo hitreje od vetra U – kogar zanima, kako so prišli do te ocene, naj si to ogleda na navedeni internetni strani.

Druga ocena (Philipa Richardsona, https://www.researchgate.net/publication/259297195_High-Speed_Dynamic_Soaring) pa oceni izgubo potencialne energije ob spuščanju s hitrostjo V_1 – torej vzdolž polovice krožnega loka, ki jo preleti v polovičnem času enega kroga τ , torej v času $\tau/2$: $\Delta E_{\text{pot}} = -mg\Delta Z = -mgV_1\tau/2$. To izgubo primerja z razliko kinetičnih energij ΔE_{kin} ob spustu iz vetrovne plasti z veliko hitrostjo V_1 navzdol v miren zrak in ponovnem dvigu vanjo z zmanjšano hitrostjo V_2 : $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} V_1^2 - \frac{m}{2} V_2^2 = \frac{m}{2} (V_1^2 - V_2^2)$. To spet prepišemo v obliko $m \Delta V \cdot \bar{V}$. Iz te primerjave sledi $mgV_1\tau/2 = m \Delta V \cdot \bar{V}$ in od tod ocenimo, za koliko se zmanjša hitrost skozi spodnji miren zrak zaradi zračnega upora. Sledi $\delta V = \frac{g\tau}{2} \frac{V_1}{\bar{V}}$. Ker so povprečne hitrosti letenja albatrosov okrog 15 m/s, kroženja pa, kot že povedano, zelo položna, prej smo izbrali okrog 1: 5, je $V_1/\bar{V}$ približno $1/5 = 0,2$, in ker krogi trajajo okrog $\tau \approx 10$ s, je $\Delta V \approx 10 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} \cdot 0,2 \approx 10 \text{ m/s}$. To se ujema z opazovanji dinamičnega jadranja albatrosov – na vrhu krogov imajo majhno hitrost (15-10 m/s = 5 m/s), njihova največja hitrost pa je več kot 20 m/s (15 + 10 m/s = 25 m/s).

In za konec: albatrosi, vihariki ter še kakšni drugi ptiči so res izvrstni dinamični jadralci!

× × ×

Naša pot do mladinske naravoslovne olimpijade

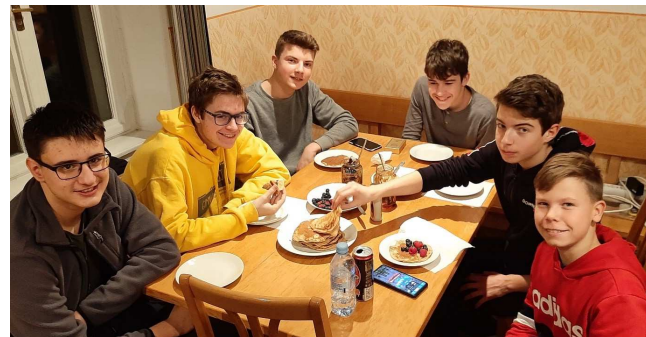
KAKO SMO PREŽIVELI PRIPRAVE IN IJSO 2021

↓↓↓

MARTIN ALOJZ FLISAR, TOMAŽ HOLC, ALJAŽ ERMAN, ENEJ JAUK, ALEKSANDER KOSANOVIČ IN ŽAN ARSOV

→ Pot do udeležbe na mladinski mednarodni naravoslovni olimpijadi (IJSO – International Junior Science Olympiad) ni bila lahka in se je začela že v preteklem šolskem letu.

Na prve priprave je bilo povabljenih nekaj čez petdeset najboljših tekmovalcev državnih tekmovanj iz fizike in kemije, tako iz devetega kot osmega razreda. Zadnji teden junija sta društvi DMFA in ZOTKS pripravili predavanja, ki pa jih zaradi epidemioloških razmer vsi nismo mogli spremljati v živo; slaba polovica je predavanje spremljala v svoji sobi preko



SLIKA 1.

Člani ekipe se po tekmovanju sladkajo z večernimi palačinkami.

Zooma, drugi pa na ljubljanskih fakultetah. Priprave so se začele sunkovito, saj je bilo treba ključne koncepte predelati v samo enem tednu. Občuten je bil prestop iz šolskih klopi v univerzitetne predavalnice – v prvih dveh urah priprav smo obnovili celotno osnovnošolsko fiziko in še več. Za nekatere stvari na predavanjih učenci iz osmega razreda sploh še niso slišali, a so se hitro vključili tudi oni. Po našem mnenju je bila najtežja in najobsežnejša kemija.

Teden pozneje je sledil prvi izbirni test, ki je izmed osemintridesetih naprej spustil le najboljših dvanajst. Na tem izbirnem testu smo se srečali z nalogami s področij fizike, kemije in biologije, ki pa so bile drugačne od tistih, ki smo jih bili vajeni iz šole in tekmovanj. Tudi snov je bila veliko bolj zahtevna. Izbranih dvanajst je bilo povabljenih na druge enotedenske priprave, ki so potekale avgusta na Bledu v Plemljevi vili. Tam smo zelo uživali, čeprav smo imeli precej zgoščen urnik; tudi po osem ur predavanj na dan. Okolica nam je omogočala razne sprehode in aktivnosti, zato je bila ta lokacija izvrstna. Sredi septembra je sledil še drugi izbirni test, ki je bil prav tako zelo naporen in zahteven. Najboljših šest se je uvrstilo v ekipo. Sledil je nekajtedenski premor, med jesenskimi počitnicami pa so sledile še tretje priprave, ki so znova potekale na ljubljanskih fakultetah. Tam smo spoznali še zadnji del učnega načrta olimpijade in tako zaključili priprave. Ker olimpijada vključuje tudi eksperimentalni del, smo zadnjih nekaj dni opravljali poskusne eksperimente in se tako bolje seznanili s potekom eksperimentalnih nalog. Na te priprave je bilo povabljenih vseh dvanajst udeležencev iz prejšnjih priprav, vsega skupaj pa se nas je priprav udeležilo deset. Torej so se štirje odrekli počitnicam brez obeta udeležbe na olimpijadi; samo zato, ker radi »hodijo v šolo«.

Letos je olimpijada potekala v hibridni obliki, zato smo med olimpijado bivali in tekmovali v Plemljevi vili na Bledu. Tja smo prišli v nedeljo, 12. 12. 2021, popoldne. Najprej smo se pozdravili in se namestili po sobah. Prvi test smo imeli šele v torek, torej je bil vmes še en prost dan. V ponedeljek smo si zjutraj ogledali začetno slovesnost, na kateri so predstavili sodelujoče države. V prostem času smo hodili na sprehode okoli jezera, igrali šah in tarok, nekaj časa pa smo tudi porabili za vajo in reševanje nalog iz prejšnjih olimpijad. Za nas sta skrbeli in nam kuhali po željah Urška in Eva.



SLIKA 2.

Komplet naših medalj,
3 bronaste in 3 srebrne.

