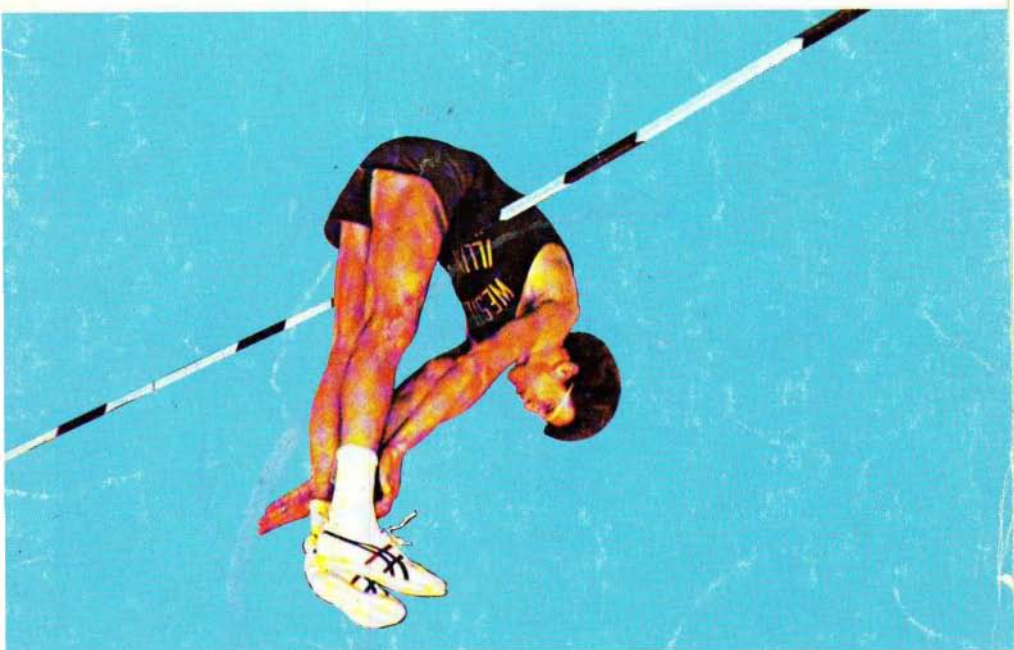


p r e 3
s e k **v**
1977-78



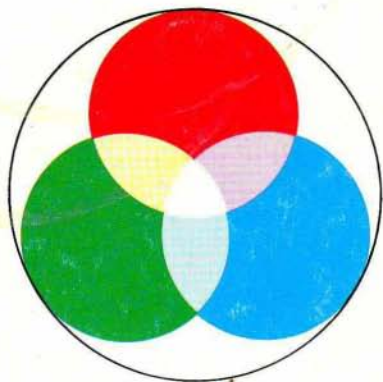
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS





31



32



34



35

V S E B I N A

MATEMATIKA	131 Sandokan - rešitve nalog str. 177 (Vladimir Batagelj)
	134 Diofantske enačbe - rešitve nalog str. 178 (France Križanič)
	142 Desarguesov izrek (Ivan Pucelj)
	144 (Jože Dover, Roman Rojko)
PREMISLI IN REŠI	
ASTRONOMIJA	145 Vesolje, 1. del (Janez Strnad)
	152 Zanimivosti iz astrofizike (Andrej Čadež)
MATEMATIČNO RAZVEDRILLO	158 Pet palindromnih rebusov (Pavel Gregorc)
	159 Figurativna števila - naloga str. 173 (Danijel Bezek)
KRIŽANKA	160 Geometrijski liki (Pavel Gregorc)
PISMA BRALCEV	162 (Matilda Lenarčič)
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	165 Resnična iz šole (Š.B.)
TEKMOVANJA - NALOGE	166 Vegovcem v šolskem letu 1977/78 (Pavle Zajc)
	167 Osemnajsto zvezno tekmovanje srednješolcev v matematiki (Aleksander Malnič)
	172 Zvezno tekmovanje mladih fizikov (Andrej Likar)
NOVE KNJIGE	173 (Ciril Velkovrh)
NOVICE - ZANIMIVOSTI	174 Važnejše evropske abecede (Stanislav Zorko)
	IV Ekskurzije na Gorenjsko (Ciril Velkovrh)
BISTROVIDEO	176 Labirint (Dušan Repovš)
FIZIKA	179 Skok v višino in skok ob palici (Sergej Pahor)
	183 O gibanju raket (Janez Žitnik)
	188 Enajsta šola iz fizike, 3. del (Ivan Kuščer)
REŠITVE NALOG	133 Na trgu - naloga str. 157 (Danijel Bezek)
	175 Križanka P-2 (Pavel Gregorc)
	178 0 ostrokotnih trikotnikov (Andrej Legat)
	182 Pojasnilo (Marjan Hribar)
NA OVITKU	I Težišče skakalca v višino je tudi v najvišji točki pod letvico
	II, III Enajsta šola iz fizike. SI. 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.
5. letnik, šolsko leto 1977/78, 3. številka, str. 129 - 192.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (Bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover (Premisli in reši), Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Andrej Kmet, Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Edvard Kramar (Naloge - tekmovanja), Matilda Lenarčič (Pisma bralcev), Norma Mankoč-Borštnik, Franci Oblak, Peter Petek, Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Skulj, Janez Strnad (glavni urednik), Zvonko Trontelj (odgovorni urednik), Marijan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, Nove knjige).

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

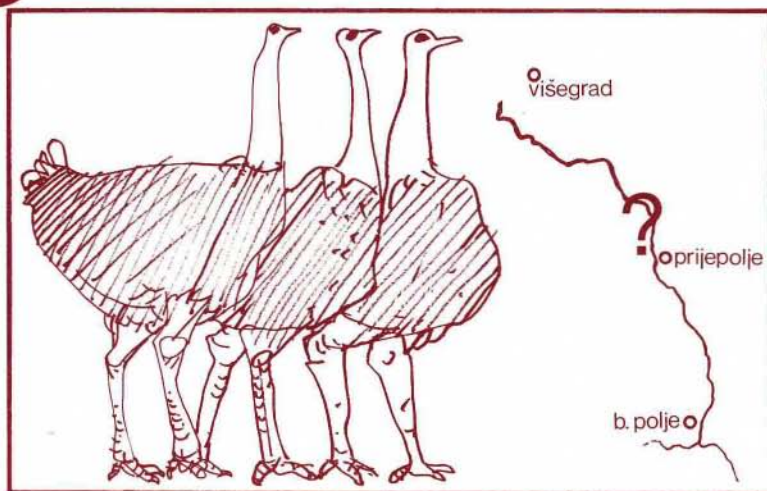
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 265-061/53, številka žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki številka 32009-007-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezno naročila 30.-din, za skupinsko pa 25.-din; za inozemstvo 2 \$ = 36.-din, 1300.-Lit, 36.-Asch. Posamezna številka stane 8.-din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja štirikrat letno v nakladi 23.000 izvodov.

© 1978 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

3





SANDOKAN

Najbrž ste že vsi slišali za Sandokana, hrabrega, močnega, plemenitega in očarljivega "Malajskega tigra iz Mompracema", pirata in upornika proti kolonialnim gospodarjem iz angleške Vzhodnoindijske družbe.

Začelo se je pri naših sosedih s televizijsko nanizanko. Nato smo dobili Sandokana še v stripu, knjigi in na posterju. Zelo priljubljena je tudi Sandokan plošča. Na svoj račun so prišla tudi uredništva časopisov (s tem sestavkom se jim pridružuje tudi Presek).

Zadnjih nekaj mesecev pa nas na Sandokana spominjajo odvržene Sandokan vrečice, ki "krasijo" tlak naših pločnikov in ulic. Nobena skrivnost ni, da so bile v vsaki vrečici, ki stane "samo" 1 dinar, po tri samolepilne Sandokan sličice. Obstaja vsega 400 različnih sličic, ki si jih lahko nalepimo v poseben Sandokan album. Tega lahko kupimo, če imamo srečo in ni trenutno razprodan, za 5 din v skoraj vsaki trafiki, kjer se dobe tudi sličice.

Prav zbiranje Sandokan sličic je glavna tema tega sestavka. Tisti, ki te sličice zbirate (ali pa ste zbirali te ali podobne: živali, ladje, pevce, avtomobile, zastave, filmske igralce, športnike, ...), ste najbrž opazili, da je spočetka skoraj vsaka sličica nova. Kasneje pa se začno kopičiti sličice, ki jih že imamo, in le poredko dobimo novo. Zbiralci kaj kmalu najdejo rešitev: razvije se živahno menjavanje odvečnih sličic, ki pa bistveno ne prispeva k polnosti albuma. Običajno sčasoma zbirateljska vnema popusti in ostane nam skoraj poln album in

kupček "enakih" sličic.

Ker ima Sandokan album tudi moj šestletni sin, sem si pred časom zastavil vprašanje: Koliko sličic je treba (v povprečju) kupiti, da bomo napolnili cel album?

Prva zamisel, kako priti do odgovora na zastavljeno vprašanje, je bila računalniška simulacija kupovanja sličic. Dobljeni odgovor je bil: za to, da napolnimo prazen Sandokan album, je potrebno kupiti okrog 2700 Sandokan sličic ali $2700/3 = 900$ Sandokan vrečic oziroma porabiti $900 \text{ din} = 90 \text{ jurjev}$ (za ta denar lahko kupimo štiri Sandokan knjige). Seveda pa v tem rezultatu ni upoštevano menjavanje sličic. Predpostavljal pa sem "poštenost" izdelovalca Sandokan vrečic: vsako sličico je natisnil in dal v vrečice v enakem številu.

Pred kratkim sem v neki knjigi našel tudi teoretični odgovor na zastavljeno vprašanje: Naj bo v albumu prostora za n različnih sličic in naj jih manjka še p sličic. Potem moramo za to, da bi album napolnili (v povprečju) kupiti še

$$N(n, p) = n \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p})$$

sličic. Vsoto recipročnih vrednosti prvih p naravnih števil imenujemo tudi harmonična vrsta in jo označimo s H_p . Torej lahko prejšnji obrazec zapišemo krajše

$$N(n, p) = n \cdot H_p$$

Pri majhnih p vrednost H_p določimo kar neposredno po definiciji s seštevanjem. Pri večjih p pa velja na precej decimalnih mest natančno obrazec

$$H_p \approx \ln(p + \frac{1}{2}) + \gamma$$

kjer je

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\ \dots$$

Eulerjeva konstanta. Tako dobimo po tem obrazcu H_{10} na štiri mesta natančno, H_{100} pa že kar na šest mest natančno.

Za naše namene pa bo zadostovala naslednja tabela:

p	H_p	p	H_p
1	1.000 000	15	3.318 229
2	1.500 000	20	3.597 740
3	1.833 333	30	3.994 987
4	2.083 333	50	4.499 205
5	2.283 333	100	5.187 378
6	2.450 000	150	5.591 181
7	2.592 857	200	5.878 031
8	2.717 857	300	6.282 664
9	2.828 968	400	6.569 930
10	2.928 968	500	6.792 823

Bralec naj poskuša sam najti teoretične ocene za neznane količine v naslednjih nalogah:

1. Koliko Sandokan sličic moramo v povprečju kupiti, da napolnimo prazen Sandokan album?
2. Koliko Sandokan sličic moramo v povprečju kupiti, da bomo dobili 380 različnih sličic?
3. V Sandokan albumu imamo že 380 različnih sličic. Koliko jih moramo v povprečju še kupiti, da dobimo še manjkajočih 20 sličic in napolnimo album?
4. Recimo, da gre v album 100 različnih sličic. Koliko sličic moramo v povprečju kupiti, da ga napolnimo?
5. Kolikokrat v povprečju moramo vreči kocko, da bomo vrgli vsako cifro vsaj enkrat?

Vladimir Batagelj

NA TRGU - rešitev s str. 157

Sodnik postavi trgovce v vrsto in prvemu vzame en cekin, drugemu dva ... in osmemu osem cekinov. Položi jih na tehtnico in stehta njihovo skupno maso M . Kje v vrsti ($1 \leq n \leq 8$) stoji slepar, pa pove rešitev enačbe:

$$36 \cdot 10g - n \cdot 1g = M$$

Danižel Bezek

DIOFANTSKE ENAČBE

1. V starem kitajskem matematičnem zborniku "Matematika v devetih knjigah" iz prvega stoletja pr.n.š. je tale zanimiva naloga:

Trije tatovi so kradli riž iz treh enakih vreč. Koliko je bilo vsega riža, ni znano. Vemo le, da je po tatvini ostal v prvi vreči 1 go riža, v drugi 1 šing in 4 go riža, v tretji pa spet 1 go riža. Ko so tatove prijeli, so le-ti priznali: prvi, da je kradel riž z lopato, drugi, da je kradel riž s coklo in tretji, da je kradel riž s skledico. Vsak pa je kradel iz svoje vreče. Na kraju tatvine so res našli lopato, coklo in skledico. Izmerili so jih, pa ugotovili, da zajame lopata 1 šing 9 go riža, cokla 1 šing 7 go riža, skledica pa 1 šing in 2 go. Koliko riža je ukradel vsak tat, če je $10 \text{ go} = 1 \text{ šing}$, $10 \text{ šingov} = 1 \text{ tau}$, $10 \text{ tau} = 1 \text{ ši}$? *

Recimo, da je prvi tat zajel x -krat, drugi tat y -krat in tretji tat z -krat. Tako prevedemo zastavljeno nalogo na sistem dveh enačb

$$19x + 1 = 17y + 14$$

$$19x + 1 = 12z + 1$$

Sistem dveh enačb s tremi neznankami pa ima neskončno mnogo rešitev. V našem primeru pa ni vsaka rešitev dobra. Števila x , y in z , ki povedo, kolikokrat je zajel kateri tat, morajo biti seveda cela in še pozitivna.

Iščemo torej trojico celih pozitivnih števil x , y , z , ki zadoščajo sistemu enačb s celimi koeficienti.

Navedena naloga je primer sistema diofantskih enačb. V temle prispevku bomo malo pogledali v teorijo diofantskih enačb in se naučili reševati take enačbe. Nazadnje bomo mogli do konca ugnati tudi naš primer.

2. Linearna diofantska enačba z dvema neznankama je enačba

* go, šing, tau, ši - kitajske prostorninske mere

$$ax + by = c$$

kjer so a , b in c cela števila. Rešitev diofantske enačbe pa je vsak par celih števil x , y , ki zadošča enačbi.

Diofantska enačba je lahko nerešljiva, lahko pa ima neskončno mnogo rešitev. Če imata koeficienta a in b skupni delitelj m , število c pa ni deljivo z m , je enačba nerešljiva. Leva stran enačbe je namreč tedaj pri poljubnih celih številih x in y deljiva z m , desna stran pa ne. To pa je nemogoče. Primer take nerešljive diofantske enačbe je

$$3x + 6y = 7$$

3. Pri reševanju diofantskih enačb uporabljamo dve metodi: Eulerjevo in Lagrangevo. Prvo metodo si oglejmo na primeru

$$3x + 8y = 5$$

Po Eulerju ravnamo takole: najprej izrazimo iz enačbe neznanko, ki ima po absolutni vrednosti manjši koeficient. V našem primeru je to x

$$x = (-8y + 5)/3$$

Na desni strani delimo členoma

$$x = -2y + 1 + (-2y + 2)/3$$

Leva stran in prva dva člena na desni strani so cela števila. Torej mora biti tudi zadnji člen celo število. Imenujmo ga z

$$(-2y + 2)/3 = z$$

Tako dobimo novo diofantsko enačbo za y in z , ki ima koeficiente, katerih absolutne vrednosti ne presegajo najmanjše absolutne vrednosti koeficientov prvotne enačbe.

$$-2y + 2 = 3z$$

To enačbo bi lahko obdelali kot prej. Nižji koeficient je pri neznanki y , iz enačbe bi zato izrazili y in po delitvi uvedli novo neznanko. Lahko pa ravnamo preprosteje. Desna stran enačbe je deljiva z 2, koeficient na desni pa ne. Torej mora biti z sodo število. Vstavimo v enačbo $z = 2n$, pa dobimo

$$y = 1 - 3n$$

Ker pa je

$$x = -2y + 1 + 2n = 8n - 1$$

moremo nazadnje zapisati rešitev v obliki

$$x = 8n - 1, \quad y = 1 - 3n$$

Pri vsaki celi vrednosti n dobimo par celih števil x, y , ki reši enačbo. Vseh rešitev je tako neskončno mnogo. Videli bomo, da na ta način pridobimo res vse rešitve diofantske enačbe. Izraza za x in y , v katerih nastopa še poljubna cela konstanta n , imenujemo zato splošno rešitev diofantske enačbe. Posamezne rešitve, ki ustrezajo posebnim vrednostim n , pa imenujemo partikularne rešitve. Splošna rešitev vsebuje torej vse partikularne rešitve.

Zapišimo nekaj partikularnih rešitev naše enačbe

n	x	y
-2	-17	7
-1	-9	4
0	-1	1
1	7	-2
2	15	-5

Enačbo lahko rešimo hitreje, če računamo takole:

$$x = (-8y + 5)/3 = -3y + 2 + (y - 1)/3$$

Ko smo členoma delili s 3, smo pazili, da so bili ostanki po absolutni vrednosti čim manjši. Sedaj moramo zapisati le še, da je kvocient na desni strani celo število m , pa imamo že

$$y = 1 + 3m$$

in

$$x = -8m - 1$$

To pa je prav ista splošna rešitev kot prej, le zapisana je drugače. Obakrat - ko preteče v prvi rešitvi n vsa cela števila in ko preteče m v drugi rešitvi vsa cela števila - dobimo v celoti prav iste partikularne rešitve. Da je to tako, vidimo

na prvi pogled, saj je $m = -n$.

