

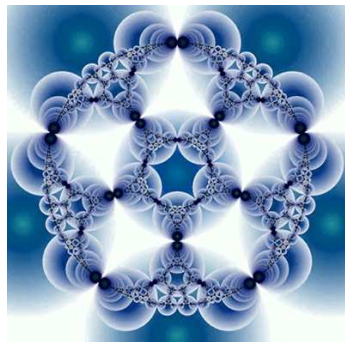
PRESEK



- PARABOLA MED STEBRIČKOMA – ALI RES?
- ZAJČKI
- INFRARDEČA ASTRONOMIJA IN VESOLJSKI TELESKOP JWST
- RAZDALJE UREJANJA



Ustvarjanje matematike



SLIKA.

Circle inversion, Anne Burns (Long Island University, Brookville, NY, Profesor Emerita)

→ Zgornja slika verjetno ni podobna nobenemu od odgovorov v vašem matematičnem učbeniku. Vseeno pa je to primer matematike. Slika je bila ustvarjena s ponavljanjem preproste geometrijske transformacije, inverzije čez krožnico. Matematika se morda včasih zdi zaporedje nešteti nesmiselnih nepovezanih vaj, toda v resnici je veliko več. Pomembno je razumeti, kako nekaj narediti in še bolje, zakaj nekaj deluje. John Urschel, nekdanji profesionalni igralec ameriškega nogometa, je kariero zamenjal z doktorskim študijem matematike na MIT. Svoj pogled na matematiko je takole pojasnil v intervjuju z novinarjem za TV oddajo Real Sports, HBO 2017:

Novinar: Vsem je jasno, da je cilj nogometa zmagati tekmo. Kaj pa je cilj matematike?

Urschel: Razumeti. Naučiti se. Napredovati.

Novinar: In kaj se zgodi, ko vam uspe preboj in rešite problem?

Urschel: To je najboljši občutek na svetu. In če ti ne uspe, to ne pomeni, da nisi pameten ali da nisi za matematiko. Noben matematik se ne rodi z matematičnim znanjem ali sposobnostjo v trenutku rešiti katerikoli problem. Vsi so morali za to garati. Vsakdo je že prišel do neprebojnega zidu in ve, kaj pomeni, če se ti zatakne. Ampak potrebno je vztrajati.

Več informacij v knjigi *Living Proof: Stories of Resilience Along the Mathematical Journey*, uredili Heinrich, Lawrence, Pons, in Taylor, 2019.

Izvirno besedilo: Doing the math, Mathematical moments from the AMS. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman. × × ×

KOLOFON



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 49, šolsko leto 2021/2022, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo)
Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek,
Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija),
Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun
Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša
(glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš
Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Matjaž Vencelj,
Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska
ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633,
telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2021/2022 je za posamezno
naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za
skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka
6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa
znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost
Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova
razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih
periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2022 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
– 2152

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov
brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike,
fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-
kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in
srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj
bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem viš-
jih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež
institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo ošte-
vilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma
razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo
biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri
ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno
pomajša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz
drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyri-
ght). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami
pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredni-
štva **DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali
na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu re-
cenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek
sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, po-
tem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo
praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov
TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo ob-
javo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Ustvarjanje matematike

UVODNIK

- 4 Računalništvo in digitalizacija
(Nino Bašič)

MATEMATIKA

- 5-7 Parabola med stebričkoma – ali res?
(Irena Kosi Ulbl)
- 30 Geogebra kotiček – Polarne koordinate in izziv cvetočih sončnic
(Boštjan Kuzman)

FIZIKA

- 12-15 Zajčki
(Nada Razpet)

ASTRONOMIJA

- 18-22 Infrardeča astronomija in vesoljski teleskop JWST
(Jurij Japelj)

RAČUNALNIŠTVO

- 23-27 Razdalje urejanja 2. del
(Mladen Borovič in Jani Dugonik)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 22 Rešitev nagradne križanke Presek 49/5
(Marko Bokalič)
- 27 Križne vsote
- 28-29 Najlepše matematične šolske table natečaja Matematika združuje
- 31 Bilo je nekoč v reviji Presek – Poročilo o tekmovanjih

TEKMOVANJA

- 8-11 Zanimive naloge in lepi uspehi na mednarodnih matematičnih tekmovanjih
(Jakob Jurij Snoj, Luka Horjak, Ana Meta Dolinar)
- priloga 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje
- priloga 21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje
- priloga 21. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje
- priloga Tekmovanje študentov v znanju matematike za Vegova priznanja – državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Poletna nevihta in strele, ki tolčejo v rob Krasa. Foto: Andrej Guštin

Računalništvo in digitalizacija



NINO BAŠIČ, UREDNIK ZA RAČUNALNIŠTVO

→ Pred vami je še zadnja številka 49. letnika revije Presek. Prihodnje šolsko leto bo Presek srečal abrahama. Sam sem se uredniškemu odboru pridružil šele nedavno, tako da spominov na stare čase ne morem obujati. Tik pred menoj je bil urednik za računalništvo kolega Jure Slak, ki je v Presek vnesel kar nekaj svežega vetra. Potruditi se bom moral, da se zdaj, ko je štafetna palica pri meni, tempo ne bo upočasn timer. Pa je po skoraj petdesetih letnikih sploh mogoče povedati kaj novega? Menim, da je stvari, o katerih se moramo pogovoriti, vsak dan več.

Na področju računalništva in informatike se v naših krajih zgodi marsikaj, o čemer dnevni mediji niti ne poročajo. Univerza v Ljubljani je 23. in 24. aprila letos organizirala CERC 2021 (<https://cerc.acm.si/>) – srednjeevropsko regionalno raven tekmovanja ICPC (International Collegiate Programming Contest). ICPC je največje tekmovanje študentov v znanju programiranja, kjer je poudarek na poznavanju podatkovnih struktur in algoritmov. Kljub temu, da je bil to prvi CERC v Sloveniji, je bil izveden zelo uspešno. Ker je običaj, da ista univerza gosti CERC tri leta zapored, bo Ljubljana gostila tudi CERC 2022 in CERC 2023.

Naj omenim, da je bil na CERC uporabljen sodniški sistem Putka (<https://putka-cerc.acm.si/>), ki je nastal v Sloveniji in je rezultat večletnega dela slovenskih zanesenjakov. Putka se uporablja tudi pri UPM (<https://putka-upm.acm.si/>), ki je vse-slovensko študentsko tekmovanje iz programiranja. UPM služi kot kvalifikacijsko tekmovanje za CERC. Čeprav je UPM študentsko tekmovanje, lahko na njem sodelujejo tudi dijaki (vljudno vabljeni!).

Po drugi strani pa so bili obilo medijske pozornosti deležni nedavni zapleti pri volitvah v državni zbor. Računalniški program volilne komisije je zaradi hrošča izbral šest poslanskih kandidatov iz napačnih enot. Napaka je bila seveda ugotovljena in odpravljena, je pa zaplet kljub vsemu povzročil kar nekaj hude krvi. Zanimivo je, da so po navadi najglasnejši kritiki ravno tisti, ki volilnega sistema ne poznajo dovolj natančno, še manj pa se spoznajo na računalniško programiranje. Poznamo kar nekaj

računalniških hroščev, ki so imeli v preteklosti veliko hujše posledice: nastala je večmilijonska gmo tna škoda (npr. nesreča rakete Ariane 5) ali pa so hrošči celo ogrožali življenja (npr. radioterapevtski sistem Therac-25). Ukrepi, kot so neodvisno preverjanje rezultatov in pa izdatno testiranje programske opreme, so vsekakor koraki v pravo smer.

Naj omenim, da je pri tekmovanju CERC ocenjevanje rešitev povsem avtomatizirano: sestavljalci nalog pripravijo kopico testnih primerov, rešitev tekmovalcev pa je sprejeta samo v primeru, če pravilno reši vse testne primere. Pri tem ni prav nobene milosti, saj koncept delnih točk ne obstaja.

V zadnjem času je v javnosti zelo priljubljena beseda *digitalizacija*. Že dolgo si življenja brez tehnologije (npr. pametni telefon) ni mogoče več predstavljati, pandemija COVID-19 pa je v uporabo sodobnih orodij prisilila tudi najbolj uporne. Danes je nekaj povsem običajnega, če sestanek poteka preko digitalne platforme za komunikacijo (npr. Jitsi ali Zoom), pa čeprav gre za interni sestanek podjetja in bi se lahko brez težav sestali v živo. Marsikje dokumentov več ne podpisujemo s kemikom na papir. Namesto tega lahko ročni podpis zajamemo na tablici ali pa dokumente podpišemo z uporabo digitalnega potrdila (to ima bistveno prednost, saj je tak podpis preverljiv). Naj mimogrede omenim, da je pri DMFA nastala pobuda, da bomo nekatere knjige skenirane objavili na spletu. Prva knjiga naj bi bila že kmalu naređ. Te dni se precej govori tudi o t. i. *Digitalnih bonih* '22. Na spletni strani vladne službe za digitalno preobrazbo (<https://www.gov.si/zbirke/storitve/digitalni-bon/>) lahko preberete, da bodo od 15. junija dalje učenci 7., 8. in 9. razredov ter dijaki in študentje lahko koristili bon v vrednosti 150 € za nakup računalniške opreme. Te bodo prav tako lahko koristili vsi državljani, ki so starejši od 55 let, če bodo pred tem opravili izobraževalni tečaj. Glede na to, da bo bon treba izkoristiti še pred koncem leta 2022, se nam obeta poletje, ki bo kar pokalo po šivih od obilice izobraževanj. Kako pa se bo vse skupaj obneslo, pa bomo že še videli.

× × ×

Parabola med stebričkoma – ali res?



IRENA KOSI ULBL

→ Profesorica matematike na gimnaziji je želela svojim dijakom popestriti ure matematike. Namesto pouka v učilnici je organizirala matematični sprehod po mestu. Dijaki so reševali kratke matematične naloge v povezavi s predmeti, ki so jih videli:

- Katere like opazite v oknu na cerkvi?
- Kolikšna je razlika dolžin poti dveh polžev, če je prvi lezel čez te tri stopnice, drugi pa po klančini ob robu stopnic?
- Kolikšen kot pravkar oklepata urni in minutni kazalec ure na rotovškem stolpu?

Ob koncu sprehoda je profesorica vzpodbudila dijake, da še sami poiščejo kakšen matematični primer, ki ga lahko vidijo z njihove zadnje postaje s sprehoda v parku. Janu se je pogled ustavil na verigi, ki je omejevala cono za pešce (slika 1).



SLIKA 1.

Veriga med stebrički

»Profesorica, poglejte, lep primer parabole!« Profesorica je malo pomislila in dejala: »Jan, mislim, da si mi dal dobro idejo za našo naslednjo uro matematike.« Pa poglejmo, o čem bodo govorili naši dijaki pri naslednji matematični uri.

Opomba. Številne ideje za opazovanja na različnih matematičnih sprehodih najdemo v [1].

Funkcije delimo na *algebraične* in *transcendentne*. Pravimo, da je funkcija f algebraična, če odvisna spremenljivka $y = f(x)$ zadošča enačbi oblike

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

kjer so koeficienti $a_0(x), \dots, a_n(x)$ polinomi spremenljivke x . Tako med algebraične funkcije sodijo polinomi, racionalne funkcije, koreni ter njihove vsote, razlike, produkti, kvocienti, potence in kompozitumi. Funkcije, ki niso algebraične, so transcendentne. Med transcendentnimi funkcijami najpogostejše uporabljamo logaritemsko in eksponentno funkcijo, kotne in ciklotometrične funkcije, v to skupino funkcij pa sodijo tudi hiperbolične funkcije. Osnovni hiperbolični funkciji sta hiperbolični sinus (sh) in hiperbolični kosinus (ch), z njunima predpisoma pa izpeljemo še predpisa za hiperbolični tangens (th) in hiperbolični kotangens (cth).

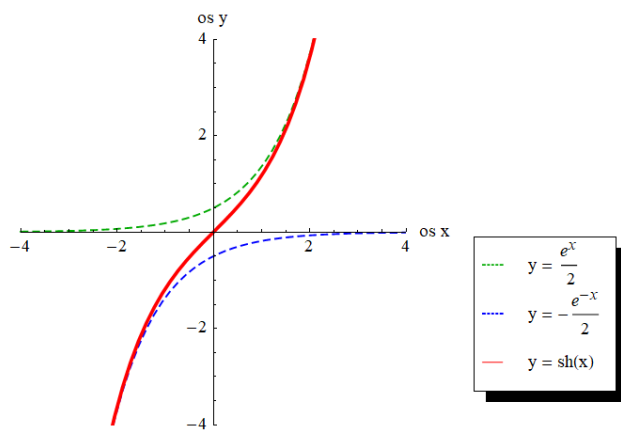
Najprej bomo spoznali predpisa za funkciji sh in ch, zapisali njuni definicijski območji in zalogi vrednosti, navedli nekaj osnovnih lastnosti ter narisali njuna grafa. Funkcijo hiperbolični sinus definiramo s predpisom

$$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pri tem smo z e označili število, ki predstavlja osnovo naravnega logaritma ($e = 2,71828\dots$). Ker sta funkciji e^x in e^{-x} definirani za vsa realna števila,



→ predstavlja ta množica tudi definicijsko območje funkcije sh. Funkcija sh je na celotnem definicijskem območju strogo naraščajoča, saj je vsota strogo naraščajočih funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $-\frac{e^{-x}}{2}$. Funkcija sh je liha funkcija. Hitro se namreč prepričamo, da je $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$ za vsako realno število x . Graf funkcije sh bo potekal skozi izhodišče koordinatnega sistema, ker je $\text{sh}(0) = 0$. Najprej narišemo graf za $x > 0$. Ko gre $x \rightarrow \infty$, se graf funkcije obnaša podobno kot graf funkcije $\frac{e^x}{2}$, saj postanejo v tem primeru vrednosti funkcije $-\frac{e^{-x}}{2}$ zanemarljivo majhne. Tako poznamo desni del grafa funkcije sh. Ker pa je funkcija liha, dobimo levi del grafa tako, da desni del prezrcalimo preko izhodišča koordinatnega sistema. Graf funkcije sh pa lahko dobimo tudi z grafičnim seštevanjem grafov funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $-\frac{e^{-x}}{2}$ (slika 2). Ugotovimo tudi, da je zaloga vrednosti funkcije sh celotna množica realnih števil.