V torek ob treh se je začel prvi del, test z izbirnimi odgovori (MCQ), pri čemer je bilo treba pri vsaki nalogi izbrati enega izmed štirih odgovorov. Ko smo se posvetili nalogam, je začetna nervoza hitro minila. Naloge so bile razmeroma težke, za nekatere je tudi zmanjkalo časa. Pisali smo tri ure, nato pa zapustili učilnico. Po testu smo se zbrali v jedilnici ter se pogovarjali o nalogah. Nato smo imeli sredo spet prosto, v četrtek pa je sledil teoretični test. Pred tem testom smo bili malo bolj sproščeni, saj smo si zdaj že približno predstavljali, kako bo potekal. Pred tem testom ni bilo videti, da bi bilo tri ure premalo časa, vendar so bile naloge zahtevne ter obsežne. Občutki po testu so bili dobri, saj se nam je zdelo, da smo kar dobro opravili.

Pred nami je bil le še eksperimentalni del, ki smo ga pisali oziroma delali v soboto ob treh. Razdelili smo se v dve skupini po tri tekmovalce. Vsak je izvedel svoj eksperiment ali eksperimenta, če je imel dva. Razdelili smo se po področjih; eden se je osredotočil na fiziko, drugi na kemijo in tretji na biologijo. Dela je bilo veliko, a vsi eksperimenti so bili zanimivi. Pri biološkem delu smo na primer določali krvne skupine različnih oseb, pri kemijskem pa vsebnost glukoze v datljevem sirupu. Po eksperimentalnem delu smo se odpravili domov.

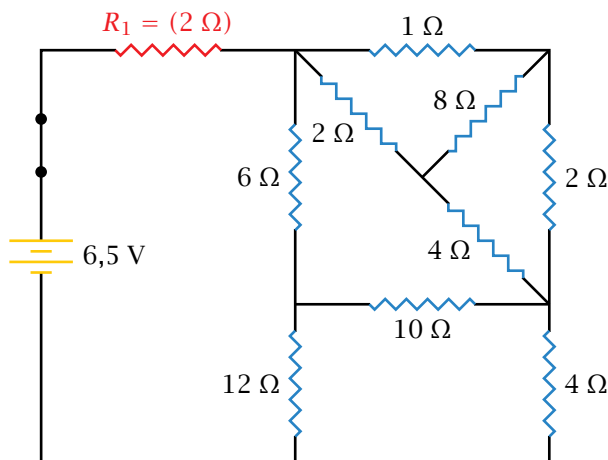
Ko smo v ponedeljek v šoli med odmorom po internetu spremljali zaključno slovesnost, smo bili treh srebrnih in treh bronastih medalj zelo veseli.





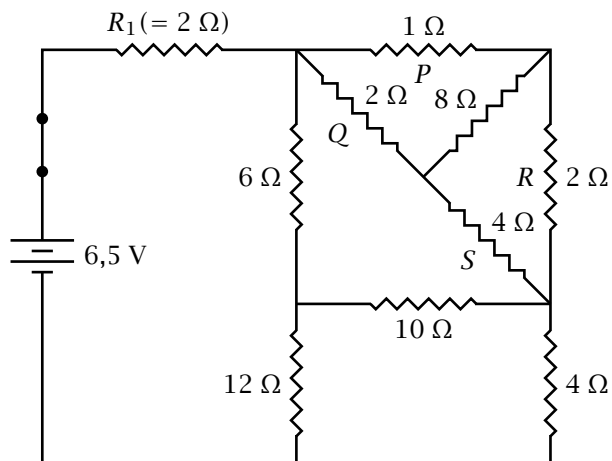
Primer naloge

Kolikšen je tok v vezju skozi upornik $R_1 (= 2 \Omega)$?



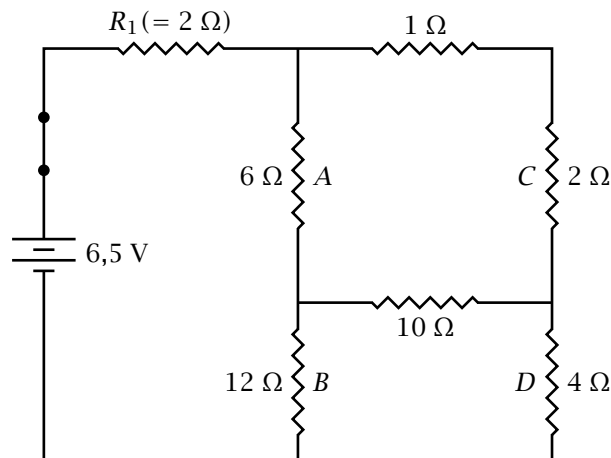
- a. 0,5 A c. 1,8 A
b. 1,0 A d. 2,0 A

Rešitev naloge



Ko prvič vidiš tak preplet žic in različnih upornikov, se zdi taka naloga zelo težka, če ne kar nerešljiva. Ampak pogosto je pri zapletenih vezjih rešitev lahko preprosta, če v krogu najdeš simetrijo. In v tem krogu najdemo simetrijo: opazimo na primer, da je razmerje med uporoma P in Q enako razmerju med uporoma R in S , $P/Q = R/S$. To pomeni,

da sta enaki tudi razmerji napetosti na upornikih $U_P/U_Q = U_R/U_S$, kot pri Wheatstonovem mostičku, in zato na uporniku za 8Ω napetosti ni in skozi njega ne teče tok. Potem gre naprej lažje. Osnovno vezje lahko malce poenostavimo, ko odstranimo povezavo preko upornika za 8Ω (skozi katerega tok ne teče) in ko namesto upornikov P in R narišemo nadomestni upornik z uporom 3Ω , namesto upornikov Q in S narišemo nadomestni upornik z uporom 6Ω . Ta dva nadomestna upornika sta vezana vzporedno: njun skupni (oziroma naslednji nadomestni) upor dobimo iz zveze $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ in $R = 2 \Omega$. Ko zdaj prerešimo vezje tako, da upornike P , Q , R in S nadomestimo s tem drugim nadomestnim uporom R , je shema že precej bolj enostavna, obenem pa se v novi shemi pojavi povsem enaka simetrija kot v osnovni. Zdaj že vemo, kako razmišljamo naprej; ponovimo sklepanje!



$A/B = C/D$. Torej tok ne bo tekkel skozi upornik 10Ω . Torej bo $A+B$ paralelno vezan s $C+D$. Skupen upor je tako $4,5 \Omega$. Tako je celoten upor vezja $6,5 \Omega$ in tok 1 A .

Olimpijade smo se udeležili in ta članek napisali: **Martin Alojz Flisar** (Osnovna šola narodnega heroja Maksa Pečarja), **Tomaž Holc** (lani OŠ Breg Ptuj, letos Gimnazija Ptuj), **Aljaž Erman** (lani OŠ Križe, letos Gimnazija Kranj), **Enej Jauk** (lani OŠ Miška Kranjca Ljubljana, letos Gimnazija Bežigrad), **Aleksander Kosanovič** (lani OŠ Rodica, letos Gimnazija Bežigrad) in **Žan Arsov** (lani OŠ Brezovica pri Ljubljani, letos Gimnazija Bežigrad).