4. Od posebnega primera se vrnimo nazaj k splošni diofantski enačbi, ki smo jo obravnavali v točki 2. Oglejmo si, kako je zgrajena splošna rešitev take enačbe. Najprej vzemimo enačbo, ki ima stalni člen enak 0. Tako enačbo

$$ax + by = 0$$

imenujemo homogeno diofantsko enačbo. Homogena diofantska enačba je vselej rešljiva. Splošno rešitev pa najdemo brez težav. Najprej okrajšamo koeficiente tako, da a in b nimata več skupnega faktorja, da sta si tuja. Če sta oba koeficienta enaka 0, reši enačbo vsak par števil. Ta primer seveda ni zanimiv. Vzemimo torej, da je vsaj en koeficient različen od 0. Naj bo to koeficient a . Tedaj je

$$x = -by/a$$

Izraz na desni pa je celo število le, če je y deljiv z a , ker sta si a in b tuji števili. Pišimo torej $y = a \cdot n$, pa imamo že splošno rešitev homogene enačbe

$$x = -bn, \quad y = an$$

5. Nehomogene diofantske enačbe

$$ax + by = c$$

pa se lotimo takole: Koeficienta a in b okrajšamo tako, da si postaneta tuja. To je vselej mogoče, če je le enačba rešljiva. Saj smo videli, da mora biti koeficient c pri rešljivi enačbi deljiv z vsemi skupnimi faktorji koeficientov a in b . Privzemimo, da smo že našli partikularno rešitev x_0, y_0

$$ax_0 + by_0 = c$$

Odštejmo to od prejšnje enačbe, pa dobimo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Številni $\xi = x - x_0$ in $\eta = y - y_0$ rešita torej homogeno enačbo $a\xi + b\eta = 0$. Zato je $x - x_0 = -bn$, $y - y_0 = an$ in

$$x = x_0 - bn \quad y = y_0 + an$$

Enačbo $ax + by = 0$ imenujemo enačbi $ax + by = c$ ustrezno homogeno enačbo.

Tako vidimo, da je splošna rešitev nehomogene enačbe sestavljena iz dveh delov: iz partikularne rešitve nehomogene enačbe in splošne rešitve ustrezne homogene enačbe. Splošno rešitev nehomogene enačbe lahko torej takoj zapišemo, če le poznamo eno njeno partikularno rešitev in splošno rešitev ustrezne homogene enačbe.

To nam tudi pove, da nas privede reševanje diofantske enačbe na razpotje: diofantska enačba ima neskončno mnogo rešitev ali pa je nerešljiva. Dve različni rešitvi se razlikujeta za rešitev ustrezne homogene enačbe.

6. Sedaj znamo napisati splošno rešitev diofantske enačbe, če le poznamo vsaj eno partikularno rešitev. Partikularno rešitev lahko včasih uganemo. Na primer: na prvi pogled vidimo, da reši enačbo

$$4x - 5y = 2$$

par $x_0 = 8$, $y_0 = 6$. Splošna rešitev enačbe je torej

$$x = 8 + 5n, \quad y = 6 + 4n$$

Kadar pa nam ugibanje odpove, se zatečemo k Lagrangevi metodi. Partikularno rešitev najdemo z verižnim ulomkom*. Absolutno vrednost kvocienta a/b razvijemo v verižni ulomek. V verižnem ulomku opustimo zadnji delni kvocient in pretvorimo tak pri-krajšani verižni ulomek v navadni ulomek. Ta ulomek je predzadnji delni ulomek. Partikularno rešitev enačbe določimo takole:

Naj bo u imenovalce predzadnjega delnega ulomka, v pa števec predzadnjega delnega ulomka. Po potrebi spremenimo številoma u in v še predznak tako, da zadoščata enačbi

$$au + bv = 1$$

Očitno je tedaj

$$x_0 = au, \quad y_0 = bv$$

* Glej: P. Petek: "Kako spravimo ulomek v škatlo", Presek III/4, str. 163

partikularna rešitev enačbe

$$ax + by = c$$

Za primer rešimo enačbo:

$$11x + 8y = 3$$

Kvocijent $11/8$ razvijemo v verižni ulomek takole: najprej je

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$$

Recipročno vrednost ostanka obdelamo na isti način pa dobimo

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}$$

in nazadnje

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

V tem verižnem ulomku opustimo zadnji delni kvocijent 2, pa dobimo predzadnji delni ulomek

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{4}{3}$$

Števec predzadnjega delnega ulomka je 4, imenovalec pa 3. Ker je

$$11 \cdot 3 + 8 \cdot (-4) = 1$$

moramo postaviti $u = 3$ in $v = -4$. Partikularna rešitev nehomogene enačbe je tedaj

$$x_0 = 6, \quad y_0 = -8$$

saj je v našem primeru $c = 2$. Rešimo še ustrezno homogeno enačbo

$$11\xi + 8\eta = 0$$

ki ima splošno rešitev

$$\xi = -8n, \quad \eta = 11n$$

pa že lahko napišemo splošno rešitev nehomogene enačbe

$$x = 6 - 8n, \quad y = -8 + 11n$$

7. Na primeru, ki smo ga postavili v prvi točki, si oglejmo še

kako rešujemo sisteme diofantskih enačb. Sistem enačb iz točke 1 lahko zapišemo takole

$$19x - 17y = 13$$

$$19x - 12y = 0$$

Druga enačba je homogena in splošno rešitev druge enačbe lahko takoj zapišemo

$$x = 12u, \quad y = 19u$$

Število u pa ne sme biti povsem poljubno, saj mora x zadoščati tudi prvi enačbi. Vstavimo torej izraz za x v prvo enačbo, pa dobimo diofantsko enačbo za u in y

$$228u - 17y = 13$$

Poiščimo najprej partikularno rešitev enačbe. Kvociient $228/17$ razvijmo v verižni ulomek

$$\frac{228}{17} = 13 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Predzadnji delni ulomek je

$$13 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{67}{5}$$

Partikularno rešitev dobimo tako, da števec in imenovalec pomnožimo z desno stranjo enačbe

$$u_0 = 5 \cdot 13 = 65, \quad y_0 = 67 \cdot 13 = 871$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$u = 65 + 17n \quad y = 871 + 228n$$

Vstavimo dobljeno vrednost u v izraza za x in z pa dobimo splošno rešitev sistema

$$x = 780 + 204n$$

$$y = 871 + 228n$$

$$z = 1235 + 323n$$

Da se tatovi v nalogi ne bodo utrudili, poiščimo med vsemi partikularnimi rešitvami najmanjšo pozitivno rešitev, ki jo označimo z x' , y' , z' . Dobimo jo pri $n = -3$, saj je x pri $n = -4$

že negativen. Torej:

$$x' = 168, \quad y' = 187, \quad z' = 266$$

Odtod pa dobimo odgovor na zastavljeno vprašanje:

Prvi tat je ukradel 3 ši 1 tau 9 šingov in 2 go riža

Drugi tat je ukradel 3 ši 1 tau 7 šingov in 9 go riža

Tretji tat je ukradel 3 ši 1 tau 9 šingov in 2 go riža

Naloge

1. Reši z Eulerjevo ali Lagrangejevo metodo:

a) $3x + 2y = 5$ f) $15x + 4y = 1$ k) $117x + 74y = 19$

b) $5x - 4y = 0$ g) $16x - 5y = 4$ l) $472x - 169y = 4$

c) $8x + 5y = 2$ h) $10x + 7y = 5$ m) $49x + 38y = 7$

d) $3x - 6y = 2$ i) $43x + 30y = 2$ n) $221x - 247y = 12$

e) $6x - 4y = 8$ j) $17x - 54y = 3$ o) $52x - 119y = 3$

2. V razredu je manj kot 30 učencev. Učenci so dobri in odlični, povprečna ocena razreda pa je $19/5$. Koliko učencev je v razredu, če je več kot 10 učencev dobrih?

3. V šopu triperesnih in štiriperesnih deteljic je 400 listov. Koliko je v šopu triperesnih deteljic, koliko štiriperesnih deteljic in koliko je rešitev?

4. Tisoč nog tepta sejmišče. Koliko je na sejmu živine, koliko živinorejcev in koliko je rešitev?

5. Na koliko načinov se da zamenjati tisočak v bankovce po 100 in 50 din?

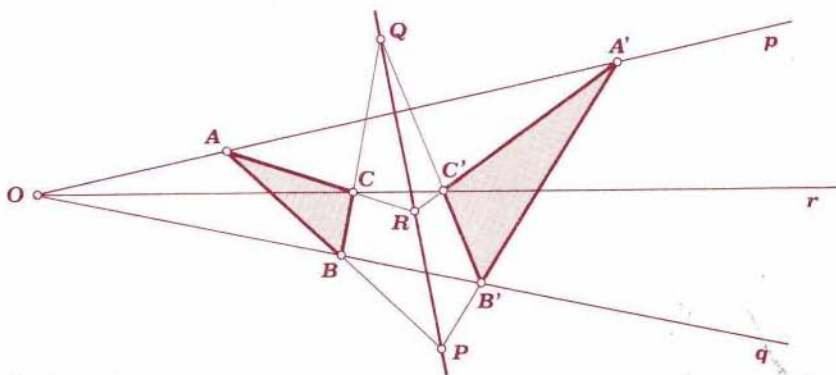
6. Določi najmanjše pozitivno liho število, ki da po delitvi s 3 ostanek 2 !

7. Določi najmanjše naravno število, ki da pri delitvi s 3 ostanek 2, pri delitvi s 4 ostanek 3 in pri delitvi s 5 ostanek 4 !

France Križanič

DESARGUESOV IZREK

Pred stoletji je francoski arhitekt Girard Desargues odkril tole geometrijsko zakonitost: Naj sta dana dva trikotnika ABC in $A'B'C'$, tako da se zveznice oglišč $(A,A') = p$, $(B,B') = q$, $(C,C') = r$ sečejo v skupni točki O (vsi dogodki se odvijajo v skupni ravnini). Potem leže presečišča premic (A,B) , (A',B') ; (B,C) , (B',C') ; (C,A) , (C',A') na skupni premici - primerjaj s sliko 1.



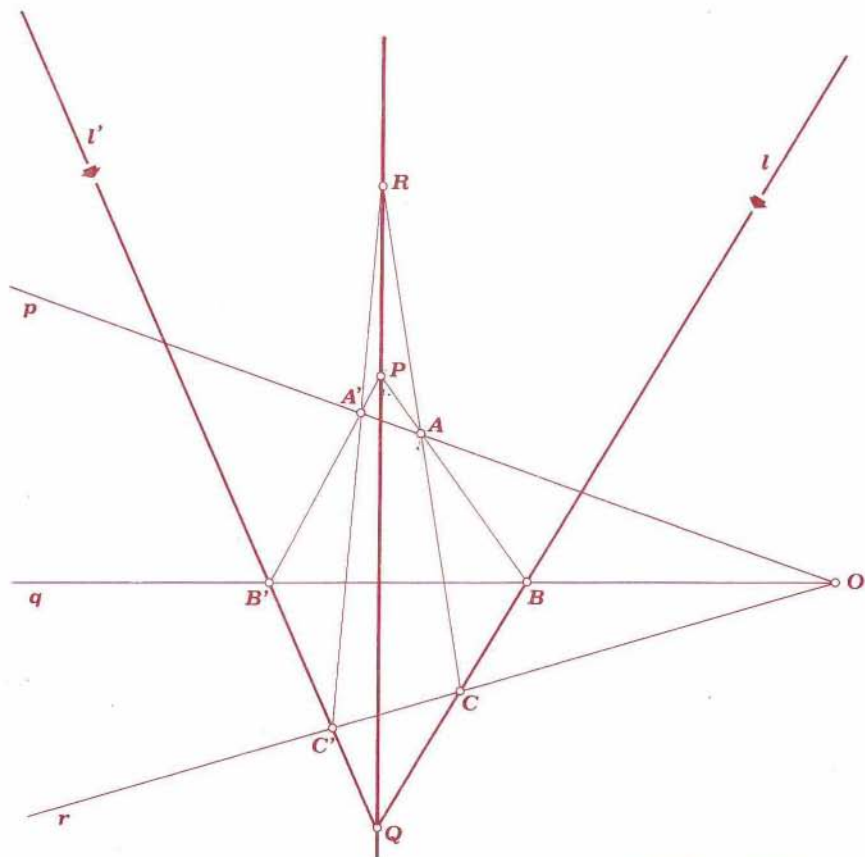
Sl. 1

Preizkusi z risanjem veljavnost tega izreka v svojih primerih!

PRIMER ZA UPORABO. Denimo, da poznamo na zemljevidu premočrtno poti dveh letal, ki letita proti letališču Q zunaj zemljevida (slika 2). Treba pa je vrisati pot tretjega letala, ki leti iz letališča R (na zemljevidu) tudi proti Q . Toda: pri risanju je na voljo od geometrijskega orodja le ravnilo!

Potek načrtovanja. Izberemo v ravnini slike točko O in iz nje načrtamo tri premice p , q , r . Dani sta poti l in l' prvih dveh letal. Označimo presečišči premic q , r s premico l z B , C in presečišči premic q , r s premico l' z B' , C' . Načrtajmo premici (R,C) in (R,C') . Potem označimo z A presečišče premic (R,C) in p , in z A' presečišče premic (R,C') in p . Končno narišemo

Kako je treba ravnati, če se premici (A, B) in (A', B') ne sečeta na zemljevidu?



S1. 2



PREMISLI IN REŠI

Za nalogo iz PRESEKA V/1 smo prejeli samo 6 rešitev. Je morda vzrok premalo vztrajnosti pri reševalcih? Samo ena reševalka je pripomnila, da se je dobro namučila, preden je razvozljala skrivnostno sporočilo.

Rešitev je: *Verjetno ste že sami ugotovili da je lažje razvozljati daljša sporočila zato morajo biti tajna sporočila kratka in je treba pogosto menjati tajno pisavo.*

Rešitve so poslali: Tomaž Cokan, gimn. Bežigrad; Andreja Habjan, Suhadole, Komenda; Gregor Kavčič, Škofja Loka; Franci Kurnik, PLŠ, Škofja Loka; Nada Zupan, gimn. Trbovlje; Tomaž Zwitter, gimn. Ivan Cankar, Ljubljana;

Izžrebani so bili: Tomaž Cokan, gimn. Ljubljana; Andreja Habjan, Suhadole; Tomaž Zwitter, gimn. Ivan Cankar, Ljubljana;

Za nagrado prejmejo knjigo: A. Vadnal, Funkcije 1.del

Do 15. aprila imate čas, da premislite, rešite in nam pošljete rešitev za naslednjo nalogo:

Jože Dover

Na izpitu moram odgovoriti na pet vprašanj z DA ali NE. Snovi sicer ne obvladam, pač pa vem o vprašanjih tole:

Na več vprašanj moram odgovoriti z DA kot z NE, nobena tri zaporedna vprašanja nimajo enakega odgovora, prvo in zadnje vprašanje pa imata nasprotna odgovora. Slučajno tudi vem, kakšen je odgovor na drugo vprašanje. Vem pa še to, da mi vse, kar sem zgoraj naštel, zagotavlja pravilne odgovore na vseh pet vprašanj. Poišči te odgovore!

Roman Rojko



VESOLJE

1.DEL

Že v starih časih so se ljudje zanimali za svet okoli sebe kot celoto - za *vesolje*. Spraševali so se, kako je nastalo vesolje in kakšno je. Med najstarejšimi zgodbami o nastanku sveta je več kot pet tisoč let stara mezopotamska *Enuma eliš*:

Na začetku je bila brezlična mešanica sladke vode (*Apsu*), morja (*Tiamat*) in vode iz oblakov (*Mumu*). Prva dva sta dala življenje moškim in ženskam naplavinam (*Lahmu* in *Lahamu*), te moškemu in ženskemu obzorju (*Anšar* in *Kišar*), ti pa nebu (*Anu*) in zemlji (*Enki*) v obliki okrogle plošče.

Sumerci so bili dobri opazovalci. Za njihovo deželo je bila voda zelo pomembna. Videli so, kako reka nalaga naplavine ob izlivu v morje, pa so to spoznanje posplošili. Videli so, kako se poraja novo življenje, pa so uredili stvari v pare z moškimi in ženskimi potezami. Nekatere od njih so poosebili z božanstvi.

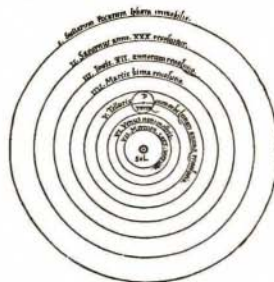
Mnogo pozneje so Grki uvideli, da Zemlja ni plošča, ampak krogla (Aristotel 330 pr.n.š.). Tedaj so Zemljo še vedno imeli za središče vesolja, okoli katerega se gibljejo Luna, planeti, Sonce in krogla zvezd stalnic (Ptolemej 150) (Sl. 1a). Bilo je treba precej časa, da so spoznali : Zemlja je le eden od planetov *Osončja* (Kopernik 1543 , to je trdil že Aristarh 270 pr. n.š.) (Sl. 1b). Še pozneje so ugotovili, da je Sonce le ena od *zvezd*, ki je skupaj z več sto milijardami drugih zvezd članica *Galaksije*. Naša Galaksija je le ena izmed številnih galaksij v vesolju (E. Hubble 1929) (Sl. 2a). Galaksije sestavljajo ja-

Sl. 1: Vesolje iz *Cosmographie* Petra Apiana 1539. V središču je Zemlja, okoli nje se gibljejo Luna, Merkur, Venera, Sonce, Mars, Jupiter, Saturn. Vsako izmed teh teles se giblje med dvema kroglama. Vse obdaja kroglata stalnic (a).

