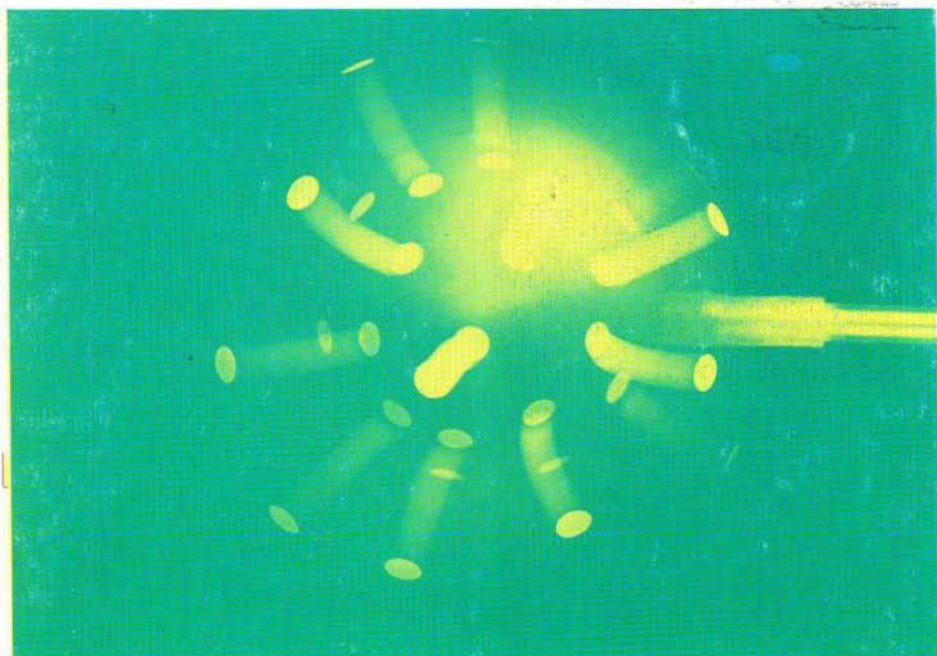


p r e 4
s e k v
1977-78



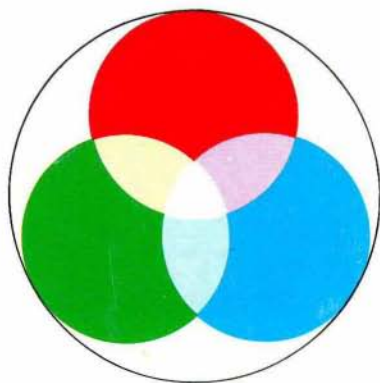
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS



41



43

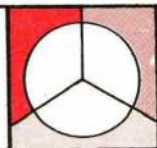


40



42





Uredniški odbor je sklenil, da vsaj delno uresničimo želje bralcev in razširimo obseg Preseka. Za zdaj smo to storili s knjižicami, ki dopolnjujejo Presek in sestavljajo zbirko Presekova knjižnica. Lani je bila to zbirka rešenih nalog *Tekmujmo za Vegova priznanja*, ki jo je napisal Pavle Zajc. Letos je izšla knjižica Marjana Proséna *Astronomska opazovanja*, ki ste jo prejeli hkrati s 4. številko Preseka. Žal je zaradi omejenih finančnih možnosti morala iziti 4. številka Preseka le na 32 straneh. Potrudili se bomo, da v prihodnje ne bo več takih polovičnih rešitev.

Na eni od zadnjih sej uredniškega odbora smo se zelo razveselili pisma in priložene 1. številke lista *Mala znanost*, ki so ga izdali člani matematično-fizikalno-astronomskega krožka kočevske gimnazije. Pravijo, da bo vsebina tega glasila taka, da bo pomagala dijakom pri učenju in jim natrosila še marsikaj zanimivega, kar se pri pouku ne sliši, pa še kakšno zabavno zgodbo o ljudeh, ki so pristavili tako velike kamne k zgradbi matematike, fizike in astronomije, da jih vsaj po imenih vsi poznamo. Prva številka kaže, da so držali obljubo. Iskreno jim želimo, da s svojim listom čimbolj uspejo. Veseli bomo naslednjih števil; gotovo bo v njih kak sestavek, ki bo zanimiv tudi za bralce Preseka in bi ga bilo dobro ponatisniti v Preseku.

Ko s pričujočo številko končujemo V. letnik Preseka, bi se radi najtopleje zahvalili in dali priznanje vsem tistim profesorjem, članom matematično-fizikalnih aktivov, ki s svojo prizadevnostjo in z delom, ki ostane skrito mnogim očem, tako uspešno pomagajo, da pride Presek do res velikega števila mladih bralcev.

Zvonko Trontelj

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME 5 (1977/78) ŠT. 4, STR. 193 - 224

V S E B I N A

UVODNIK	193 (Zvonko Trontelj)
MATEMATIKA	195 Pravokotni trikotnik (Ivan Pucelj)
TEKMOVANJA - NALOGE	198 Devetnajsta matematična olimpijada (Gorazd Cvetič)
BISTROVIDEC	200 Rešitve iz: P V/2 (Marjan Hribar) 201 Ali je mogoče ... (Tomaž Pisanski)
PISMA BRALCEV	202 (Matilda Lenarčič)
NALOGE	206 Naloge iz arhiva (Tomaž Pisanski)
PREMISLI IN REŠI	209 (Jože Dover), Naredimo iz muhe slona (Dušan Repovš)
REŠITVE NALOG	211 Križanka "Geometrijski liki" iz P V/3 (Pavel Gregorc) 212 Tri naloge bralcev (Tomaž Pisanski) 214 Enica zmaguje (Tomaž Pisanski)
ASTRONOMIJA	215 Vesolje, 2. del (Janez Strnad)
FIZIKA	220 Enajsta šola iz fizike, 4. del, Svetloba in barve na nebu (Ivan Kuščer)
NA OVITKU	I Prispodoba za razširjajoče se vesolje: balonček napihujemo, na njem nalepljene etike- te, ki ustrezajo jatam galaksij, se raz- mikajo (glej članek Vesolje). II, III Enajsta šola iz fizike. Sl. 40, 41, 42, 43, 44, 45a, 45b in 46.
NOVE KNJIGE	IV (Andrej Čadež)



PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

Saj poznaš Pitagorov izrek:

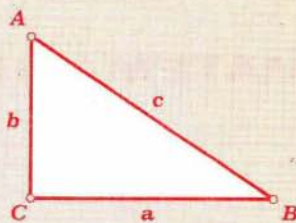
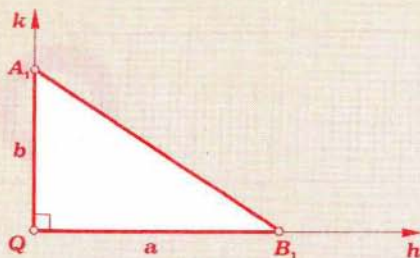
Če je trikotnik pravokotni, je vsota kvadratov krajših dveh stranic enaka kvadratu najdaljše stranice.

1 *Obrat Pitagorovega izreka.* Poglejmo trikotnik s stranicami $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$. Zlahka preverimo, da velja $a^2 + b^2 = c^2$, saj je $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Nastane pa vprašanje, ali je ta trikotnik tudi pravokotni? Seveda, rečete, preskusimo to z risanjem in z merjenjem. Nerodno pri tem pa je, da izmeriti s kotomerom poljubnega kota pravzaprav natančno ne moremo. S tem vprašanjem pridemo v zadrego še bolj v primeru $a = 6887$, $b = 2184$, $c = 7225$; tudi zdaj lahko preveriš, da velja $6887^2 + 2184^2 = 7225^2$; načrtovanje tega trikotnika pa povzroča težave že zaradi velikosti stranic. No, obe zadnji nalogi sta le posebna primera tele: Ali je pravilen izrek:

(1) Če je vsota kvadratov krajših dveh stranic trikotnika enaka kvadratu največje stranice, je trikotnik pravokotni.

Ta izrek drži! Poglejmo namreč premislek, ki ga potrjuje!

Recimo, da ima naš trikotnik ABC stranice a , b in c in da velja $a^2 + b^2 = c^2$. Načrtajmo poleg njega pravi kot $\angle hok$. Prenesimo na krak h stranico $a = \overline{BC}$ in na krak k stranico $b = \overline{AC}$, začetna točka pa naj bo vedno izhodišče O , končni točki označimo A_1 , B_1 , torej imamo $a = \overline{OA_1}$, $b = \overline{OB_1}$. Tako smo dobili poleg trikotnika ABC še pravokotni trikotnik A_1B_1O , ki ima najdaljšo stranico A_1B_1 . Zanj seveda velja Pitagorov izrek in



zato je pravilna enakost $\overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 = \overline{A_1B_1}^2$, torej $a^2 + b^2 = \overline{A_1B_1}^2$. Toda vemo, da je $a^2 + b^2 = c^2$ in tako sklepamo, da mora veljati $\overline{A_1B_1} = c$. Vidimo, da so stranice trikotnikov ABC in OA_1B_1 paroma enake. Zdaj se še spomnimo: če se dva trikotnika ujema-ta v stranicah, sta si skladna. Torej sta si tudi naša dva trikotnika skladna, kar pomeni, da je potemtakem tudi ABC pra-vokotni trikotnik.

Izrek (1) imenujemo obratni izrek k Pitagorovemu.