× × ×

Astronomsko tekmovanje treh dežel 2022



Vid Kavčič



Nekaj uvodnega godrnjanja

Med 1. in 3. julijem 2022 je v **Avberju na Krasu** potekalo tekmovanje treh dežel v znanju astronomije, na katerem so se olimpijske srednješolske astronomske ekipe Slovenije, Hrvaške in Madžarske pomerile v reševanju teoretičnih nalog, obdelavi podatkov in nočnem opazovanju. Naši tekmovalci so se na tekmovanju več kot odlično odrezali. **Peter Andolšek** in **Vid Kavčič** sta zasedla prvo in drugo mesto ter prejela **zlato medaljo**, medtem ko sta **Miha Brvar** in **Marija Judež** zasedla tretje in četrto mesto ter prejela **srebrno medaljo**, **Alexander Gaydukov** je prejel **bronasto medaljo**, **Aleš Rus** pa **pohvalo**. Slovensko ekipo so zastopali tudi **Nika Videnšek Podgorelec**, **Matic Terglav** in **Leo Pintar**. Vodji slovenske ekipe sta bila **Dunja Fabjan** in **Andrej Guštin**.

V članku predstavljam po mojem mnenju zanimivejše oziroma poučne naloge s tekmovanja različnih

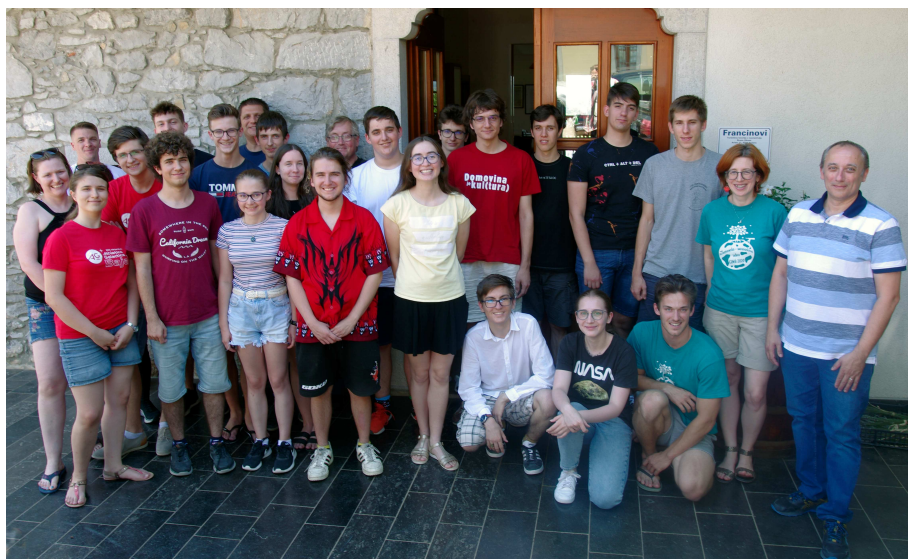
težavnosti. Bralce prijateljsko vabim, da se poskušajo z astronomskimi izzivi najprej spoprijeti sami in šele v primeru resnejših zapletov pokukajo v rešitve, saj to prinese veliko več miselnih užitkov in zabave pri reševanju. Kljub vsemu pa naj iz preventivnih razlogov izpostavim, da je za razumevanje tako nalog kot tudi rešitev potrebno poglobljeno poznavanje ter razumevanje osnov astronomije in astrofizike.

Na tem mestu bi se rad tudi nadvse prijazno zahvalil Urbanu Razpotniku in Simonu Bukovšku za komentarje in pripombe za izboljšavo članka.

Magnituda dvozvezdja

Naloga

Dve zvezdi v tesnem dvojnem sistemu imata navidezni magnitudi v B-filtru $m_{B,1} = 18,2$ in $m_{B,2} = 19,6$. Prva zvezda ima barvni indeks $(B - V)_1 = -0,2$, druga pa $(B - V)_2 = 0,5$. S teleskopom ne bomo razločili posamične komponente sistema.



SLIKA 1.

Astronomske falange Slovenije, Hrvaške in Madžarske.





Kolikšna bosta navidezna magnituda sistema v B-filtru m_B in barvni indeks $(B - V)$ sistema? Katera od komponent dvojnice bo prevladovala v skupni barvi sistema?

Podatki. $m_{B,1} = 18,2$, $m_{B,2} = 19,6$, $(B - V)_1 = -0,2$, $(B - V)_2 = 0,5$

Rešitev

Pri nalogi se srečamo s konceptom, ki bi mu lahko rekli *seštevanje magnitud*. Ker je skala za izražanje navideznega sija v magnitudah logaritemska, magnitud zvezd ne moramo kar direktno sešteti, saj bi v tem primeru dobili vrednost, večjo od obeh začetnih vrednosti, kar pa bi pomenilo manjši sij, kar pa je nesmiseln rezultat. Namesto tega moramo seštevati gostoti svetlobnega toka s prve in z druge zvezde. Pri tem smiselno predpostavimo, da sta za opazovalca z Zemlje obe zvezdi dvozvezdja enako oddaljeni.

V ta namen dvakrat zapišemo Pogonov zakon. Najprej primerjamo navidezna sija v B-filtru prve in druge zvezde, iz česar izrazimo razmerje gostote svetlobnih tokov $j_{B,1}$ in $j_{B,2}$:

$$\begin{aligned} m_{B,1} - m_{B,2} &= -2,5 \log \left(\frac{j_{B,1}}{j_{B,2}} \right), \\ \frac{j_{B,1}}{j_{B,2}} &= 10^{-0,4(m_{B,1} - m_{B,2})}. \end{aligned}$$

Nadalje primerjamo navidezni sij druge zvezde z navideznim sijem celotnega sistema, pri čemer upoštevamo, da celotnemu sistemu ustreza gostota svetlobnega toka $j_{B,1} + j_{B,2}$, poleg tega pa uporabimo zgoraj pridobljeni izraz za razmerje $j_{B,1}/j_{B,2}$

$$\begin{aligned} m_B - m_{B,2} &= -2,5 \log \left(\frac{j_{B,1} + j_{B,2}}{j_{B,2}} \right) \\ &= -2,5 \log \left(\frac{j_{B,1}}{j_{B,2}} + 1 \right) \\ m_B &= m_{B,2} - 2,5 \log \left(10^{-0,4(m_{B,1} - m_{B,2})} + 1 \right), \\ \therefore m_B &= 17,936. \end{aligned}$$

Iz barvnih indeksov izračunamo navidezna sija zvezd v V-filtru:

$$m_{V,1} = m_{B,1} - (B - V)_1 = 18,4$$

in podobno $m_{V,2} = 19,1$. Analogno zgornjemu postopku izračunamo navidezni sij sistema v V-filtru in dobimo rezultat $m_V = 17,942$.

Preostane nam le še izračunati barvni indeks sistema:

$$(B - V)_{\text{tot}} = m_B - m_V = -0,006 \approx 0,0.$$

V skupni barvi sistema bo prevladovala zvezda, katere barvni indeks je številčno bližje barvnemu indeksu sistema. Ker je $(B - V)_1 = -0,2$ in $(B - V)_2 = 0,5$, v sistemu očitno prevladuje prva (svetlejša) zvezda.