Vesolje iz *De revolutionibus orbium coelestium* (O gibanju nebesnih krogel) Nikolaja Kopernika 1543. V središču je Sonce, okoli njega se gibljejo planeti Merkur, Venera, Zemlja z Luno, Mars, Jupiter, Saturn; to obdaja kroglata stalnic (b).



1b



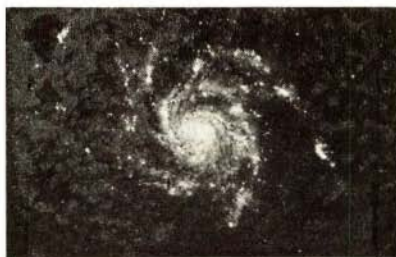
1a



2a₂



2a₁



2b



2a₃

Sl. 2: Krožna galaksija M87 iz jate v ozvezdju Device s tridesetkratnim številom zvezd naše Galaksije (a₁), eliptična galaksija NGC 147 v ozvezdju Kasiopije (v njej ločimo posamezne zvezde) (a₂) in spiralna galaksija M101 v ozvezdju Velikega medveda, podobna naši Galaksiji (a₃) ter jata galaksij v ozvezdju Herkula z okoli sto člani (ne-

te galaksij (Sl. 2b), ki veljajo danes za osnovne gradnike vesolja.

Starih slik o vesolju nismo navedli, da bi se posmehnilo njihovi preproščini. Ob njih se zavemo, da odraža pogled na vesolje splošno razvojno stopnjo kake družbe. Morda se bo današnja slika o vesolju zdela kmalu podobno zastarela. Vendar iz tega ne sledi, da si ni vredno ustvariti slike o vesolju. Tako sliko potrebuje vsakdo, ki poskuša priti do pogleda na svet. Znanost o vesolju - *kozmozologija* - je bila od nekdaj tesno povezana s filozofijo. V zadnjem času prevladuje prepričanje, da utegne dati proučevanje vesolja dragocena spoznanja tudi za fiziko. Zaradi skopih in negotovih podatkov pa je treba pri navajanju ugotovitev glede vesolja biti posebno previden. Nekatere eksperimentalne podatke je mogoče pojasniti na več načinov in se o njih stališča posameznikov še razlikujejo. Vendar ni mogoče tajiti, da se da iz dosedanjih spoznanj sestaviti dokaj uporabno celoto, če jih presojava tako kot večina fizikov in astrofizikov.

Navedimo nekaj osnovnih ugotovitev, ki so sorazmerno trdno podprte z eksperimentalnimi podatki. Po svetlobi z oddaljenih galaksij je mogoče sklepati, da se galaksije *oddaljujejo*. Svetlobo razstavijo po valovnih dolžinah na spekter in ugotovijo, da so črte premaknjene proti rdečemu delu spektra (Sl. 4). Gre za *Dopplerjev pojav*, ki ga je vsakdo opazil pri zvoku. Zvok oddaljujočega se zvočila ima večjo valovno dolžino (je nižji) kot zvok istega zvočila, ko to miruje. Relativna sprememba valovne dolžine $z = (\lambda' - \lambda)/\lambda$ je sorazmerna s hitrostjo oddaljevanja, če je ta majhna v primeri s hitrostjo valovanja. To velja tudi za svetlobo:

$$z = v/c \quad (1)$$

λ' je valovna dolžina izbrane spektralne črte v svetlobi odda-

katere jate jih imajo preko tisoč) v oddaljenosti okoli 350 milijonov svetlobnih let (krožci s po dvema prečnima črtama so slike bližnjih zvezd v naši Galaksiji; črte nastanejo zaradi odboja svetlobe v daljnogledu) (b). Fotografije so posneli s petmetrskim palomarskim reflektorjem.

ljuje se galaksije, λ valovna dolžina ustrezne spektralne črte v svetlobi mirujočega laboratorijskega svetila, v hitrost oddaljevanja v smeri zveznice z Zemljo in c hitrost svetlobe.

Z dolgotrajnim opazovanjem v več korakih so izmerili tudi oddaljenost ne preveč oddaljenih galaksij. Ugotovili so, da je hitrost oddaljevanja sorazmerna z oddaljenostjo l :

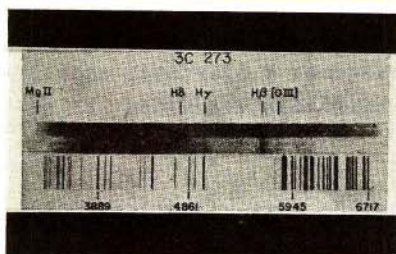
$$v = Hl \quad \text{ali} \quad l = \tau v \quad (2)$$

To je *Hubblev zakon*, H je *Hubbleva konstanta* in $\tau = 1/H$ *Hubblev čas*. Merjenja oddaljenosti galaksij so dokaj nezanesljiva in dve najnovejši merjenji sta dali za Hubblev čas 12 milijard in 19 milijard let. τ pove, koliko časa bi se vesolje razširjalo, če bi se širilo s sedanjo hitrostjo. Produkt $c\tau$, to je 12 milijard svetlobnih let ali 19 milijard svetlobnih let, je ocena za *radij vesolja*.

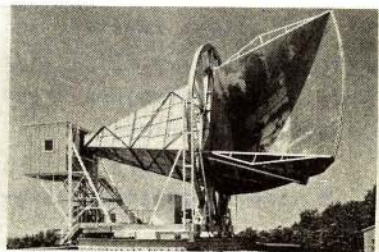
Enačbi (1) in (2) združimo v zvezo

$$l = c\tau z \quad (3)$$

Sl. 3: Premik črt proti rdečemu delu spektra: spodaj spekter laboratorijskih svetil z vodikovo črto H_α z valovno dolžino $\lambda = 4861 \text{ \AA}$, zgoraj: z istim spektroskopom posnet spekter kvazarja 3C 273 s črto H_α pri znatno večji valovni dolžini $\lambda' = 5630 \text{ \AA}$. Relativni premik z meri okoli 0,16, tako da je enačba (1) komaj še uporabna (galaksije imajo manjši relativni premik kot kvazarji, ki so morda zgodnje razvojne stopnje galaksij).



3



4

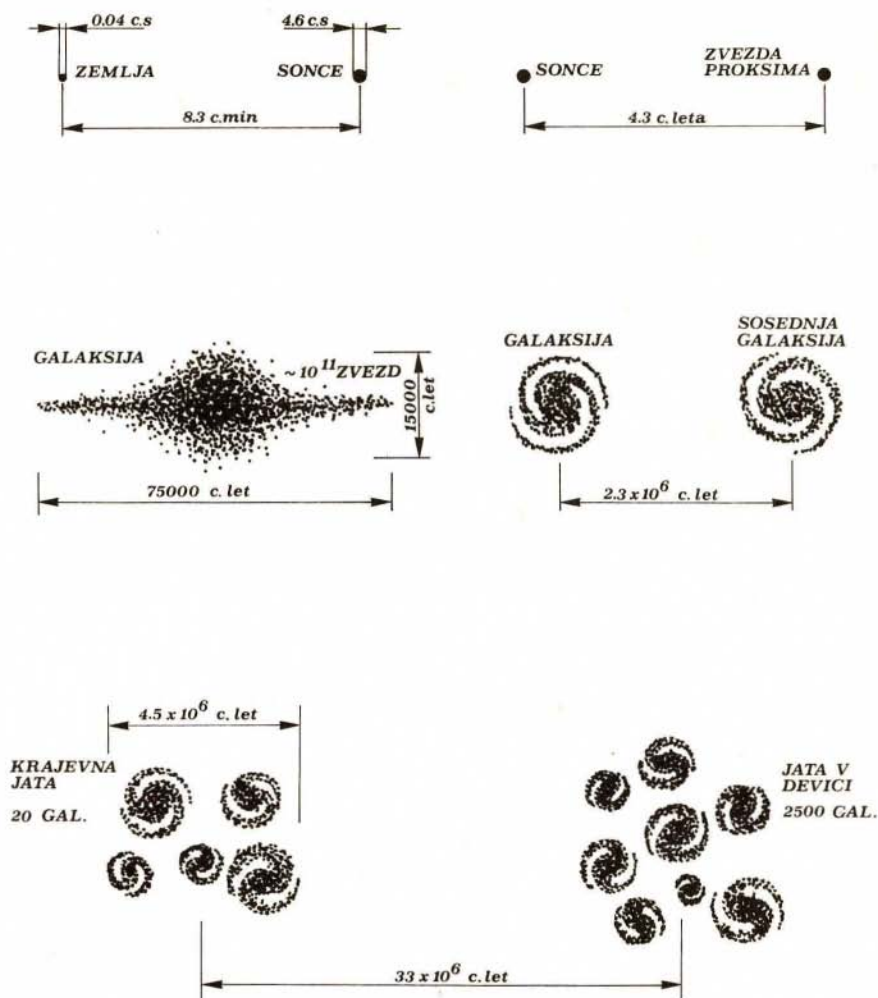
Sl. 4: Velika antena v obliki roga v Bellovih laboratorijih v Holmdellu (ZDA), s katero so prvič zaznali prasevanje. Prvotno so jo namenili za sprejem signalov s satelitov Echo.

Iz nje lahko izračunamo oddaljenost galaksije po izmerjenem relativnem premiku kake spektralne črte, če privzamemo, da veljata enačbi (1) in (2).

Ker se vesolje razširja, je bilo v preteklosti manjše, gostejše in bolj vroče. (Mislimo na toplotno izoliran plin, ki ima tem višjo temperaturo, čim manjša je njegova prostornina). Pri temperaturi nekaj tisoč kelvinov niso več obstojni nevtralni atomi: ionizirajo se na ione in elektrone. V vesolju je bila taka temperatura kakih milijon let po začetku razširjanja. Preden je potekla od začetka razširjanja ena sekunda, je bila temperatura večja kot deset milijard kelvinov. Vesolje je bilo tedaj zelo majhno in snov v njem zelo gosta. Čim dalje gremo v preteklost vesolja, tem bolj nenavadna je snov v njem. Vedenja snovi v takih okoliščinah ne znamo zanesljivo opisati. Pri dovolj gosti snovi odpovedo vsi današnji teoretični prijemi.

Kljub tej negotovosti dokaj zanesljivo sklepamo, da se je začelo vesolje razširjati kot zelo majhna, zelo gosta in zelo vroča *ognjena prakrogla z velikim pokom*. Med razširjanjem se je redčilo in ohlajalo. Snov je postajala vse manj nenavadna in naposled so se v njej ioni in elektroni združili v atome. Naključne neenakomernosti so, če so bile dovolj velike, z gravitacijsko silo pritegovale še več snovi. Tako so nastale galaksije in v njih zvezde. Lahki elementi - razen vodika in helija - so nastali šele v zvezdah z zlivanjem jeder vodika. Težki elementi pa so nastali ob eksplozijah zelo velikih zvezd in so tedaj zašli v medzvezdno snov. Iz te so zopet nastale zvezde. Nekatere od teh imajo planete in vsaj na enem izmed njih se je razvilo življenje.

Izmerjena pogostost elementov v Osončju se sklada z orisanim razvojem vesolja. Da se je vesolje razvilo iz ognjene prakrogle, pa namiguje *prasevanje*. To je elektromagnetno valovanje, ki prihaja na Zemljo iz vseh strani vesolja enakomerno in ki je takšno, kot da bi ga sevalo črno telo s temperaturo okoli 3 K. Prasevanje je preostanek sevanja z zgodnje razvojne stopnje vesolja. Temperatura, ki ustreza sevanju, se je zaradi



Sl. 5: Velikostne stopnje vesoljskih teles in oddaljenosti med njimi. Oddaljenosti so navedene v svetlobnih letih ($1 \text{ c. leto} = 9,3 \cdot 10^{12} \text{ km}$), svetlobnih minutah ($1 \text{ c. min} = 18 \text{ milijonov km}$) in svetlobnih sekundah ($1 \text{ c. s} = 300 \text{ 000 km}$).

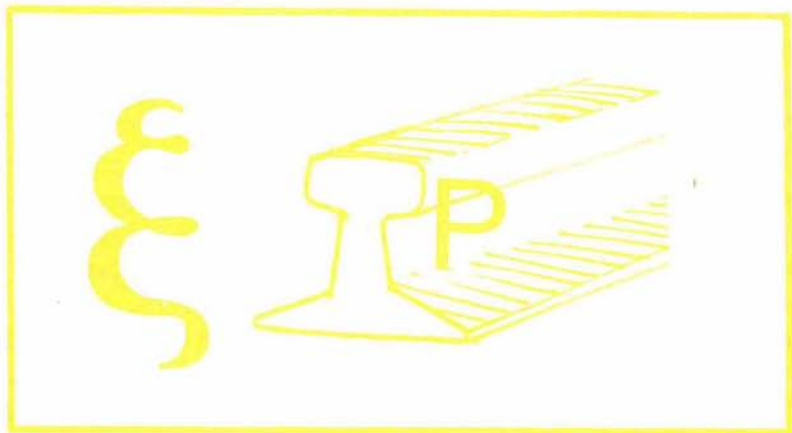
razširjanja vesolja do danes znižala na okoli 3 K.

V prasevanju so najmočnejše zastopani radijski valovi z zelo kratkimi valovnimi dolžinami okoli milimetra. Radijske valove z valovno dolžino od več deset centimetrov do dela centimetra je mogoče zaznavati kar na zemeljskem površju (Sl. 5). Pri manjših valovnih dolžinah moti sevanje molekul vode, kisika in ozona iz ozračja. Pri teh valovnih dolžinah merijo z napravami, ki jih dvignejo baloni na veliko višino.

Opazovanja so pokazala, da so jate galaksij in oddaljeni radijski izviri - kvazarji - enakomerno porazdeljeni po nebu. To spoznanje in dejstvo, da prihaja prasevanje iz vseh delov vesolja enakomerno, so posplošili v trditev: Vesolje je v danem trenutku enako, opazovano iz katerega koli dela in v kateri koli smeri. Ta trditev, ki ji učeno pravimo *kozmoško načelo*, velja seveda samo na dovolj velikih razdaljah. Na razdaljah do več deset milijonov svetlobnih let vesolje ni enakomerno (Sl. 5). Pač pa je, kot vse kaže, enakomerno na razdaljah sto milijonov svetlobnih let in več.

Janez Strnad

4



ZANIMIVOSTI IZ ASTROFIZIKE

Ko ste gledali zvezde, ste se gotovo kdaj vprašali, kakšne so od blizu in zakaj svetijo. Ljudje so tisočletja ugibali o naravi zvezd, vendar so ta vprašanja morala počakati na odgovor vse do preteklega stoletja. Do takrat so bile zvezde, vsaj za večino astronomov, objekti, ki niso imeli nič skupnega z naravo, kot so jo poznali na Zemlji in zato vprašanja o snovni zgradbi zvezd niso imela pravega smisla.

Prvi namig o sorodnosti snovi na Zemlji in v zvezdah je dalo Newtonovo odkritje gravitacijskega zakona. Ta zakon pravi, da je gravitacijska sila med dvema telesoma sorazmerna s produktom mas obeh teles, deljenim s kvadratom razdalje med njima. Vesoljskim telesom - tako Zemlji kot Soncu in planetom - je s tem zakonom pripisan skupen pojem mase, to je količine, ki meri "množino snovi" v telesih.

Zakon gravitacije pa o zgradbi snovi ni povedal nič več. Šele 1859 je nemški fizik Kirchhoff napravil zanimiv poskus. Pred izvir svetlobe (svečo) je postavil stekleno kiveto, v kateri so bile natrijeve pare, nato pa je s prizmo razklonil svetlobo, ki je prihajala skozi kiveto. V rumenem delu spektra te svetlobe je opazil temno črto. Če je natrijevo paro segreval, je bila temna črta vse šibkejša, ko pa je temperatura pare presegala temperaturo plamena, se je na mestu, kjer je bila prej temna črta, pojavila svetla črta. To ga je prepričalo, da je natrijeva para odgovorna za nastanek temne (absorpcijske) ali svetle (emisijske) spektralne črte v spektru.

Še pred Kirchhoffom so znanstveniki s prizmo razklonili svetlobo s Sonca in dognali, da se v spektru pojavljajo temne črte. Kirchhoff je ugotovil, da je ena od izrazitih temnih črt v spektru sončne svetlobe na istem mestu kot črta, ki jo je opazil pri svojem poskusu z natrijevimi parami. Odtod je sklepal, da nastane temna črta v sončnem spektru zato, ker prihaja svetloba iz vroče notranjosti Sonca skozi hladnejše zunanje plasti,

ki vsebujejo tudi natrijevo paro. Potem so se podobna odkritja kar vrstila. Na Soncu so "našli" vse elemente, ki jih najdemo tudi na Zemlji. Razlika je le v tem, da so elementi na Soncu v plinastem stanju in so tako vroči, da se posamezni atomi ne morejo družiti v molekule kemičnih spojin kot na Zemlji.

Ta spoznanja so dvignila tančico skrivnosti z zvezdne snovi in znanstvenikom se je ponujal sklep, da veljajo tudi za zvezdno snov naravni zakoni, ki so jih odkrili na Zemlji. Iz astronomije in fizike je zrasla nova veja znanosti - astrofizika, ki je poskušala z uporabo fizikalnih zakonitosti pojasniti lastnosti zvezd. Začetni uspehi so bili ohrabrujoči, vendar pa ni manjkalo tudi perečih problemov, za katere se je zdelo, da jih nikakor ni mogoče rešiti.