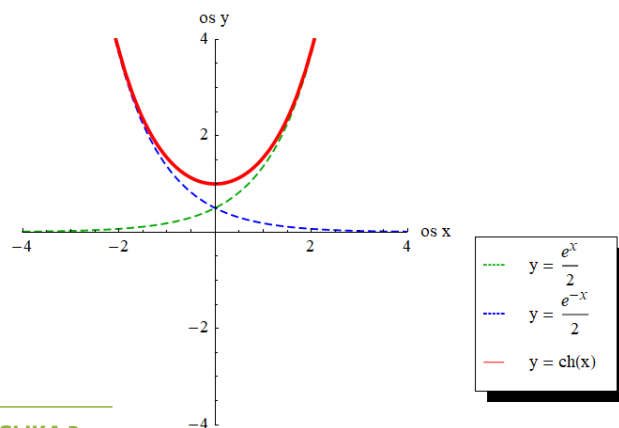
SLIKA 2.
Graf funkcije sh

Funkcijo hiperbolični kosinus definiramo s predpisom

$$\blacksquare \text{ ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Podobno kot pri hiperboličnem sinusu ugotovimo, da je definicijsko območje hiperboličnega kosinusa tudi celotna množica realnih števil. Ker je $\text{ch}(0) = 1$, bo graf funkcije sekal ordinatno os pri točki 1. Hiperbolični kosinus je soda funkcija, saj je $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$ za vsako realno število x . Graf funkcije hiperbolični kosinus je torej simetričen glede na ordina-

tno os. Podobno kot pri hiperboličnem sinusu ugotovimo, da se bo graf hiperboličnega kosinusa obnašal enako kot graf funkcije $\frac{e^x}{2}$, ko gre $x \rightarrow \infty$. Spet lahko najprej narišemo desno polovico grafa, levo pa dobimo z zrcaljenjem desne polovice preko ordinatne osi. Tudi v primeru hiperboličnega kosinusa lahko pridemo do grafa funkcije z grafičnim seštevanjem grafov funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $\frac{e^{-x}}{2}$ (slika 3). Za funkciji hiperbolični tangens in hiperbolični kotangens navedimo le, da sta analogni ustreznima trigonometričnim funkcijama.



SLIKA 3.
Graf funkcije ch

Med hiperboličnimi in kotnimi funkcijami obstaja poleg imena še veliko drugih podobnosti. Ena izmed njih so zveze med hiperboličnimi funkcijami, ki nas spominjajo na analogne zveze med kotnimi funkcijami. Oglejmo si najpogostejšo med njimi. Neposredno iz definicije hiperboličnega sinusa in hiperboličnega kosinusa sledi zveza

$$\blacksquare \text{ ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1,$$

o čemer se lahko bralec hitro prepriča sam. Z uporabo te zveze lahko pojasnimo izvor imena hiperbolične funkcije. Oznaka hiperbolični izhaja iz dejstva, da lahko hiperbolo z implicitno enačbo

$$\blacksquare \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zapišemo v parametrični obliki

$$\blacksquare x = \pm a \text{ ch}(t), \quad y = b \text{ sh}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemer predznak + velja za desno, predznak – pa za levo vejo hiperbole. Iz zgornjega zapisa namreč sledi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1.$$

Opomba. Definicije in lastnosti obravnavanih hiperboličnih funkcij najdemo npr. v virih [2] in [4].

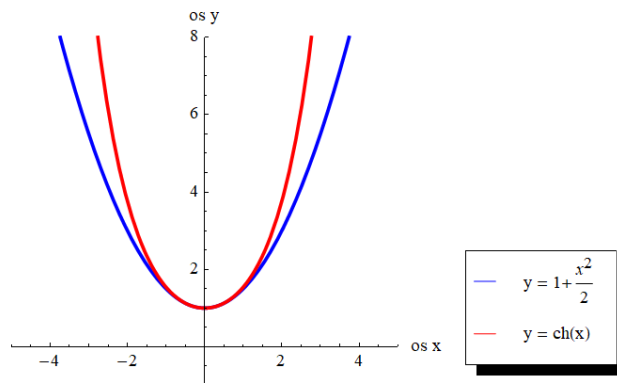
Zadnji del prispevka bomo namenili hiperboličnim funkcijam v realnem življenju. Čeprav morda ne bi pričakovali, srečamo hiperbolične funkcije na različnih področjih človekovega življenja: oceansko inženirstvo, optika, kemija ...

Najpogostejša in najbolj znana je uporaba krivulje, ki predstavlja graf hiperboličnega kosinusa. To krivuljo imenujemo verižnica in v nadaljevanju prispevka jo bomo nekoliko podrobneje opisali. Vzemimo verigo ali nit ter jo podprimo (obesimo) v dveh točkah tako, da prosto visi. Zaradi težnosti bo zavzela obliko krivulje – verižnice. Angleška beseda za verižnico *catenary* izhaja iz latinske besede *catena*, ki pomeni veriga. Galileo Galilei (1564–1642) je menil, da opisana viseča veriga zavzame obliko parabole. V to sta kasneje podvomila Christiaan Huygens (1629–1695) in Joachim Jungius (1587–1657); slednji je upravičenost dvoma potrdil z eksperimentom. Ko je bil na razpolago infinitezimalni račun, pa so Johann Bernoulli (1667–1748), David Gregory (1659–1708) in Gottfried W. Leibniz (1646–1716) ugotovili, da je verižnica krivulja z enačbo

$$y = b + a \operatorname{ch}\left(\frac{x - c}{a}\right),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$. S primerno izbiro koordinatnega sistema dosežemo, da je enačba verižnice preprostejše oblike $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$. Pri tem je a pozitivna konstanta, odvisna od dolžine verige, njenih fizikalnih lastnosti in od lege obesišč. Enačbo izpeljemo z upoštevanjem sil, ki delujejo na mirujoči del verige, ki je podprta v dveh točkah, sicer pa med njima prosto visi. Z nekaj znanja odvajanja in integriranja (med drugim uporabimo obrazec za dolžino loka krivulje) rešimo navadno diferencialno enačbo 2. reda. Izpeljavo najdemo npr. v [3]. Na sliki 4 sta v istem koordinatnem sistemu prikazani parabola z enačbo $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ in verižnica z enačbo $y = \operatorname{ch}(x)$. Iz slike razberemo, da se v bližini koordinatnega izhodišča krivulji praktično prekrivata, sicer pa ordi-

nate točk verižnice za večje $|x|$ rastejo hitreje kot ustrezne ordinate točk na paraboli.



SLIKA 4.

Parabola z enačbo $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ in verižnica z enačbo $y = \operatorname{ch}(x)$

Verižnico srečamo velikokrat tudi v vsakdanjem življenju: njeno obliko zavzamejo električni kabli med daljnovodi, preprost viseči most ali veriga med stebričkoma, ki na primer omejuje pot za pešce. Pri sotna pa je tudi v gradbeništvu in arhitekturi. Oboki, zgrajeni v obliki narobe obrnjenih verižnic, so namreč zelo trdni, saj gradniki, ki jih tvorijo, podpirajo drug drugega in tako se obok pod lastno težo ne zruši. Prav tako je oblika verižnice dobrodošla tudi pri jeklenih konstrukcijah (mostovi, nosilci kupol).

Na koncu ure je Jan dvignil roko: »Profesorica, torej ... na sprehodu smo videli lep primer verižnice!« Profesorica mu je z nasmehom pritrdila.

Literatura

- [1] J. A. Adam, *Matematični sprehodi v naravo*, Knjižnica Sigma (številka 94), DMFA – založništvo, Ljubljana, 2012.
- [2] J. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematični priročnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol*, 8. ponatis, Tehniška založba Slovenije, 1984.
- [3] R. T. Smith, R. B. Minton, *Calculus*, McGraw-Hill Companies, Inc., 2002.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika I*, 9. nespremenjena izdaja, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1987.

× × ×

Zanimive naloge in lepi uspehi na mednarodnih matematičnih tekmovanjih



JAKOB JURIJ SNOJ, LUKA HORJAK, ANA META DOLINAR

→ V zadnjem obdobju so se slovenski dijaki in dijakinje udeležili treh mednarodnih matematičnih tekmovanj.

15. Srednjeevropska matematična olimpijada je potekala od 23. do 29. avgusta 2021 v Zagrebu na Hrvaškem. Po mnogih tekmovanjih, odpovedanih zaradi pandemije ali organiziranih na daljavo, je bilo to prvo mednarodno matematično tekmovanje za srednješolce, na katerem sodeluje Slovenija, ki je bilo spet organizirano v živo. Tekmovanje je sestavljeno iz individualnega in ekipnega dela, slednji je posebnost med mednarodnimi matematičnimi tekmovanji. Na individualnem tekmovanju tekmovalci rešujejo štiri naloge, razdeljene po temah in ne po težavnosti, ki okvirno pokrivajo področja algebre, kombinatorike, geometrije in teorije števil. Na ekipnem tekmovanju je nalog osem, prav tako pa so razdeljene na enaka štiri področja – praviloma je prva naloga iz vsakega področja nekoliko lažja od druge. Tekmovalci iste ekipe se lahko na ekipnem tekmovanju posvetujejo med seboj ter sodelujejo pri iskanju rešitev. Slovenijo so zastopali Lenart Dolinar in Vid Kavčič (Gimnazija Bežigrad), Katarina Grilj (Srednja šola Slovenska Bistrica), Rok Hladin in Tilen Šket (I. gimnazija v Celju) ter Matija Skrt (Gimnazija Nova Gorica). Najbolje se je odrezala Katarina Grilj, ki je za svoj uspeh prejela bronasto medaljo, Matija Skrt pa je prejel pohvalo. Ekipo sta spremljala David Opačič in Tevž Lotrič

13. tekmovanje Romanian Master of Mathematics je potekalo od 10. do 16. oktobra 2021. Tekmovanje, ki sicer običajno poteka februarja ali marca v Bukarešti v Romuniji, je tokrat zaradi pandemije po-



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na SMO 2021

tekalo na daljavo, naši tekmovalci pa so med tekmovanjem bivali v Plemljevi vili na Bledu. Tekmovalci so se v dveh tekmovalnih dneh pomerili v reševanju šestih nalog različnih težavnosti, ki so okvirno pokrivalo področja algebre, kombinatorike, geometrije in teorije števil. Format tekmovanja je enak kot na Mednarodni matematični olimpijadi, naloge pa so praviloma običajno nekoliko težje. Na tekmovanje je tradicionalno povabljenih 20 najboljših držav po rezultatih Mednarodne matematične olimpijade preteklega leta. Slovensko ekipo so sestavljali Simon Bukovšek (Gimnazija Kranj), Lovro Drofenik in Jaka Vrhovnik (I. gimnazija v Celju), Juš Kocutar (II. gimnazija Maribor), Jan Pantner (Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija) in Lana Prijon (Gimnazija Bežigrad). Lovro Drofenik je z 21-imi točkami osvojil bronasto medaljo, Jaka Vrhovnik in Lana Prijon pa sta za v celoti pravilno rešeno nalogo prejela pohvalo. Vodji ekipe sta bila Jakob Jurij Snoj in Luka Horjak.



SLIKA 2.

Udeleženci tekmovanja RMM med reševanjem nalog v Plemljevi vili



SLIKA 3.

Slovenska ekipa na EDMO 2022

11. Evropska dekliška matematična olimpijada pa je potekala med 6. in 12. aprilom 2022 v Egerju na Madžarskem. Na njej je sodelovalo 213 tekmovalk iz 54 držav. Tekmovanje je bilo organizirano hibridno, slovenska ekipa pa se ga je udeležila v živo. Slovenijo so na olimpijadi zastopale Neca Camlek (Gimnazija Bežigrad), Nives Gošnjak (Šolski center Velenje, Gimnazija), Katarina Grilj (Srednja šola Slovenska Bistrica, Gimnazija) in Kaja Rajter (II. gimnazija Maribor). Katarina Grilj je osvojila bronasto medaljo, Kaja Rajter in Nives Gošnjak pa pohvali. Ekipno so po seštevku točk naše tekmovalke dosegle tretji najboljši uspeh za Slovenijo, od kar sodelujemo na EDMO. Spremljevalca slovenske ekipe sta bila Ana Meta Dolinar in Luka Horjak, kot opazovalke pa so se letošnje olimpijade udeležile predstavnice organizacijskega odbora EDMO 2023 Lucijana Kračun Berc, Tanja Labus in Doris Keršič, saj bo naslednja olimpijada potekala v Sloveniji.