Spiralna galaksija

Naloga

Spiralna galaksija ima navidezno razmerje velike in male polosi 1,74. Opazovana rotacijska hitrost galaksije je 300 km/s. Njena navidezna magnituda v H-filtru je 18,0. Absolutna magnituda Sonca v H-filtru je $M_{H,\odot} = 3,48$.

Relacija Tully-Fisher v H-filtru je

$$\log L_{[L_\odot]} = 3,44 \cdot \log v_{\text{rot,max}}[\text{km/s}] + 0,83,$$

kjer je izsev podan v $L_\odot$ in hitrost v km/s.

1. Kolikšna je inklinacija galaksije?
2. Kolikšna je absolutna magnituda galaksije v H-filtru?
3. Iz spektra galaksije ugotovimo rdeči premik $z = 0,150$. Izračunaj lastno hitrost galaksije vzdolž smeri pogleda.

Rešitev

Podatki. $\kappa = 1,74$, $v_{\text{rot}} = 300$ km/s, $m_H = 18,0$, $M_{H,\odot} = 3,48$, $z = 0,150$

1. Inklinacija galaksije i je definirana kot kot med normalo na ravnino galaksije in smerjo pogleda. S preprosto skico ugotovimo, da jo iz navideznega razmerja med veliko in malo polosjo elipse izračunamo kot:

$$i = \arccos(1/\kappa) = 54,9^\circ.$$

Največja rotacijska hitrost je torej enaka

$$v_{\text{rot,max}} = \frac{v_{\text{rot}}}{\sin i} = 367 \text{ km/s}.$$

2. Absolutno magnitudo galaksije določimo iz relacije Tully-Fischer:

$$\begin{aligned} M_H - M_{H,\odot} &= -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right), \\ &= -2,5 \cdot (3,44 \log(v_{\max, \text{rot}}) + 0,83), \\ M_H &= -24,12 + 3,48 = -20,64. \end{aligned}$$

3. Oddaljenost galaksije d izračunamo iz modula razdalje:

$$\begin{aligned} m_H - M_H &= 5 \log d - 5, \\ d &= 10^{0,2(m_H - M_H + 5)}, \\ \therefore d &= 535 \text{ Mpc}. \end{aligned}$$

Izmerjeni rdeči premik z je posledica dveh dejavnikov, in sicer raztezanja vesolja (kozmo-
loški rdeči premik, ki ga lahko izračunamo iz Hubblovega zakona), in Dopplerjevega pojava zaradi lastnega gibanja galaksije, kar zapišemo kot:

$$\begin{aligned} z &= z_{\text{Hubble}} + z_{\text{Doppler}}, \\ z &= \frac{H_0 d}{c} + \frac{v_{\text{lastna}}}{c}, \\ v_{\text{lastna}} &= c \cdot z - H_0 \cdot d, \\ \therefore v_{\text{lastna}} &= 7550 \text{ km/s}, \end{aligned}$$

pri čemer smo za vrednost Hubblove konstante vzeli $H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$.

Nova Severnica

Naloga

Leta 2022 je bil poletni solsticij 21. junija. Toda Zemlja bo v afeliju šele dva tedna kasneje, 4. julija. Inklinacija Zemljine osi je $\varepsilon = 23,5^\circ$.

- Perioda precesije vrtilne osi je 26000 let. Ocenite, v katerem letu bosta ali sta se poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan, 4. julija.
- Večkrat se omenja, da bo v prihodnosti zvezda Vega ($\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$) kazala smer severa. Ocenite, čez koliko let se bo to zgodilo.

Zanemari nutacijo, gibanje perihelija in preostale učinke drugega reda.

Rešitev

Podatki. $\varepsilon = 23,5^\circ$, $\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$, $\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h$, $P = 26000$ let

V prvem delu naloge nam bo prav prišlo računanje z ekliptično dolžino, zato se spomnimo tudi, da ekliptična dolžina Sonca s časom teče enakomerno kot $L = \frac{\Delta t}{365,25} \cdot 360^\circ$, pri čemer smo s Δt označili čas v dnevih po spomladanskem enakonočju.

- Izračunajmo ekliptično dolžno Sonca ob poletnem solsticiju in v trenutku, ko je Zemlja v afeliju. Imamo $\Delta t_1 = 10 + 30 + 31 + 21 = 92$ dni in $\Delta t_2 = 10 + 30 + 31 + 30 + 4 = 105$ dni, iz česar sledi $L_1 = 90,678^\circ$ in $L_2 = 103,490^\circ$. Precesija se dogaja glede na ravnino ekliptike s periodo $P = 26000$ let, zato se bosta poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan čez:

$$t = \frac{\Delta L}{360^\circ} \cdot P = 925 \text{ let}.$$

- Označimo z V lego Vege in s P lego nebesnega pola na nebesni sferi. Razmislimo, da so koordinate severnega pola ekliptike E ($\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h$). Gledamo sferični trikotnik VPE , ki je za lažjo predstavbo prikazan tudi na sliki 2.

Razmislimo, da v trikotniku velja $VP = 90^\circ - \delta_V$, $EP = \varepsilon$, poleg tega pa velja $\angle VPE = \alpha_V - \alpha_E$. Dolžino d_{EV} izrazimo s formulo za razdaljo med točkama na sferi

$$\begin{aligned} \cos d_{EV} &= \sin \delta_V \sin \delta_E + \\ &+ \cos \delta_V \cos \delta_E \cos(\alpha_V - \alpha_E), \end{aligned}$$

iz česar izračunamo $d_{EV} = 28^\circ 13'$.

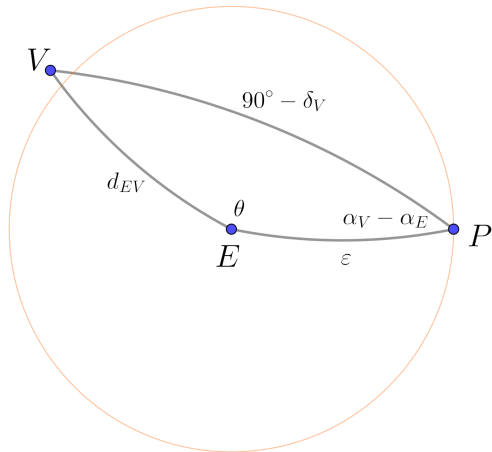
Iz sinusnega izreka za sferični trikotnik VPE sledi

$$\begin{aligned} \sin \angle PEV &= \frac{\sin VP}{\sin VE} \sin \angle VPE, \\ \sin \theta &= \frac{\cos \delta_V}{\sin d_{EV}} \sin(\alpha_V - \alpha_E), \end{aligned}$$

iz česar dobimo edino smiselno rešitev $\theta = 164^\circ 38'$.

Zemljina navidezna os se mora torej zaradi precesije zavrteti za kot θ in ker se ta s časom





SLIKA 2.