Predaleč bi nas zaneslo, če bi hoteli slediti zgodovini astrofizike, zato si oglejmo le nekatere zanimivosti.

Med vprašanja astrofizike, ki so bila dolgo nerešena, je spadalo vprašanje o izvoru energije v zvezdah. Izmerili so, da prihaja s Sonca na vrh Zemeljskega ozračja svetlobni tok okrog 1300 W/m^2 *. Iz podatka, da je Zemlja 150 milijonov kilometrov oddaljena od Sonca, lahko izračunamo, da seva Sonce v prostor okrog $3,7 \cdot 10^{26} \text{ W}$ (to je *izsev* Sonca). Izračunajmo še, koliko moč proizvaja v povprečju vsak kilogram snovi v Soncu. Ker je masa Sonca približno $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ** , sledi, da proizvaja vsak kilogram snovi v povprečju le okrog $1,9 \cdot 10^{-4} \text{ W}$. To pa je zelo majhna moč, saj troši npr. žarnica žepne baterije okrog 1 W. Potrebovali bi torej okrog 5 ton sončne snovi, da bi poganjali navadno baterijsko žarnico!

Sonce proizvaja na enoto mase zelo malo energije in je prav

* Črna plošča s površino 1 m^2 , ki je postavljena tako, da pada nanjo sončna svetloba pravokotno, sprejme vsako sekundo okrog 1000 W s energije, preostalih 300 W s pa večinoma odbije atmosfera. Prav to dejstvo izkoriščajo razne sončne peči.

** Maso Sonca lahko izračunamo iz Newtonovega gravitacijskega zakona, če poznamo oddaljenost Zemlje od Sonca, periodo kroženja Zemlje okrog Sonca ter gravitacijsko konstanto. Periodo kroženja (1 leto) so poznali z veliko natančnostjo že stari Egipčani. Gravitacijsko konstanto je prvi izmeril Cavendish 1798, oddaljenost pa je tudi že znana.

šibko v primeri z žepno baterijo. Primerjava pa se hitro obrne v korist Sonca, če razmislimo, koliko časa sveti Sonce in kako dolgo sveti žepna baterija. Vzemimo, da tehta vložek žepne baterije le 10 g, sveti pa recimo 5 ur. Hitro lahko izračunamo, da bi s petimi tonami vložkov za žepno baterijo lahko svetili približno 285 let, Sonce pa sveti očitno mnogo, mnogo dlje.

Ena prvih ugank astrofizike je bila, kako uspe Sonce tako dolgo proizvajati tolikšne energije. Nobeden od mehanizmov, ki so jih poznali v preteklem stoletju na Zemlji (baterije in akumulatorji, mnogo uspešnejše gorenje premoga, nafte itd.), ne bi vzdržal primerjave s Soncem. Angleški astrofizik preteklega stoletja Sir A.S. Eddington je menil, da sveti Sonce na račun svoje gravitacijske energije. Mislil je, da se zelo počasi krči; gravitacijska sila, ki deluje na posamezne plasti Sonca, naj bi zato oddajala delo. S tem privzetkom je lahko ocenil današnje starost Sonca (račun lahko ponovi tudi bralec, če privzame, da je Sonce od začetka svetilo z današnjim izsevom in da je masa homogeno porazdeljena po notranjosti) na 30 milijonov let. To se je zdela že kar častitljiva doba in Eddington je mislil, da je dobro zadel starost Sonca. Geologi pa nikakor niso bili tega mnjenja. Trdili so, da so nekatere kamnine na Zemlji stare več milijard let in je nesmiselno govoriti, da bi bilo Sonce toliko mlajše od Zemlje.

Včasih tudi zelo vroča razprava o tem vprašanju je dobila svoj epilog šele malo pred drugo svetovno vojno z odkritjem jedrske energije. Izračunali so, da bi lahko Sonce, v katerem se zliva vodik v helij, gorelo (mislimo seveda gorenje v smislu jedrskih reakcij) okrog sto milijard let, preden bi se ves vodik spremenil v helij.

Res velike korake pa je astrofizika začela delati v petdesetih letih tega stoletja. Znanstveniki so imeli že toliko eksperimentalnih podatkov, da so mogli napraviti računske modele zvezd. Že prvi modeli so dali zelo lepe rezultate. Če so vzeli, da so zvezde sestavljene v glavnem (75% ali več) iz vodika, ki v njihovih sredicah pri kakih petnajst milijonih sto-

pinj gori v helij (podatke za odvisnost hitrosti gorenja od temperature in gostote so dobili od jedrskih fizikov), so mogli napovedati radije zvezd, njihovo temperaturo ter izsev v odvisnosti od mase. Tako izračunani podatki so se lepo ujemali z izmerjenimi.

Pokazalo se je, da lahko potekajo jedrske reakcije le v središčah zvezd, kjer temperatura preseže deset milijonov stopinj. Sredice zajemajo le okrog desetino vse mase zvezde in zato lahko Sonce uporablja vodik kot gorivo kakih devet milijard let. Po ocenah geologov, ki so študirali kamnine na Zemlji in na Luni ter po raznih ocenah značilnosti na površini Marsa in Merkurja sklepajo, da je današnja starost sončnega sistema in s tem tudi Sonca okrog 4,5 milijarde let. Po teh računih ima Sonce v svoji sredici še za štiri do pet milijard let goriva.

Z računskimi modeli zvezd, ki jih obdelujejo z elektronskimi računalniki, so uspeli zasledovati tudi življenje zvezd. Ugotovili so, da nastajajo zvezde iz zelo velikih (nekaj svetlobnih let v premeru) a zelo redkih (nekaj atomov v cm^3) oblakov medzvezdnega plina, ki so v naši Galaksiji in tudi v drugih galaksijah. Oblaki se zaradi lastne gravitacije najprej zelo počasi nato pa hitreje krčijo in segrevajo. Ko se dovolj segrejejo, so še vedno zelo veliki in novo nastale *protozvezde* zasvetijo kot nekaj tisoč Sonc.

Meglica v ozvezdju Oriona je velik oblak plina, prav takšen, kakršnega so astrofiziki iskali kot rojstni kraj zvezd. V oblaku je že nekaj "pravkar" rojenih zvezd ("pravkar" seveda pomeni, da zvezde niso starejše od nekaj deset milijonov let). Razen tega pa je tam še veliko plina, ki bo lahko služil kot surovina za nastanek še novih protozvezd. Seveda so ta rojstni kraj zvezd astronomi že dalj časa opazovali in 1954 se je v oblaku pojavila zvezda, ki je prej še ni bilo. Opazovanja so v veliko zadoščenje astrofizikov potrdila njihova pričakovanja.

Tudi staranje zvezd so uspeli obravnavati z računskimi modeli in tudi na tem področju je uporaba fizikalnih metod in zakonov prispevala k razjasnitvi marsikaterega pojma. Uspeli so pojas-



Sl. 1: Meglica v Orionu (M42). Za pogled je to najlepša meglica ob zimskih večerih. Vidna je v meču ozvezdja Orion že z manjšim daljnogledom.



Sl. 2: Meglica M16 je - podobno kot meglica v Orionu - rojstni kraj protozvezd. Opazujemo jo lahko v jesenskih večerih v ozvezdju Kače blizu meje z ozvezdjem Ščita; najbližja svetla zvezda je gama v Ščitu.

niiti nastanek belih pritlikavk - zvezd, ki so komaj tolikšne kot Zemlja, a njihova masa je skoraj tolikšna kot Sončeva. Trideset let pred odkritjem so napovedali obstoj nevtronskih zvezd (glej Presek 0(1972)8). Te so še dosti bolj nenavadne kot bele pritlikavke, saj je masa, ki ustreza masi Sonca, zbita v kroglo z radijem 10 km. Danes pa burijo duhove črne luknje, ki so še desetkrat manjše od nevtronskih zvezd.

Tukaj nimamo prostora, da bi se podrobneje ukvarjali s temi zanimivimi primeri. Vidimo pa lahko, da je astrofizika v zadnjih petdesetih letih napravila velikanske korake, ki so bistveno spremenili našo sliko o vesolju. Človek bi skoraj dobil vtis, da je večina problemov že rešenih.

Seveda ni tako. Celo Sonce, za katerega smo že nekaj let verjeli, da ne skriva novih presenečenj, je v zadnjem času odprlo nova vprašanja. V Preseku boste brali, da so poskušali izmeriti tok nevtrinov s Sonca. Poskus kaže, da je tok nekajkrat manjši od napovedanega. Zakaj je tako, nam še danes ni jasno. Večina astrofizikov je naprej verjela, da je poskus merjenja toka nevtrinov zaradi izredne zahtevnosti nenatančen in mu zato niso pripisovali posebnega pomena. Po dolгих letih ponavljanja tega poskusa pa mu vse bolj zaupamo.

Razen tega je bila lani narejena še ena meritev v zvezi s Soncem. Izmerili so, da površina Sonca radialno niha z amplitudo okrog 10 km in s periodo ene ure. Amplituda nihanja je za Sonce, katerega premer je 700 000 km, zelo majhna in zato samo nihanje astrofizikov prav nič ne preseneča - celo čudili bi se, če bi bilo Sonce popolnoma mirno. Preseneča pa perioda nihanja. Današnji modeli Sonca namreč napovedujejo zanjo slabe tri ure in ne eno uro kot kaže meritev. Tudi ta meritev je, podobno kot tista z nevtrini, zelo zahtevna, pa tudi rezultate bi se morda dalo tolmačiti na več načinov.

Danes se že ponujajo nekatere možnosti za rešitev omenjenih problemov. Če bi bila temperatura v središču Sonca le malo nižja - kakih dvanajst milijonov stopinj namesto petnajst, bi bil rešen tako problem nevtrinov, kot problem periode nihanja. Na bolj zanesljiv odgovor pa bomo morali čakati še nekaj let, da bo mogoče natančno preveriti vse rezultate meritev in računov.

Take in podobne težave navadno vzpodbudijo razvoj znanosti. Že večkrat se je zgodilo, da je njihova rešitev pomenila odkritje, ki je bilo pomembno za razumevanje lastnosti snovi tako v zvezdah kot na Zemlji.

Andrej Čadež

NA TRGU kupčuje 8 trgovcev, vsak s polno mošnjo cekinov. Nekdo med njimi uporablja cekine, ki so za 1 gram lažji od pravih cekinov, ki tehtajo 10 gramov.

Sodnik išče nepridiprava. Kako bo z enim samim tehtanjem cekinov odkril sleparja?

Danijel Bezek



MATEMATIČNO RAZVEDRILO

PET PALINDROMNIH REBUSOV

Palindromni rebus (palindróm - grško palindromos - nazaj tekoč) rešujemo kot navadni rebus, rešitev pa dobimo tako, da kombinacijo elementov, ki jo prikazuje risba, preberemo nazaj - to je od desne proti levi.

Primer: narisani sta gledališki loži, vsaka je označena s črko F. To kombinacijo lahko opišemo na dva načina: a) F LOŽI in b) LOŽI F. Prva kombinacija, brana nazaj, ne da smiselne besede (IZOLF), druga kombinacija pa - FIZOL in to je rešitev rebusa.

V tem Preseku je posejanih pet palindromnih rebusov. Poiščite jih in jih rešite - rešitve so s področij, ki jih obravnava Presek. Če vam rebusov ne bo uspelo rešiti, pogledjte rešitve.

REŠITVE

165.str.: INZENIR - rine (oseba) z (vozíček, označen z znakom)
ni; (brano nazaj).
171.str.: KVADER - (dva) reda (=šolski ocení) v (črki) K; (bra
no nazaj).
130.str.: MILION - (trije) noji, (reka) Lim; (brano nazaj).
151.str.: PRITISK - (grška črka) ksi, tír P; (brano nazaj).
171.str.: SATURN - (črka) N, ruta S; (brano nazaj).

Pavle Gregorc

FIGURATIVNA ŠTEVILA

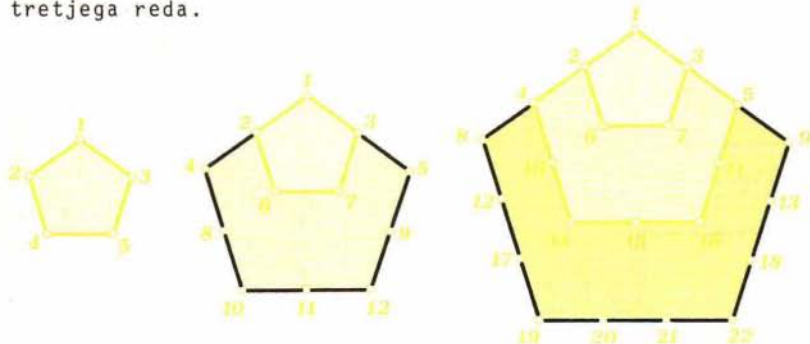
Figurativna števila predstavljajo usklajenost med geometrijsko obliko in števili.

Ogledali si bomo primer figurativnih števil, ki jih dobimo tako, da z zaporednimi naravnimi števili oštevilčimo:

a) oglišča pravilnih mnogokotnikov (tako dobimo *osnovna n-kotniška figurativna števila*)

b) če dvakrat, trikrat, ... , m -krat povečamo dolžino stranic osnovnega mnogokotnika in ohranimo poleg osnovnega figurativnega števila še nadaljnje predhodnike, dobimo figurativna števila *višjih redov*.

Kot primer imamo na sliki osnovno petkotniško figurativno število, sledijo pa mu figurativno petkotniško število drugega in tretjega reda.



Zanima nas, koliko naravnih števil potrebujemo, da sestavimo n -kotniško figurativno število poljubnega (m -tega) reda.

Rešitev: V osnovnem n -kotniškem številu nastopa n naravnih števil. V figurativnih številih višjih redov nastopajo naravna števila, ki jih ima že predhodnik $(m - 1)$ -tega reda in še števila, ki jih pridobimo z novimi točkami na račun povečanja. Teh točk je: $(n - 2)m + 1$. Skupaj ima n -kotniško figurativno število m -tega reda v svoji strukturi: $n + ((n - 2)2 + 1) + ((n - 2)3 + 1) + \dots + ((n - 2)m + 1)$ ali:

$$n + (n - 2) \left(\frac{m(m + 1)}{2} - 1 \right) + (m - 1)$$

naravnih števil.

Danijel Bezek

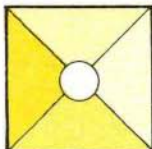
K R I Ž A N K A

[illegible]

"GEOMETRIJSKI LIKI"

LIVER WIST					TRČENJE	VELIKO REŠETO	RIMSKI BOG LJUBEZNI	GLAVNA VRATA	IME ČRKE N	ZVEZA TABORNIKOVI
0					T	R	A	P	E	Z
	NIKOLAJ KOPERNIK	OTOK V KIKLADIH	POPRAVILO							
T	N	I	K	PLAST TRANSI- STORIJA	R		M	O	N	T
RAVLJA- TISKOV- NAPAK	K	O	R	E	K	K	O	R		
VIRA ALJEVA	VEČJA RIBA	5	O	O	ARTHUR (KRAJŠE) KOZAŠKI BIČ	A	R	T		
3	ŠIRNA TRAVNATA RAVAN	ANGLEŠKI BRINOVEC	G	I	N	PODZE- MELJSKA ŽELEZNICA	ALAIN DELON ILJUŠIN	A	D	CANKAR IVAN
K	R	HRVAŠKI PESNIK (VLADIMIR)	PRIPADNIK TAMILOV	T	A	M	I	L	E	C
FRED OBEL	A	N	VOGAL		G	E	L	LITIJ	L	I
OBOKA AVEST			SKAND. M.IME					OBRAZNI MOZOLJI		
<	V	A	D	R	A	T	ATMOSFERA	A	T	SMUČI (MEDNAR.)
0	A	Z	A	JANEZ ROHAČEK SREDIŠČE VRTENJA	J	R	DEL CELOTE TELEVIZIJA	PK	00	45
1	N	O	G	O	K	O	T	N	I	K
7	A	R	SARAJEVO	S	A	IZSUŠENA STRUGA V PUŠČAVI	V	A	O	I

Sestavil Pavle Gregorc



PISMA BRALCEV

Opravičiti se moramo zaradi zakasnelih odgovorov na vaša pisma. Upamo, da bomo v tej številki odgovorili na vsa pisma in tako pokazali našim zvestim bralcem, kako so nam dragocena njihova mnenja.

Karmen Turk iz Pridvora pri Kopru nam je pisala lansko leto takole:

Dragi Presek in njegovi zvesti bralci! Na Presek sem naročena prvo leto in zelo rada rešujem matematične naloge, ki so primerne zame. Tudi v naši družini je Presek zelo dobrodošel, saj se ob reševanju zapletenih nalog zberemo vsi skupaj ter tekmuje, kdo bo prej rešil nalogo. Zadovoljna sem, če način reševanja ugotovim jaz. Presek zelo rada prebiram, ker najdem v njem mnogo zanimivih in poučnih stvari, ki poglobljajo moje znanje. Najbolj všeč so mi naloge iz Bistroidca in Premisli in reši. Preseku želim ostati zvesta tudi vnaprej.

Draga Karmen, v želji, da najdeš ob Preseku še vedno dosti veselja in da si nam oprostila, ker ti nismo tako dolgo odgovorili, se prav lepo zahvaljujemo za iskrene pozdrave in želje. Piši nam še! Gotovo si odšla po končani osnovni šoli na tisto pot, kjer boš delala z veseljem.