Vsem tekmovalkam in tekmovalcem ter njihovim mentorjem in spremljevalcem čestitamo za dosežen uspeh! Za vedoželjne bralke in bralce pa v nadaljevanju dodajamo besedilo in rešitve nekaj izbranih nalog iz tekmovanj. Ostale naloge najdete na spletnih straneh tekmovanj.

SMO 2021, naloga 1

Poišči vsa taka realna števila A , da ima vsako zaporedje neničelnih realnih števil $x_1, x_2, \dots$, za katerega velja

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, končno mnogo negativnih členov.

Rešitev. Z nekaj poskušanja moramo najprej priti do domneve, da zahtevi ustrezajo natanko vsa realna števila $A \geq 2$. Šele potem se lahko lotimo dokaza te domneve. Najprej dokažimo, da so vsa števila $A \geq 2$ ustrezna. Denimo, da je $x_n < 0$ neki negativen člen. Potem očitno velja $x_{n+1} > A > 0$. Z indukcijo pa bomo dokazali, da v tem primeru za vsako naravno število k velja $x_{n+k} \geq 1$, torej so vsi nadaljni členi pozitivni. Veljavnost trditve za $k = 1$ smo že dokazali. Denimo, da velja za neko naravno število k . Uporabimo induksijsko predpostavko in dobimo

$$x_{n+k+1} = A - \frac{1}{x_{n+k}} \geq A - 1 \geq 1,$$

torej je trditev dokazana. Zato ima za $A \geq 2$ vsako ustrezno zaporedje največ en negativen člen.

Dokaz, da za realno število $A < 2$ trditev ne velja, je nekoliko zahtevnejši. V njem bomo uporabili dejstvo, da velja $x + \frac{1}{x} \geq 2$ za vsako pozitivno realno število x . Ta izraz namreč lahko preoblikujemo v $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$, ki očitno velja, saj je kvadrat realnega števila vedno nenegativen. Dokazali bomo, da za vsako realno število $A < 2$ velja, da ima vsako zaporedje neničelnih realnih števil, ki ustreza pogoju $x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$, neskončno negativnih členov. Zvezo v nalogi lahko preoblikujemo v $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} = A$. Če



→ seštejemo prvih n takih enakosti, dobimo

$$\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{n+1} + \frac{1}{x_n}\right) = nA,$$

kar lahko preoblikujemo in ocenimo navzdol

$$\begin{aligned} nA &= \frac{1}{x_1} + x_{n+1} + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) + \dots \\ &\quad + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{1}{x_1} + x_{n+1} + 2(n-1). \end{aligned}$$

Velja torej

$$x_{n+1} \leq 2 - n(2 - A) - \frac{1}{x_1}.$$

Ker je $A < 2$, je izraz na desni negativen za vse dovolj velike n , zato so negativni tudi vsi nadaljnji členi zaporedja.

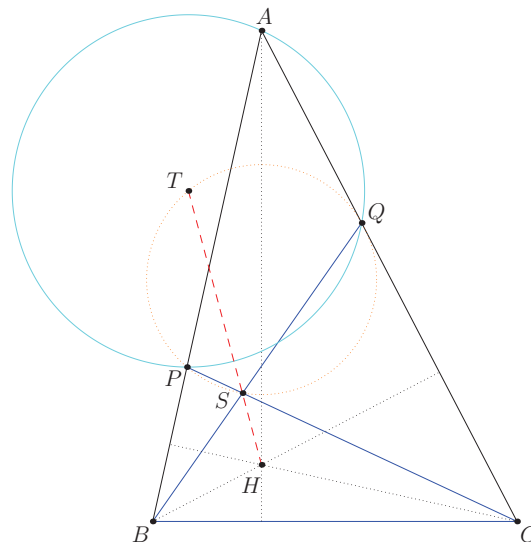
EDMO 2022, naloga 1

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, za katerega velja $BC < AB$ in $BC < CA$. Naj točka P leži na daljici AB in točka Q leži na daljici AC , tako da $P \neq B$, $Q \neq C$ in $BQ = BC = CP$. Naj bo T središče očrtane krožnice trikotnika APQ , H višinska točka trikotnika ABC in S presečišče premic BQ in CP . Dokaži, da so T , H in S kolinearne.

Rešitev. Kot pri vsaki geometrijski nalogi si najprej narišemo čim natančnejšo skico.

Opazimo, da je trikotnik BCQ enakokrak z vrhom pri B , BH pa je višina v tem trikotniku. V enakokrakem trikotniku višina sovpada s simetralo kota, zato je BH simetrala kota $\angle CBS$. Podobno opazimo, da je trikotnik CBP enakokrak z vrhom pri C , zato je CH simetrala kota $\angle SCB$. Točka H tako leži na dveh simetralah kotov v trikotniku BCS , zato je to kar središče včrtane krožnice trikotnika. Sledi, da je SH simetrala kota $\angle BSC$. Dovolj bi tako bilo pokazati, da tudi točka T leži na tej simetrali oziroma na simetrali kota $\angle QSP$.

O točki T že vemo to, da leži na simetrali stranice PQ , saj je središče trikotniku APQ očrtane krožnice. To nas spomni na znano geometrijsko konfiguracijo – simetrala stranice in nasprotnega kota se sekata na razpolovišču pripadajočega loka očrtane krožnice. Dovolj bi tako bilo dokazati, da so točke P , S , Q in T konciklične.



SLIKA 4.

Dokazujemo kolinearost točk T , H in S .

Po izreku o obodnem in središčnem kotu je

$$\angle PTQ = 2\angle PAQ.$$

Oglejmo si še kot $\angle QSP$. Opazimo, da velja

$$\angle QSP = \angle BSC = 180^\circ - \angle SCB - \angle CBS,$$

saj je vsota kotov v trikotniku SBH enaka 180° . Ker pa je BH simetrala kota pri B , velja

$$\begin{aligned} \angle CBS &= 2\angle CBH = 2 \cdot (90^\circ - \angle ACB) \\ &= 180^\circ - 2\angle ACB. \end{aligned}$$

Podobno dobimo, da je $\angle SCB = 180^\circ - 2\angle CBA$, zato je

$$\begin{aligned} \angle QSP &= 180^\circ - 180^\circ + 2\angle ACB - 180^\circ + 2\angle CBA \\ &= 2(\angle ACB + \angle CBA) - 180^\circ. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} \angle PTQ + \angle QSP &= 2\angle BAC + 2(\angle ACB + \angle CBA) \\ &\quad - 180^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

saj je $\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ$. Ker je vsota nasprotnih kotov v štirikotniku $PSQT$ enaka 180° , je ta tetiven.

Sedaj opazimo, da je $TP = TQ$, zato sta enaka tudi pripadajoča obodna kota $\angle QST$ in $\angle TSP$, torej T res leži na simetrali kota.

EDMO 2022, naloga 5

Za vsa naravna števila n, k naj bo $f(n, 2k)$ število možnosti, da tabelo velikosti $n \times 2k$ popolnoma pokrijemo z nk dominami velikosti 2×1 (npr., $f(2, 2) = 2$ in $f(3, 2) = 3$).

Poišči vsa naravna števila n , pri katerih je za vsak $k \in \mathbb{N}$ število $f(n, 2k)$ liho.

Rešitev. Dokazali bomo, da pogoju zadoščajo natanko vsa števila oblike $2^k - 1$. Najprej dokažimo dve pomožni trditvi.

Trditev 1. $f(2m + 1, n) \equiv f(m, n) \pmod{2}$ za vse m in vse sode n .

Oglejmo si, kaj se zgodi, če tlakovanje tabele velikosti $(2m + 1) \times n$ prezrcalimo čez sredinski stolpec. Tako dobimo a parov tlakovanj (ki se zrcalijo drug v drugega) in b posamičnih tlakovanj (ki se zrcalijo sama vase). Ker je število tlakovanj v parih očitno sodo, bo $f(2m + 1, n) \equiv b \pmod{2}$.

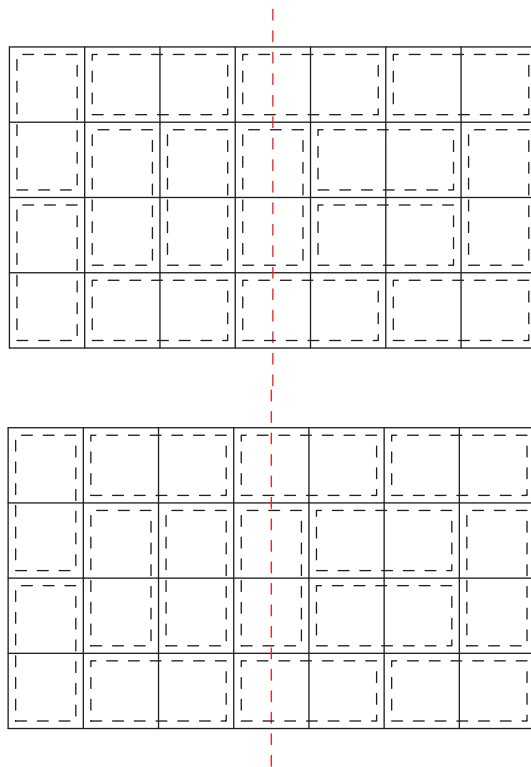
Določimo sedaj število b . Če se tlakovanje prezrcali samo vase, mora veljati, da ima vsaka domina, ki ima vsaj eno polje na sredinskem stolpcu, na sredinskem stolpcu obe svoji polji. To pomeni, da je sredinski stolpec pri teh tlakovanjih pokrit z $\frac{n}{2}$ vertikalnimi dominami, kar ploščo razdeli na dva dela velikosti $m \times n$. Sredinski stolpec je fiksiran. Prav tako tlakovanje enega dela velikosti $m \times n$ fiksira drugega, da velja simetričnost, zato je $b = f(m, n)$.

Trditev 2. $f(n, n) \equiv 0 \pmod{2}$ za vse sode $n \geq 2$.

Prezrcalimo tlakovanja tabele velikosti $n \times n$ čez diagonalno. Nobeno tlakovanje se ne zrcali samo vase (domina v zgornjem levem kotu, bo npr. iz vertikalne prezrcaljena v horizontalno, ali obratno). Torej lahko tlakovanja razdelimo v pare, zato bo $f(n, n)$ sodo.

Sedaj lahko zaključimo dokaz. Vemo že naslednje:

- Če je n lih, iz prve trditve sledi, da n zadošča pogoju naloge natanko tedaj, ko pogoju zadošča $\frac{1}{2}(n - 1)$.
- Če je $n \geq 2$ sod, iz druge trditve sledi, da n pogoju ne more zadoščati.



SLIKA 5.

Primer zrcaljenja domin

- Če je $n = 1 = 2^1 - 1$, potem n zadošča pogoju, saj je $f(1, 2k) = 1$ za vsak k .

Zapišimo n v binarnem sistemu. Če je n sod, ne zadošča pogoju naloge, če je lih, pa si oglejmo število, ki ga dobimo, če mu izbrisemo zadnjo številko. To je ravno $\frac{1}{2}(n - 1)$. Če ima n v binarnem zapisu kakšno številko enako 0, bomo z brisanjem zadnje številke na neki točki prišli do sodega števila, ki pa ne zadošča pogoju. Sledi, da imajo iskana števila v binarnem zapisu same enke, to pa so ravno števila oblike $2^k - 1$.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si
www.presek.si

Zajčki



NADA RAZPET

→ Z usmerjanjem snopa sončne svetlobe z ravnim zrcalom na stene delamo zajčke. Zajčke, to je svetle lise, pa lahko mečejo tudi steklene površine stavb.



SLIKA 1.

Odsevi – zajčki na fasadi hiše na drugi strani naše ulice. Od leve proti desni si sledijo zajčki od vrat, okna, okna in vrat.

Nekega pomladnega jutra smo za kratek čas na fasadi hiše na nasprotni strani ulice opazili svetel znak. Mislili smo, da je to odsev tovarniškega znaka na avtomobilu, ki je bil parkiran poleg naše hiše. Na pojav smo hitro pozabili. Potem pa smo sredi septembra zjutraj znova opazili tak znak, po domače zajčka. Kmalu sta se pojavila še dva zajčka in na

koncu smo videli štiri zajčke, kot kaže slika 1. Ko smo odprli balkonska vrata, se je eden od zajčkov premaknil. Drug zajček se je premaknil takrat, ko smo rahlo nagnili okno proti notranjosti. Tako smo ugotovili, da so zajčki odsevi steklenih površin z obojih vrat in oken, ki gledajo proti vzhodu. Zajčki, ki jih mečejo vrata, imajo znotraj kroga oziroma elipse obliko črke Y, okenski zajčki pa obliko črke X. Vzrok za Y je balkonska ograja, ki prestreže del odbitih žarkov.

Naša okna so dvoslojna. Med obema slojema je plast plina. Če je prostor med obema plastema dobro zatesnjen, se masa plina ne spreminja. Tlak v prostorih, kjer je okno, pa se spreminja. Če je tlak višji, se steklo rahlo vboči. Površina zunanje plasti postane konkavno zrcalo, ki pa ni sferično. Izvedenci pravijo, da se zunanja plast lahko ukrivi od 1 mm do 4 mm, notranja pa od 2 mm do 8 mm. Kakšno obliko zavzame šipa, je odvisno od lastnosti stekla, načina, kako je zatesnjen plin, od sredstva, ki vpija vlago, velikosti okna, vpetosti stekla v okvirju in materiala, iz katerega je okvir. Žarki, ki vpadajo na okno, se od okna odbijejo in na fasadi hiše na drugi strani ulice oblikujejo *zajčka*. Zanimivo je, da smo prav takega zajčka opazili na eni od fasad v bližnji ulici, v naši ulici pa nikjer drugje. To pomeni, da je važno, pod kakšnim kotom vpada svetloba na površino oken, kako je okno ukrivljeno in kolikšna je razdalja nasproti stoječih hiš.