Sferični trikotnik Vega (V) – severni nebesni pol (P) – severni pol ekliptike (E). Zvezde, ki se nahajajo na oranžni krožnici, v času ene periode precesije prečkajo severni nebesni pol.

spreminja enakomerno, bo Vega v bližini severnega nebesnega pola čez približno

$$\Delta t = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot P,$$

$$\therefore \Delta t = 11\,900 \text{ let.}$$

Aktivno galaktično jedro

Na sliki 3 je prikazana svetlobna krivulja aktivnega galaktičnega jedra (AGJ) v galaksiji MCG-6-30-15. Izsev AGJ je posledica akrecije snovi na središčno supermasivno črno luknjo (angl. *supermassive black-hole*, SMBH) v galaksiji.

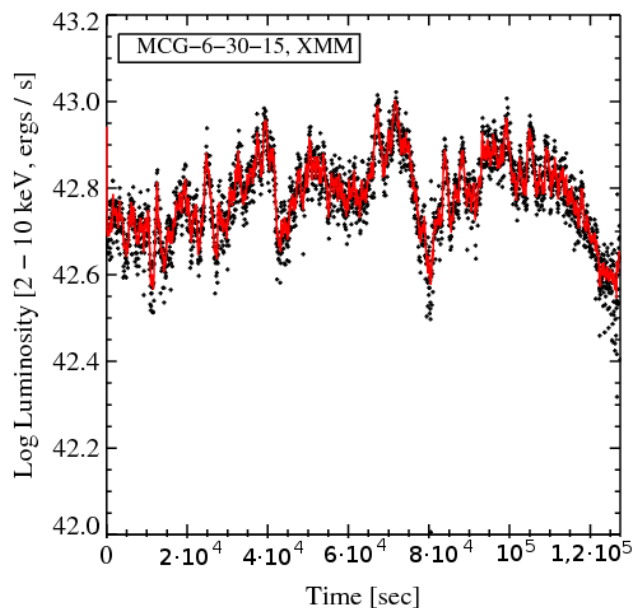
1. Oцени spodnjo mejo za maso SMBH (izrazi jo v $M_\odot$). Pomni, da je $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$.
2. Spremenljiv izsev območja AGJ (ki je pod mejo ločljivosti) lahko uporabimo za oceno velikosti območja AGJ. Iz te ocenjene velikosti določi zgornjo mejo SMBH (rezultat izrazi v $M_\odot$).
3. Določi, kolikšna je akrecija mase na središčno supermasivno črno luknjo (v $M_\odot/\text{leto}$), da dobimo (maksimalni) izmerjeni izsev. Upoštevaj, da se 10 % mase, ki pada na SMBH, spremeni v izsevano energijo.

Pri reševanju se lahko poslužiš formule za **Eddingtonov izsev**:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi m_H c G M}{\sigma_T},$$

kjer je m_H masa atoma vodika in σ_T Thomsonov sipalni presek.

Eddingtonov izsev je največji možni izsev telesa, da sta svetlobni tlak in gravitacija še v ravnovesju. Če je izsev večji od Eddingtonovega, bo sevalni tlak prevladal nad gravitacijo in plin namesto navznoter potisnjen navzven, izsev pa se bo zmanjšal na vrednost Eddingtonovega izseva.



SLIKA 3.

Svetlobna krivulja AGJ-ja v galaksiji MCG-6-30-15 (Kelly et al. 2011).

Rešitev

Podatki. $L_{\text{max}} = 10^{50} \text{ W}$, $\Delta t = 2500 \text{ s}$, $\eta = 0,1$, $\sigma = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$, $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

1. S svetlobne krivulje na sliki 3 odčitamo, da je maksimalni izsev AGJ $L_{\text{max}} = 10^{50} \text{ W}$. Od tod iz

enačbe za Eddingtonov izsev dobimo:

$$M = \frac{L_{\max} \sigma_T}{4\pi m_H c G},$$

$$\therefore M = 7,9 \cdot 10^4 M_{\odot}.$$

2. S svetlobne krivulje na sliki 3 določimo periodo utripanja AGJ $\Delta t = 2500$ s, s pomočjo katere lahko ocenimo polmer območja $R = c\Delta t = 7,5 \cdot 10^{11}$ m. Maso snovi znotraj tega polmera dobimo iz formule za Schwarzschildov polmer, pri čemer upoštevamo $R = R_{\text{Sch}}$:

$$R_{\text{Sch}} = \frac{2GM}{c^2},$$

$$M = \frac{Rc^2}{2G},$$

$$\therefore M = 2,5 \cdot 10^8 M_{\odot}.$$

3. Masa se spreminja v energijo v skladu z Einsteino enačbo $E = mc^2$ oziroma $E = \eta Mc^2$, če upoštevamo delež mase, ki se spremeni v izsevano energijo. V enačbi lahko energijo E nadomestimo z izsevom $L_{\max}$, maso M pa s hitrostjo akrecije $\dot{M}$ in dobimo $L_{\max} = \eta \dot{M} c^2$. Hitrost akrecije je tako

$$\dot{M} = \frac{L_{\max}}{\eta c^2},$$

$$\therefore \dot{M} = 1,1 \cdot 10^{20} \text{ kg/s} = 1,8 \cdot 10^{-3} M_{\odot}/\text{leto}.$$

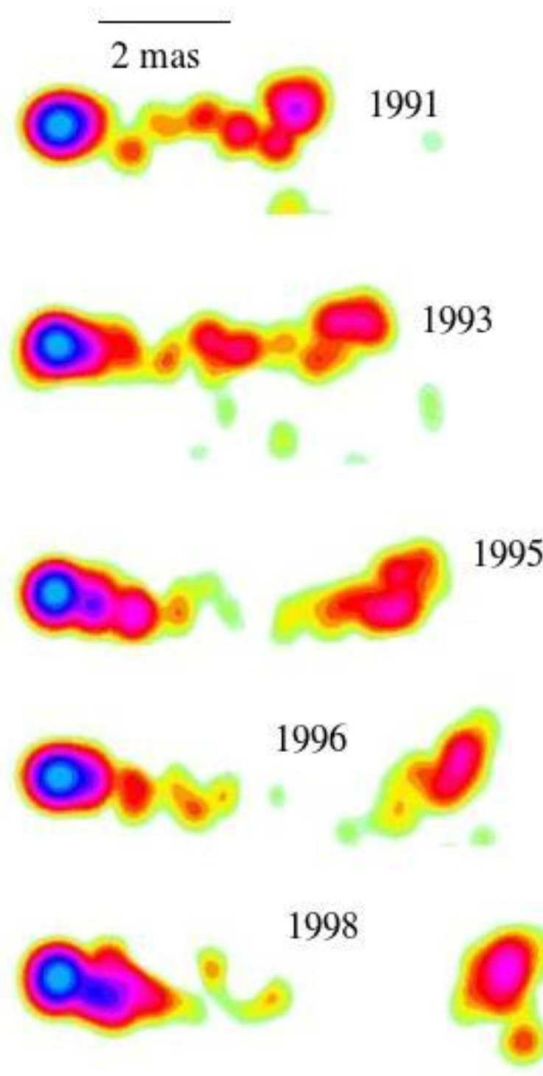
Nadsvetlobno gibanje

Opazovanja radijskih curkov v kvazarjih pokažejo, da se curki navidezno gibljejo z nadsvetlobno hitrostjo. To je posledica projekcije gibanja radijskega curka proti opazovalcu (oglej si primer na sliki 4).