Maja Hašimović iz Koroške Bele nam piše:

Dragi Presek, zelo rada rešujem naloge, ki jih objavljaš. Prebiramo jih tudi pri dodatnem pouku. Po vzorcu naloge $5 = 5$ sem "potuhtala" nalogo $10 = 10$ in ti jo pošiljam. Mislim in upam, da ti bo všeč.

Vztrajnost pri delu nam lahko pomaga do pravih rešitev. Če boš kdaj sestavila zanimivo nalogo, nam jo le pošlji. Prav to bi želeli, da bi čim več bralcev prispevalo svoje članke in želje, ker bi le takrat lahko rekli, da je Presek naš.

Mojca Žagar iz Ljubljane nam je poslala lepo rešitev in nam zaželela, naj bi Presek ostal še dolgo tako zanimiv in kratkočasen. Pismo nadaljuje tako:

Presek prebiram že od začetka, čeprav sem si ga izposojala in zdaj, ko sem sama naročnik, sem zelo zadovoljna z njim. Le tako naprej!

Hvala Mojca. Tvoje zadovoljstvo nam je v veliko veselje in nam bo spodbuda pri iskanju zanimivih nalog in člankov. Ali se boš še kdaj oglasila? Bodi lepo pozdravljena!

Jože Podlesek, Seberovci v Prekmurju, nam je tudi poslal rešitev Premisli in reši, zraven pa je še napisal:

Oglašam se vam prvič, čeprav sem že več let naročen na Presek. Zelo mi je všeč, saj vsebuje veliko zanimivih nalog iz fizike, matematike in astronomije. Predlagal bi le, da bi v eni izmed prihodnjih številk namenili nekaj prostora tudi atomiki. Mislim, da bi bilo zelo koristno, da bi Presek izhajal vsak mesec.

Prav imaš Jože! Tudi mi želimo isto in v ta namen bi ti radi zaupali glavno oviro. Mislimo, da boš razumel, kakor tudi mnogi bralci, ki imajo isto željo, da bi za več števil Preseka rabili več člankov, več nalog in s tem več sodelavcev. Upamo, da se bodo oglasili novi sodelavci s svojimi prispevki, ki bi razveselili naše bralce in te lepo pozdravljamo.

Sonja Lavrič, GPS Ljubljana, nam je ob poslani rešitvi napisala:

Na Presek sem naročena že od vsega začetka in moram priznati, da me še ni razočaral. Mislim, da je to ena izmed redkih revij, ki ne pozna laži in izmišljotin. Vneto rešujem vse zastavljene naloge in upam, da se kvaliteta revije ne bo poslabšala. Veliko sreče!

Znanost mora biti v službi resnice. Zato tudi matematika, fizika in astronomija ne prenesejo laži. Vsaka s svojega vidika proučuje naravne pojave, na katere želi odgovoriti jasno z da ali ne. To je lepota, ki vsem ljubiteljem resnice prinaša veselje. Veseli smo, da ti je Presek vzbudil to lepo spoznanje. Sonja, tudi mi ti želimo srečo. Morda nam boš kdaj znala zastaviti kakšno zanimivo nalogo?

Anica Štiberc iz Arclina pri škofji vasi nam je poslala rešeno križanko in med drugim pravi, da jih tako rada rešuje, da si jih želi vsak mesec.

Anica, le tako naprej, dokler ne boš odkrila postopek za sestavljanje novih križank. V upanju, da nam boš še pisala, ti želimo veliko uspeha v tem odločilnem šolskem letu.

Marinka Draginja iz Ljubljane nas je razveselila s svojim odkritosrčnim pisanjem. Med drugim pravi:

Z veseljem sledim matematičnim, še raje pa fizikalnim člankom in nalogam. Naloge zelo rada rešujem, posebno tiste, kjer je priložena rešitev. Upam, da se vam bom še kdaj oglasila, morda z rešeno nalogo ali s krajšim člankom. Želela pa bi in mislim, da ni to samo moja želja, da bi Presek izhajal bolj pogosto, saj najdeš v njem zelo veliko zanimivega, prijetnega branja in nalog.

Marinka, hvala ti, da to pismo nisi odložila v domači arhiv. Z veseljem pričakujemo tvojih prispevkov kakor tudi od vseh drugih, da bi ugodili mnogim našim bralcem s pogostejšim izhajanjem.

Branko Hrovat iz Domžal piše:

Dragi Presek! Letos sem se prvič naročil na to revijo. Naloge se mi zdijo zelo primerne za osme razrede. Zelo rad rešujem naloge zlasti, če so priložene rešitve. V Preseku pogrešam kratke življenjepise znanih mož. V vašem Preseku sem prebral, da želite tudi od nas bralcev kakšne naloge pa vam jo tokrat pošiljam ter vam želim obilo uspeha pri urejanju.

Odzval si se na našo prošnjo. Hvala za nalogo. Branko, sedaj lahko rečeš naš in ne vaš Presek, kajti tvoje pismo je že prispevek, ki te trdneje vključuje v skupno sodelovanje za boljši Presek. Pristrčen pozdrav! Oglasi se kmalu!

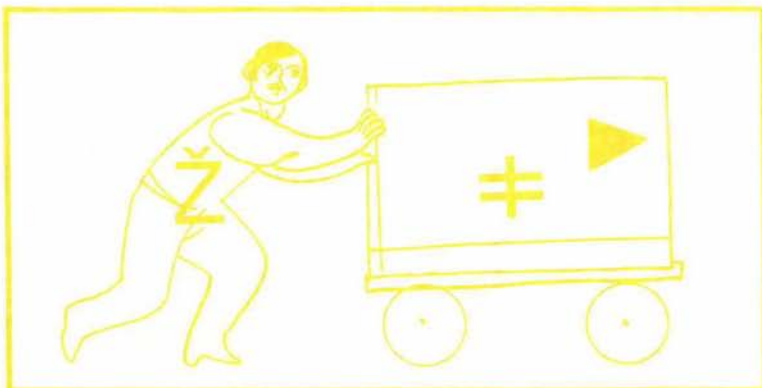
Matilda Lenarčič

BESNIČNA IZ ŠOLE

Profesor je v drugem letniku srednje šole varašal dijaka, kolika je a^0 . Ker ni dobil odgovora, je takole safiivo razložil: "Kdor ima zgoraj prazno (nilta v eksponentu), ne more dobiti druge ocene kot $a^0 = 1^0$. Ni znano, ali je profesor izrek v tej uni tudi praktično uporabil."

M. L.

1





NALOGE-TEKMOVANJA

VEGOVCEM V ŠOLSKEM LETU 1977/78

Tale kratek zapis je namenjen predvsem starim in novim Vegovcem, ki se bodo letos prvič srečali na tekmovanjih za Vegova priznanja: bronasta, srebrna in zlata.

Nekateri ste bili z dosedanjimi uspehi zadovoljni, drugi manj, nekateri pa ste bili celo razočarani. Bodi kakor koli, čas neusmiljeno beži in letošnje šolsko leto bo kaj hitro pri kraju. V mesecu maju 1978 se boste spet pomerili na "bojnem polju" matematike.

Žal je na Slovenskem odločno premalo učencev, ki so deležni dodatnega pouka iz matematike ali matematičnega krožka. Tisti učenci, ki nimate dodatnega pouka ali krožka, ne smete obupati! Droben napotek, ki tudi vodi do uspeha: redno delaj pri pouku, rešuj dodatne naloge - težje iz posameznih poglavij, za napotke in preverjanje prosi učitelja! Učitelj ti lahko tudi svetuje ustrezno literaturo - zbirke nalog.

Nasvidenje v maju 1978!



Koledar VIII. tekmovanja
za VEGOVO PRIZNANJE
BRONASTO - šolska tekmovanja
do 13. maja 1978
SREBRNO - občinska tekmovanja
20. maja 1978
ZLATO - republiško tekmovanje
27. maja 1978

Pavle Zajc

Grb J. Vege

18. zvezno tekmovanje srednješolcev v matematiki je bilo v nedeljo, 24. aprila v Velenju. Organiziralo ga je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Z veliko prizadevnostjo pa sta ga odlično izvedla aktiva profesorjev velenjske gimnazije in Rudarskega šolskega centra.

Slovenijo je zastopalo 14 dijakov, ki jih je izbrala tekmovalna komisija na republiškem tekmovanju v Novem mestu. V ekipo so se uvrstili: Boris Majaron, Maks Romih, Joni Žnidaršič in Bojan Hvala za 1. razred; Jure Piškur, Mark Pleško, Ferdo Humski in Janko Petrovčič za 2. razred; Edmond Rusjan, Miha Florjanič, Božo Vihar in Andrej Kores za 3. razred in Gorazd Cvetič ter Matjaž Vidmar za 4. razred.

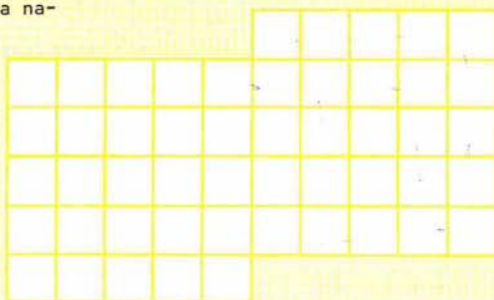
Tekmovalci so se zbrali v Ljubljani že nekaj dni pred tekmovanjem, kjer so imeli tri dni skupne priprave; vodili so jih bivši tekmovalci, ki študirajo na odseku za matematiko.

Tekmovanje se je pričelo v nedeljo ob 9^h v prostorih Rudarskega šolskega centra s pozdravnim nagovorom ravnatelja velenjske gimnazije prof. B. Glavača; zbrane tekmovalce pa sta v imenu DMFA pozdravila in jim spregovorila nekaj spodbudnih besed dr. N. Prijatelj in dr. S. Pahor. Zatem je bilo tekmovanje, ki je trajalo štiri ure. Tekmovalna komisija pod predsedstvom slovenskega predstavnika prof. M. Vagaje je na dvodnevem zasedanju v petek in soboto pripravila naslednje naloge:

1. RAZRED:

- Poišči celoštevilčne rešitve enačbe $p(x+y) = xy$, če je p dano praštevilo! (20 točk)
- Če so a, b in c naravna števila in obstaja med njimi zveza $a^2 + b^2 = c^2$, sledi, da je $60 | abc$. Trditev dokaži! (30 točk)
- Na straneh kvadrata $ABCD$ so dane točke P, Q in R , ki delijo njegov obseg na tri enake dele. Naj bo O središče kvadrata. Dokaži, da je vsota dolžin daljic PQ, QO in RO najmanjša, če je ena od točk P, Q ali R razpolovišče stranice kvadrata, na kateri leži! (30 točk)

4. Ali je mogoče plošči 5×5 , ki sta prislonejeni druga ob drugo, kot kaže slika, pokriti z dominami 2×1 ? (Domina pokriva natanko dve sosednji polji) (20 točk)



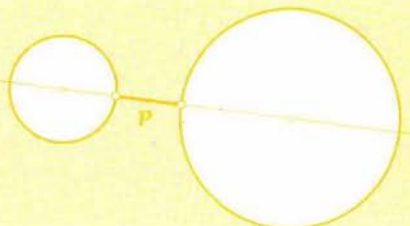
2. RAZRED:

- Poišči realne rešitve enačbe $x = \sqrt{x-1/x} + \sqrt{1-1/x}$! (25 točk)
- Na straneh $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{CA}$ trikotnika ABC so dane točke P , Q in R , tako da je $\overline{AP} = \lambda \overline{AB}$, $\overline{BQ} = \lambda \overline{BC}$ in $\overline{CR} = \lambda \overline{CA}$, ($1/2 \leq \lambda < 1$). Dokaži, da obseg trikotnika PQR ni večji od obsega trikotnika ABC pomnoženega z λ ! (25 točk)
- Danih je dvajset naravnih števil $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$, ki zadoščajo pogoju: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{20} < 70$. Dokaži, da so med razlikami $a_j - a_k$ ($j > k$) vsaj štiri enake! (25 točk)
- Dokaži, da za vsako naravno število $n > 1$ velja neenakost $\sqrt{n} < (3/2)(5/4)(7/6)(9/8) \dots (2n-1)/(2n-2) < \sqrt{2n}$! (25 točk)

3. RAZRED:

- Naj bodo $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) pozitivna števila, ki so manjša kot 1. Dokaži, da velja neenakost $\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \geq k\sqrt{2}$ (30 točk)
 - Poišči vsa naravna števila, katerih kvadrat je enak peti potenci vsote njegovih cifr (v desetiškem zapisu)! (20 točk)
 - Krožnica, ki je včrtana pravokotnemu trikotniku s hipotenuzo dolžine c , se dotika krakov ostrega kota v točkah M in N . Dokaži, da je $\overline{MN} \leq (2\sqrt{3}/9)c$! (20 točk)
 - Naj bo D množica vseh diagonal pravilnega 100-kotnika. Ali obstaja podmnožica E množice D s sledečimi lastnostmi:
 - diagonale iz množice E nimajo skupnih notranjih točk;
 - iz vsakega oglišča 100-kotnika poteka sodo število diagonal iz množice E ;
 - diagonale iz E delijo 100-kotnik na trikotnike? (30 točk)
4. RAZRED:
- Če je $a_i = n! + i$, tedaj za vsak $n \geq 2$ in za vsak k ($1 \leq k \leq n$) obstaja vsaj eno tako praštevilo p , ki deli a_k in ne deli a_j za vsak $k \neq j$ ($1 \leq j \leq n$). Trditev dokaži! (25 točk)
 - Pokaži, da ploščina kvadrata, ki je v celoti znotraj danega trikotnika,

- ne presega polovične ploščine trikotnika! (25 točk)
3. Na koliko načinov je mogoče zapisati število $6k$ ($k \in \mathbb{N}$) kot vsoto treh naravnih števil? (Zapisov, ki se razlikujejo samo v vrstnem redu suman-
dov, ne jemljemo za različne) (25 točk)
4. V ravnini je danih 100 točk, ki
tvorijo množico S . Dokaži, da
obstaja končno mnogo krogov, za
katere velja:
- vsaka točka iz S je vsebovana
v notranjosti enega od krogov;
 - krogi so disjunktni, razdalja
med poljubnima dvema je večja
kot 1;
 - vsota premerov vseh krogov je
manjša kot 100 !
- (Razdalja d med dvema disjunktni-
ma krogoma je definirana na
skici) (25 točk)



Nedeljsko popoldne so dijaki izkoristili za oddih ter ogled tovarn Gorenje in termocentrale Šoštanj. Tekmovalna komisija je še isti dan ocenila izdelke in določila nagrade. Izbrala je tudi naloge in kandidate za malo olimpiado, ki je bila v pone-
deljek in je služila za izbor naše ekipe za matematično olim-
piado. Naloge so bile težje od tistih na zveznem tekmovanju, komisija se tudi ni ozirala na program pouka matematike v
srednji šoli. S tem seveda ne mislimo, da je bilo potrebno
znanje višje matematike, vse prej kot to, le veliko domiselno-
sti in nekaj znanja iz nekaterih področij elementarne matema-
tike, ki pa jih srednješolski program pušča precej ob strani,
npr.: teorija števil, teorija grafov, neenakosti, Dirichletov
princip itd.

Naloge za izbor olimpijske ekipe:

1. Določi množico vseh takih realnih števil α , ki zadoščajo pogoju: za
vsak realen $c > 0$ obstaja ulomek m/n ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), za katerega velja:
 $0 < |\alpha - m/n| < c/n$!
2. Reši enačbo $p^{2x} = q_1^y \cdot q_2^z + 1$ pri pogoju, da so p , q_1 , q_2 praštevila,
 x , y in z pa naravna števila!
3. V trikotniku ABC velja relacija $2\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{AB}$.
 - Dokaži, da ležijo središče včrtanega kroga O , središče očrtanega kro-
ga O_1 in razpolovišči stranic $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ na skupni krožnici k !
 - Dokaži, da je premica $p(T, O)$ tangenta na krožnico k ! (T je težišče
trikotnika ABC)

Svečana razglasitev nagrad in pohval s krajšim nastopom dekleškega pevskega zbora je bila v ponedeljek ob 12^h v prostorih občinske zgradbe. Nagrade in pohvale sta tekmovalcem izročila in jim čestitala dr. J. Vrabec in prof. M. Vagaja. Doseženi so bili naslednji rezultati:

1. razred:

- 1. nagrada: Dražen Borković, Srbija; Biljana Mučibabić, Srbija;
- 2. nagrada: Boris Majaron, Slovenija; Predrag Tanović, Srbija;
- 3. nagrada: Milan Despotović, Srbija; Boban Veličković, Srbija; Slobodan Vukosavić, Srbija;

Pohvale: Maks Romih, Slovenija; Draško Cvijović, Srbija; Sunčica Elezović, Srbija; Marjan Gušev, Makedonija;

2. razred:

- 1. nagrada: ni podeljena
- 2. nagrada: Aleksandar Miković, Srbija;
- 3. nagrada: Danko Jocić, Bosna in Hercegovina; Vladimir Efremov, Makedonija;

Pohvale: Romeo Meštrović, Bosna in Hercegovina; Damir Špišić, Hrvaška; Katarina Vukadinović, Srbija; Janko Petrovčič, Slovenija; Dragan Nikolić, Srbija; Olga Timčenko, Srbija; Dijana Bojanić, Bosna in Hercegovina;

3. razred:

- 1. nagrada: Amer Bešliagić, Bosna in Hercegovina;
- 2. nagrada: Mladen Bestvina, Hrvaška; Kostadin Trenčevski, Makedonija;
- 3. nagrada: Hamid Kolosman, Bosna in Hercegovina;

Pohvale: Novica Blažić, Srbija; Azem Cocalić, Bosna in Hercegovina; Aleksandar Vučić, Srbija; Andrej Kores, Slovenija; Edmond Rusjan, Slovenija;

4. razred:

- 1. nagrada: Gorazd Cvetič, Slovenija;
- 2. nagrada: ni podeljena
- 3. nagrada: Željko Hanjš, Hrvaška;

Pohvale: Raif Mujanović, Bosna in Hercegovina; Branko Bilbilovski, Makedonija; Predrag Zorić, AP Vojvodina; Josip Lončarić, Hrvaška; Matjaž Vidmar, Slovenija; Branko Špiljak, Hrvaška;

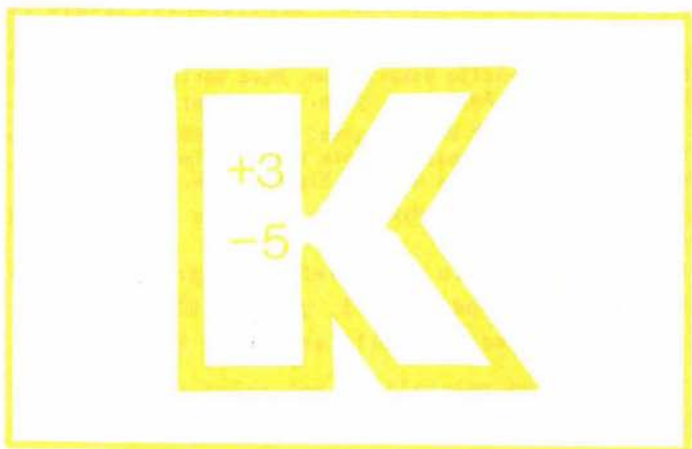
V ponedeljek popoldne je tekmovalna komisija pregledala še izdelke z male olimpiade. Izbrala je osem dijakov, ki so zastopali Jugoslavijo na mednarodni matematični olimpiadi. To so bili: Mladen Bestvina, Amer Bešliagić, Novica Blažić, Gorazd Cvetič, Željko Hanjš, Hamid Kolosman, Konstadin Trenčevski in Matjaž Vidmar. Od teh sta bila oba prvonagrajenca v 3. in 4. razredu kvalifikacij oproščena in sta se v ekipo uvrstila neposredno.