Če malo pobrsamo po spletu, vidimo, da lahko okna mečejo zajčke različnih oblik. Zadeva ni tako nepomembna, kot je videti. Pri razdalji med hišami, ki so blizu goriščne razdalje ukrivljenega okna, je lahko temperatura na zajčku precejšnja, med 160 °C in 200 °C, kar pomeni, da se plastične obloge stali ali pa celo zažgejo. Tovrstne težave poznajo že dolgo in še povzročajo sive lase mnogim arhitektom in gradbenikom.

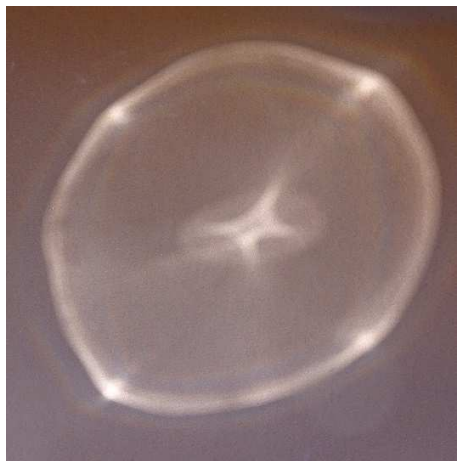
K sreči naše steklene površine še niso povzročile škode. Pa še zajčke lahko opazimo le spomladi in jeseni blizu enakonočja.

Ko opazimo pojav v naravi, ga želimo ponazoriti tudi s poskusi. Najlepše uspejo poskusi z malo debelejšo prozorno plastiko ali pa z debelejšo pravokotno plastično ploščo z dobro odsevnostjo.

Naredili smo tri vrste poskusov.

Najprej smo delali s spodnjim delom škatle čokoladnih pralin. Škatla ima približno 1 cm visoke stran-

ske ploskve. Na sredo dna škatle smo pritrdili majhen vakuumski prisesek in ga rahlo potegnili, tako da se je dno upognilo. Zunanjo spodnjo stran smo usmerili proti soncu in poiskali zajčka (slika 2). Če smo močnejše potegnili prisesek, je bil notranji večkotnik večji. Svetle pike na obodu so odsevi vogalov škatle. Robovi škatle se tudi rahlo ukrivijo, tako dobimo približno krožni odsev. Doma lahko poskusite tudi z večjimi vakuumskimi priseskami.



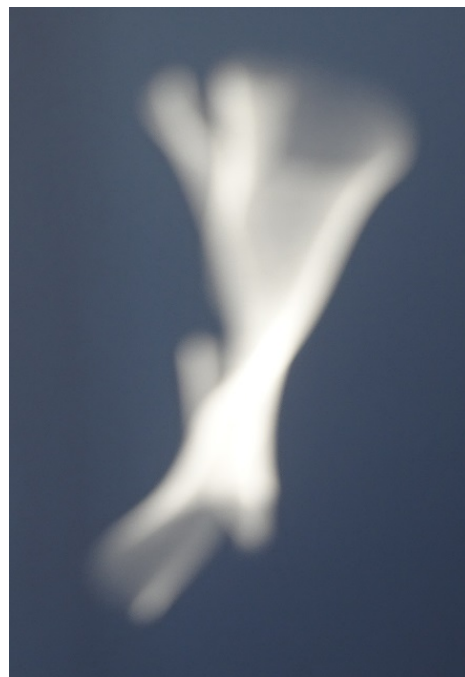
SLIKA 2.

Zajček spodnjega dela prozorne škatle za praline. Dno smo upognili z vlečenjem vakuumskega priseseka, ki je nameščen na sredino osnovne ploskve.

Drugo serijo poskusov smo delali z belo plastično ploščo, ki smo jo krivili na robovih (slika 3).

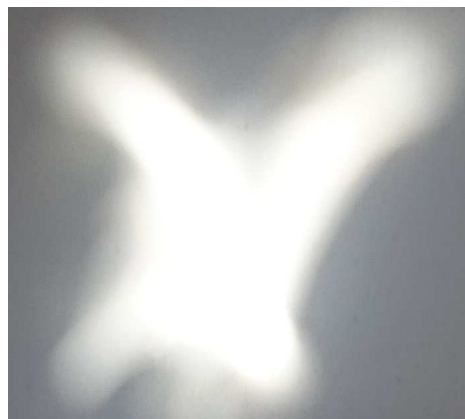
Zadnjo serijo poskusov pa smo delali z zaščitno škatlo za posamezne zgoščenke. Enega od zajčkov kaže slika 4. Ali je bila v škatli zgoščanka ali ne in kako smo škatlo krivili, pa ugotovite sami.

Pri izvajanju poskusov smo omejeni na predmete, ki jih imamo doma ali pa so lahko dostopni. Zato bomo zajčke delali še z računalnikom. *Zrcala* imajo zdaj lahko poljubno obliko, saj jih programiramo. Mi bomo delali z GeoGebro, ki ima že nekaj ukazov, ki jih pri ustvarjanju zajčkov potrebujemo. Da bodo razmere kar se da podobna oknu, moramo izbrati primerno zrcalo, to je primerno ploskev. Do nje pridemo z reševanjem enačbe za napeto opno, pritrjeno na pravokotni okvir. Tu podrobnega računa ne bomo omenjali, poleg tega bomo rešitev še poenostavili.



SLIKA 3.

Zajček, ki ga odseva bela debelejša plastična pravokotna plošča, ki smo jo ukrivljali po robovih.



SLIKA 4.

Zajček, ki ga lahko odseva škatla za posamezne zgoščenke.

Enačbo ploskve p smo izbrali takole:

$$\blacksquare f(x, y) = -h \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{\pi y}{2b}.$$





Na robu pravokotnika ni odmika, tam je $f(x, y) = 0$. Pri tem smo spreminjali faktor h od 0,12 do 0,3. Ker smo začeli s kvadratnim oknom, smo postavili $a = b = 2$, da je bilo središče koordinatnega sistema v središču okna.

Da nam GeoGebra nariše samo omejeni del ploskve, to zapišemo takole:

- $\text{Ploskev}(u, v, f(u, v), u, -2, 2, v, -2, 2)$.

Nato smo naredili dva drsnika $c \in [-2, 2]$ in $d \in [-2, 2]$. Izbrana točka na ploskvi ima koordinate $T(c, d, f(c, d))$. V točki T smo postavili normalo na ploskev, to je vpadna pravokotnica za žarke. Normalo poiščemo tako, da z GeoGebro izračunamo odvoda, prvega po spremenljivki x , drugega po spremenljivki y :

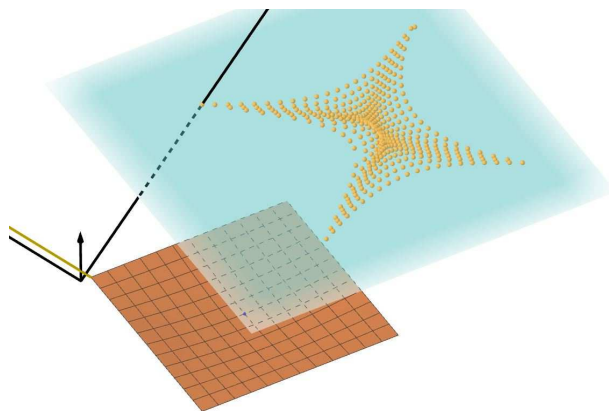
- $p(x, y) = \text{Odvod}(f(x, y), x)$,
 $q(x, y) = \text{Odvod}(f(x, y), y)$.

Najprej poiščemo točko na tej normali, to naj bo točka N :

- $N(c - p(c, d), d - q(c, d), f(c, d) + 1)$

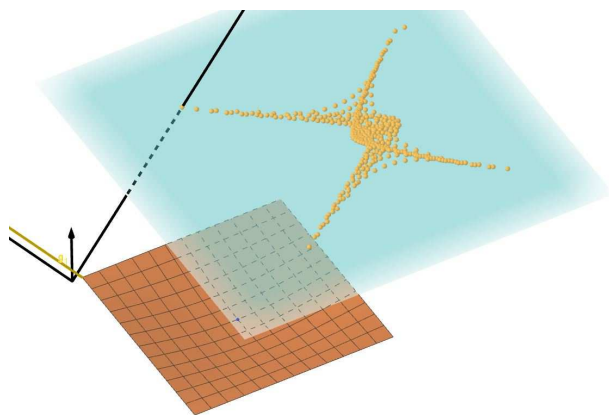
Normalni vektor je torej vektor, ki povezuje točki T in N , to je vektor $\vec{n} = \overrightarrow{TN}$. Izberemo še smer vpadnih žarkov in skozi točko T narišemo vzporednico k vpadnim žarkom. Na tej vzporednici izberemo točko M , jo prezrcalimo preko vpadne pravokotnice in dobimo točko M' . Na koncu narišemo še odbiti žarek, ki leži na poltraku $[T, M)$. Zdaj potrebujemo še ploskev, na katero odbiti žarki mečejo zajčka. Na osi z izberemo točko R in narišemo ravnino, vzporedno z okvirjem. Mi smo za začetek lego točke R izbrali tako, da je $R(0, 0, 3)$. Potrebujemo še presečišče odbitega žarka s to ravnino, to je točka P . Da je risanje zajčka kar se da sistematično, naredimo to tako, da za en korak premaknemo drsnik c in poženemo drsnik d od -2 do 2 . Nato premaknemo drsnik c še za en korak in poženemo d (animacija). Število korakov določa število točk. Za začetek jih je dovolj 21 za vsak drsnik, torej 441 točk. Lahko pa jih izberete tudi nekaj tisoč. GeoGebra jih kar hitro izriše. Sled točke P , ki je presečišče odbitega žarka z vzporedno ravnino, riše zajčka. Vse skupaj lahko poenostavimo tako, da je potreben en sam drsnik, kar pa zahteva nekaj znanja o matrikah.

S spreminjanjem faktorja h ali pa s premikanjem vzporedne ravnine dobimo različne oblike zajčkov. Dva izmed njih kažeta sliki 5 in 6. Na sliki 6 smo izbrali večji upogib, večji h . Na sredini zajčka je nastal štirikotnik, kar smo opazili že pri poskusih s škatlo za praline. Na slikah so v črni barvi narisani vpadna pravokotnica, vpadni in odbiti žarek. V oker barvi pa je izbrana smer vpadnih žarkov in točke, ki so presečišča odbitih žarkov z vzporedno ravnino. Kjer so pike gostejše, je zajček svetlejši, kjer pa je pik malo, pa je odbite svetlobe na vzporedni ravnini malo.



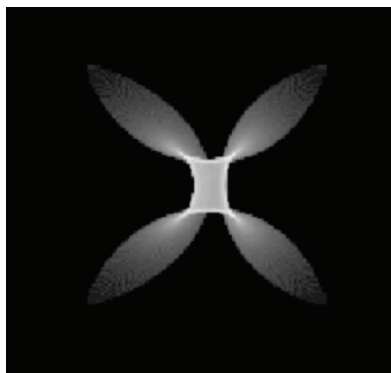
SLIKA 5.

Zajček pri majhnem upogibu zrcala.



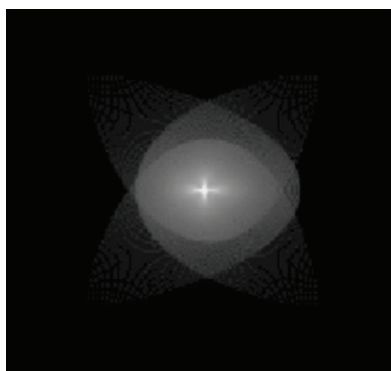
SLIKA 6.

Zajček pri večjem upogibu zrcala. Na sredini se pojavi štirikotnik.



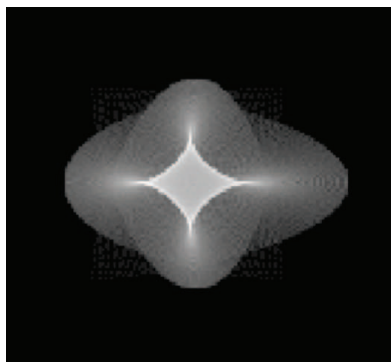
SLIKA 7.

Zajček na zaslonu, oddaljenem 2 m.



SLIKA 8.

Zajček na zaslonu, oddaljenem 3,5 m.



SLIKA 9.

Zajček na zaslonu, oddaljenem 5 m.

Spretni programerji si lahko naredite zajčke še z drugače oblikovanimi zrcali in z ravninami, ki niso vzporedne z ravnino okvirja. Nekaj takih je na slikah 7, 8 in 9. Narisani so z numeričnim reševanjem enačbe za kvadratno opno, ki jo konkavno upogne razlika v tlakih na zunanji in notranji strani okna ter na različnih oddaljenostih zaslona od okvirja. Glede na vpadne žarke so zunanje šipe konkavne, notranje pa konveksne. Imamo torej dvojni odboj.

Da so naši izračuni pravilni, potrjuje tudi fotografija 10. Posneta je bila opoldne. Sončni žarki padajo med stolpnicama od zgoraj na južno steno stolpnice in se od steklenih površin odbijejo na severno steno sosednje stolpnice. Fotografijo je posnel Andrej Razpet.



SLIKA 10.

Zajčki, ki jih okna in zastekljeni balkoni stolpnice mečejo na steno sosednje stolpnice.