Upoštevaj curek snovi, ki oddaja radijsko sevanje in se giblje s hitrostjo v v smeri θ glede na smer pogleda.

1. Na podlagi slike 4 in podatka o znani oddaljenosti kvazarja $D = 605$ Mpc, oceni prečno (navidezno) hitrost curka snovi glede na smer pogleda.
2. Izpeljži enačbo za hitrost curka pravokotno na smer pogleda (prečna hitrost v_T), kot jo vidi opazovalec O. Rezultat zapiši parametrično.

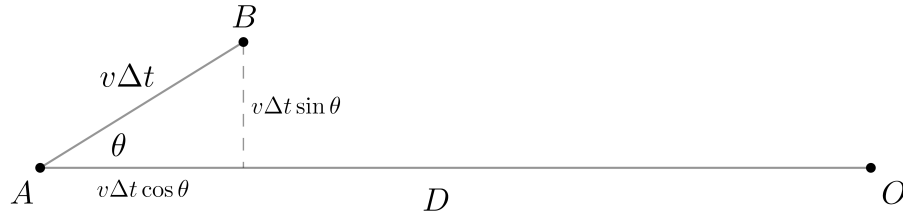
3. Na podlagi prečne hitrosti glede na smer pogleda izračunaj tudi pravo hitrost curka snovi, pri tem privzemi $\theta = 18^\circ$. Hitrosti izrazi v enotah svetlobne hitrosti c .



SLIKA 4.

Opazovanja kvazarja 3C 273 v različnih letih. Črna črta na vrhu kaže kotno velikost 2 mili kotnih sekund na sliki. Središčni del AGJ je na levi, curek snovi, ki se giblje z nadsvetlobno hitrostjo, pa na desni.




SLIKA 5.

Shema radijskega curka v kvazarju. Curek snovi se giblje od točke A do B. Opazovalec (O) je na razdalji D od točke A. Curek snovi se giblje pod kotom θ glede na smer pogleda.

Rešitev

Podatki. $d = 605 \text{ Mpc}$, $\theta = 18^\circ$

1. Hitrost, pravokotno na smer pogleda, ocenimo s slike, s katere razberemo, da se je curek v času 7 let premaknil za približno 3 mas:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_T &= \frac{0.003'' \cdot d}{7 \text{ let}} = 1,23 \cdot 10^9 \text{ m/s}, \\ \therefore v_T &= 4,1c. \end{aligned}$$

2. Slika 5 prikazuje shemo radijskega curka v kvazarju, ki nam bo v pomoč pri izpeljavi.

Foton, ki ga curek odda ob času $t_0 = 0$ v točki A, s svetlobno hitrostjo c prepotuje razdaljo D, zato do opazovalca v točki O prispe v času

$$\blacksquare \quad t_{AO} = \frac{D}{c}.$$

V času Δt se curek snovi premakne v točko B, v kateri odda drugi foton. Ker je kot θ majhen, je razdalja med točkama B in O približno

$$\blacksquare \quad d_{BO} \simeq D - v \Delta t \cos \theta.$$

Drugi foton tako doseže opazovalca v času

$$\blacksquare \quad t_{BO} = \Delta t + \frac{D - v \Delta t \cos \theta}{c}.$$

Opazovalec bo videl, da curek pravokotno razdaljo $d_T = v \Delta t \sin \theta$ prepotuje s hitrostjo

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_T &= \frac{v \Delta t \sin \theta}{t_{BO} - t_{AO}}, \\ v_T &= \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \end{aligned}$$

3. Iz pravkar izpeljane enačbe lahko izrazimo rešnično hitrost curka, pri čemer upoštevamo, da je $\theta = 18^\circ$:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v &= \frac{v_T}{\sin \theta + \frac{v_T}{c} \cos \theta}, \\ \therefore v &= 0,974c. \end{aligned}$$

Za zanimivost lahko izračunamo še, kolikšna je teoretično največja možna nadsvetlobna hitrost curka. V ta namen izraz za prečno hitrost odvajamo po kotu θ in dobljeni izraz enačimo z 0. Pri tem upoštevamo pravilo za odvajanje količnika in zvezo $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{dv_T}{d\theta} &= \frac{v \cos \theta - \frac{v^2}{c}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} = 0, \\ v \cos \theta_{\max} - \frac{v^2}{c} &= 0, \\ \therefore \cos \theta_{\max} &= \frac{v}{c}. \end{aligned}$$

Od tod pa hitro dobimo izraz za največjo možno navidezno nadsvetlobno hitrost:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_{T,\max} &= \frac{v \sin \theta_{\max}}{1 - \cos^2 \theta_{\max}} = \frac{v \sin \theta_{\max}}{\sin^2 \theta_{\max}} \\ &= \frac{v}{\sin \theta_{\max}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma v, \end{aligned}$$

pri čemer smo v zadnjem koraku z $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ označili Lorentzov faktor, ki je znani spremljevalec enačb v posebni teoriji relativnosti.

× × ×

S kotaljenjem krožnice do astroide in kardioide



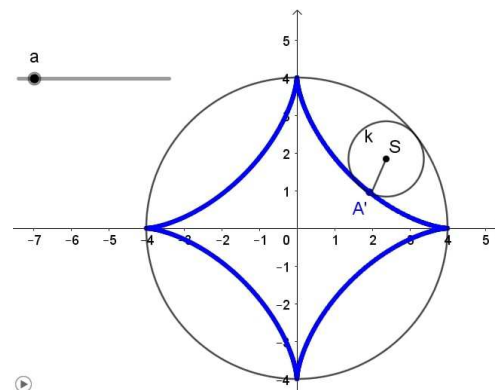
EMA ČEŠEK

→ Astroida je krivulja, katere ime izvira iz grške besede aster, ki pomeni zvezda. Ima namreč obliko zvezde s štirimi kraki in zato zanjo uporabljamo tudi ime zvezdnica. Poimenovanje kardioida prav tako izhaja iz grščine. Oblika krivulje spominja na srce, zaradi česar jo imenujemo tudi srčnica. Ogleдали si bomo tri načine, kako ti dve krivulji narišemo v GeoGebri - z animacijo sledi točke, kot ogrinjačo množice daljic in direktno s parametrično enačbo krivulje.

Astroido uvrščamo med hipocikloide. To so krivulje, ki jih opiše točka na krožnici, ki se kotali po notranji strani druge krožnice. Oblika krivulje je odvisna od razmerja med polmeroma obeh krožnic. Da nastane astroida, morata biti polmera kotaleče se notranje krožnice in zunanje krožnice v razmerju 1 : 4. V nadaljevanju bomo ves čas obravnavali primer, ko ima notranja krožnica polmer 1, zunanja pa 4.