Če ob koncu pregledamo uspeh slovenskih dijakov, jim lahko

samo čestitamo: osvojili so eno prvo in eno drugo nagrado ter pet pohval. Dva dijaka sta sodelovala na olimpiadi in tudi tam sta se odlično odrezala: Cvetič je prejel drugo, Vidmar pa tretjo nagrado. Več o sami olimpiadi, ki je bila tokrat v Beogradu, bosta poročala v eni od prihodnjih števil.

Aleksander Malnič

2



5



ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Letošnjega tekmovanja mladih fizikov iz vse Jugoslavije, ki je bilo v Karlovcu 4. in 5. junija 1977, se je udeležilo 13 tekmovalcev iz Slovenije. Le-te je izbrala republiška tekmovalna komisija na podlagi uspeha, ki so ga dijaki dosegli na republiškem tekmovanju. Zvezno tekmovanje je potekalo v običajnih skupinah: mehanika in toplota, elektrika, atomika in optika. V ta okvir so se slovenski predstavniki takole razvrstili:

Mehanika in toplota: Četina Matjaž, gimn. Celje; Gruden Darjo, gimn. Nova Gorica; Jericijo Oskar, gimn. Nova Gorica; Grlicarev Igor, l. gimn. Ljubljana; Kores Andrej, l. gimn. Ljubljana; Žlajpah Dejan, gimn. Celje;

Elektrika: Cvetič Gorazd, gimn. M. Zidanška, Maribor; Jenčič Mišo, gimn. Ivan Cankar, Ljubljana; Padežnik Franci, gimn. M. Zidanška, Maribor; Vidmar Matjaž, gimn. Nova Gorica; Žlajpah Leon, gimn. Celje;

Optika in atomika: Mikuž Marko, l. gimn. Ljubljana; Šušteršič Luka, l. gimn. Ljubljana;

Navedeni dijaki so se udeležili priprav za zvezno tekmovanje, ki so potekale od 1. do 3. junija 1977 na VTO Fizika v Ljubljani. Priprave so vodili asistenti VTO Fizika.

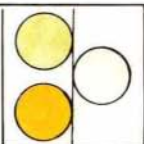
Tekmovalci so reševali po pet nalog v soboto, 4.6.1977 dopoldne. Potem so se odpeljali v Gospič in se spotoma ustavili na Petrovi gori, kjer so si ogledali partizansko bolnico. V nedeljo so obiskali rojstno hišo Nikole Tesle v Smiljanu, nato pa odšli v Plitvice, kjer je bila razglasitev rezultatov in kratko predavanje o potresih.

Letošnje zvezno tekmovanje je prvič trajalo dva dni namesto običajnega enega dneva. S tem je organizator želel dati popravljalcem nalog dovolj časa, mladim fizikom pa možnost za medsebojno spoznavanje. Žal je bilo priložnosti za srečanje zelo malo, saj so tekmovalci večino prostega časa preživel v avtobusih.

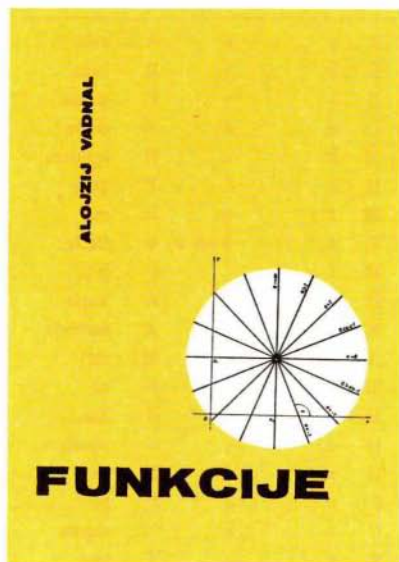
Uradnega vrstnega reda tekmovalcev še nismo dobili. Od naših predstavnikov se je na vidnejše mesto uvrstil le Četina Matjaž iz gimnazije v Celju, ki je delil prvo mesto v skupini Mehanika in toplota.

Andrej Likar

NOVE KNJIGE



Alojzij Vadnal, Funkcije 1, 4. popravljena izdaja. Ljubljana, Državna založba Slovenije 1977. 216 str. (Knjižnica Sigma; 12.c) Cena 85.-din.



Obravnavanje funkcij ene neodvisne spremenljivke ne predstavlja posebno težkega problema. Za mnoge dijake in tudi študente, predvsem v prvem letniku ekonomske fakultete, pa predstavlja ta elementarni problem kar veliko težavo. Zato se je avtor te knjige že pred več kot desetimi leti odločil, da zbere v posebni knjigi, katero smo do danes že trikrat ponatisnili, lastnosti stotih tipičnih funkcij.

Razdeljene so v naslednja poglavja: linearne funkcije, kvadratne funkcije, kubične funkcije, cele racionalne funkcije višjih stopenj, ulomljene racionalne funkcije, potenčne funkcije, stožernice, iracionalne funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije ter trigonometrične in ciklotometrične funkcije.

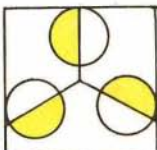
Knjižica bo dober pripomoček vsem, ki se bodo morali seznaniti z lastnostmi elementarnih funkcij. Člani društva in naročniki Preseka lahko dobe knjižico pri Komisiji za tisk DMFA SRS, Ljubljana, pp 27, z 20% popustom za 68.-din.

Ciril Velkovrh

FIGURATIVNA ŠTEVILA - naloga

Sestavi nekaj višjih redov trikotniških, štirikotniških in šestkotniških števil; določi množico naravnih števil, potrebnih za njihovo sestavo.

Daniželj Bezek



NOVICE-ZANIMIVOSTI

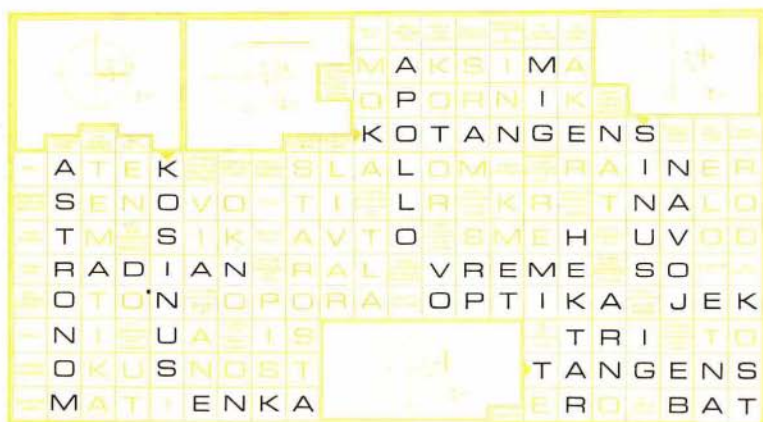
VAŽNEJŠE EVROPSKE ABECEDÉ

Latinica		Gotica		Cirilica ruska			Grška abeceda		
a	A	ᴀ	Ṃ	а	А	a	α	Α	alfa
b	B	ḃ	Ḃ	б	Б	b	β	Β	beta
c	C	ḥ	Ḧ	в	В	v	γ	Γ	gama
d	D	ḍ	Ḋ	г	Г	g	δ	Δ	delta
e	E	ḗ	Ḙ	д	Д	d	ε	Ε	epsilon
f	F	ḟ	Ḟ	е	Е	e	ζ	Ζ	zeta
g	G	ḡ	Ḣ	ж	Ж	ž	η	Η	eta
h	H	ḣ	Ḥ	з	З	z	θ ali θ	Θ	theta
i	I	ḥ	Ḧ	и	И	i	ι	Ι	jota
j	J	ḵ	Ḷ	й	Й	j	κ	Κ	kapa
k	K	ḱ	Ḳ	к	К	k	λ	Λ	lambda
l	L	ḷ	Ḹ	л	Л	l	μ	Μ	mi
m	M	ṁ	Ṃ	м	М	m	ν	Ν	ni
n	N	ṅ	Ṇ	н	Н	n	ξ	Ξ	ksi
o	O	ṽ	Ṱ	о	О	o	ο	Ο	omiklon
p	P	ṑ	Ṓ	п	П	p	π	Π	pi
q	Q	ṓ	Ṕ	р	Р	q	ρ	Ρ	ro
r	R	ṛ	Ṛ	с	С	s	σ	Σ	sigma
s	S	ṣ ali ṡ	Ṣ	т	Т	t	τ	Τ	tau
t	T	ṭ	Ṭ	у	У	u	υ	Υ	ipson
u	U	ṹ	Ṻ	ф	Ф	f	φ	Φ	fi
v	V	ṽ	Ṱ	х	Х	h	χ	Χ	hi
w	W	Ṽ	Ṷ	и	И	c	ψ	Ψ	psi
x	X	Ṙ	Ṛ	ч	Ч	č	ω	Ω	omega
y	Y	Ṳ	Ṵ	ш	Ш	š			
z	Z	Ṽ	Ṷ	щ	Щ	šč			
				ю	Ю	ju			
				я	Я	ja			
				ь	Ь	’			mehki znak
				ы	Ы	y			trdi znak

O nastanku črk in pisave, o njenem razvoju in spreminjanju, je bilo že mnogo napisanega. Tudi o pisanju števil so bile objavljene dolge razprave. Daljši članek o številih je objavil tudi Presek 3 (1975/76) 103-113. Dandanes večina zahodnega sveta uporablja *latinico*. Nemci so že pred desetletji zelo opustili *gotico*. Le še v posebnih primerih in v nekaterih matematičnih tekstih jo uporabljamo za označevanje matematičnih simbolov. Večino teh označujemo s črkami *grške abecede*. Tudi *cirilico* (srbohrvaško in rusko) pogosto nadomeščamo z latinico. V naših bratskih republikah in drugje po svetu, kjer je osnovna pisava cirilica, izhajajo mnoge knjige tudi v latinici. Pri nas je ruski jezik bolj redko učni predmet. Zato je vse manj študentov, ki poznajo rusko cirilico. Ker boste med matematično literaturo zasledili mnogo zanimivih knjig v ruščini, naleteli pa boste tudi na simbole iz drugih abeced, smo vam na tej strani odtisnili vse štiri abecede. Pri latinici smo spustili žumnike (č, š, ž), ki jih uporabljamo v slovenščini. Cirilica, ki jo pišejo v nekaterih jugoslovanskih republikah, se deloma razlikuje od ruske cirilice. Naj omenimo razlike: spustiti moramo črke щ Щ, ю Ю, я Я, ь Ъ, ы Ы in dodati črki ъ in ѓ; črka "j" pa je ista kot v latinici.

Stanislav Zorko

REŠITEV KRŽANKE "TRIGONOMETRIČNE FUNKCIJE" IZ P-2

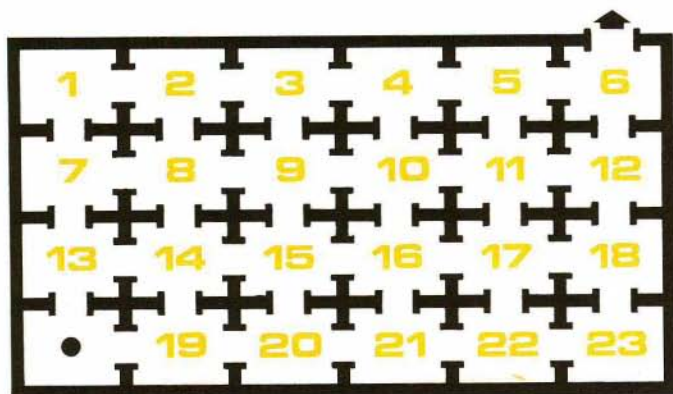




BISTROVIDEC

LABIRINT

V zaporu so bile celice razporejene tako, kot kaže slika. Vsaka celica je imela kar po več vrat, tako da so se ob prostem času lahko jetniki čimbolj sproščeno sprehajali. V skrajno spodnjem levem koncu stavbe je bila soba paznika, ki je jetnikom raznašal obroke hrane. Pri tem se je držal naslednjega pravila: vsakega jetnika je obiskal natanko enkrat, pot pa je končal pri zaporniku, ki je stanoval v diametralno nasprotnem koncu stavbe (in odšel skozi izhodna vrata ven iz stavbe - glej sliko). Kakšna je bila paznikova pot po zaporu?



Dušan Repovš

REŠITVE NALOG



SANDOKAN - rešitev s strani 133

1. $N(400,400) = 400 \cdot H_{400} = 2628$

2. $N(400,400) - N(400,20) = 400 \cdot (H_{400} - H_{20}) = 1189$

3. $N(400,20) = 400 \cdot H_{20} = 1439$

Če primerjamo rezultate 2. in 3. naloge, vidimo, da je za to, da bomo lahko nalepili v album 380 različnih Sandokan sličic, potrebno kupiti manj sličic, kot pa za to, da zbirko nato izpopolnimo do konca. Zato se še kako splača sprejeti ponudbo proizvajalca sličic, da vam bo po trojni ceni poslal do 20 izbranih sličic.

4. $N(100,100) = 100 \cdot H_{100} = 518$

6. $N(6,6) = 6 \cdot H_6 = 14.7$

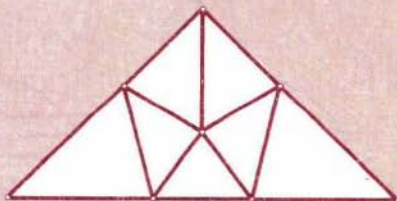
Rezultat lahko preverite s poskusom. Vzemite kocko in jo mečite toliko časa, dokler ne vržete vsako cifro. Število potrebnih metov si zabeležite. To nekajkrat ponovite. Nato seštejte vsa števila potrebnih metov in to vsoto delite s številom ponovitev (= število sešteti podatkov). Če je število ponovitev dovolj veliko in je kocka "poštena", se dobljeni rezultat ne bo dosti razlikoval od dobljene teoretične vrednosti 14.7.

Vladimir Batagelj

O OSTROKOTNIH TRIKOTNIKI*

Kako se razdeli polovica kvadrata na 7 ostrokotnih trikotnikov:

Andrej Legat



* Odgovor na vprašanje v članku Ivana Vidava; Presek IV/2, str. 116-117.

DIOFANTSKE ENAČBE - rešitve s str. 141

1. a) $x = 1 + 2n, y = 1 - 3n$ b) $x = 4n, y = 5n$
 c) $x = -1 + 5n, y = 2 - 8n$ d) ni rešljiva
 e) $x = 4n, y = -2 + 6n$ f) $x = -1 + 4n, y = 4 - 15n$
 g) $x = 4 + 5n, y = -12 + 16n$ h) $x = 4 + 7n, y = -5 - 10n$
 i) $x = 14 + 30n, y = -10 - 43n$ j) $x = 39 + 54n, y = 15 + 17n$
 k) $x = -3 + 74n, y = 5 - 117n$ l) $x = 53 + 169n, y = 148 + 472n$
 m) $x = 11 - 38n, y = -14 + 49n$ n) ni rešljiva
 o) $x = -48 + 119n, y = -21 + 52n$

2. Dve rešitvi: 20 ali 25 učencev

3. $132 - 4n$ triperesnih, $1 + 3n$ štiriperesnih, 33 rešitev

4. n živine, $500 - 2n$ živinorejcev, 249 rešitev

5. na 9 načinov

6. 5

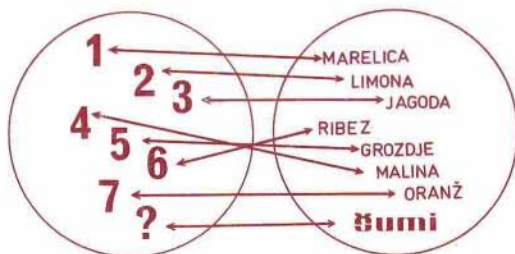
France Križanič

7. 59

ČUDNA TEHTNICA (BISTROVIDEC) - rešitev iz Preseka V/1, str.42

Z utežema za 1 kg in 5 kg lahko tehta branjevec tovore po 1 kg, 2 kg, ... , 12 kg.