V primeru A sta tedaj oba trikotnika pravokotna; zanimivi so tudi drugi trikotniki s celoštevilčnimi stranicami a, b, c , ki ustrezajo pogoju $a^2 + b^2 = c^2$. Take trojice (a, b, c) imenujemo *pitagorske trojice*.

2

Pitagorske trojice. Naj sta m, n celi števili, $m > n$. Naredimo trojico

$$(2) \quad a = m^2 - n^2 \quad b = 2mn \quad c = m^2 + n^2$$

Vidno je, da velja: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$, kar po-meni, da je (2) pitagorska trojica. Števili m in n se imenuje-ta generatorja pitagorske trojice. Če števila a, b, c v (2) nimajo skupnega faktorja, imenujemo (a, b, c) primitivna pita-gorska trojica. Na podlagi (2) lahko oblikujemo poljubno mnogo takih trojic; nekaj jih kaže tabela

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
7	6	13	84	85
11	6	85	132	157

Pitagorske trojice imajo premnoge zanimive lastnosti; pogledjmo nekatere:

V primitivni pitagorski trojici je eno izmed števil deljivo s 3.

To vidimo tako: Pri deljenju celega števila s 3 so mogoči ostanke 0, 1, 2. Nadalje velja, če ima pri deljenju s 3 število ostanke 0, 1, 2, ima kvadrat tega števila ostanke 0, 1, 1.

Zdaj pa opazujemo tabelo za pitagorske trojice glede na ostanke pri deljenju s številom tri.

Če je m deljiv s 3 ali pa če je n deljiv s 3, je b deljiv s 3. Če pa m in n nista deljiva s 3, je $m^2 - n^2 = a$ deljiv s 3. V primitivnih trojicah (a, b, c) c nikoli ni deljiv s 3.

Poskusi dokazati, da je trojica (a, b, c) primitivna natanko tedaj, ko je m tuj proti n in nista oba liha.

Ivan Pucelj

ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE, 4. del (Ivan Kuščer) - napisi pod slikami. Tekst je na strani 220-224, slike pa ne 2. in 3. strani ovitka

Sl. 40. Odsev Sonca na cirrusih.

Sl. 41. Na mokrih vejah drevesa se vidijo kolobarji okrog luči, ki stoji za drevesom.

Sl. 42. Ta hrošč je zelen zaradi interference svetlobe.

Sl. 43. Svetloba Sonca, ki je še za hribom, se uklanja na vejicah dreves.

Sl. 44. Zadihljena spodnja plast zraka je modrikasta. (Na meji obeh plasti se pojavi megla.)

Sl. 45a. Zaradi sipanja svetlobe je zvečer nebo modro, zarja pa lepo rdeča. (Foto C. Velkovrh)

Sl. 45b. Medtem ko za hrbtom fotografa še sije zahajajoče Sonce, se na vzhodu že vzdiguje Zemljina senca, ki jo sončni žarki projicirajo v zrak. Posnetek je bil narejen z višine 3000 m ob izredno jasnem zimskem večeru. Zobček na senci je naredil hrib, na katerem stoji fotograf.

Sl. 46. Skozi rosno šipo se okrog luči vidijo kolobarji.



TEKMOVANJA - NALOGE

DEVETNAJSTA MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Od 3. do 13. julija 1977 je bila v Beogradu 19. mednarodna matematična olimpiada. Na njej je sodelovalo 155 tekmovalcev iz 21 dežel Evrope, Azije in Afrike. Povprečna starost tekmovalcev je bila od 18 do 19 let. Večina ekip posameznih držav je bila osemčlanska, njihovi člani pa izbrani med nagrajenci državnih prvenstev. V jugoslovanski ekipi sva bila tudi dva Slovence - Matjaž Vidmar iz Nove Gorice in Gorazd Cvetič iz Maribora.

Tekmovalci smo 6. in 7. julija reševali po tri težje matematične probleme (vsak dan smo imeli na razpolago štiri ure za tri naloge). Boljši tekmovalci so dosegli prvo, drugo ali tretjo nagrado. Matjaž Vidmar je dobil tretjo nagrado, Gorazd Cvetič pa drugo nagrado. Upam si trditi, da je bil najin uspeh zelo dober, saj sva prvič v zgodovini matematičnih olimpiad slovenska predstavnika dosegla po eno od nagrad. Med prvonagrajenci je treba še posebej omeniti angleškega matematika Ricarda, ki je izdelal za 2. in 3. nalogo tudi posplošitvi. Najboljše ekipno povprečje je imela ekipa iz ZDA. Tudi Jugoslovani smo bili ena boljših ekip. Seveda pa so razvrstitve po državah na tem tekmovanju neuradne, kajti tekmovanje je individualnega značaja.

Po 7. juliju je sledil za vse člane ekip teden razvedrilnih programov, medtem ko je mednarodna komisija pregledala naše izdelke. Vrstili so se izleti na Djerdap, Resavsko pečino, Šumadijo, ogledi Beograda ipd. Člani jugoslovanske ekipe smo se tudi pomerili z Romuni v nogometu, a žal izgubili. Med se-

boj smo se spoznali mladi vseh mogočih narodnosti. Slabo znanje jezikov je ponavadi odtehtala pristrčnost medsebojnih stikov. Še posebej dobro smo se Jugoslovani spoprijateljili s Kubanci, Alžirci, Mongoli in Francozi. Olimpiada je bila slovesno zaključena s podelitvijo nagrad vsem najboljšim. Vsem udeležencem pa bo ostala v lepem spominu.

Naloge:

1. Znotraj danega kvadrata $ABCD$ so konstruirani enakostranični trikotniki ABK , BCL , CDM , DAN . Dokaži, da tvorijo središča daljic KL , LM , MN , NK in središča daljic AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN , AN oglišča pravilnega 12-kotnika. (Nizozemska)
2. V končnem zaporedju realnih števil je vsota poljubnih sedem zaporednih členov negativna, vsota poljubnih enajst zaporednih členov pa pozitivna. Določi največje možno število členov takega zaporedja. (SR Vietnam)
3. Dano je naravno število $n > 2$. Naj bo V_n množica števil oblike $1+k.n$, kjer je $k=1,2,3,\dots$. Za število $m \in V_n$ rečemo, da je nerazcepno v V_n , če ne obstajata števili $p, q \in V_n$, da bi veljalo: $m=p.q$. Dokaži, da obstaja število $r \in V_n$, ki se na več kakor en način lahko predstavi kot produkt, katerega faktorji so nerazcepni v V_n . (Nizozemska)
4. Naj bo a, b, A, B dana četvorka realnih števil. Oglejmo si funkcijo: $f(x) = 1-a.\cos x - b.\sin x - A.\cos 2x - B.\sin 2x$. Če je $f(x) \geq 0$ za vsak realen x , dokaži, da je $a^2+b^2 \leq 2$ in $A^2+B^2 \leq 1$. (Vel. Britanija)
5. Naj bosta a in b pozitivni celi števili. Pri deljenju števila a^2+b^2 z $a+b$ dobimo kvocient q in ostanek r . Poišči vse pare (a, b) , za katere velja: $q^2+r = 1977$. (ZR Nemčija)
6. Naj bo f funkcija, definirana za vsako pozitivno celo število, ki ima tudi za vrednosti pozitivna cela števila. Če za vsak n velja neenakost: $f(n+1) > f(f(n))$, dokaži, da je za vsak n : $f(n) = n$! (Bolgarija)

Gorazd Cvetič



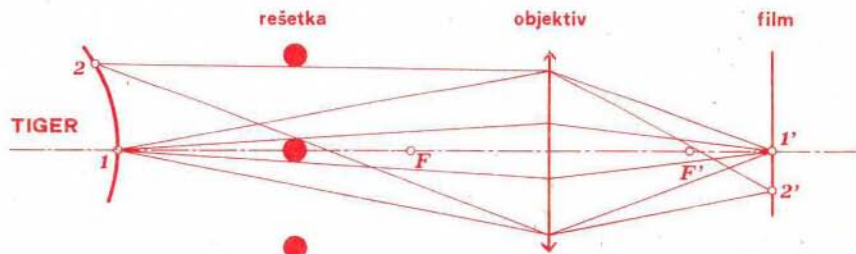
BISTROVIDEOC

TIGER V KLETKI - odgovor iz P V/3

Na vprašanje smo dobili štiri odgovore. Noben ne pojasnjuje fotografije v celoti, zato vsem tale razlaga.

Objektiv fotografskega aparata je bil naravnán tako, da je na filmu nastala ostra slika tigra. Tega je delno zaslanjala rešetka, ki je bila veliko temnejša in lahko vzamemo, da ni oddajala svetlobe. Ker je z delov tigra za palicami vpadlo v objektiv manj svetlobe kot z delov med palicami, so ustrezni deli slike temnejši. S slike npr. razberemo, da bo slika v okolici točke 1', ki pripada delu tigra v okolici točke 1, manj svetla kot slika v okolici točke 2', ki pripada delu tigra v okolici točke 2. Spomnimo se še, da je za nastanek slike dovolj, da vpada svetloba na del leče.

Marjan Hribar





Naslednja naloga je namenjena šahistom.

Ali je mogoče na šahovnici nastaviti pozicijo, v kateri je črni brez poteze - v patu - samo s črnimi figurami?