Konstrukcija astroide v GeoGebri s sledjo gibanja točke:

- Zunanjo krožnico narišemo z ukazom `Krožnica((0,0),4)`.
- Za kotaljenje manjše krožnice ustvarimo drsnik a z vrednostmi med 0 in 2π . Hitrost drsnika zmanjšamo na 0.5 in ponavljanje animacije nastavimo na naraščajoče. Začetno vrednost drsnika nastavimo na 0.
- Središče manjše krožnice se bo gibalo po krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 3. Za središče vnesemo ukaz `S=(3*cos(a), 3*sin(a))`.
- Manjšo krožnico narišemo z ukazom `Krožnica(S,1)` in jo preimenujemo v k .
- Na manjšo krožnico dodamo točko A z ukazom `Point(k)` in jo po krožnici premaknemo v točko $(4,0)$.



SLIKA 1.

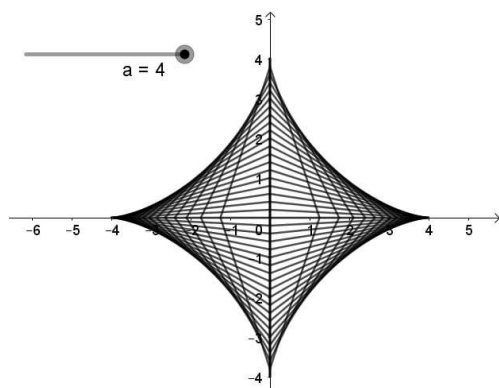
Točka A' na manjši krožnici opiše astroido, medtem ko se kotali po notranji strani večje krožnice. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/znfgyerr>.

- Točko A' , ki bo opisovala astroido, vstavimo z ukazom `Zasuk(A,-3*a,S)`.
- Skrijemo točko A in narišemo daljico z ukazom `Daljica(S,A')`.
- Vklompimo sled točke A' in z vklopom animacije drsnika izrišemo astroido.

Zgornjo astroido lahko dobimo tudi kot ogrinjačo družine daljic. Eno krajišče teh daljic naj leži na y -osi, drugo na x -osi in dolžina daljic naj bo enaka 4. Ogrinjača je nato krivulja, ki je tangentna na vsako izmed narisanih daljic.

Konstrukcija astroide v GeoGebri kot ogrinjače množice daljic:

- Ustvarimo drsnik a z vrednostmi med -4 in 4 . Pri-rastek drsnika nastavimo na 0.2. Drsnik naj vrednosti ponovi le enkrat, torej nastavimo enkratno naraščajoče ponovitve.
- Točko A , ki se bo z vrednostjo drsnika premikala po y -osi, ustvarimo z ukazom `(0,a)`.
- Narišemo krožnico z ukazom `Krožnica(A,4)`, da bo dolžina daljic ves čas ustrezna.


SLIKA 2.

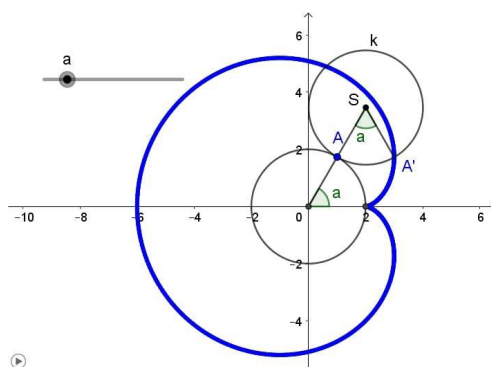
Astroida nastane tudi kot ogrinjača družine daljic. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/qw9v7ymh>.

- Z orodjem Presečišče določimo točki B in C , kjer krožnica seka x -os.
- Narišemo daljici AB in AC .
- Vklompimo sledi daljic, skrijemo odvečne objekte in vklompimo animacijo drsnika.

Najlažje sicer astroido narišemo s pomočjo njenih parametričnih enačb. Uporabimo ukaz Krivulja($4*\cos(t)^3, 4*\sin(t)^3, t, 0, 2*\pi$). Omenili smo, da astroido uvrščamo med hipocikloide. Bralca in bralka vabimo, da raziščeta tudi druge krivulje, ki jih dobimo, če spremenimo razmerje med polmeroma obeh krožnic.

Kardioda je poseben primer epicikloide. Za razliko od hipercikloid so to krivulje, ki jih opiše točka na krožnici, ki se kotali po zunanji strani druge krožnice. Oblika krivulje je znova odvisna od razmerja polmerov obeh krožnic. Kardioda nastane, če imata obe krožnici enak polmer. Bralec in bralka naj poskusita konstrukcijo astroida s sledjo gibanja točke prilagoditi tako, da bo točka A' opisala kardiodo. V pomoč naj jima bo slika 3, kjer imata krožnici polmer 2.

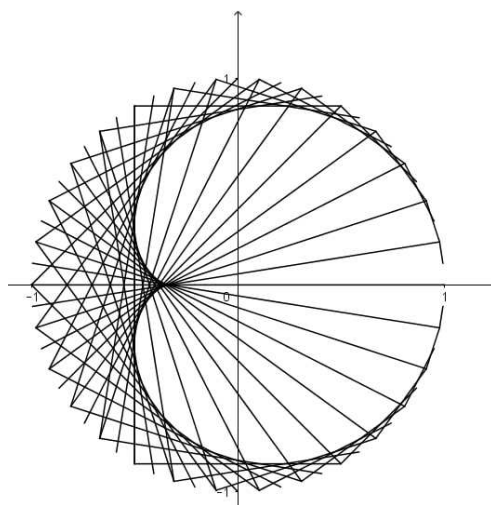
Kardiodo lahko dobimo tudi kot ogrinjačo daljic. Namesto konstrukcije z drsnikom kot pri astroidi bomo tokrat daljice konstruirali s pomočjo ukaza Zaporedje. Ogledali si bomo primer, ko krožnico s točkami razdelimo na 60 skladnih lokov. Točke oštevilčimo. Izbrano n -to točko povežemo s točko, ki ji pripada številka $2n$ po mod 60. Dobljene daljice predstavljajo tangente na kardiodo. V GeoGebri


SLIKA 3.

Točka A' opiše kardiodo, medtem ko se krožnica k kotali po zunanji strani enako velike krožnice. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/swafjau7>.

daljice izrišemo z ukazom: Zaporedje(Daljica($\cos(2*\pi*n/60), \sin(2*\pi*n/60)$), ($\cos(4*\pi*n/60), \sin(4*\pi*n/60)$)), $n, 0, 60$). Bralec in bralka lahko poskusita daljice po zgornjem postopku tudi sešiti na debelejšo lepenco. Kardiodo hitreje narišemo s pomočjo njenih parametričnih enačb. Uporabimo ukaz Krivulja($4*\cos(t)-2*\cos(2t), 4*\sin(t)-2*\sin(2t), t, 0, 2*\pi$).

Epicikloide in hipocikloide imajo številne zanimive lastnosti. Več o njih pa ob kaki drugi priložnosti.