Egon Zakrajšek





SKOK V VIŠINO IN SKOK OB PALICI PO FIZIKALNO

Osnovni fizikalni zakoni in izreki ne veljajo samo za točkasta in toga telesa, o katerih v šoli največ slišimo. Prav tako veljajo naprimer za kislo mleko in človeško telo. Zato si lahko pomagamo s fiziko tudi v športu. Kot primer si oglejmo skok v višino in skok ob palici.

Skok v višino lahko razdelimo na tri faze: kratek zalet, rahel počep, odziv in prosti let čez prečko. Vodoravna hitrost, ki jo skakalec pridobi v kratkem zaletu, služi predvsem za to, da ta v loku preleti prečko. Ker nas zanima le višina skoka, se bomo zaradi enostavnosti zato omejili na skok z mesta. Tri faze tega skoka so shematično prikazane na prvi sliki.



Sl. 1a: Počep

Sl. 1b: Odriv

Sl. 1c: Prosti let

Opišimo ta skok po fizikalno. Predvsem nas bo zanimalo gibanje skakalčevega težišča. Ko skakalec počepne, se mu težišče zniža za h_1 . Njegova začetna hitrost je enaka nič. Pri odzivu pridobiva kinetično energijo z delom mišic. Ko se odlepi od tal, ima maksimalno kinetično energijo $mv^2/2$. Z m smo označili skakalčevo maso in z v odzivno hitrost. Na račun te kinetične energije se dvigne težišče skakalca v prostem letu za h_2 . Izrek o ohranitvi mehanske energije, ki ga v našem primeru smemo uporabiti, pove, da je h_2 enak

$$h_2 = v^2/2g$$

kjer je g pospešek prostega pada. Iz tega izraza se ne vidi, da je h_2 odvisna tudi od skakalčeve mase, vemo pa, da so dobri skakalci vitki. Ker je pospešek prostega pada g enak za vse ljudi, se mora odvisnost h_2 od mase skakalca skrivati v hitrosti v . Takole sklepamo: hitrost v je zagotovo odvisna od globine počepa h_1 . Privzemimo, da je pospešek a pri odzivanju konstanten in označimo čas odziva s t . Potem iz $v = at$ in $h_1 = at^2/2$ sledi

$$v = 2h_1/t$$

Sedaj že vidimo, kako je v odvisen od mase skakalca: nasploh bo pri težjem skakalcu odzivni čas daljši in hitrost v zato manjša.

Sami se lahko prepričamo s poskusom, da se pri skoku v višino ne splača počepniti do tal. Res povečamo s tem h_1 , še bolj pa povečamo odzivni čas t in končna hitrost v se zmanjša. Poskusi so pokazali, da je smiselno počep za 1,85m visokega skakalca okrog 0,40m. Toliko lahko vsak počepne. Tisto, kar naredi dobrega skakalca, je kratek odzivni čas t . Še kar dobra vrednost za t je 0,25s. Pri teh h_1 in t je končna hitrost v

$$v = 3,2\text{m/s}$$

in dvig težišča h_2

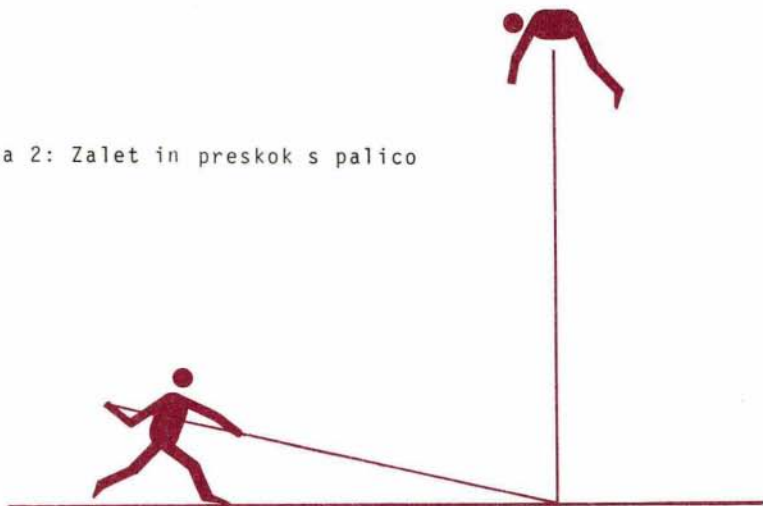
$$h_2 = 0,52\text{m}$$

Pri poskusu z 270 študenti na Columbijski univerzi je ležal h_2 v razmeroma ozkem intervalu od 0,3 do 0,6m. Dober skakalec

moraš biti, da s skokom dvigneš svoje težišče za 0,7m. Težišče 1,85m visokega stoječega človeka je približno 1,1m nad tlemi. Prištejmo k temu še 0,7m in dobimo višino 1,8m. Dober skakalec pa preskoči tudi višino 2,1m in več. Pri tako visokem skoku je torej težišče skakalca v najvišji legi približno 0,3m pod prečko! Spoznali smo, da mora imeti dober skakalec v višino ne samo kratek odrivni čas, ampak se mora znati med skokom tako previjati nad prečko, da je njegovo težišče ves čas čim nižje. Zdi se, da je za to najbolj primeren tako imenovani Fosburyjev način skakanja, ko leti skakalec s hrbtom navzdol.

Oglejmo si še skok ob palici. Tudi skakalcu ob palici ne škodi, če se zna lepo previjati nad prečko. V tem primeru je to seveda malo težje kot pri skoku v višino. Kdor obdrži v najvišji legi svoje težišče vsaj 0,25m pod prečko, je že kar dober. S tem se pa podobnost s skokom v višino konča. Za skakalca ob palici hiter odriv z nogami ni tako важен, mora pa znati hitro teči. Zakaj? Za razliko od skakalca v višino si skakalec ob palici pridobi potrebno kinetično energijo predvsem s hitrim tekom. S palico pretvori to kinetično energijo v potencialno.

Slika 2: Zalet in preskok s palico



Kako hitro mora skakalec priteči, da bo dosegel svetovni rekord 5,70m? Privzemimo, da pretvori 1,85m visok skakalec vso svojo kinetično energijo v potencialno (v resnici je nekaj manj) in da gre njegovo težišče v najvišji legi 0,25m pod prečko. Upoštevajmo, da je pri hitrem teku skakalec nagnjen in je zato njegovo težišče približno 1,0m visoko. Iz enačb, ki smo jih že zapisali, sledi, da mora skakalec priteči s hitrostjo 9,3m/s. Povprečna hitrost teka na 100m (brez palice!) je za svetovni rekord 10m/s. Težko verjamemo, da lahko celo svetovni rekorder v skoku ob palici tako hitro teče. Dobljeni rezultat je zato prav poučen. Ne smemo slepo verjeti vsaki številki, ki jo izračunamo, ampak jo moramo še oceniti "po zdravi pameti". V našem računanju smo nekaj zanemarili, česar ne bi smeli! Najbrž je to delo rok. Pri svetovnih rekordih pa je treba upoštevati tudi takšne "malenkosti". No, ne glede na napako, ki smo jo storili v našem za svetovni rekord preveč poenostavljenem računu, vidimo, da ne bo lahko izboljšati svetovni rekord 5,7m pri skoku ob palici.

Sergej Pahor

POJASNIL0 k odgovoru na vprašanje št. 4 v Preseku 5, št. 1, str. 48

Bralci so najbrž pravilno razumeli odgovor o kosu ledu v kozarcu z vodo. Ker je bil odgovor zelo kratek in morda komu nerazumljiv, dodajmo nekaj pojasnil.

Ugotovitev je, da se gladina vode niti ne dvigne, niti ne spusti ko se led stali. Mislimo si namreč, da *plavajoči* košček ledu vzamemo iz vode, ne da bi se okoliška voda prelila v luknjo. Ko se led stali pri konstantni temperaturi, je vode prav toliko, da luknjo natančno izpolni.

Ko led plava, je v vodi 9/10 njegove prostornine. Gostota ledu je namreč 9/10 gostote vode. Iz 1 cm³ ledu dobimo torej 9/10 cm³ vode, to je toliko, kolikor vode izpodriva ta led pri plavanju.

Tovarišu Stanislavu Puclju se zahvaljujemo, da nas je opozoril na prekratek odgovor.

Marjan Hribar

O GIBANJU RAKET

Na kratko opišimo delovanje rakete, tehnične podrobnosti bomo pustili ob strani. Raketo sestavljajo ogrodje, gorivo in koristni tovor, na primer instrumenti. Gorivo iz rezervoarjev priteka v izgorevalno komoro. Tam zgori, nastali plini pa z veliko hitrostjo iztekajo skozi izpušne šobe in potiskajo raketo. Gorivo izteka v stalnem toku in masa rakete se manjša. Dokler je še kaj goriva, potiska raketo stalna sila iztekajočih plinov $F = \dot{m} v_0$. S $\dot{m}$ označimo masni tok iztekajočih plinov, z v_0 pa njihovo hitrost. Čim manjši je koristni tovor, tem bolj ga z dano maso goriva pospešimo. Če želimo poslati v vesolje mnogo instrumentov, potrebujemo pač več goriva. Masa rakete je zato večja in za pospeševanje rakete potrebujemo večjo silo. Končna hitrost rakete je odvisna od hitrosti izpušnih plinov in razmerja med začetno maso rakete in koristnega tovora. Enačbo, ki pove, kolikšna je končna hitrost rakete, je leta 1903 izpeljal ruski znanstvenik K.E. Ciolkovski. Zapišimo in pojasnimo jo:

$$v = v_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Tu so: v_0 hitrost iztekajočih plinov, m_0 začetna masa rakete in m masa koristnega tovora skupno z ohišjem rakete. Zapisana enačba velja, če se raketa giblje v breztežnem prostoru.

Enačbo Ciolkovskega še izpeljimo. Izpeljava ne bo čisto neoporečna, čeprav bo rezultat pravilen. Zaradi lažjega računa si bomo zamislili, da gorivo izgoreva v kosih. V kratkem času naj zgori kos goriva, ki ima N -krat manjšo maso kot je trenutna masa rakete. V resnici to ne drži, saj smo videli, da raketni motorji izpihajo stalni masni tok plina. V našem poenostavljenem primeru se raketa sicer drugače pospešuje kot v resnici, končna hitrost pa je enaka kot prej. Hitrost iztekajočih plinov glede na raketo naj bo v_0 . Skupna gibalna količina rakete in izteklih plinov je konstantna. Naj bo m_0 začetna masa rakete. Gibalna količina plinov, nastalih iz prvega kosa gori-

va z maso m_0/N , je $m_0 v_0/N$. Sprva mirujoča raketa pri tem doseže hitrost v_1 , njena gibalna količina je $(m_0 - m_0/N)v_1$. Preostala masa rakete je $m_1 = m_0(1-1/N)$. Iz ohranitve skupne gibalne količine sledi za hitrost rakete $v_1 = v_0(N-1)$. Ko zgori drugi kos goriva, katerega masa je spet N -krat manjša kot trenutna masa rakete, je hitrost rakete v_2 . Masa rakete je potem $m_2 = m_0(1-1/N)^2$. Ohranitev skupne gibalne količine v sistemu, zvezanem z raketo, da: $m_1 v_0/N = m_2(v_2 - v_1)$. Iz tega izračunamo hitrost rakete potem, ko zgori drugi kos goriva: $v_2 = v_1 + v_0 m_1 / N m_2 = 2v_0 / (N-1)$. Ko zgori k -ti kos goriva, je masa rakete $m_k = m_0(1-1/N)^k$, hitrost rakete pa je $v_k = kv_0 / (N-1)$. Če hočemo, da ima raketa v tem trenutku neko določeno hitrost v , mora biti: $k = v(N-1)/v_0$. Tedaj je masa rakete ravno:

$$m = m_k = m_0 \{ (1-1/N)^{v(N-1)/v_0} \} = m_0 \{ (1-1/N)^{N-1} \}^{(v/v_0)}$$

V resnici gorivo ne zgoreva v kosih, ampak zvezno. Če se hočemo z našim modelom približati resničnim razmeram, moramo vzeti zelo veliko majhnih kosov goriva. Ko se N veča preko vseh meja, gre izraz $(1-1/N)^{N-1}$ proti določeni vrednosti $1/e = 0,6378\dots$. Število $e = 2,7182\dots$ je osnova naravnih logaritmov. Enačbo za maso sedaj zapišemo v dokončni obliki:

$$m = m_0 e^{-(v/v_0)}$$

Ko logaritmiramo in preuredimo, je pred nami enačba Ciolkovskega:

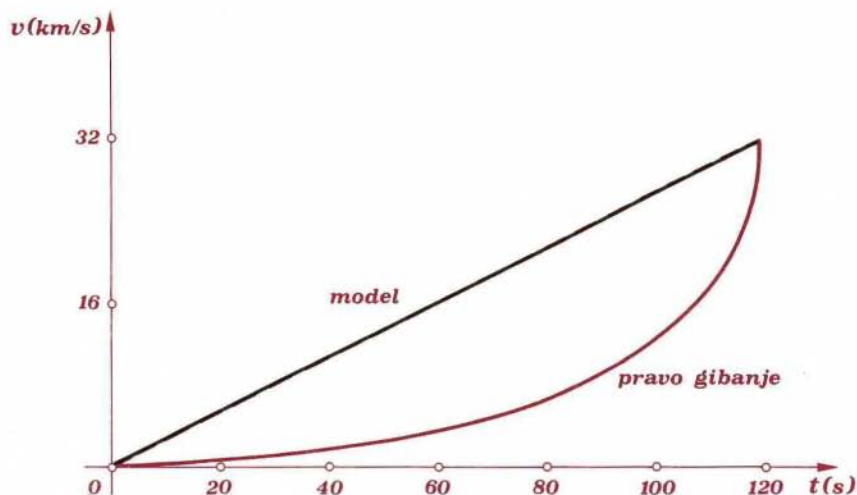
$$v = v_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Za primer izračunajmo, koliko goriva potrebujemo, da v vesolju pospešimo sprva mirujočo raketo s hitrostjo 33 km/s. Hitrost iztekajočih plinov naj bo 7 km/s. Iz enačbe Ciolkovskega sledi: $m/m_0 = e^{-4,7} \approx 0,009$. To pomeni, da potrebujemo za pospešitev 100 kg koristnega tovora kakih 10 000 kg goriva. Tabela in diagram kažeta, kako se spreminjata hitrost in masa rakete v odvisnosti od časa za naš model gibanja in za resnično gibanje. Računali smo, da raketni motorji izpihujejo po 82,5 kg plina na sekundo. Pri modelnem gibanju izpihnejo raketni motorji dvanajst kosov goriva, od katerih ima vsak 3,5-krat manjšo ma-

so, kot je trenutna skupna masa rakete. Iz diagrama se vidi, da se v resnici giblje raketa ob koncu delovanja motorjev z veliko večjim pospeškom kot na začetku, saj stalna potisna sila motorjev potiska tedaj veliko manjšo maso kot v začetku. Na začetku hitrost skoraj enakomerno narašča, ker se masa zaradi razmeroma majhnega masnega toka le počasi zmanjšuje. Pri našem preprostejšem modelu gibanja je potisna sila motorjev odvisna od trenutne mase rakete. Razmerje med potisno silo in maso rakete je konstantno, zato je tudi pospešek konstanten.

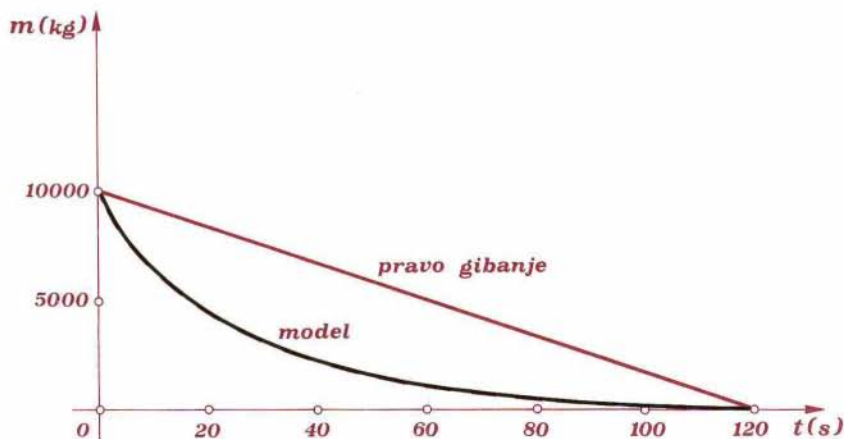
t (s)	v (km/s)	m (kg)	v (km/s) model	m (kg) model
0	0	10000	0	10000
10	0,6	9175	2,8	6845
20	1,26	8350	5,6	4686
30	1,99	7525	8,4	3207
40	2,80	6700	11,2	2145
50	3,72	5875	14,0	1503
60	4,78	5050	16,8	1028
70	6,03	4225	19,6	704
80	7,55	3400	22,4	482
90	9,50	2575	25,2	330
100	12,20	1750	28,0	225
110	16,66	925	30,8	154
120	32,50	100	33,0	102

Z enostopenjskimi raketami ne moremo doseči prav velikih hitrosti. To se posreči z večstopenjskimi raketami. Te so sestavljene iz več zaporednih pogonskih raket, instrumenti pa so v konici zadnje rakete. Najprej potiska raketo prva stopnja. Ko ta porabi vse gorivo, je opravila nalogo. Ogrodje, rezervoarji za gorivo in motor odpadejo od rakete in pogon prevzame druga stopnja. Ko prva stopnja odpade, se masa rakete močno zmanjša. To je ugodno, saj motorjem druge stopnje ni treba rabiti svoje moči za pospeševanje odvečne mase motorjev, rezervoarjev in ogrodja prve stopnje. Ko druga stopnja opravi svoje delo, odpade. Njeno delo prevzame naslednja stopnja. Ko odpade zadnja



S1. 1a: Hitrost rakete pri gibanju v breztežnem prostoru. Polna črta označuje hitrost rakete, ki izpihuje stalni tok plinov. Črtkana črta označuje povprečno hitrost rakete, ki izpihuje pline v sunkih, katerih masa je sorazmerna s trenutno maso rakete. Končna hitrost je v obeh primerih enaka, če je enako razmerje med začetno in končno maso rakete in je enaka hitrosti izpušnih plinov.