Tomaž Pisanski

(Ilustr. Alenka Potnik)

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
5. letnik, šolsko leto 1977/78, 4. številka, str. 192 - 224.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov, SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (Bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover (Premisli in reši), Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Andrej Kmet (Presekova knjižnica - matematika), Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Edvard Kramar (Tekmovanja - naloge), Matilda Lenarčič (pisma bralcev), Norma Mankoč-Borštnik (Presekova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (Naloge bralcev), Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Skulj, Janez Strnad (glavni urednik), Zvonko Trontelj (odgovorni urednik), Marijan Vagaja, Ciril Velkovich (urednik, Nove knjige, Novice, zanimivosti).

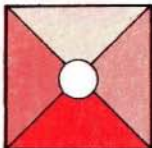
Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227. tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 30.-din, za skupinska pa 25.-din; za inozemstvo 2 \$ = 36.-din, 1300Lit, 36.-Asch. Posamezna številka stane 8.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja štirikrat letno v nakladi 23.000 izvodov.

©1978 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.



PISMA BRALCEV

Prejeli smo tole zanimivo pismo:

Pozdravljeni! Ker se vam oglašamo prvič, bo najbolje, da se najprej predstavimo. Smo učenci, ki zvesto obiskujemo matematični krožek na OŠ narodnega heroja Vinka Megla, Tomaž pri Ormožu. Naša mentorica je tov. Anica Rajh.

Delo v krožku je zelo zanimivo. Rešujemo tudi naloge iz Preseka. Imamo svoj stenčas, na katerem prikazujemo naše delo, saj rišemo razne konstrukcije, kar pa je zelo zanimivo še posebej v moderni matematiki. Pripravili smo tudi razstavo naših del in prizadevamo si v tekmovanju za Presekovo značko. To značko si je prislužilo že nekaj krožkarjev. Zanimivo nalogo v zadnjem Preseku smo reševali vsi krožkarji. Hribar Alojz je našel kar 31 rešitev. Helena P. 15 rešitev, Nataša K. 6 rešitev, Marta M. 4 rešitve, Milena R. 4 rešitve, Lizika K. 3 rešitve, Ivan L. eno rešitev in Olga K. eno rešitev. Zabavno je bilo, ko smo ugotovili, da ni nihče imel drugačnih rešitev kot Hribar. Zato smo sklepali, da ima naloga 31 rešitev in vam jih pošiljamo.

Sprejmite mnogo pozdravov ter ponovne energije za sestavljanje tako prijetnih nalog, ki nas pošteno prepotijo.

Veseli smo tako bogatega dela v vašem krožku. Lepo ste ovrednotili Presekovo značko! Vsakemu posebej in vsem želimo še dosti uspehov. Tudi vi poskušajte sestaviti kako zanimivo nalogo za Presek. Srečno!

- - -

BARBARA KRPAČ iz Šmartnega pri Slovenj Gradcu se je oglasila z naslednjim pismom:

Pozdravljeni! Sem učenka 6. razreda in sem naročena na Presek. Čeravno nekaterih nalog ne znam rešiti, mi ta revija zelo uga-ja. Želim si, da bi Presek izhajal pogostejše in mislim, da je to želja mnogih. Sestavila sem dve nalogi in sklenila, da vam jih pošljem. In še veliko uspehov vam želim pri urejanju revije.

Barbara, hvala ti za lepe želje in zlasti za pomoč. Res bomo samo s skupnim prizadevanjem nabrali toliko prispevkov, da bomo mogli ustreči mnogim bralcem s pogostejšimi številkami Preseka.

- - -

JOŽE KAKER iz Črne na Koroškem nam je poleg rešitev poslal še podobni nalogi in je zraven napisal:

Presek je dobra revija, vendar je vse premalo nalog, ki jih pošiljajo bralci. Želim vam veliko uspeha pri sestavljanju tako zanimive revije, kot je Presek!

Hvala, Jože, za vzpodbudo bralcem! V želji, da ji bodo prisluhnili, te lepo pozdravljamo. Piši nam še kdaj!

- - -

BOJAN LESKOVŠEK iz Celja piše tako:

Lep pozdrav! Na Presek sem naročen že tretje leto in mi je zelo všeč. Pridružujem se tistim, ki si želijo, da bi Presek izhajal večkrat na leto. Mislim tudi, da je premalo prostora namenjenega za astronomijo, za katero se zelo zanimam. Prilagam tudi rešitve nekaterih nalog.

Zelo smo veseli tvojega večletnega sodelovanja in ti želimo še nadaljnjega poglobljanja v astronomiji. Bojan, oglasi se še!

VANJA MARZIDOVŠEK iz Polja nam je poslala vsebinsko in oblikovno lepo pismo. Uporabila je namreč papir običajnega formata (A-4) za take namene, kar bi priporočili vsem našim dopisnikom. Vanja med drugim pravi:

Imam tudi neko željo, pa ne glede Preseka, pač pa bi se rada zahvalila tov. Levičarjevi iz OŠ Polje, ki me je navdušila za matematiko

in pismo zaključuje z željami po uspehu pri nadaljnjem delu.

Vanja, lepo je, da čutiš hvaležnost. Tudi mi se ti pridružujemo in obenem se zahvaljujemo vsem učiteljem, ki nudijo mladim veselje ob matematiki, fiziki in astronomiji.

- - -

BOJANA PLAKOLM, Pekre pri Mariboru, nam je zapisala ob nalogi "Premisli in reši", za katero pravi, kot vsi bralci, da jo vedno najraje rešuje, še naslednje:

Na revijo sem naročena že od 6. razreda OŠ. Takrat so se mi zdele naloge precej težke, zato pa zdaj, ko obiskujem 1. razred gimnazije, rada listam tudi po starih številkah. Mnoge naloge rešim.

Bojana, našla si zaklad, ki se skriva v Preseku. Zbirka Presekov iz vseh letnikov lahko nudi tudi bodočim generacijam vedno zanimive in za njih vedno nove naloge. Zato je tudi za tebe vsaka naloga iz starih številk lahko nova in za večino od teh boš našla tudi rezultate. Sicer nam jo pošlji in ti bomo z veseljem posredovali odgovor pa čeprav ni naloga iz zadnje številke ali zadnjega letnika.

- - -

TANJA KOŠIR iz Škofje Loke in MARKO KOLBEZN iz Ljubljane v svojih pismih omenjata isto željo. Želita, da bi tudi letos izšla 5. številka, v kateri bi bile naloge za tekmovanja.

Veseli nas, da sta s takim veseljem reševala naloge iz omenjene številke. Peto številko bomo še kdaj izdali in bomo zanjo skušali najti zanimivo vsebino.

MAJDA HOMOVEC iz črnega vrha nad Idrijo nam je napisala ob poslani rešitvi:

Ne vem, če je pravilna, vendar enkrat lahko poskusim. Presek preberem vsakokrat in tudi rešujem naloge. Sem učenka 8. razreda OŠ. Za matematiko sem se začela zanimati v 7. razredu. Preje se nisem zanimala zanjo. Sedaj pa vidim, koliko skritega ima v sebi matematika in morda prav tako fizika. Mislím, da si bom tudi poklic izbrala tam, kjer je več matematike. Lepo vas pozdravljam in vam želim veliko uspeha in vse najboljše v letu 1978.

Draga Majda, v kolikor ti je pripomogel tudi Presek, da si vzljubila matematiko, smo zelo veseli in ti želimo pri izbiri poklica srečo. Ali se nam boš oglasila tudi kot srednješolka? Hvala za pismo in lepo pozdravljena.

GORAZD ŠVALJEK iz Maribora piše takole:

Dragi Presek! Hodim v tretji letnik gimnazije in revija mi je všeč. Veselilo pa bi me, če bi večkrat objavili kaj v zvezi s fotografijo (zanimivosti fotografiranja). V prostem času se ukvarjam s fotografijo in vprašanje o tigru mi ni delalo težav.

Gorazd, kot navdušen fotograf gotovo že imaš kakšne izkušnje na tem področju, mogoče tudi kakšne zanimive slike, da bi jih lahko objavili v Preseku. Radi bi te razveselili in zato si bo mo prizadevali najti tudi kaj v zvezi s fotografijo. V upanju, da se boš kmalu oglasil, bodi lepo pozdravljen.

Matilda Lenarčič



NALOGE

NALOGE IZ ARHIVA

V uredništvu imamo skromen arhiv. V njem so prispevki, ki iz tega ali onega vzroka niso zagledali belega dne. Včasih zmanjka prostora, pa prispevek zastari, včasih pa je prispevek tako nedodelan, da ga ne moremo objaviti v celoti. Ko sem brskal po arhivu, sem našel tele naloge:

1. V naslednjo tabelo vpiši manjkajoče številke:

NARAVNO GIBANJE PREBIVALSTVA V SR SLOVENIJI
V LETIH 1969 - 1973 (v tisočih)

L e t o	Š t e v i l o		
	živorojeni	umrli	naravni prirast
Skupaj v petih letih	141	?	?
1969	28	19	9
1970	27	17	?
1971	?	17	?
1972	29	?	11
1973	?	18	11

2. Škatla z darilom meri 20cm krat 10cm krat 5cm in je prevezana s trakom tako, kot kaže slika 1. Kako dolg trak potrebujemo, če potrebujemo za pentljo 40cm ?