SLIKA 4.

Kardioda nastane tudi kot ogrinjača družine daljic.



Nekaj iz naše ponudbe

V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature. Predstavljamo vam dve ponudbi:

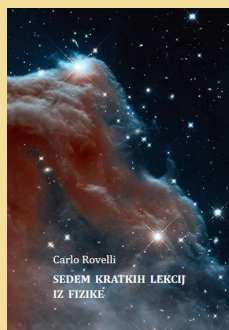


Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA DOPPLERJEVEGA POJAVA

120 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

15,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ
IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



**REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE**
PRESEK 49/6

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz šeste
številke Preseka letnika
49 je **Razdalja ureja-
nja**. Med pravilnimi reši-
tvami smo izžrebali na-
slednje reševalce: And-
rej Uranjek iz Velenja,
Matija Likar iz Maribora
in Manja Ferme iz Celja,
ki bodo nagrade prejeli
po pošti.

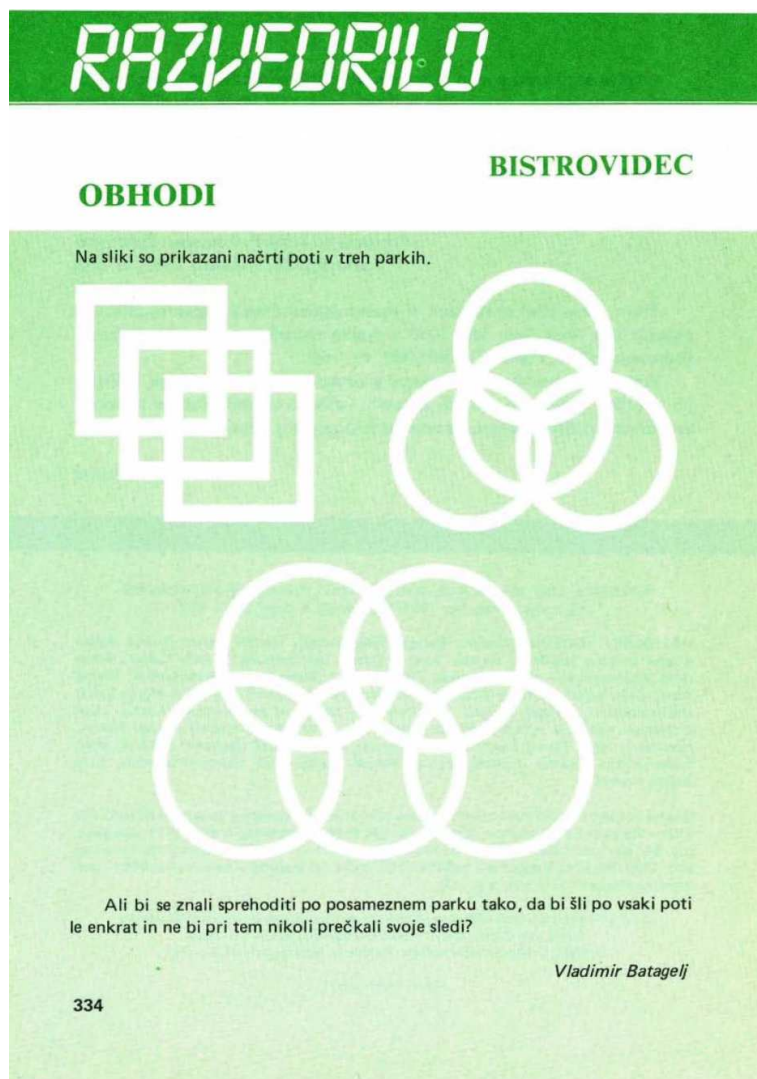
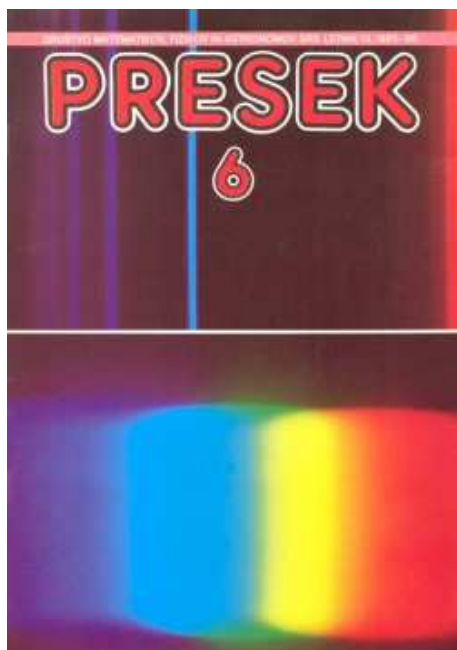
× × ×

Bistrovidec: Obhodi

ŠTEVILKA 6, LETNIK 13, 1985/86



→ Že v poskusni številki naše revije daljnega leta 1972 je bila uvedena rubrika Bistroidec, v kateri je bila vsakič objavljena s sliko podana matematična uganka. Rubrika je precej redno izhajala vse do 6. številke letnika 1986/87, nekajkrat pa je pod tem naslovom izšel posamezni prispevek tudi pozneje. Uganke so prispevali različni sodelavci revije, eden najpogostejših je bil Vladimir Batagelj. Ali jih še znamo rešiti stari bralci? Kaj pa mladi, jih že poznajo?



Preluknjana dlan?

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Slika 1 kaže dlan, v kateri je velika zbiralna leča. Za hrbtom opazovalca je drobna svetilka, ki sveti proti steni za dlanjo. Dlan meče na steno senco, kot pričakovano. Nepričakovana je svetla pega v sredini te sence. Kot da bi bila v dlani luknja in bi skozi svetilka sijala neposredno na steno. Kako pojasnimo to navidezno luknjo v dlani?

Zbiralna leča lomi svetlobo tudi v območje sence za dlanjo. Preslikavo leče običajno ponazorimo s tremi karakterističnimi žarki. Pa se kdaj

vprašamo, kaj če kateri od karakterističnih žarkov ne more skozi lečo, ker je leča delno zastrta ali premajhna? Ali v takem primeru slika lahko nastane? Seveda, enako kot sicer, le nekoliko temnejša bo. Na sliki 1 torej ne opazimo nič presenetljivega; roka ni prozorna, svetilka pa sveti na steno tja, kamor njeno svetlobo preslika leča v dlani. Prostora med prsti je čisto dovolj, da leča opravi svojo nalogo in na steni pravzaprav vidimo sliko svetilke.



SLIKA 1.

× × ×

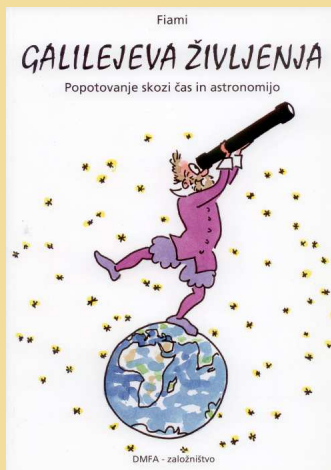
Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbe ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodba o Mendeljevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.