Literatura

- [1] *The Curious Case of the Imploding Windows*, dostopno na www.greenbuildingadvisor.com/article/curious-case-imploding-windows, ogled 4. 10. 2021.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

A large, white, parabolic satellite dish antenna is mounted on a mobile trailer. The dish is pointed towards the sky, and the entire structure is set against a clear blue sky. The dish is supported by a complex metal framework. The trailer is parked on a gravel surface, and there are some trees and a fence in the background.



[illegible]

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. avgusta 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Infrardeča astronomija in vesoljski teleskop JWST



JURIJ JAPELJ

→ Vsak del elektromagnetnega spektra nudi svojevrstne informacije o vesolju. Infrardeča svetloba je med drugim bistvena za opazovanje novorojenih in mladih zvezd, za študij atmosfer planetov okoli drugih zvezd in pri iskanju najbolj oddaljenih zvezd in galaksij v vesolju. Pred kratkim so astronomi v vesolje poslali vesoljski teleskop JWST, ki nam bo ponudil povsem nov pogled na infrardeče vesolje.

Konec decembra 2021 je svet spremljal izstrelitev rakete z dragocenim tovorom na krovu, vesoljskim teleskopom JWST. Pričakujemo, da bo teleskop v astronomijo prinesel podoben napredek, kot ga je vesoljski teleskop Hubble. Teleskop, ki naj bi deloval vsaj desetletje, bo prva prava opazovanja opravil na začetku poletja, ko bodo znanstveniki uspešno končali testiranje vseh sistemov.

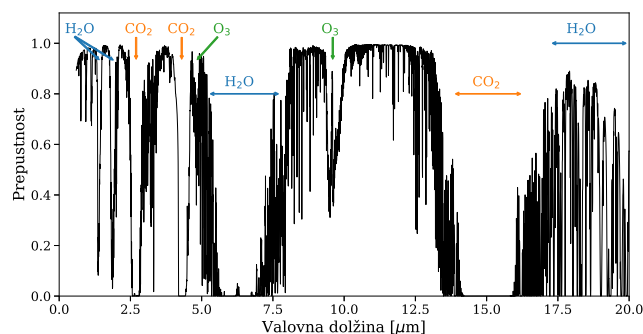
Teleskop JWST je teleskop presežnikov. Več kot trideset let je trajalo od prve ideje o teleskopu do izstrelitve. Gre za enega izmed najdražjih observatorijev v zgodovini znanosti. Glavno zrcalo teleskopa, sestavljeno iz 18 heksagonalnih pozlačenih zrcal, je s premerom 6,5 m največje zrcalo, kar smo jih do sedaj poslali v vesolje. Najpomembnejša lastnost teleskopa je, da zbira infrardečo svetlobo. JWST ne bo prvi vesoljski infrardeči teleskop, bo pa daleč najbolj zmogljiv. In prav infrardeči svetlobi se gre zahvaliti, da je projekt tako zapleten in drag.

Zemljina atmosfera in infrardeča svetloba

Ni naključje, da so naše oči najbolj občutljive na vidno svetlobo. Svetloba z valovno dolžino med 300 in 700 nm potuje skozi atmosfero skoraj neovirano in temu so se prilagodile naše oči. A vidna svetloba

je le manjši del elektromagnetnega spektra. Poleg vidne svetlobe atmosfera prepusti še del radijskega valovanja in nekaj ožjih pasov v infrardečem delu spektra, medtem ko svetloba visokih energij (ultravijolična svetloba, rentgensko sevanje, sevanje gama) ne doseže površja.

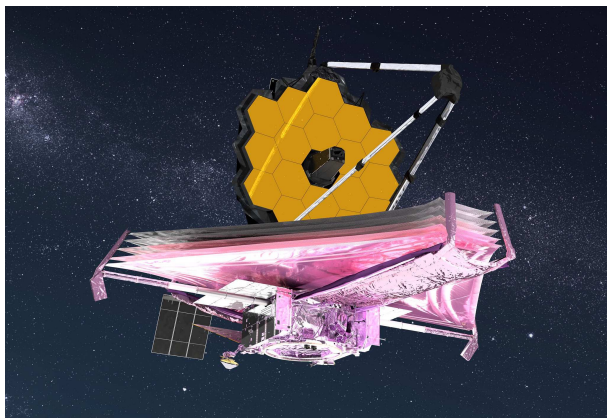
Infrardeča svetloba zavzema valovne dolžine med nekaj manj kot enim μm in vse do enega mm. Široki pas večkrat razdelimo na bližnjo infrardečo ($\lambda \leq 20 \mu\text{m}$) in podmilimetrsko območje, kar je povezano z različnimi teleskopi in detektorji, ki jih potrebujemo za opazovanje teh dveh delov spektra. Večino infrardeče svetlobe absorbirajo molekule vode, ozona in ogljikovega oksida v atmosferi (slika 1). Z Zemlje lahko opazujemo le svetlobo ozkih spektralnih območij, ki jih atmosfera ne absorbira. Za čim boljši rezultat opazovanja je teleskop potrebno postaviti čim višje, tako da je med teleskopom in vesoljem čim manj atmosfere.



SLIKA 1.

Prepustnost atmosfere v območju infrardečih valovnih dolžin. Označeni so nekateri izmed glavnih plinov (CO_2 , H_2O , O_3), ki absorbirajo svetlobo. Atmosfera absorbira praktično vso svetlobo med $20 \mu\text{m}$ in 1 mm . Model prepustnosti je bil izračunan s pomočjo aplikacije SKYCALC Evropskega južnega observatorija.

Poleg atmosfere opazovanje na Zemlji otežuje tudi termično sevanje teles. Zemlja, atmosfera in vsako telo s temperaturo nekaj sto K sevajo infrardečo svetlobo. Opazovanja nad $\lambda \sim 5 \mu\text{m}$ z Zemlje zaradi termičnega sevanja, ki povsem preplavi šibki signal astronomskih teles, postanejo bolj ali manj nemogoča. Dolgovalovni del infrardečega spektra je vsaj delno dosegljiv v višjih delih atmosfere, zato so v preteklosti tja večkrat pošiljali balone in letala z infrardečimi teleskopi. Za dostop do celotnega infrardečega spektra in za najbolj občutljiva opazovanja pa moramo teleskop poslati v vesolje.



SLIKA 2.

Ilustracija vesoljskega teleskopa JWST.

Avtor: NASA GSFC/CIL/Adriana Manrique Gutierrez

JWST: daleč stran, zaščiten in zlat

Teleskop JWST bo opazoval v območju od 0,6 do 30 μm . Termično sevanje Zemlje moti opazovanje predvsem svetlobe daljših valovnih dolžin, zato so znanstveniki teleskop poslali daleč stran od planeta. Njegovo delovno okolje bo tako imenovana druga Lagrangejeva točka ali L2. V vrtečem sistemu Sonca in Zemlje se nahaja pet Lagrangejevih točk, kjer je vsota vseh sil enaka nič¹. Točka L2 leži približno 1,5 milijona km od Zemlje, pri čemer je Zemlja vedno med točko in Soncem. Ta točka je pravzaprav labilna: če pripeljemo teleskop v to točko, bo sčasoma odplaval stran. JWST se bo zato gibal okoli L2 točke

v posebni orbiti, pri čemer bo za vzdrževanje orbite potrebnega zelo malo goriva.

Teleskop bo ves čas obrnjen stran od Zemlje in Sonca. Slednje je še posebej problematično, saj občutno segreva teleskop in instrumente v njem². Zadnja stran teleskopa, ki gleda proti Soncu, je zaščiten z večslojnim ščitom velikosti teniškega igrišča. Zunanja sončna stran ščita ima temperaturo od 290–320 K, notranja ohlajena stran, kjer je teleskop z instrumenti, pa okoli 40 K. Trije izmed štirih instrumentov za delovanje potrebujejo temperaturo pod 50 K. Četrty instrument, ki bo opazoval najdaljše valovne dolžine, pa je potrebno še dodatno hladiti s tekočim helijem do temperature pod 7 K.

Ena izmed karakteristik teleskopa je glavno zrcalo, sestavljeno iz 18 heksagonalnih zrcal. Razlog za takšno konstrukcijo je dvojen. Težko je narediti tako veliko zrcalo iz enega kosa. Obenem pa nimamo na voljo dovolj velike rakete, s katero bi lahko izstrelili teleskop s tako velikim zrcalom – zrcalo in ščit je bilo potrebno med izstrelitvijo zložiti in kasneje v vesolju razpreti. Tudi zlata barva zrcal ni naključna. Zlato namreč zelo dobro odbija infrardečo svetlobo, veliko bolje kot bolj klasična materiala, aluminij in srebro. Dobra odbojnost pomeni, da bo manj svetlobe izgubljene na poti proti detektorju. Večina zrcala je pravzaprav zgrajenega iz berilija, močnega materiala, ki se zelo malo odziva na temperaturne spremembe. Čez berilij je nanešena le tanka plast zlata.

Informacije v infrardeči svetlobi

Poglejmo si nekaj glavnih področij astrofizike, kjer infrardeča svetloba igra pomembno vlogo.

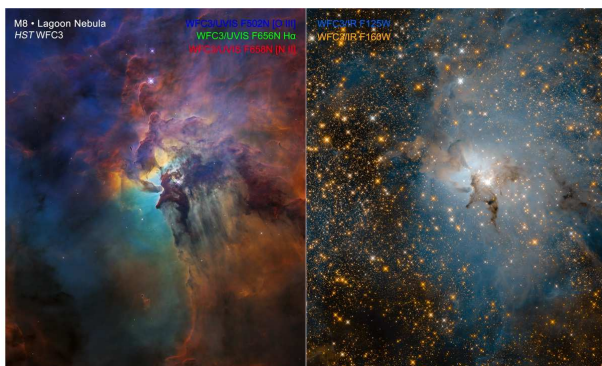
Medzvezdni prah in mlade zvezdne populacije

V medzvezdnem prostoru se nahajajo oblaki plina in prahu. Snov v oblakih je izjemno redka: gostote atomov in molekul v oblakih se običajno gibljejo med 100 in 10000 delcev na kubični centimeter, medtem ko imajo najgostejši molekularni oblaki do stokrat večje gostote. Kljub majhnim gostotam pa ti razse-

¹Pri tem zanemarimo gravitacijski vpliv drugih planetov.

²Vesolje ima resda zelo nizko temperaturo, a ker je obenem bolj ali manj prazno, se lahko teleskop ohlaja le preko sevanja in ne preko bolj učinkovite konvekcije.





SLIKA 3.

Meglica Laguna v vidni (levo) in infrardeči svetlobi (desno). Svetloba daljših valovnih dolžin razkrije zvezde, ki so v vidni svetlobi zakrite za zaplatami prahu. Večina teh zvezd je oddaljenih, nekatere pa so mlade, pravkar rojene zvezde v meglici. Obe sliki sta bili posneti z Vesoljskim teleskopom Hubble.

Avtor: NASA/ESA/STScI

žni oblaki spreminjajo izgled tako posameznih zvezd kot galaksije kot celote.

Vzemimo zvezdo, ki se nahaja za oblakom prahu. Med potovanjem skozi oblak se del njene svetlobe siplje na prašnih delcih. Nekaj svetlobe prašni delci absorbirajo in jo izsevajo (v drugih valovnih dolžinah) v naključni smeri. Posledično se torej nekaj svetlobe v oblaku izgubi. Temu pojavu pravimo ekstinkcija. Prašni delci ne sipljejo vse svetlobe enako učinkovito. Svetloba z valovno dolžino večjo od velikosti prašnega delca bo delec bolj ali manj prešla. Ekstinkcija je torej veliko močnejša v modri svetlobi kot v rdeči. Ta pojav je med drugim odgovoren za rdeče sončeve zahode na Zemlji. Če ekstinkcijo pogledamo bolj podrobno, je sicer odvisna tudi od velikosti in kemične sestave prašnih delcev.

Z infrardečo svetlobo torej lahko pogledamo za in v prašne oblake. Še posebej zanimivo je raziskati področja, kjer se rojevajo zvezde. Na slikah meglic v vidni svetlobi običajno vidimo temne pasove – v takšnih najbolj prašnih delih galaksije se skrivajo zvezdne porodnišnice. Tako dobimo vpogled v zapleten proces nastanka zvezd. Med drugim nas zanima, kako molekularni oblaki razpadejo v zvezde, kakšne mase ima novorojena populacija zvezd in kakšno vlogo pri tem igrajo zastopanost težkih kemičnih elementov, magnetna polja in turbulence v molekularnih oblakih.

Oddaljene galaksije in zvezde

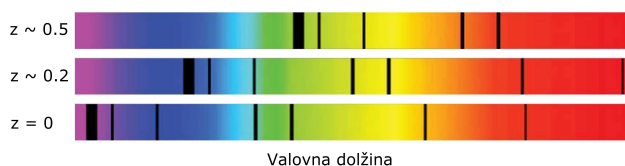
V dvajsetih letih prejšnjega stoletja so znanstveniki ugotovili, da se vesolje širi. Oddaljene galaksije se od nas oddaljujejo: bolj ko je galaksija oddaljena, hitreje se oddaljuje. Širjenje vesolja ima zanimiv vpliv na svetlobo, ki jo galaksije izsevajo. Valovna dolžina svetlobe, ki potuje skozi širajoče se vesolje, se raztegne in pomakne proti daljšim valovnim dolžinam. Spremembi valovne dolžine zaradi širjenja vesolja pravimo kozmološki rdeči premik. Bolj ko je galaksija oddaljena, večji je rdeči premik, kar opišemo z enostavno enačbo

$$\frac{\lambda_{\text{izmerjena}}}{\lambda_{\text{izsevana}}} = 1 + z,$$

kjer sta $\lambda_{\text{izmerjena}}$ in $\lambda_{\text{izsevana}}$ izmerjena in izsevana valovna dolžina, z pa rdeči premik. Najbolj oddaljene galaksije, kar smo jih do sedaj detektirali, imajo rdeči premik $z \approx 11$. Rdeči premik je priročna količina, ki pa nam sama po sebi ne pove, kako daleč se nek objekt nahaja. Povezava med rdečim premikom in razdaljo je nelinearna in je odvisna od privzetega modela širjenja vesolja, podkrepljenega z opazovalnimi podatki.