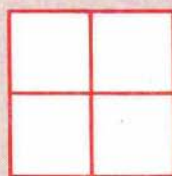
3. Eifflov stolp v Prizu je visok 300 m. Zgrajen je iz približno 8000 ton železa. Kako visok bi bil, če bi tehtal 1 kg?
4. Baje je najvišji človek na svetu meril 273 cm, najnižji pa 39 cm. Kolikokrat je bil velikan težji od pritlikavca?
5. Stenska ura bi je 6. Teh 6 udarcev je odbila v 5 sekundah. V koliko sekundah bo ura odbila opoldne 12 udarcev?
6. Zapiši število 1 z vsemi desetimi številkami!
7. Zapiši deset s petimi devetkami!
8. Zapiši sto s petimi enakimi številkami!
9. Po polju je šla ženica z racami. Sreča jo boter in reče: "Bog daj srečo botra, da bo kmalu sto rac!". Ženica pa mu odgovori: "Ko bom imela še enkrat toliko, pa še pol toliko, in še četrť toliko kot jih imam sedaj, pa še eno zraven, bo pa zares sto." Koliko rac je imela takrat?
10. Naslednje like nariši z eno potezo:



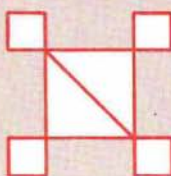
a



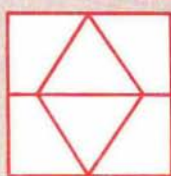
b



c



d



e

11. S kolikimi ničlami se končuje produkt števil od 1 do 100?
12. V enem zaboju je 100 črnih, v drugem pa 100 belih kroglic. Sežemo v zaboj s črnimi kroglicami, jih nekaj poberemo in damo v zaboj z belimi kroglicami. V drugem zaboju kroglice dobro premešamo in na slepo izberemo enako število kroglic, ki jih spet prenesemo v prvi zaboj. Ali je v prvem

zaboju več belih kroglic, kot je v drugem zaboju črnih?

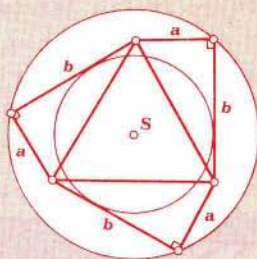
Za konec pa še dve nalogi, ki zahtevata več znanja in sta namenjeni predvsem srednješolcem.

13. V krožnico vpišemo pravilni n -kotnik z oglišči $P_1, P_2, \dots, P_n$. Naj bo P poljubna točka na krožnem loku P_1P_n . Dokaži, da je izraz:

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{PP_2} + \overline{P_2P} \cdot \overline{PP_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P} \cdot \overline{PP_n} = \overline{P_nP} \cdot \overline{PP_1}$$

neodvisen od položaja točke P .

14. Trije enaki pravokotni trikotniki se stikajo s hipotenuzami, tako kot kaže slika 3. Pri tem tvorijo šestkotnik. Izračunaj ploščino, obseg, polmer včrtanega in očrtanega kroga tega šestkotnika. Znani sta dolžini katet: $a = 5$ cm in $b = 12$ cm.



Prvo nalogo je predlagal Ciril Kavčič, drugo so sestavili nekateri člani uredniškega odbora. Naloge števil 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 10 so nam poslali dijaki koprskih gimnazij. Avtor 9. naloge je Damjan Kozole z osnovne šole "Milke Kerin", Leskovec. 11. in 12. nalogo so reševali krožkarji v Šentvidu. 13. nalogo je poslal Vladimir Kolar iz Maruševca pri Varaždinu. 14. nalogo je zastavil Branko Hrovat iz Domžal.

Tomaž Pisanski

OBVESTILO

AKTIVE MATEMATIKOV IN FIZIKOV NA ŠOLAH KAKOR TUDI POSAMEZNIKE, KI ŠE NISO PLAČALI NAROČNINE ZA LETOŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA, VLJUDNO PROSIMO, DA TO STORIJO ČIMPREJ. ZARADI PERSONALNIH TEŽAV VAM LETOS ŠE NISMO UTEGNILI POSLATI INDIVIDUALNIH OPOMINOV!

PREMISLI IN REŠI



Za nalogo iz PRESEKA V/2 smo prejeli 270 pravih rešitev; nekateri so poslali celo več rešitev. Gotovo se strinjate z nami, da bi zavzelo teh 270 imen preveč prostora v Preseku. Zato jih tokrat raje spustimo. Vse reševalce prosimo, da nam prihodnjič pripišejo naslov (Etbini iz Divače, neznana reševalca iz Ljubljane in Maribora).

Objavljamo splošno rešitev magičnega kvadrata, ki jo je napisal avtor naloge Tomaž Pisanski.

Magični kvadrat ima obliko

a	b	12
c	d	e
f	g	h

Števila a , b , c , d , e , f , g in h moramo določiti tako, da bo vsota po vseh vrsticah, stolpcih in diagonalah enaka 30. Zadoščeno mora biti naslednjim enačbam:

$$a + b + 12 = 30 \quad (1)$$

$$c + d + e = 30 \quad (2)$$

$$f + g + h = 30 \quad (3)$$

$$a + c + f = 30 \quad (4)$$

$$b + d + g = 30 \quad (5)$$

$$12 + e + h = 30 \quad (6)$$

$$a + d + h = 30 \quad (7)$$

$$f + d + 12 = 30 \quad (8)$$

Če seštejemo enačbe (2), (7) in (8) dobimo:

$$(a+c+f) + (d+d+d) + (12+e+h) = 90$$

Upoštevamo enačbi (4) in (6) in dobimo:

$$30 + 3d + 30 = 90$$

oziroma $d = 10$. V vseh magičnih kvadratih 3×3 je d tretjina vsote. Iz enačbe (8) izhaja $f = 8$. Zdaj pa si vrednost za a izberemo. Označimo jo z x . Iz enačb uvidimo, da ima magični kvadrat naslednjo obliko:

x	$18-x$	12
$22-x$	10	$x-2$
8	$x+2$	$20-x$

Vsaka vrednost za x daje rešitev naloge. Če se omejimo na ne-negativna cela števila, mora biti $x \geq 2$ in $x \leq 18$. Če pa zahtevamo, da so vsa števila v kvadratu pozitivna, lahko izbiramo x med 3 in 17. Dobimo torej 15 rešitev. Pri $x = 10$ dobimo rešitev

10	8	12
12	10	8
8	12	10

ki je edina "simetrična". Kakšna pa je simetrija, naj ugotovi bralec.

Izžrebani so bili: Andreja Ajster, o.š. Kostanjevica na Krki; Igor Likar, o.š. J. Mihevca, Idrija; Metka Palčič, o.š. A.T. Linhart, Radovljica.

Za nagrado prejmejo knjigo: Batagelj-Pisanski: REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ I., II.

Ljudje često pravijo: "Glej no, iz muhe dela slona!" kadar kdo pretirava. Ali je kdo med vami že kdaj pomislil, kako bi lahko "v resnici" naredili iz muhe slona? Kako? Tako MUHA kot SLON sta besedi s štirimi črkami. Domenimo se, da lahko naenkrat spremenimo *le eno črko v besedi* in poskusimo sestaviti zaporedje besed, ki nas pripelje od MUHA do SLON. Na primer takole: MUHA-MUKA-LUKA-LUKS-LAKS-LAOS-KAOS-KROS-TROS-TRON-BRON-BROD-PROD-PLOD-HLOD-HLAD-SLAD-SLAN-SLON

Tako, dragi mladi prijatelji, zdaj pa na delo! Poskusite najti *šim krajša* zaporedja besed in to ne samo za besedi MUHA in SLON, marveč si lahko izberete za začetek tudi kaj lažjega, npr. MIR-PEK (MIR-PIR-PIK-PEK), kasneje pa si zastavite težje probleme. Razmislite, kakšen postopek je najboljši za reševanje tovrstnih problemov in poskusite najti nek splošen "recept" za sestavljanje besednih zaporedij. Pišite nam o rezultatih vašega dela bodisi doma bodisi v skupini, v krožku.

Dušan Repovš

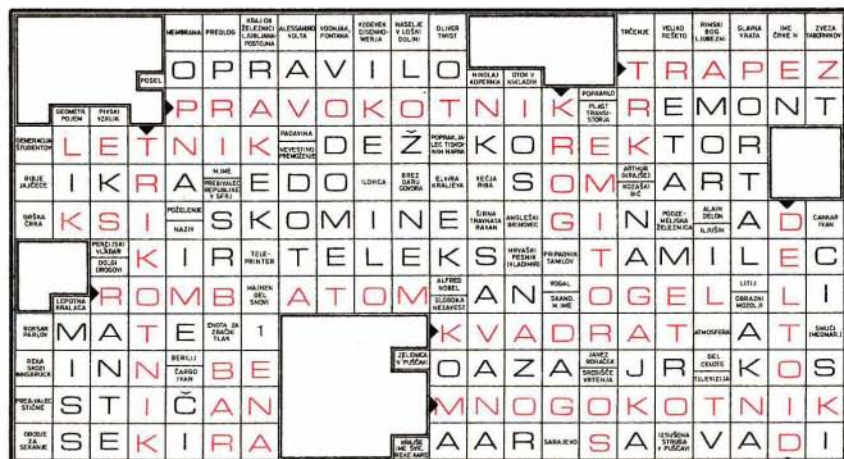
Dragi bralci, vabimo vas, da poskusite narediti iz muhe slona - to je nova naloga - in nam pošljete rešitev do 30.VI.1978.