S1. 1b: Masa rakete pri gibanju s prejšnje slike.



stopnja, ima kapsula z instrumenti ali s človeško posadko že dovolj veliko hitrost, da ubeži privlačni sili Zemlje. Običajno je razmerje med skupno maso in maso ohišja za vse stopnje rakete približno enako. Če prva stopnja pospeši raketo do hitrosti v , pospeši druga stopnja raketo do hitrosti $2v$, tretja stopnja pa do hitrosti približno $3v$.

Zelo znani večstopenjski raketi sta ameriški raketi Saturn in Titan. Prvo stopnjo rakete Saturn 1B sestavlja osem manjših raket s skupno potisno silo kakih 7000000 N. V motorjih izgorvata tekoči kisik in kerozen. Drugo stopnjo poganja šest motorjev na tekoči vodik s skupno potisno silo 420000 N. Za tretjo stopnjo uporabljajo običajno kako manjšo raketo. Masa rakete ob vzletu je 550 ton, v vesolje ponese kakih 15 ton koristnega tovora. Za polete na Luno so uporabljali izboljšano verzijo Saturn 5. Tristopenjska raketa s skupno višino 110 m lahko ponese v vesolje 130 ton koristnega tovora. Prvo stopnjo Saturna 5 poganja pet motorjev. Vsak ima osemkrat tolikšno potisno silo kot cela prva stopnja Saturna 1B. Raketa Titan 2 je visoka 32 m, njena skupna masa pa je 150 ton. Pogonsko gorivo je hidrazin. Potisna sila motorjev prve stopnje je 2000000 N, druge stopnje pa 450000 N. Ta raketa lahko ponese v vesolje le okoli tri tone koristnega tovora.

Velik pomen v razvoju raketarstva ima gorivo. Tabela kaže nekaj podatkov za največ uporabljana goriva:

Gorivo	Reakcija	Sežigna toplota	Hitrost plinov
acetilen	$2C_2H_2 + 5O_2 \rightarrow 4CO_2 + 2H_2O + 611 \text{ kcal}$	2880 kcal/kg	4,9 km/s
vodik	$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O + 115 \text{ kcal}$	3220 kcal/kg	5,2 km/s
aluminij	$4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3 + 788 \text{ kcal}$	3860 kcal/kg	5,6 km/s
berilij	$2Be + O_2 \rightarrow 2BeO + 292 \text{ kcal}$	5840 kcal/kg	7,0 km/s

Tehnologi iščejo nova goriva, pri katerih bo specifična sežigna toplota in s tem izpušna hitrost večja. Tako bo bližnji vesoljski prostor človeku lažje dosegljiv.

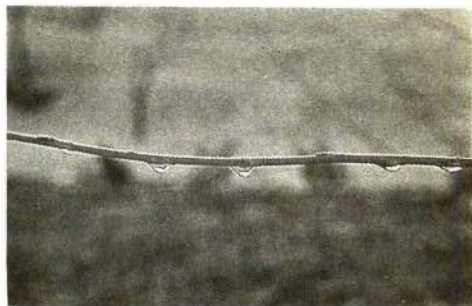
Janez Žitnik

ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE

3. DEL

POVRŠINSKA NAPETOST

O mirujoči vodi bi človek mislil, da skoraj ni vredno razpravljati. Pa si oglejmo kapljice, kako se v dežju obešajo na telefonsko žico ali na vodoravno vejico drevesa (Sl. 30). Vsi znamo povedati, da kapljice obstanejo zaradi površinske napetosti, ki spada med osnovne lastnosti vsakršne kapljevine. Površina kapljice deluje kakor prožna kožica in drži ravnovesje teži. - Za-



Sl. 30. Kapljice na vejici

kaj pa se voda ne porazdeli enakomerno po žici ali veji, tako da bi na njej visela kot kaka podolgasta vreča? - To je zato, ker je vrečasta oblika labilna. Že pri najmanjši neenakomernosti v debelini vreče se ravnovesje podre. Kjer je vreča tanjša, površinska napetost vodo močnejše stiska in jo zato od tam izrine. V trebuhih pa se vreča še bolj napihne, tako da nastanejo kaplje.

Kaplje, ki pri veslanju škropijo na vse strani, včasih še nekaj časa drčijo po gladini, preden potonejo. Lahen veter pomaga, da se drseča kaplja obdrži dalj časa. Videti je, da kaplja neka-ko jaha na tanki zračni blazini, ki jo ima pod seboj. S tanko pipeto se dajo tudi doma v kozarcu narediti drseče kaplje. Vendar je za ta namen 50%-na mešanica alkohola in vode boljša kot sama voda. (Ne vem, zakaj.)

Površinska napetost vpliva tudi na razširjanje drobnih valov po vodni gladini. Zaradi nje potujejo hitreje, kakor če bi vplivala samo teža, kot je to pri dolgih valovih. Namesto da bi pisali enačbe, pa si raje oglejmo valove, ki jih naredi tanka vejica na gladini potoka (Sl. 31)! Slika je ravno takšna, kot če



a b



Sl. 33. Razpokana skorja posušenega blata. Na desni sliki je veter že obru-
a,b sil robove posameznih kosov skorje, tako da so ostali le nekakšni
čepi.

bi vejico enakomerno pomikali po stoječi vodi. Za vejico dobimo klinaste valove, pri katerih znamo iz kota izračunati hitrost valovanja.

Opazimo, da kót ni za vse valove enak, iz česar sklepamo, da je njihova hitrost odvisna od valovne dolžine. Takemu pojavu pravimo disperzija. Tudi pred paličko je nekaj prav drobnih valov, z valovnimi dolžinami samo po nekaj milimetrov. Sklepamo, da potujejo taki valovi hitreje kot nekoliko daljši. Iz površinske napetosti vode so izračunali, da so valovi z valovno dolžino 1,7 cm najbolj počasni, in sicer imajo hitrost 23 cm/s. Še bolj počasnih valov na vodi sploh ni. To pojasnjuje, zakaj zelo rahel veter, pri katerem je hitrost zraka manjša kot 23 cm/s, sploh ne more narediti valov.

Natančen opazovalec odkrije na gladini potoka še kako posebnost. Kjerkoli zadeva tekoča voda ob pregrajo, se na gladini pojavi nekakšna plavajoča nitka, ki se zvija sem in tja (Sl. 32). Včasih izgine, a se takoj spet pojavi. S potrpljenjem kmalu najdemo pojasnilo. Drobne smeti, ki plavajo na vodi, ob nitki sunkoma zastanejo. Če zapira pregraja gladino čez vso strugo, se za nitko kmalu nabere cela smetana drobne nesnage. Da ni treba čakati, potresemo potok z aluminijevim prahom, ki se ves nakopiči za nitko in pokrije ta del gladine. Očitno se tu gladina sploh ne giblje, kot se pred nitko.

Spomnimo se, da mnoge nečistoče močno zmanjšajo površinsko napetost vode! Takšna snov se rada kopiči na gladini in deluje kot nekak dvodimenzionalni plin, ki gladino razganja. Ko mu pregrada zapre pot, se "dvodimenzionalni plin" kopiči pred njo, ker ga stiska doteležajoča voda. Ko je "plina" dovolj, se vzpostavi ravnovesje. Zamazani del gladine pokriva potem potok kot kaka odeja, tako da odteka voda pod njo. Sprednji rob odeje se zaradi naleta tekoče vode nalahno privzdigne. Ta rob vidimo kot nitko.

S površinsko napetostjo pojasnjujemo, zakaj pivnik pije vodo in zakaj zleze voda med zrnca prahu, ko ga namoči dež. Če je prah pravšnje vrste, nastalo blato nabrekne, ker voda njegove delce razmakne. Ko se osuši, pa se mora spet skrčiti. Najprej se strdi v skorjo, potem pa razpoka (Sl. 33).

Posebno vlogo ima površinska napetost tudi pri drobnih kapljicah, kakršne so v megli in v oblakih. Preden se lotimo te razprave, pa moramo pogledati, kako kapljice sploh nastanejo. En način je, da se vlažen zrak vzdigne, pri čemer se raztegne in zato ohladi. Ko se ohladi do rosišča, tako da je dosežena nasičena vlažnost, se začnejo delati kapljice. Kadar čez gorski vrh piha južni veter, se mu na vrhu rada naredi kapa. Kljub vetru se kapa nikamor ne gane (Sl. 34). Spredaj namreč venomer nastaja, medtem ko zgineva na drugi strani, kjer se zrak ob spuščanju stiska in zato segreva.

Ko privzdignemo pokrov lonca, v katerem se kuha kosilo, se tudi naredi megla. Ko se para iz lonca pomeša z mrzlim okolnim

zrakom, nastane prenasičeno vlažna zmes. Višek vodne pare se takoj kondenzira v kapljice. Toda, ko se primeša več in več okolnega zraka, ki ni nasičeno vlažen, kapljice spet izhlapijo, tako da se megla razgubi (Sl. 35).

Na prav podoben način nastane megla na meji dveh različno toplih zračnih plasti, če sta zadosti vlažni. Z vrha hriba vidimo pravicato megleno morje (Sl. 36).

V jasni zimski noči se tla in zrak pri tleh zaradi sevanja hitreje ohlajata kot višje plasti ozračja. Če je ohladitev dovolj huda, se zjutraj zbudimo v megli. Z vrha hriba pa spet vidimo megleno morje (Sl. 37).

Marsikaj o nastanku megle zvemo pri opazovanju sledi, ki jih po nebu rišejo letala. Sled nastane v dvojnem vzdolžnem vrtincu, ki ga puščata krili za seboj (Sl. 38). Znotraj vrtinca je zaradi zmanjšanega tlaka zrak nalahko ohlajen, tako da se naredi megla, če je prvotna vlažnost že skoraj nasičena. Ko se vrtinec umiri, se zrak segreje na prvotno temperaturo in meglena sled se razkadi. Letalo vleče tedaj za seboj le razmeroma kratko sled.

Veliko težje je razumeti, da sled včasih sploh noče izginiti, ampak sega čez vse nebo. Kar naprej se sled debeli, da dobimo nazadnje klobasast oblak (Sl. 39). Še celo uro ga lahko gledamo, dokler ga ne odnese veter. Sklepati moramo, da je bil zrak, ki ga je letalo preletelo, ne le nasičen z vlago, ampak celo malce prenasičen. Če je tako, pa spet ni jasno, zakaj se že sam od sebe ni naredil oblak. Človek bi mislil, da se mora iz prenasičeno vlažnega zraka takoj izločiti toliko kapljic, da je preostali zrak ravno nasičeno vlažen.

Tu pride na vrsto površinska napetost, ki kapljico stiska, in sicer tem bolj, čim manjša je. Zato majhna kapljica raje izhlapeva kot velika, tako kot se človek poti, če ga kdo stiska. Natančneje povedano: majhna kapljica je v ravnovesju z zrakom samo, če je ta z vlago primerno prenasičen. Kapljica z radijem $1\ \mu\text{m} = 0,001\ \text{mm}$ zahteva za ravnovesje vlažnost 100,1%. Pri samo 100%-ni vlažnosti takšna kapljica že v nekaj sekundah izhlapi. Le če vlažnost preseže 100,1%, se bo kapljica začela rediti.

Zdaj nam ne gre več v glavo, da je na svetu sploh kaj oblakov

in megle. Kako neki lahko nastanejo v vlažnem zraku prvi zametki kapljic, ki zahtevajo zaradi svoje majhnosti veliko prenasitčenost? Kapljica z radijem $0,1 \mu\text{m}$ zahteva vlažnost 101%, takšna z radijem $0,01 \mu\text{m}$ že 110% in takšna z radijem $0,001 \mu\text{m} = 10 \text{ \AA}$ celo 200%. Tako strašno prenasitčen z vlago pa zrak v naravi nikdar ni.

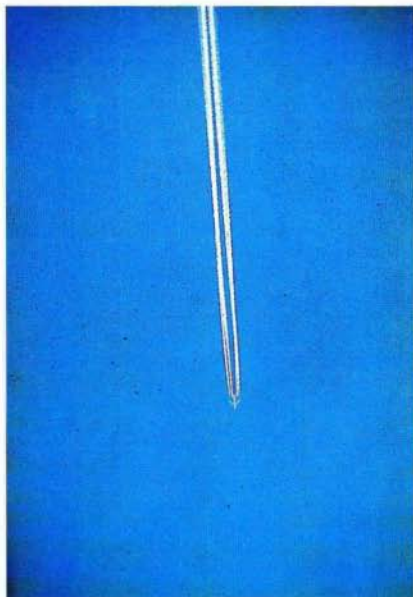
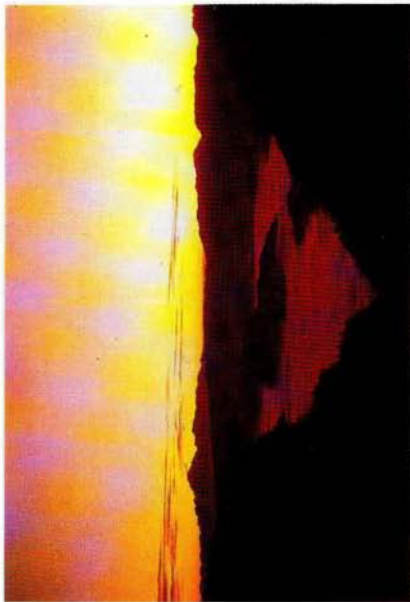
Pomagajo kondenzacijska jedra, to so delci prahu in soli, ki delujejo kot zametki kapljic. V nižjih plasteh ozračja je več teh jeder in večja so, tako da se naredi megla, kakor hitro zra-
ste relativna vlažnost preko 100%. V veliki višini, kjer letajo letala, pa je zrak izredno čist in vsebuje le prav drobna kondenzacijska jedra. Relativna vlažnost sme tam narasti malo čez 100%, ne da bi se začele delati kapljice. Letalo s svojim vrtincem in izpušnim dimom pa zaplodi debelejšje kapljice, ki ne morejo več izhlapeti, ampak pritegujejo nase višek vodne pare. Tako nastane trajen oblak.

Ivan Kuščer

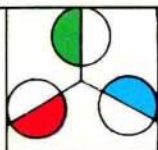
SLIKE NE 2. IN 3. STRANI OVITKA

- Sl. 31. Vejica dela klinaste valove na gladini potoka.
- Sl. 32. "Plavajoča nit" na gladini potoka.
- Sl. 34. Oblačna kapa na vrhu otoka.
- Sl. 35. Para iz lonca naredi belo meglo. Dim od ognja pa je modrikast.
- Sl. 36. Megleno morje v Ljubljanski kotlini.
- Sl. 37. Jutranje megleno morje v Bohinju.
- Sl. 38. Meglena sled, ki jo nariše letalo, se včasih kmalu razkadi.
- Sl. 39. Kadar je vlažnost nalahko prenasitčena, pa se sled za letalom ne razgubi, ampak iz nje nastane oblak.

37 39



36 38



NOVICE-ZANIMIVOSTI



EKSKURZIJE NA GORENJSKO

Učitelje matematike in fizike na osnovnih in srednjih šolah, predvsem tiste, ki so tudi razredniki, toplo vabimo, da organizirajo v letošnjem letu ekskurzijo na Gorenjsko. Ob raznih kulturnih praznikih, športnih dnevih in podobno bi lahko poleg drugih zanimivosti obiskali tudi Plemljevo spominsko sobo na Bledu (Sl. 1). O tem smo pisali že v prvi letošnji številki Preseka (str. 34, 35 in IV. stran ovitka). Ker se bliža pomlad, bo za realizacijo našega predloga več možnosti kot v zimskih dneh. Spominska soba velikega slovenskega matematika prof. dr. Josipa Plemlja je urejena po načrtih ing. arh. Janeza Suhadolca in jo je vredno videti. Učenci se bodo ob razstavljenih predmetih dobro seznanili z deli, nagradami in odlikovanji prof. Plemlja. Obiskovalci lahko kupijo tudi razglednice, brošuro o prof. Plemlju ter bronasto, srebrno in zlato Plemljevo značko. V letošnjem koledarskem letu je vstopnina nekoliko višja in sicer za odrasle 5.-din, za šolsko mladino pa 2.-din.

Ciril Velkovich



1



2