Rdeči premik ima pomembno posledico za opazovanje in raziskovanje galaksij. Recimo, da z našim teleskopom opazujemo galaksije v vidni svetlobi pri $\lambda_{\text{izmerjena}} = 550$ nm. Galaksija, ki leži na rdečem premiku $z = 0,1, 0,5, 2,0$, bo zajeto svetlobo pravzaprav izsevala pri $\lambda_{\text{izsevana}} = 500, 366, 180$ nm. Opazovanja galaksij na različnih oddaljenostih v tem primeru ne moremo primerjati, saj opazujemo povsem različne dele spektra. Za pravilno primerjavo moramo torej bolj oddaljene galaksije opazovati pri daljših valovnih dolžinah.

Še ena posledica rdečega premika je, da zelo oddaljenih galaksij ne moremo videti v vidni svetlobi. Galaksija ne izseva veliko svetlobe z valovno dolžino manjšo od 120 nm. Delno je za to kriv prah, saj je ekstinkcija v ultravijolični svetlobi zelo visoka. Še večji problem pa je medgalaktični plin, ki absorbira svetlobo pod ~ 120 nm. Če opazujemo pri $\lambda_{\text{izmerjena}} = 550$ nm, potem lahko v ultravijolični svetlobi opazujemo samo galaksije do $z \sim 550/120 - 1 = 3,6$. Za bolj oddaljene galaksije moramo opazovati pri daljših valovnih dolžinah. Za iskanje in opazovanje najbolj oddaljenih galaksij moramo torej poseči po infrardeči svetlobi.


SLIKA 4.

Ilustracija kozmološkega rdečega premika. Absorpcijske črne črte vsaka galaksija vsebuje v izsevanem spektru pri enaki valovni dolžini. Ker pa galaksije ležijo na različnih oddaljenostih, se različno hitro oddaljujejo. Njihov spekter svetlobe je premaknjen proti daljšim valovnim dolžinam, čemur pravimo kozmološki rdeči premik.

Nadejamo se, da bo JWST pogledal še dlje in omogočil odkritja še bolj oddaljenih galaksij. V astronomiji je oddaljenost povezana s starostjo vesolja: bolj oddaljena ko je galaksija, mlajše je bilo vesolje, ko je izsevala svetlobo, ki jo opazujemo danes. Z novim teleskopom bomo verjetno lahko opazovali prvo generacijo galaksij v le nekaj sto milijonov let starem vesolju. Zanima nas, kako so te galaksije nastale in se razvijale. Upamo, da bomo lahko povedali kaj več tudi o prvih generacijah zvezd. Med drugim želimo razjasniti osupljiva opažanja, da že zelo mlade galaksije vsebujejo ogromno prahu in da se v njihovih središčih nahajajo supermasivne črne luknje.

Eksoplaneti

Okoli večine zvezd v galaksiji krožijo planeti. Med več kot pet tisoči odkritih eksoplanetov najdemo vroče Jupitre, super-Zemlje in male Neptune, ledene velikane in tudi manjše kamnite planete. Planeti se gibljejo v najrazličnejših konfiguracijah, ki se večinoma razlikujejo od razporeditve planetov v Osončju. Prek študija eksoplanetov želimo razumeti rast in razvoj planetov (tako v Osončju kot v splošnem). Planetologi, skupaj z astrobiologi in geologi, obenem poskušajo razumeti proces nastanka življenja. Infrardeča svetloba pri tem zopet igra pomembno vlogo.

Eden izmed instrumentov teleskopa JWST vsebuje koronograf. Funkcija koronografa je, da med slikanjem prekrije svetlo zvezdno ploskev, s čimer omogoči opazovanje manj svetle okolice. Na ta način lahko direktno slikamo temne eksoplanete. Običajno planete vidimo, ker se od njih odbija svetloba go-

stujoče zvezde. Detektiramo lahko predvsem velike plinaste velikane na relativno širokih orbitah. Komaj rojeni plinasti velikan je še tako vroč, da sam seva v infrardeči svetlobi, kar tudi načeloma lahko detektiramo. Koronograf in infrardeči instrument sta uporabna tudi za opazovanje protoplanetarnih diskov plina in prahu. V tem primeru lahko opazujemo prve korake v razvoju eksoplaneta.

Življenje, kot ga poznamo za obstoj, potrebuje atmosfero, zato je eden izmed ciljev teleskopa JWST tudi podrobno opazovanje atmosfer večjega števila eksoplanetov. Med potovanjem planeta preko ploskve gostujoče zvezde posnamemo spekter zvezde. Del svetlobe zvezde potuje skozi planetovo atmosfero, pri čemer atmosferski plini absorbirajo del svetlobe pri točno določenih valovnih dolžinah. Iz dobljenega spektra nato preberemo, kateri plini se nahajajo v atmosferi. Opazovanje atmosfer plinskih velikanov je postala že rutina, JWST pa bo omogočil tudi opazovanja atmosfer manjših kamnitih planetov podobnih Zemlji. Kot je bilo že omenjeno, se v infrardečem spektru med drugim skrivajo podpisi plinov, kot so voda, ogljikov dioksid in metan.

Zaključek

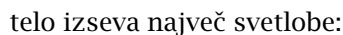
Teleskop JWST lepo ilustrira, na kaj vse morajo biti inženirji pozorni pri načrtovanju. Vse se začne z znanstveniki, ki bi radi raziskali določen problem. S tem nekako že izberemo valovno dolžino, v kateri želimo opazovati. Nato sledi vrsta dejavnikov, kot so sevanje Zemlje, izbira materialov, temperatura delovanja in nenazadnje razpoložljiva sredstva, ki vplivajo na izgled in funkcionalnost končnega instrumenta, teleskopa ali observatorija. A projekt je vreden časa in denarja, saj nam bo razkril vesolje v povsem novi luči.

Vprašanja

Naloga 1

V grobem lahko predpostavimo, da je Zemlja črno telo, to je idealizirano telo, ki absorbira vso vpadno svetlobo. Takšno telo s temperaturo T seva termično svetlobo z dobro definiranim spektrom. Wienov zakon nam pove, pri kateri valovni dolžini λ_{maks} črno





kjer je $b = 2,88 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$. Pri kateri valovni dolžini izseva največ svetlobe Zemlja, če je njena temperatura 20 stopinj Celzija?

Ekstinkcijo običajno merimo v magnitudah. Spremembo gostote toka svetlobe zaradi potovanja skozi prašen oblak v tem primeru lahko zapišemo kot

kjer sta $F_{\text{izmerjen},V}$ in $F_{\text{izsevan},V}$ izmerjena in izsevana gostota toka vidne svetlobe, A_V pa ekstinkcija vidne svetlobe v magnitudah. Tipične vrednosti ekstinkcije so:

- $A_V = 0,2$ mag v primeru, da je med nami in zvezdo samo medzvezdni medij in da se zvezda ne nahaja predaleč.

- $A_V = 0,5 - 5$ mag vrednost ekstincije v smeri proti zvezdam znotraj meglice Laguna (slika 3).
- $A_V > 15$ mag je običajna vrednost ekstincije v smeri proti centru galaksije.

Koliko vidne svetlobe zvezde je izgubljene v vsakem izmed treh primerov?

Galaksija GN-z11 je trenutno najbolj oddaljena galaksija, kar jih poznamo. Njen rdeči premik je $z = 11,1$.

- Ali lahko to galaksijo detektiramo z instrumentom, ki opazuje pri valovni dolžini $\lambda = 1200 \text{ nm}$?
- Radi bi opazovali emisijski črto vodika H_β , ki jo galaksija izseva pri valovni dolžini $\lambda = 486 \text{ nm}$. Pri kateri valovni dolžini bi morali opazovati? Je to mogoče z Zemlje?



→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke Preseka letnika 49 je **Virialni problem**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Andrej Oder iz Ljubljane, Mojca Belec Drenik iz Spodnjega Dupleka in Stanko Gajšek iz Ljubljane, ki bodo nagrade prejeli po pošti.



Razdalje urejanja 2. del

JAROVA IN JARO-WINKLERJEVA RAZDALJA

↓↓↓

MLADEN BOROVICH, JANI DUGONIK

→

Uvod

V prejšnjem delu smo podrobneje predstavili dve razdalji urejanja – Hammingovo in Levenshteinovo razdaljo. Na primerih smo predstavili glavne operacije: vstavljanje (*ang. insertion*), brisanje (*ang. deletion*) in zamenjava (*ang. substitution*). Omenili smo tudi posebno obliko zamenjave, ki jo imenujemo transpozicija (*ang. transposition*) in poudarili razliko med zamenjavo in transpozicijo. Pri navadni zamenjavi gre za zamenjavo znaka s poljubnim znakom, tudi takšnim, ki se ne pojavi v nizu, pri transpoziciji pa smo omejeni na zamenjavo znakov, ki se nahajajo v samem nizu. Ker niti Hammingova, niti Levenshteinova razdalja ne dovoljujeta operacije transpozicije, se bomo v tem prispevku omejili na dve razdalji urejanja, ki dovoljujeta transpozicijo; to sta Jarova in Jaro-Winklerjeva razdalja.

Jarova in Jaro-Winklerjeva razdalja se na področju procesiranja naravnega jezika, podobno kot vse ostale razdalje urejanja, uporabljata za primerjavo dveh nizov in ugotavljanje podobnosti med njima. Ker sta razdalji nastali v razmaku enega leta (Jarova je nastala leta 1989, Jaro-Winklerjeva pa leta 1990), sta v literaturi večkrat definirani kot ena razdalja – Jaro-Winklerjeva razdalja. V resnici Jarova razdalja predstavlja osnovno razdaljo, ki upošteva operacijo transpozicije, Jaro-Winklerjeva razdalja pa je razširitev, ki k delovanju doda višjo oceno podobnosti, če se vhodna niza ujema v začetnih znakih. Za izračun Jaro-Winklerjeve razdalje torej potrebujemo Jarovo razdaljo. Da bi bolje razumeli uporabo transpozicije, si v nadaljevanju podrobneje pogledimo njuno delovanje na primerih.

Jarova razdalja

Leta 1989 je Matthew Jaro, ameriški znanstvenik na področju računalništva, predstavil del rešitve za

a	r	e	z	u	l	t	a	t
b	k	o	n	z	u	l	a	t

SLIKA 1.

Premikajoče okno za znak »r«.

a	r	e	z	u	l	t	a	t
b	k	o	n	z	u	l	a	t

SLIKA 2.

Premikajoče okno za znak »e«.

a	r	e	z	u	l	t	a	t
b	k	o	n	z	u	l	a	t

SLIKA 3.

Premikajoče okno za znak »l«.

a	r	e	z	u	l	t	a	t
b	k	o	n	z	u	l	a	t

SLIKA 4.

Premikajoče okno za znak »t«.

združevanje podatkov pridobljenih pri popisu prebivalstva. Sodeloval je pri razvoju sistema, ki je združeval podatke iz več podatkovnih baz na podlagi imen in priimkov. Pri tem je bila potrebna posebna metrika podobnosti za krajša besedila, ki je danes znana kot Jarova razdalja [1] in se uvršča med razdalje urejanja, najpogostejše pa se uporablja za izračun podobnosti med dvema nizoma pri preverjanju črkovanja [2]. Ta razdalja za razliko od večine ostalih

→

→ razdalj urejanja primerja ujemajoče znake znotraj premikajočega okna, nato pa nad ujemajočimi znaki išče zamenjave znakov oziroma transpozicije.

Prvi korak izračuna Jarove razdalje je določitev velikosti premikajočega okna. Velikost premikajočega okna W pri uporabi nizov a in b definiramo z enačbama:

■
$$c = \left\lfloor \frac{\max(|a|, |b|)}{2} \right\rfloor - 1$$

(1)

■
$$W = 2 \cdot c + 1,$$

(2)

kjer sta $|a|$ in $|b|$ dolžini nizov a in b . Vrednost parametra c nam določa, koliko znakov bomo preverjali v drugem nizu levo in desno od istoležnega znaka.

Slike 1–4 prikazujejo, katere znake vključimo v iskanje ujemanja na različnih pozicijah za primer nizov a = rezultat in b = konzulat pri izračunu Jarove razdalje (velikost okna je $W = 7$). S temnejšo modro barvo je označen trenutni znak v nizu a , ki ga primerjamo z znaki znotraj premikajočega okna v nizu b ; ti so označeni s svetlejšo modro barvo.