Jože Dover



REŠITVE NALOG

Rešitev križanke "Geometrijski liki"
iz P V/3, str. 160



Sestavili Payle Greorge



REŠITVE NALOG

TRI NALOGE BRALCEV - Rešitve iz P V/2, str. 98

Rešitve so nam poslali: Simona Čufer, o.š. Radovljica; Marjan Majcen, Slovenj Gradec; Hinko Rosulnik, Vodice; Tatjana Kerec, Maribor; Miran Černe, o.š. Franceta Bevka, Ljubljana; Branko Simšič, gimnazija Postojna; Nikola Bursač, o.š. Franceta Bevka, Ljubljana; Dejan Simič, o.š. "Stevan Sindjelič", Veliki Popovič; Lojzka Levstek, Velike Lašče; Marija Zupan, o.š. Mokronog; Erika Kristan, o.š. Remšnik; Ludvik Huč, Šentrupert; Bojan Leskovšek, gimnazija Celje; Suzana Ujčič, o.š. "Dušan Bordon", Koper; Majda Skrinar, o.š. Pinko Tomažič, Koper; Marjan Šantl, Remšnik; Janko Vezonik, Radelca; Ciril Močnik, Cerklje; Mojca Šolar, o.š. Dr. Jože Potrč, Ljubljana; Simona Vidmar, Brezovica pri Ljubljani; Igor Žiberna, gimnazija Miloša Zidanskega, Maribor; Mirjam Brilej, gimnazija Celje; neznani bralec iz Maribora; Nataša Centa, o.š. Velike Lašče; Andreja Šalamon, o.š. Tržišče; Albina Hamer, p.š.c. Celje; Nada Lavrih, o.š. Ivan Skvarča, Zagorje ob Savi; Nataša Lorbar, o.š. Valentin Vodnik, Ljubljana; Simon Jug, Škofja Loka; Maruša Zorec, Ruše; Mirela Pahor, š.c. "Vojvodina", gimnazija Tolmin; Matjaž Straus, o.š. v Ljubljani; Romana Lazanski, Žalec; Neli Habjan, o.š. Žiri; Janko Božič, o.š. "Jurij Dalmatin", Krško; Danijela Fabjan, o.š. "Vojko Šmuc", Izola; Milan Žniderič, VII. gimnazija Ljubljana; Simona Kogovšek, o.š. Ivan Cankar, Vrhnika; Andreja Vesel, o.š. Bršljin, Novo mesto; Agata Trojar, o.š. "Peter Kavčič", Škofja Loka; Andreja Ajster, o.š. Kostanjevica na Krki; Damjan Lavrenčič, Vrhpolje; Marjana Šeško, p.š.c. Celje; Marija Buhvald, o.š. Franja Goloba, Prevalje; Milan Petrijan, o.š. Mačkovci; Maja Arh, Stara Fužina; Nadja Kapelj, Col;

Andreja Šinkovec, o.š. Spomenik NOB, Cerkno; Marija Haladin, o.š. Spomenik NOB, Cerkno; Bogdan Pučko, o.š. bratov Polančičev, Maribor; Janko Kogovšek, matematični krožek o.š. Dobrava pri Ljubljani; Jure Javornik, Ljubljana; Andrej Jakobčič, Novo mesto; Tilka Božič, Mežica; Stanko Rebernik, Maribor; Heda Kočevar, Ljubljana; Zdenka Peternej, o.š. Spomenik NOB, Cerkno; Edita Renko, Kranj; Robert Trampuš, o.š. Ivana Cankarja, Vrhnika; Rosana Hvala, o.š. Spomenik NOB, Cerkno; Kos Vlasta, o.š. Velike Lašče.

Starost očeta iz prve naloge je 48 let, prvi sin je star 16 let, drugi 18 let, prva hči ima 20 in druga 24 let.

Tudi magični kvadrat iz druge naloge ni bil pretežak. Mojca Šolar ga je izpolnila takole:

1	6	3
7	1	2
2	3	5

nekateri pa tudi drugače.

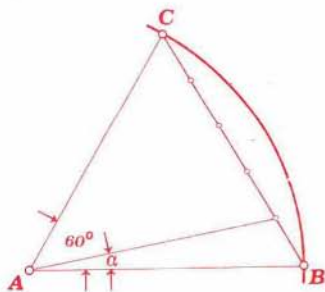
Za tretjo nalogo smo prejeli manj rešitev, nekaj jih je bilo celo napačnih. Med pravnimi pogledimo rešitev Dejana Simiča:

Stranici pravilnega petkotnika ustreza središčni kot $\alpha = 72^\circ$. Če od α odštejemo kot 60° , dobimo iskani kot 12° .

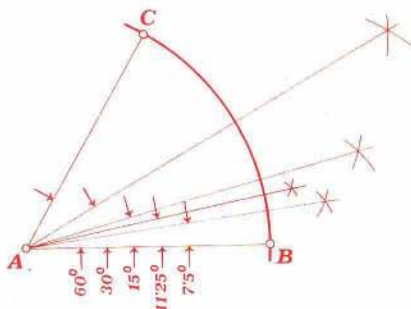
Kako se konstruira pravilni petkotnik, si lahko ogledate v P IV/4 str. 228, Rado Torkar: Konstrukcija pravilnega petkotnika. Najpogostejši napačni sklep pa je razviden iz slike:

Če tetivo BC razdelimo na pet enakih delov, se središčni kot 60° ne razdeli na pet enakih delov. Račun pokaže, da je $\alpha = 10^\circ 53' 36''$.

Ker je mogoče s šestilom in ravnilom vsak kot razpolovi-



ti, si je nekaj naših bralcev zamislilo, da bi z zaporednim razpolavljanjem prišli do kota 12° . Misel je dobra, vendar bi potrebovali neskončno mnogo korakov. Kotu 12° se lahko z razpolavljanji poljubno približamo. Najprej dvakrat razpolovimo kot 60° . Dobimo kot, ki meri 15° . Polovica tega je $7,5^{\circ}$. Kot 12° leži med $7,5^{\circ}$ in 15° , zato poiščemo sredino med njima, ki meri $11,25^{\circ}$. Zdaj poiščemo sredino med $11,25^{\circ}$ in 15° in tako naprej.



Tomaž Pisanski

ENICA ZMAGA - Rešitve iz P V/2, str. 99

Rešitve so poslali Mojca Šolar, o.š. Dr. Jože Potrč, Ljubljana; Janko Božič, o.š. "Jurij Dalmatin", Krško; Milan Žnidarič, VII. gimnazija Ljubljana; Andreja Habjan, Komenda; Andrej Jakobčič, Novo mesto; Tomaž Mencinger, Ljubljana; Mark Domijan, Ljubljana; Heda Kočever, Ljubljana;

Žnidarič Milan je nalogo rešil takole:

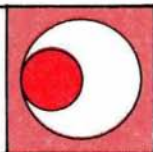
4-2-1, 6-5-4, 1-3-6, 10-6-3, 7-4-2, 13-9-6, 11-12-13, 14-13-12, 12-8-5, 3-6-10, 15-10-6, 6-5-4, 4-2-1.

Heda Kočever in Andrej Jakobčič pa sta poiskala položaj z osmi mi kamni, iz katerega ni mogoča nobena poteza več. Igrala sta takole:

6-3-1, 13-9-6, 7-8-9, 10-9-8, 4-8-13, 1-2-4.

Ostali so jima kamni na poljih 4, 5, 6 in 11, 12, 13, 14, 15.

Tomaž Pisanski



VESOLJE

2. DEL

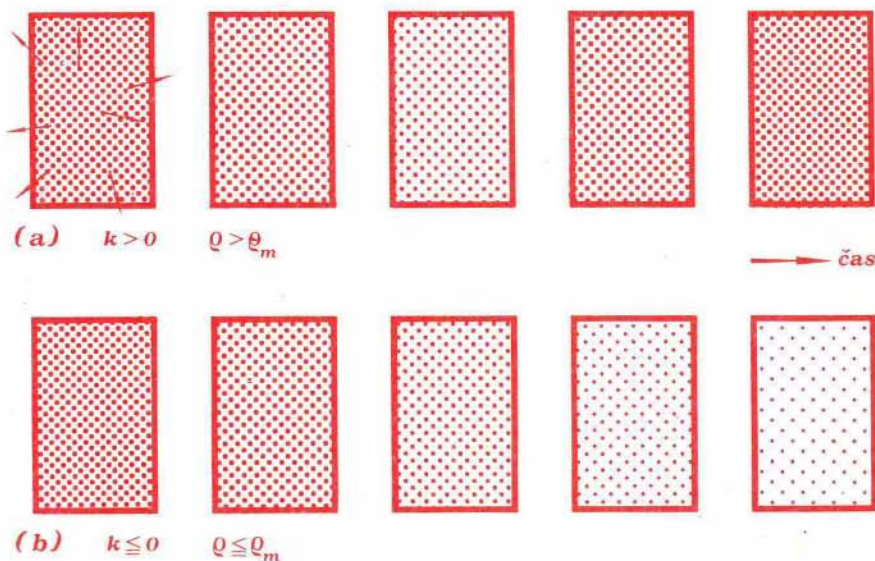
Na kozmološkem načelu gradimo *teoretične modele vesolja*, s katerimi poskušamo zajeti tudi razvoj vesolja v prihodnosti. (*Model* je v tem primeru poenostavljena slika, v kateri upoštevamo samo nekatere bistvene poteze, vse drugo pa odmislimo. Poenostavitve so tolikšne, da dopuščajo preproste račune. Njihovi rezultati so samo okvirni, a so uporabno vodilo za nadaljnja preučevanja.) Kot izhodišče je pripraven *model vesolja v Newtonovi mehaniki*. Težišča jat vzamemo za točkasta telesa, ki sestavljajo kroglast oblak. Za povprečno gostoto snovi, ki se sicer s časom spreminja, zahtevamo, da je v izbranem trenutku enaka po vsem oblaku. Hitrost teles je usmerjena od središča oblaka navzven (Sl. 6).