Premikajoče okno premikamo po nizih a in b od začetka do konca in beležimo število ujemajočih znakov. Pri tem znake, ki smo jih v nizu b že beležili kot ujemajoče, ne beležimo ponovno. Naslednji korak je ugotavljanje transpozicij. Ujemajoče znake iz nizov a in b zapišemo po originalnem vrstnem redu, kot se pojavljajo v nizih a in b . Nato preštejemo, koliko istoležnih znakov ni ujemajočih. To število delimo z 2 in dobimo število transpozicij. V zadnjem koraku določimo vrednost Jarove razdalje po enačbi:

■
$$\text{sim}_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{če je } m = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m}{|a|} + \frac{m}{|b|} + \frac{m-t}{m} \right), & \text{sicer} \end{cases}$$

(3)

kjer je m število ujemanj, t število transpozicij, $|a|$ in $|b|$ pa dolžini nizov a in b . Vidimo, da bo Jarova razdalja enaka 0, če niza nimata ujemajočih znakov. Na zgledu si pogledjmo delovanje Jarove razdalje.

Zgled

Imejmo vhodna niza a = telefon in b = lepota. Najprej določimo daljši niz. Ker je $|a| = 7$ in $|b| = 6$, je

niz a daljši. Naslednji korak je določitev premikajočega okna:

■
$$c = \left\lfloor \frac{\max(|a|, |b|)}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\max(7, 6)}{2} \right\rfloor - 1$$

$$= \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor - 1 = 3 - 1 = 2$$

■
$$W = 2 \cdot c + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Izračunali smo, da bo pri poravnavi nizov a in b naše premikajoče okno obsegalo dva znaka levo in desno od istoležnega znaka. Od tod sledi, da bo velikost premikajočega okna enaka 5. Sledi prehod skozi niz a in iskanje ujemajočih znakov znotraj premikajočega okna v nizu b . Na spodnjih slikah bomo na levi strani spremljali prehod skozi niz a in pozicijo premikajočega okna, na desni strani pa vsebino seznama ujemajočih znakov M , ki je na začetku prazna množica. Ujemanja bodo označena z zeleno barvo.

Prvi znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »t«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »l«, »e« in »p« ter ugotovimo, da nimamo ujemanja. Seznam ujemajočih znakov M je torej prazna množica. Naslednji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »e«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »l«, »e«, »p« in »o« ter ugotovimo, da imamo ujemanje. V seznam ujemajočih znakov M dodamo znak »e«.

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$M = \emptyset$

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$M = \{e\}$

SLIKA 5.
Iskanje ujemanja za znaka »t« in »e«.

Naslednji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »l«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »l«, »e«, »p«, »o« in »t« ter ugotovimo, da imamo ujemanje. V seznam ujemajočih

znakov M dodamo znak »l«. Naslednji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je ponovno znak »e«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »e«, »p«, »o«, »t« in »a« ter ugotovimo, da imamo ujemanje. Znak »e« iz niza b smo že označili kot ujemajočega v drugem koraku prehoda, zato ga ne dodamo v seznam ujemajočih znakov M .

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$$M = \{e, l\}$$

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$$M = \{e, l\}$$

SLIKA 6.

Iskanje ujemanja za znaka »l« in »e«.

Naslednji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »f«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »p«, »o«, »t« in »a« ter ugotovimo, da nimamo ujemanja. Seznam ujemajočih znakov M se ne spremeni. Naslednji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »o«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znake »o«, »t« in »a« ter ugotovimo, da imamo ujemanje. V seznam ujemajočih znakov M dodamo znak »o«.

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$$M = \{e, l\}$$

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$$M = \{e, l, o\}$$

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

$$M = \{e, l, o\}$$

SLIKA 7.

Iskanje ujemanja za znake »f«, »o« in »n«.

Zadnji znak iz niza a , ki ga preverjamo za ujemanje, je znak »n«. V nizu b s premikajočim oknom prekrijemo znaka »t« in »a« ter ugotovimo, da nimamo ujemanja. Seznam ujemajočih znakov M se ne spremeni.

Po končanem prehodu skozi niz a preštejemo število ujemajočih znakov s seznama M . Ugotovimo, da imamo tri ujemajoče znake in dobimo vrednost $m = 3$. Sledi ugotavljanje transpozicij. Za niza a in b po vrstnem redu pojavitve v nizu zapišemo pojavitve znakov s seznama ujemajočih znakov M . Ujemajoči znaki so označeni z oranžno barvo.

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

→

a	e	l	o
b	l	e	o

SLIKA 8.

Ugotavljanje transpozicij za niza $a = \text{telefon}$ in $b = \text{lepota}$.

Iz dobljenega zapisa preštejemo, kolikokrat se na istoležnih mestih zgodi neujemanje, in to število delimo z 2. Dobljena vrednost predstavlja število transpozicij t . Ugotovimo, da imamo dve neujemanji na istoležnih mestih. Gre za neujemanji v znakih »e« in »l«. Neujemanji sta označeni z vijolično barvo. Gre torej za transpozicijo teh dveh znakov, saj opazimo, da se znaka v nizih a in b pojavita v drugačnem vrstnem redu. Iz tega izračunamo $t = \frac{2}{2} = 1$. Zdaj, ko imamo število ujemanj ($m = 3$) in število transpozicij ($t = 1$), lahko izračunamo Jarovo razdaljo po enačbi 3:

$$\begin{aligned} \text{sim}_J(a, b) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m}{|a|} + \frac{m}{|b|} + \frac{m-t}{m} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{6} + \frac{3-1}{3} \right) \\ \text{sim}_J(a, b) &= \frac{1}{3} \cdot (1,595) = \underline{0,532}. \end{aligned}$$

Izračunali smo, da je Jarova razdalja med nizoma $a = \text{telefon}$ in $b = \text{lepota}$ enaka 0,532, kar interpretiramo kot 53,2% podobnost med nizoma a in b .



→ Jaro-Winklerjeva razdalja

Kmalu zatem, ko se je pojavila Jarova razdalja, se je začela tudi širše uporabljati v ameriških uradih za popis prebivalstva. Leta 1990 je bil William Winkler, ameriški znanstvenik na področju računalništva, zaposlen na enem izmed državnih uradov za popis prebivalstva. Pri svojem delu je prišel do spoznanja, da pri popisovanju osebnih podatkov prebivalstva največkrat prihaja do napak v črkovanju. Ugotovil je tudi, da se pri teh podatkih ujemanja zgodijo prav na začetku nizov oziroma da so si največkrat nizi zelo podobni na začetku, do razlik pa prihaja proti koncu nizov. Iz teh dognanj je Jarovo razdaljo razširil z dvema parametroma, ki dajeta večjo utež ujemanju na začetku nizov, novo razdaljo pa je poimenoval Jaro-Winklerjeva razdalja [5]. Prvi parameter je parameter ℓ , ki predstavlja dolžino predpone na začetku niza in ima v izvorni različici Jaro-Winklerjeve vrednost največ 4 ($0 \leq \ell \leq 4$). Drugi parameter je parameter p , ki je skalirni faktor za spremembo dodatka h končni vrednosti razdalje, ki nastopi zaradi ujemanja v začetnih ℓ znakih. Pri tem naj vrednost p za izvorno različico Jaro-Winklerjeve ne bi preseгла 0,25, saj se v nasprotnem primeru lahko zgodi, da je vrednost razdalje več kot 1. To seveda ni želeno, saj ne želimo imeti vrednosti razdalje na intervalu $[0, 1]$. Winkler je pri svojem delu uporabljal vrednost $p = 0,1$, kar je tudi danes privzeta vrednost za ta parameter.

Sam izračun Jaro-Winklerjeve razdalje se ne razlikuje preveč od izračuna Jarove razdalje. Najprej med nizoma a in b izračunamo Jarovo razdaljo $\text{sim}_j(a, b)$, nato pa uporabimo parametra ℓ in p . Vrednost Jaro-Winklerje razdalje $\text{sim}_{jw}(a, b)$ izračunamo z enačbo

■
$$\text{sim}_{jw}(a, b) = \text{sim}_j(a, b) + \ell \cdot p \cdot (1 - \text{sim}_j(a, b)),$$
 (4)

kjer je $\text{sim}_j(a, b)$ Jarova razdalja med nizoma a in b , ℓ je dolžina predpone na začetku niza, p pa skalirni faktor za spremembo dodatka h končni vrednosti razdalje. Na zgledu si pogledjmo izračun Jaro-Winklerjeve razdalje.

Zgled

Imejmo niza $a = \text{telefon}$ in $b = \text{lepota}$. Najprej izračunamo Jarovo razdaljo $\text{sim}_j(a, b)$. To smo za niza

$a = \text{telefon}$ in $b = \text{lepota}$ storili že v zgledu za Jarovo razdaljo in dobili rezultat $\text{sim}_j(a, b) = 0,532$. Nato izračunamo vrednost Jaro-Winklerjeve razdalje, za katero moramo definirati vrednosti parametrov ℓ in p . Kot predpono bomo upoštevali prve tri znake v nizu ($\ell = 3$), za skalirni faktor pa bomo uporabili vrednost iz izvorne različice Jaro-Winklerjeve razdalje ($p = 0,1$). Sledi izračun Jaro-Winklerjeve razdalje po enačbi 4:

■
$$\begin{aligned} \text{sim}_{jw}(a, b) &= \text{sim}_j(a, b) + \ell \cdot p \cdot (1 - \text{sim}_j(a, b)) \\ \text{sim}_{jw}(a, b) &= 0,532 + (3 \cdot 0,1 \cdot (1 - 0,532)) \\ \text{sim}_{jw}(a, b) &= 0,532 + 0,140 = \underline{0,672} \end{aligned}$$

a	t	e	l	e	f	o	n
b	l	e	p	o	t	a	

SLIKA 9. Ujemanje v prvih treh znakih nizov a in b . Območje predpone ($\ell = 3$) je označeno s svetlo modro barvo, ujemanja znotraj predpone pa s temno modro barvo.

Izračunali smo, da je Jaro-Winklerjeva razdalja med nizoma $a = \text{telefon}$ in $b = \text{lepota}$ enaka 0,672, kar interpretiramo kot 67,2 % podobnost. Če primerjamo rezultat z vrednostjo Jarove razdalje nad nizoma a in b , opazimo, da smo z Jaro-Winklerjevo razdaljo povečali podobnost med nizoma. To je zaradi dodatka h končni vrednosti razdalje zaradi ujemanja v začetnih ℓ znakih nizov a in b . Ker smo uporabili parameter $\ell = 3$, smo dodatno utežili ujemanje v prvih treh znakih nizov a in b , po skaliranju s faktorjem $p = 0,1$ pa smo izračunali, da je dodatek h končni vrednosti razdalje enak 0,140. Če preverimo, zaradi katerih znakov smo povečali vrednost Jarove razdalje, ugotovimo, da sta za to zaslužna znaka »e« in »l«, ki sta na sliki 9 označena s temno modro barvo.

Zaključek

V tem prispevku smo podrobneje predstavili delovanje Jarove in Jaro-Winklerjeve razdalje urejanja. Ob primerih smo spoznali delovanje operacije transpozicije znakov, ki smo jih v prvem delu prispevka izpustili. Primera implementacije Jarove in Jaro-Winklerjeve razdalje v programskem jeziku

Python sta na voljo na javno dostopnem repozitoriju GitHub [3].

Jarova in Jaro-Winklerjeva razdalja se danes ponavadi ne ločita, saj v praksi srečujemo večinoma Jaro-Winklerjevo implementacijo. Obe sta zelo koristni pri popravljanju črkovanja in seveda pri združevanju podatkov v obliki krajšega besedila iz različnih virov, recimo imen in priimkov. Kot smo lahko spoznali v obeh prispevkih na temo razdalj urejanja, imamo na področju procesiranja naravnega jezika na izbiro kar nekaj različnih opcij, kadar govorimo o iskanju podobnosti med besedili. Kljub temu za splošno ugotavljanje podobnosti med besedili prednjači uporaba Levenshteinove razdalje, ostale razdalje urejanja pa uporabljamo v posebnih primerih. Na primeru Jaro-Winklerjeve razdalje smo lahko zelo nazorno videli smiselnost prilagoditve razdalje urejanja za posebni primer. Velja omeniti, da obstaja več različic Jaro-Winklerjeve razdalje v smislu vplejave novih ali drugačnih parametrov [4]. To nakazuje na dejstvo, da se področje procesiranja naravnega jezika neprestano razvija in po potrebi prilagaja na različne oblike podatkov, čeprav je na voljo že kar obsežna množica metod za ugotavljanje podobnosti med besedili.

Literatura

- [1] M. A. Jaro, *Advances in Record-Linkage Methodology as Applied to Matching the 1985 Census of Tampa, Florida*, Journal of the American Statistical Association **84.406** (1989), 414-420, doi: 10.1080/01621459.1989.10478785.
- [2] M. A. Jaro, *Probabilistic linkage of large public health data files*, Statistics in medicine **14** (1995), 491-498.
- [3] *Procesiranje naravnega jezika - GitHub*, dostopno na github.com/procesiranje-naravnega-jezika/example-code/tree/main/1c%5C%20-%5C%20Razdalje%5C%20urejanja%5C%202.%5C%20del%5C%20-%5C%20Jarova%5C%20in%5C%20Jaro-Winklerjeva%5C%20razdalja, ogled 5. 5. 2022.
- [4] W. E. Winkler, *Overview of Record Linkage and Current Research Directions*, Bureau of the Census (2006).

- [5] W. E. Winkler, *String Comparator Metrics and Enhanced Decision Rules in the Fellegi-Sunter Model of Record Linkage*, Proceedings of the Section on Survey Research, 1990, 354-359.

xxx

Križne vsote

ddd

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

		8	5						
7				7					
7						21			
			14				3		
				5					
					11				

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

2	6	11							
1	4	5							
3	8	9	14						
		21	1	4	2	7			
			7	1	9	7			
				5	8				

xxx

Najlepše matematične šolske table natečaja Matematika združuje



BOŠTJAN KUZMAN, SANDRA CIGULA IN ANJA PETKOVIĆ KOMEL

→ Letošnji Mednarodni dan matematike 14. marec 2022 je potekal pod skupnim geslom Matematika združuje. Pri DMFA Slovenije smo se mednarodnemu praznovanju pridružili z izvedbo likovnega natečaja, na katerem smo iskali najlepšo in najbolj domiselno porisano matematično tablo. Prejeli smo 140 izdelkov razredov ali manjših skupin učencev in dijakov iz okoli 70 šol. Njihovi ustvarjalci so pokazali veliko domišljije in likovne spretnosti, pa tudi domiselnih asociacij na matematiko, ki očitno ne združuje le števil, geometrije in logike, ampak je tesno povezana tudi z mnogimi drugimi stvarmi.

V vsaki od štirih kategorij (1.–3. razred OŠ, 4.–6. razred OŠ, 7.–9. razred OŠ, vsi razredi SŠ) smo izbrali nekaj izstopajočih izdelkov, ki po presoji komisije dobro odražajo duh gesla Matematika združuje in so tudi likovno ali matematično zanimivi. Njihovi mentorji bodo na svojo šolo za nagrado prejeli komplete za sestavljanje poliedrov. Nekaj primerov nagrajenih izdelkov objavljamo na teh straneh, ostale si lahko ogledate na spletnih straneh DMFA.

Zahvaljujemo se vsem, ki ste se potrudili in poslali svoje izdelke, veliko jih je bilo čudovitih in izbira je bila res težka. Zahvaljujemo se seveda tudi mentoricam in mentorjem za spodbujanje svojih učencev in učenk. Veselimo se, da je natečaj navdahnil toliko ustvarjalnosti in idej ter pokazal, kako matematika združuje učence in dijake v praksi. Vsem želimo uspešen zaključek šolskega leta in še veliko prijetnih trenutkov ob druženju z matematiko.



SLIKA 1.

Na osnovni šoli Duplek je 25 učencev 1. a razreda pod mentorstvom Tjaše Hilš in Marijane Murko predstavilo svoj veseli pogled na matematiko.



SLIKA 2.

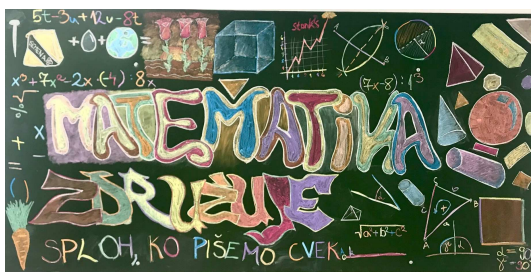
V 3. b razredu OŠ Leskovec pri Krškem je 18 učencev pod mentorstvom Maše Petan Omejec izrezalo obrise svojih glav, v njih pa so narisana področja uporabe matematike. Pravijo, da smo različni, a prav vsi uporabljamo matematiko.


SLIKA 3.

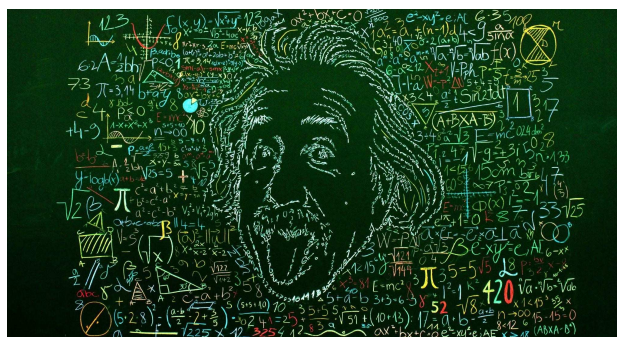
V vsakem neredu lahko najdemo red, če je le dovolj velik. Učenci 6. a razreda OŠ Olge Meglič so to slikovito ponazorili. Matematika je povsod okrog nas.


SLIKA 4.

Učenci 7. razreda Waldorfske šole Savinja so pod mentorstvom Tjaše Černoša in Anje Kravogel združili matematiko z naravo. Poiskali so naravna števila (1 v gori, 2 in 4 v štokljah, 3 v ptici, 5 na jablani, 7 v zastavi, 8 v metulju, 9 v čebeli). Poiskali pa so tudi geometrijske oblike: daljico na pobočju gore, krog v soncu, nekaj likov v smreki, vzporednice v oblakih, pravokotnice, sekante in mimobežnice.


SLIKA 5.

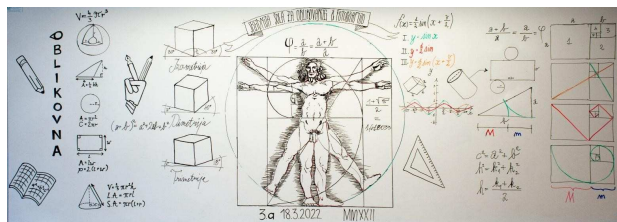
Šaljivo so pristopili učenci 8. b razreda Osnovne šole Antona Globočnika Postojna Nail, Nika in Tjaš Luka, ki so opazili, da matematika učence združuje še posebej takrat, »ko pišejo cvek«. Ob tem pa so ilustrirali tudi, kako matematika združuje ostala področja življenja, od agrokulture in ekonomije do teorije. Tabla je nastala pod mentorstvom Romane Harmel.


SLIKA 6.

Pod mentorstvom Marjete Mrakič in Kristine Gruden je pet učencev 9. razreda Osnovne šole Bovec prispevalo matematično tablo z naslovom Matematični veleum, ki je, kot sami trdijo, povsem združen z matematiko.


SLIKA 7.

Zelo pisana je tudi tabla, ki so jo ustvarile Eva, Tinkara, Ivana in Alja iz 1. b Gimnazije Lava, Šolski center Celje. Zanje matematika ni nauk o številih, operacijah, enačbah ali algoritmih, pač pa o razumevanju in združenosti.


SLIKA 8.

Izrazito geometrijsko navdihneno tablo je oblikovala skupina 24 dijakin in dijakov 3. a razreda Srednje šole za oblikovanje in fotografijo v Ljubljani pod mentorstvom Erika Mahorčiča.

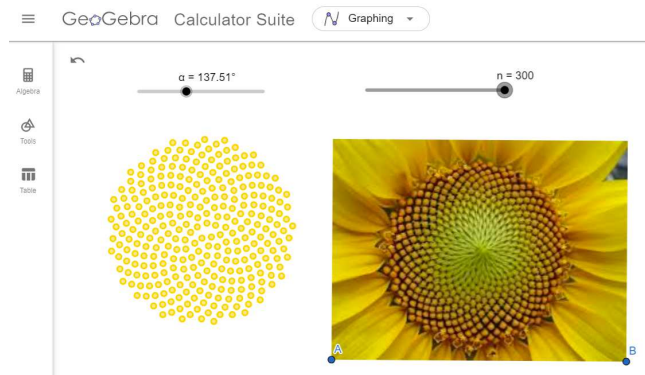
XXX

Polarne koordinate in izziv cvetočih sončnic



BOŠTJAN KUZMAN

→ Mnogi ljubitelji matematike vedo, da lahko v razporeditvi semen v cvetu sončnice najdemo Fibonaccijeva števila in različne matematične vzorce. Preprost matematični model razporeditve semen dobimo s pomočjo polarnih koordinat. Po tem modelu je središče n -tega semena točka, katere polarni radij je sorazmeren $\sqrt{n}$, polarni kot pa je enak $n \cdot \phi$, kjer je $\phi \doteq 137,51$ zlati kot. Ali znamo to ponazoriti z GeoGebro?



SLIKA 1.

Zaporedje krožnic ob fotografiji resnične sončnice

Tokrat rešitve ne bomo opisali v celoti, ampak jo prepustimo bralcu. Prikaz na sliki smo ustvarili tako, da smo narisali ustrezno zaporedje krožnic. Središča teh krožnic najlažje podamo s pomočjo polarnih koordinat, ki jih v Geogebri vnesemo z ukazom (radij; kot). Z drsnikoma kontroliramo število vseh krožnic in kot med zaporednima krožnicama.

Za prikaz na sliki zadošča ena sama vrstica:

■ Zaporedje(Krožnica(...), $k, 1, n$).

Bralke in bralce vabimo, da poskusijo ustrezni ukaz uganiti sami, nato pa preizkusijo obnašanje razporeditve pri različnih kotih in morda dobljeno sliko še izboljšajo z dodatnimi parametri, ki bodo vplivali na velikost in barvo krožnic. Pa sončno poletje vsem!



Vabilo na MARS



BOŠTJAN KUZMAN

→ Letošnji matematični tabor MARS je že 17. po vrsti. Udeležba je odprta vsem srednješolkam in srednješolcem, ki bi radi preživeli prijeten teden dni počitnic v odlični družbi vrstnikov in študentov in ob tem izvedeli kaj novega o matematiki. Rok za prijavo je 13. junij oziroma do zapolnitve mest. Toplo vabljeni!

	Kdaj? 24. 7. – 30. 7. 2022.
	Kje? ČŠOD Radenci, Dolenji Radenci.
	Kaj? Delo na projektih v majhnih skupinah, večdnevna matematična delavnica, poljudna predavanja in družabni program.
	Kdo? Nad matematiko navdušeni srednješolci.
	Več informacij na: mars.dmfja.si



Poročilo o šolskih tekmovanjih

ŠTEVILKA 1, LETNIK 3, 1975/76



→ Tekmovanja v matematiki za srednješolce so najstarejša slovenska tekmovanja v znanju. Kot izvemo iz poročila v Preseku, je leta 1975 republiško tekmovanje potekalo v Postojni, na osnovi predhodnega šolskega tekmovanja pa se ga je udeležilo 88 tekmovalcev, ki so si ogledali tudi Postojnsko jamo. Eden

od avtorjev poročila, Josip Globevnik, je danes eden najbolj mednarodno uveljavljenih slovenskih matematikov in član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, leta 2019 pa je prejel tudi Zoisovo nagrado za življenjsko delo, najvišje slovensko državno priznanje za področje znanosti.

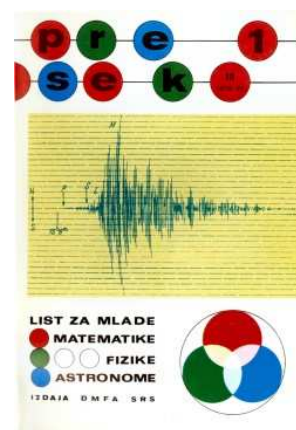
POROČILO O ŠOLSKIH TEKMOVANJH IN O REPUBLIŠKEM

TEKMOVANJU SREDNJEŠOLCEV V MATEMATIKI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS organizira vsako leto republiško tekmovanje v matematiki za srednješolce. Na tekmovanju se dijaki gimnazij in srednjih tehniških šol pomerijo v reševanju zahtevnejših matematičnih nalog, ki jih lahko rešijo z znanjem, pridobljenim v šoli, so pa težje kot običajne šolske naloge in zahtevajo več premišljevanja. Srednješolska tekmovanja v matematiki so tradicionalna, saj je bilo letošnje republiško tekmovanje že devetnajsto.

Zadnja leta se je republiških tekmovanj udeleževalo precejšnje število dijakov, vedno več kot 200, zato republiškega tekmovanja ni bilo mogoče organizirati v kakem manjšem kraju. Ker pa smo želeli, da bi bilo mogoče organizirati republiško tekmovanje tudi v manjših krajih in da bi tekmovalo čim večje število dijakov, smo se pri Društvu letos prvič odločili za predtekmovanja po posameznih šolah, od koder bi potem le najboljši prišli na republiško tekmovanje. Predloge, da bi organizirali šolska tekmovanja, smo poslali na 58 srednjih tehniških šol in gimnazij. Tekmovanja je organiziralo okoli 30 šol in v celoti je tekmovalo na šolskih tekmovanjih več kot 800 dijakov. Šolska tekmovanja so bila na vseh šolah 22. marca in tekmovalci so povsod reševali iste naloge, ki smo jih prej pripravili pri Društvu. Kljub temu, da je bilo s šolskimi tekmovanji pritegnjenih veliko število dijakov, štirikrat toliko, kot jih je v zadnjih letih tekmovalo na republiških tekmovanjih, bi želeli, da bi bila šolska tekmovanja še na več šolah.

Na osnovi uspehov na teh in na prejšnjih republiških tekmovanjih smo za letošnje republiško tekmovanje izbrali 88 dijakov. Republiško tekmovanje je bilo 5. aprila na gimnaziji v Postojni, tekmovalo je 82 dijakov. Aktiv profesorjev matematike na gimnaziji je pod pokroviteljstvom Skupščine občine Postojna tekmovanje v zadovoljstvo vseh prisotnih tekmovalcev in članov komisije zelo dobro organiziral. Tekmovalci so si po tekmovanju, ki je bilo dopoldne, ogledali Postojnsko jamo, popoldne pa so prisostvovali razglasitvi rezultatov. Tekmovalna komisija je podelila 5 prvih, 5 drugih in 8 tretjih nagrad in 24 pohval.



XXX

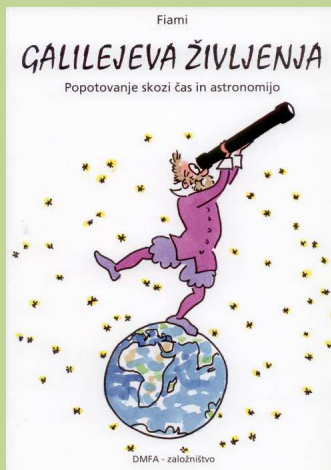
Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbe ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodba o Mendeljevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.