Tega modela ni težko zajeti z računom. Zaradi začetne hitrosti se telesa oddaljujejo drugo od drugega, a med njimi deluje privlačna gravitacijska sila. Po izreku o kinetični in potencialni energiji je polna energija vsakega telesa v oblaku konstantna. Polno energijo sestavljata pozitivna kinetična energija in negativna gravitacijska potencialna energija:

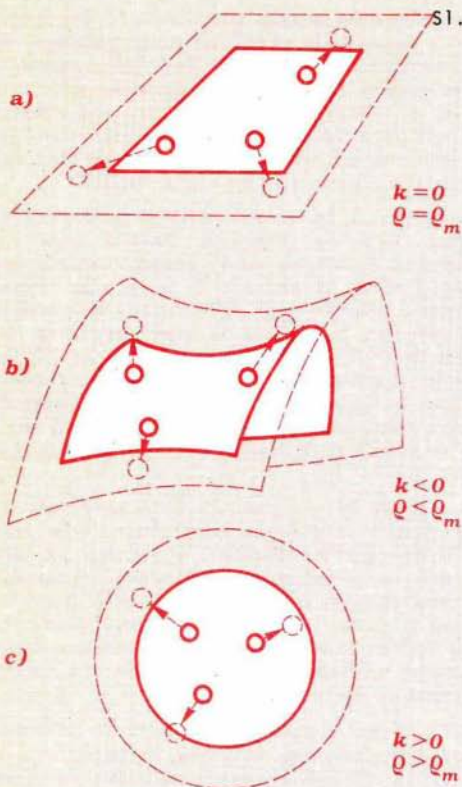
$$W = W_k + W_p = - \alpha k \quad (4)$$

Konstantno polno energijo W smo zapisali kot produkt dveh konstantnih koeficientov k in α z negativnim znakom. Razdaljo telesa od središča oblaka zapišemo kot $r(t) = R(t)r(t_1)$, tako da je *funkcija razširjanja* $R(t)$ brez enote in je v izbranem trenutku enaka ena: $R(t_1) = 1$.

Enačba (4) ima tri vrste rešitev $R(t)$. Pri prvi je koeficient k pozitiven in prevlada potencialna energija nad kinetično. V tem primeru se vesolje najprej razširja in nato krči, zopet razširja in tako dalje. Pri drugi je koeficient k negativen in prevlada kinetična energija nad potencialno, pri tretji pa je koeficient k enak nič in je kinetična energija enaka absolutni vrednosti potencialne. V obeh zadnjih primerih se vesolje razširja brez konca. V vseh treh pa hitrost razširjanja s časom pojema (pri drugi vrsti rešitev velja to seveda le, dokler traja razširjanje).



Sl. 6.: Razširjanje vesolja (osnova je model v Newtonovi mehaniki). Če je $k > 0$ in $\rho > \rho_m$, sledi razširjanju krčenje (a), če pa je $k \leq 0$ in $\rho \leq \rho_m$, se vesolje razširja neprestano (b). Velikost hitrosti je določena z zahtevo, da je od časa odvisna povprečna gostota snovi v danem trenutku po vsem oblaku enaka. Na splošno je hitrost tem manjša, čim bolj je telo oddaljeno od središča oblaka, odvisna pa je tudi od koeficienta k .



Sl. 7.: Prispodoba razširjajočega se vesolja, v kateri vzamemo število razsežnosti za eno manjše, kot je v resnici: $k > 0$ (a), $k = 0$ (b) in $k < 0$ (c). Fotografija razširjajočega se balončka, ki ustreza primeru (a), je na naslovni strani; za druga dva primera ni takega preprostega poskusa.

Predstavljam si moramo, da prebivalec dvorazsežnega sveta ne more iz narisane ploskve, kot mi ne moremo iz našega trirazsežnega prostora. Pomembno vlogo imajo krivulje, po katerih je razdalja med danima točkama najmanjša - geodetke. Za $k > 0$ (a) so to glavni krogelni krogi; skozi dano točko narisani glavni krogelni krog seka vse druge (ni vzporednic!). Za $k = 0$ (b) so to premice in je mogoče narisati k dani premici skozi dano točko natanko eno vzporednico. Za $k < 0$ (c) je mogoče k dani geodetki narisati neskončno geodetk, ki prve ne sekajo (neskončno "vzporednic").

Pomembna količina je mejna gostota snovi ρ_m . Tri vrste rešitev se ločijo po razmerju med povprečno gostoto snovi v vesolju in mejno gostoto: $k > 0$ ustreza $\rho > \rho_m$, $k < 0$ ustreza $\rho < \rho_m$ in $k = 0$ ustreza $\rho = \rho_m$. Mejno gostoto ocenimo z $\rho_m \approx 5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Povprečna gostota vidne, to je sevajoče snovi, v današnjem vesolju je znatno manjša od mejne gostote. Vendar kaže, da je v galaksijah in med njimi še snov, ki ne seva. Ali je te nevidne snovi dovolj, da bi povprečna gostota snovi presegla mejno gostoto, pa po sedanjih podatkih še ni mogoče zanesljivo ugotoviti. Na vprašanje, ali se bo vesolje v daljni prihodnosti začelo krčiti ali se bo razširjalo kar naprej, za zdaj torej ne moremo odgovoriti.

Z modelom vesolja v Newtonovi mehaniki se ne moremo zadovoljiti, ker gravitacije ne moremo popolnoma opisati z Newtonovim gravitacijskim zakonom. Uporabiti moramo *Einsteinovo splošno teorijo relativnosti*. Že v *Einsteinovi posebni teoriji relativnosti*, ki ne zajema gravitacije, obravnavamo čas na enaki osnovi kot koordinate. Čas in trirazsežni prostor, ki sta v Newtonovi mehaniki popolnoma ločena, se zlijata tu v *štirirazsežni prostor-čas*. V posebni teoriji relativnosti je prostor-čas raven, v splošni teoriji relativnosti pa opišemo gravitacijo z *ukrivljenostjo* prostora-časa.

Že ravnega štirirazsežnega prostora-časa si ne moremo nazorno predstavljati, še bolj velja to za ukrivljenega. Gre za teorijo, katere glavno orodje je dokaj zapletena matematika. Tvegajmo nekaj besed o *modelu vesolja v splošni teoriji relativnosti*, ne da bi se zatekli k računom. Presemetljivo je, da obveljajo v tem modelu rešitve $R(t)$ iz modela v Newtonovi mehaniki in da so tri vrste takih rešitev, pač glede na znak parametra k . Vendar je pomen funkcije $R(t)$ in parametra k zdaj drugačen kot v prejšnjem modelu. Omenimo samo, da je parameter k povezan z ukrivljenostjo trirazsežne ploskve, ki ustreza danemu času za opazovalce, gibajoče se skupaj s težišči jat galaksij. Ta ploskev ima *pozitivno* ukrivljenost, če je k večji kot nič, ima ukrivljenost nič (je ravna), če je k enak nič, in ima *negativno* ukrivljenost, če je k manjši kot nič.

To so samo besede, ki najdejo svoje opravičilo v računih in s katerimi si ne znamo dosti pomagati, saj si trirazsežnih ploskev in njihove ukrivljenosti nazorno ne predstavljamo. Ne da bi se spuščali v račune, pa lahko storimo korak dalje, če se zadovoljimo s pripodobno. Namesto trirazsežnih ploskev v štirirazsežnem prostoru vzamemo dvorazsežne ploskve v trirazsežnem prostoru. Te si brez težav predstavljamo. Zaradi kozmološkega načela mora biti ukrivljenost v vseh točkah enaka. Dvorazsežna ploskev s pozitivno ukrivljenostjo je tedaj kroglja, ploskev z ukrivljenostjo nič ravni in ploskev z negativno ukrivljenostjo sedlasta ploskev.

V tem okviru je mogoče celo ponazoriti razširjajoče se vesolje za primer, da je parameter k pozitiven. Na kroglast balonček nalepimo etikete, ki ustrezajo jatam galaksij. (Etikete, ki se med napihovanjem balončka ne raztezajo, so pripravne za ponazoritev jat galaksij: razširjanje vesolja namreč ne vpliva na notranje razmere v gravitacijsko vezanih skupinah teles: v jatah, galaksijah, planetnih sistemih. Razdalja Zemlja-Sonce ostane zaradi razširjanja vesolja popolnoma neprizadeta.) Ko balonček napihujemo, se vesolje razširja in se jate oddaljujejo druga od druge (slika na ovitku in sl. 7a). Opazovalec na kateri koli jati vidi, da se druge jate oddaljujejo od njega in se mu zdi, da je on v središču razširjanja. Tu je zares izpolnjeno kozmološko načelo. (V modelu v Newtonovi mehaniki to načelo ni bilo v celoti izpolnjeno, ker je imel oblak odlikovano središče in mejo.)

Tudi ko je število razsežnosti za eno večje kot v naši prisodobi, ostanejo v veljavi nekatere ugotovitve. Kot je površina krogle končna, a nima meje, je pri pozitivnem k vesolje končno (ima končno prostornino), a nima meje. Za $k \leq 0$ pa je vesolje neskončno (nima končne prostornine) in nima meje.

V modelu vesolja v splošni teoriji relativnosti brez težav pojasnimo Hubblov zakon (v modelu v Newtonovi mehaniki ga ne moremo). V prisodobni vesolja z razširjajočim se balončkom si mislimo, da potujeta po glavnem kroglinem krogu, to je po najkrajši zveznici dveh jat galaksij, druga za drugo v majhnem razmiku dve kresnici. Njuna hitrost glede na balonček je konstantna in ustreza hitrosti svetlobe. Če bi imel balonček nespremenljiv radij,

bi bil razmik med kresnicama, ki mu ustreza valovna dolžina svetlobe, konstanten. Ker pa se balonček večja, se večja tudi ta razmik. Vzemimo, da je ob času t_0 , ko gresta kresnici mimo prve jate (ko se tam izseva svetloba), razmik med njima sorazmeren z λ . Ob poznejšem času, ko gresta mimo druge jate (ko tam svetlobo sprejmejo), je razmik med njima sorazmeren λ' . Če ustreza radiju balončka funkcija $R(t)$, velja $\lambda'/\lambda = R(t)/R(t_0)$. Iz tega sledi enačba (3), ko postavimo $z = R(t)/R(t_0) - 1 = [R(t) - R(t_0)]/R(t_0) = c(t - t_0)/c\tau$ in vpeljemo oddaljenost med jata: $z = c(t - t_0)$. Račun velja samo za časovni razmik $t - t_0$, ki je zelo majhen v primeri s Hubblovim časom τ .

Na koncu omenimo še neko pomanjkljivost vseh dosedanjih modelov vesolja. Vesolje se od drugih fizikalnih sistemov razlikuje po tem, da nima okolice. Doslej pa smo se delali, kot da je mogoče vesolje opazovati iz okolice. Toda vesolje lahko opazuje samo opazovalec v njem samem. V vesolju pa ni moglo biti opazovalcev, preden so nastale zvezde. Če hočemo računati s časom tudi na bolj zgodnjih razvojnih stopnjah, moramo premisliti, s katerimi pojavi ga določimo. Ob približevanju "trenutku 0", ki smo ga doslej opisovali kot "začetek" razširjanja vesolja ali veliki pok, naletimo tako na resne težave. Mogoče je "trenutek 0" le pripravna količina v računi in nima globljega fizikalnega pomena. Zaradi tega ne smemo govoriti o nastanku vesolja - ali o njegovem "začetku" - kot govorimo o nastanku zvezde. Pri opisovanju vesolja moramo biti previdni pri rabi pojmov, ki jih uporabljamo za opis drugih fizikalnih sistemov ali v vsakdanjem življenju.

Janez Strnad



SVETLOBA IN BARVE NA NEBU

Svetlobni pojavi na nebu so bili od nekdaj v veselje pesnikom in drugim umetnikom, pa tudi fizikom. Če hočemo te pojave razumeti, moramo nekaj vedeti o odboju in lomu svetlobe ter še o uklonu in interferenci.

Človek bi mislil, da odboja v zraku nikjer ne vidimo, ker ni ravnih površin. Da se motimo, pove slika, ki je bila posneta iz letala (Sl. 40). Globoko pod nami je plast koprenastih oblakov - cirrusov - na kateri se razločno zrcali Sonce. Vemo, da so taki oblaki iz ledenih kristalčkov in domnevati moramo, da so kristalčki ploščati, kot kake majhne snežinke. Ko počasi padajo, se sami od sebe postavijo v približno vodoravno lego, da pričarajo videz ogledala.

Podoben razmazan odboj dobimo na rahlo valovitem morju, na katerem se pokaže nekakšna zlata cesta. Takšno "cesto" vidimo tudi na lastnih vekah, če na pol zamižimo, ko gledamo v luč. Lahko jo tudi naredimo na urnem steklu, s tem da čezenj potegnemo s potno dlanjo. Odsev luči na steklu je potem prekrížan s svetlo črto, ki stoji pravokotno na potnih sragah. Črta je sestavljena iz drobnih zrcalnih slik luči, ki jih naredijo posamezne srage. Podobno je z valovi na morju.

Ob prvem spomladanskem dežju pogledjmo skozi še golo vejevje proti luči! Zdi se, kot da bi bile veje razporejene v kolobarjih (Sl. 41). Razlaga je podobna kot prej: luč odseva vselej s tistega dela veje, ki stoji v tangentsni smeri na namišljen krog okoli luči. Če kdo razlagi ne verjame, naj pogleda v luč skozi šop steklene volne. Tudi če so vlakna še tako pomešana, se zdijo zvita v kroge.

Z lomom svetlobe znamo razložiti, zakaj je zahajajoče Sonce na videz ploščato. Žarki s spodnjega robu Sonca se močneje lomijo, tako da je ta rob videti bolj privzdignjen kot zgornji.

Tudi mavrico, ki je nemara najbolj imenitni svetlobni pojav

na nebu, si v glavnih potezah razložimo z odbojem in lomom. Sončna svetloba se lomi, ko vstopi v kapljico, se zadaj odbije in se spet lomi ob izstopu. V določenih smereh se zbere posebno dosti te svetlobe - ta nam pričara mavrico. Barve se kažejo zaradi disperzije, se pravi zato, ker ima svetloba z različno valovno dolžino v vodi različno hitrost in se zato različno močno lomi.

Starodavna razlaga z lomom ne more pojasniti vseh značilnosti mavrice. Drobni pisani pasovi na notranjem robu glavne mavrice se na tak način že ne dajo razložiti. Ti pasovi so odvisni od velikosti deževnih kapelj in nastanejo zaradi uklona in interference svetlobe. O obojem se moramo natančneje pomeniti.

Najprej nekaj besed o interferenci! Najlaže jo razumemo, če si ogledamo svetlobo, ki odseva s tankega milnega mehurčka ali z razpoke v ledu ali s plasti olja na vodi. V odbiti svetlobi je plast videti barvasta. Barva se spremeni, če spremenimo debelino ali če plast nagnemo, tako da se spremeni vpadni kot.

Veliko lepši kot na milnem mehurčku ali oljni plasti je interferenčni pojav pri odboju svetlobe na krilih nekaterih zelenih hroščev (Sl. 42). Ko hrošča nagnemo, se zelena barva prelije v modro, kar dokazuje, da imamo res opraviti z interferenco in ne s kakim zelenim barvilom. Hroščeva krila so narejena iz enakomerno razmaknjenih tankih plasti, ki so ločene z zrakom. Razmik je tolikšen, da je za pravokotno odbite žarke pot do druge plasti in nazaj ravno za valovno dolžino zelene svetlobe daljša kot pot do prve plasti. Zato se zelena svetloba ojačeno odbije. Ojačenje je izredno močno, ker prispevajo k temu tudi nadaljnje plasti.

Dolgo so ljudje zavidali hroščem, katerih živozeleni odsev niso znali ponarediti z nobenimi poskusi. Šele v novejši dobi so se naučili izdelovati enakomerne skladovnice tankih plasti, ki učinkujejo podobno kot hroščeva krila. Naredijo jih z izmeničnim naparevanjem dveh različnih snovi v vakuumu. Med takšne izdelke spadajo interferenčni filtri, ki prepuščajo samo svetlobo določene barve, čeprav v njih ni nobenega barvila. Ko filter nagnemo, se barva spremeni.

Uklon je ime za pojav, da gre valovanje lahko okrog ovir. Pri zvočnem valovanju se ne zdi to nič čudnega, ker okrog ogla dobro slišimo. Da bi kaj videli okrog ogla, si pa ne upamo trditi. Vendar pogledjmo previdno proti Soncu, ki ga zastremo z ostrino noža! Zares: ostrina se blešči, čeprav je Sonce zakrito. Svetlobni valovi se uklanjajo ob ostrini. Uklanjajo se dosti manj kot zvok, ker je valovna dolžina tolikokrat krajša. Oglej si še sliko 43!

Zdaj se lahko povrnemo k pojavom na nebu. Ko smo se prej pogovarjali o kapljicah v megli, smo pozabili vprašati, kako velike so pravzaprav. Včasih ugotavljajo to tako, da jih lovijo v plast olja in jih potem gledajo pod mikroskopom. Nekaj pa zvemo tudi z opazovanjem svetlobe, ki se uklanja na kapljicah. Ker se uklanja na vse strani, pravimo, da kapljice sipljejo svetlobo. Zaradi te svetlobe vidimo meglo in oblake.

Debelejše kapljice sipajo bolj kot majhne, pri čemer je pomembno razmerje velikosti v primeri z valovno dolžino. Če je kapljica manjša kot valovna dolžina, siplje modro svetlobo močnejše kot rumeno ali rdečo. Zato je razsuta svetloba videti modrikasta, medtem ko je prepuščena svetloba rdečkasta. Oboje opazimo pri dimu, v katerem je obilo prav drobnih kapljic katrana. Skozi zadimljen zrak je Sonce videti rdečkasto. Ko pa si z vrha hriba ogledujemo zadimljeno plast, se zdi modrikasta (Sl. 44).

Sipanje svetlobe na prav drobnih delcih se da razložiti tudi na bolj preprost način, ne da bi bilo treba študirati uklon in interferenco. Izmenično električno polje svetlobnega valovanja vzbudi v delcu dima električno nihanje. Delec deluje zato kot majhna antena, ki oddaja elektromagnetne valove (to je svetlobo) na vse strani. Smerna porazdelitev teh valov je enaka kot pri majhni radijski anteni paličaste oblike.

Na enak način sipajo svetlobo tudi molekule v zraku. Zaradi molekul je nebo modro. Če se svetloba v zraku ne bi sipala, bi bilo nebo tudi podnevi črno kot ponoči. Večerna svetloba, ki ima daljšo pot skozi zrak, je iz že navedenega vzroka rdečkasta. Vse jutranje in večerne zarje si na ta način lahko razložimo (Sl. 45a).

Ko Sonce zaide, potemni nebo najprej na vzhodni strani. Ob zelo jasnem vremenu se vzdiguje mrak kot kaka temna zavesa. To je senca Zemlje, ki jo zadnji sončni žarki projicirajo v zrak (Sl. 45b).

Megla ima razmeroma debele kapljice in siplje zato vse sestavine bele svetlobe približno enako močno. To slišimo v šoli, tako da se že nič več ne čudimo. Pa vendar ni vse tako preprosto. Namesto megle vzemimo leskov ali kak drug cvetni prah in z njim potresimo šipo! Lisičjakovi trosi so tudi dobri za ta namen; pomembno je samo, da so zrnca prahu vsa enako velika. Pri pogledu skozi potreseno šipo v oddaljeno luč se pokažejo mavrični kolobarji.

Kolobarji se kažejo zaradi interference svetlobe, ki se uklanja na nasprotnih robovih posameznega troska. V tisti smeri, v kateri je za svetlobo določene barve razlika poti ravno enaka celi valovni dolžini ali njenemu mnogokratniku, se ta svetloba ojači, tako da prevpije druge barve. Če je tros drobnejši, je za enako razliko poti potreben večji odklon žarkov. Razumljivo je torej, da dobimo z drobnejšim prahom večje kolobarje. Na ta način celo lahko določujemo velikost cvetnega prahu, ne da bi potrebovali mikroskop. Na mnogih področjih fizike se uporablja ta način merjenja. Na podoben način so celo določevali velikost in zgradbo protona, le da so namesto svetlobe na njih sipali hitre elektrone.

Za čudo ne dobimo prav nobenih kolobarjev, če potresemo šipo z moko namesto s cvetnim prahom. To je zato, ker so delci moke različno veliki. Za vsako velikost zrnca dobimo svoj kolobar. Številni kolobarji se prekrijejo, tako da se barve zlijejo v razmazan bel soj. Tako šele razumemo, zakaj je megla bela. Zato, ker so v njej različno velike kapljice, ki so vse precej velike v primeri z valovno dolžino.

Na misel nam prihaja, da velikost kapljic v megli morda ni vselej tako hudo različna. Izjemoma se namreč vendarle vidijo kolobarji okrog Sonca in Lune, čeprav so redkokdaj tako lepi kot tisti s cvetnim prahom. Tudi skozi šipo, ki jo z dihanjem orosimo, se vidijo kolobarji (Sl. 46). Če še malo dahnemo, se

kolobarji pomanjšajo, ker se kapljice zdebelijo. Po daljšem poskušanju pa se kolobarji razmažejo, ker so kapljice že preveč različne.

Lep kolobar okrog Lune dobimo samo, če je oblačna koprena šele pravkar nastala, kajti le v mladem oblaku so kapljice približno enako velike. Ko se oblak postara, se kolobar razmaže, kar kaže, da so kapljice postale neenake. Na svoj način se namreč gredo kapljice kapitalizem; majhne hujšajo, debele se pa na njihov račun redijo. To je že zopet zaradi površinske napetosti. Zaradi nje namreč drobnejše kaplje izhlapevajo z večjim tlakom, kot že vemo. Debelejše kaplje, ki so zadovoljne z manj prenasičeno vlažnostjo, pa si prisvajajo odvišno vodno paro.

Kadar se ob sicer jasnem zimskem dnevu pojavi tanek oblak, se včasih zaleskeče v mavričnih barvah. Takrat vemo, da ima posamezen del oblaka same približno enako velike kapljice. Prav kmalu, včasih še preden pripraviš fotografski aparat s teleobjektivom, pa barve že zbledijo, ker so se povečale velikostne razlike med kapljicami.

* * * * *

Spomini na enajsto šolo so mi ljubi tudi zato, ker v njej nisem bil sam. Imel sem čudovito družbo, ki jo je povezovala želja, da bi naravi iztrgali kako skrivnost, vsaj kako majhno, če že ne veliko. Drug od drugega smo se našli navdušenja in drug drugemu pomagali videti, kar bi posamezniku ostalo skrito. Ničesar lepšega ne morem želeti mladim bralcem, kot da bi doživeli podobno navdušenje, pa najsi bo ob kakršnikoli dejavnosti že. Vesel bom, če bom s svojim pripovedovanjem vzbudil kaj takih načrtov.

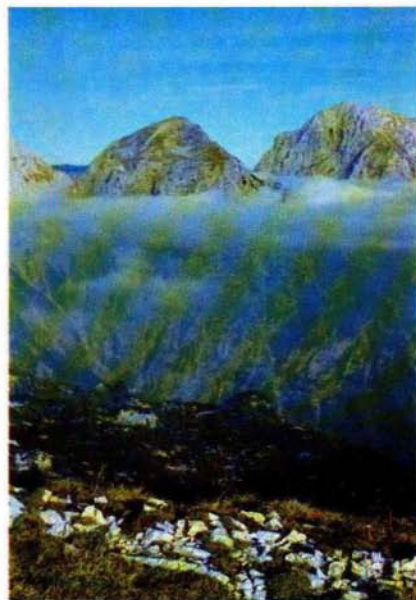
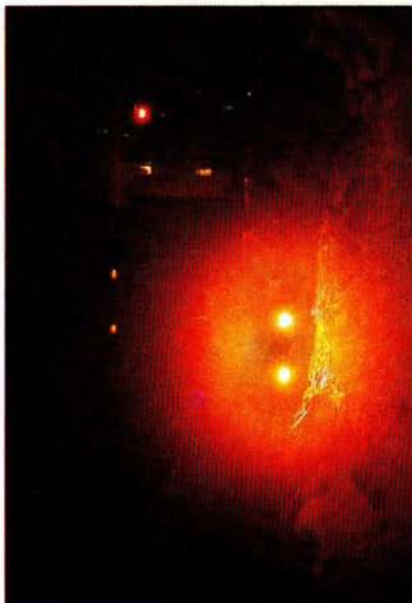
Ivan Kuščer

Podnapisi k slikam so na str. 197.

45A



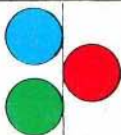
46



44

45B





NOVE KNJIGE

Eugeniusz Rybka, NIKOLAJ KOPERNIK, Državna založba Slovenije 1974, 91 str., Cena 52.-din.

Knjiga Nikolaj Kopernik je del obširnejšega dela "Štiristo let kopernikanske misli", ki ga je v počastitev petstoletnice Kopernikovega rojstva (l. 1472) napisal poljski astronom Eugeniusz Rybka.

V uvodnih poglavjih obravnava avtor mladost Nikolaja Kopernika. Predstavi nam njegovo družino in izobrazbo ter pokaže, kako se je Kopernik srečal s problemi, ki so postali smisel njegovega življenja.

V naslednjih poglavjih avtor poroča o letih, ko je nastajalo Kopernikovo glavno delo - heliocentrična teorija o zgradbi vesolja. Razen tega pa govori tudi o drugih Kopernikovih dejavnostih, predvsem o njegovih uspehih pri upravljanju poljske pokrajine Varmije in o njegovih uspešnih analizah monetarnih kriz, ki so tedaj pretresale Evropo. Kopernik je predstavljen celovito in bralec lahko dobi vtis o izjemni ustvarjalni moči tega velikega astronoma. Tekst je opremljen z natančnimi podatki in citati, kar nam še bolj približa Kopernikov čas.

Skoraj polovica dela pa je posvečena razpravi o Kopernikovem znamenitem delu "De revolutionibus", ki zajema šest knjig. Avtor nam v zgodovinskem okviru tedanje stopnje razvoja znanosti predstavi veličino Kopernikovega dela. Posebej je poudarjena novost, ki jo je Kopernik uvedel v reševanje problemov tedanje astronomije s tem, da je veliko mističnih podmen izvrgel iz teorije in jih nadomestil s strogim logičnim sklepanjem, katerega podlaga so bila opazovanja. Seveda pa so bila Kopernikova opazovanja, gledano iz današnje perspektive, še vedno precej skromna, zato si je moral včasih vendarle pomagati s postulati, ki so se mu zdeli logični. Take vrzeli v opazovalnem materialu se vedno ponavljajo ob nastanku velikih teorij. Kopernikova veličina je bila v tem, da jih je spoznal in je, čeprav včasih naivno, vztrajal pri svojem delu in ustvaril za tiste čase celovito sliko o svetu. Knjiga Nikolaj Kopernik je prav gotovo zanimivo branje za vsakogar, ki ga zanima nastajanje znanstvenih teorij in razvoj znanosti nasploh.



Eugeniusz Rybka

**Nikolaj
Kopernik**

Andrej Čadež