



PRESEK



- MARJAN IN OKSITANSKI KRIŽ
- ZAKAJ DIMNIK »POTEGNE«?
- VPLIV KONSTELACIJ SATELITOV
NA ASTRONOMSKA OPAZOVANJA
- PODATKOVNA STRUKTURA ZA
DISJUNKTNE MNOŽICE



Srčni utrip matematike

↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN

→ Čeprav se pogosto zdi abstraktna in odmaknjena od praktične uporabe, posega sodobna matematika v vse pore človekovega življenja, tudi v najsodobnejše medicinske raziskave.

V Portorožu je junija letos potekal 8. evropski kongres matematike. Gre za najpomembnejše znanstveno srečanje evropskih matematikov, ki poteka vsaka štiri leta, na njem pa je letos sodelovalo več kot 1700 matematikov iz vsega sveta z več kot 1000 znanstvenimi referati o najnovejših rezultatih na različnih področjih matematike.

Med vabljenimi predavatelji je bil tudi Alfio Quarteroni, profesor matematike na univerzah v Milanu (Italija) in Lausanni (Švica). V svojem predavanju z naslovom *The beat of math* (Utrip matematike) je predstavil, kako s pomočjo ustreznih enačb izdelati matematični model srca. Pri tem je potrebno upoštevati elektrofiziologijo tkiva, mehaniko krvožilnih organov, gibanje tekočin, utripanje zaklopk in podobno. Zapletene diferencialne enačbe in numerične metode za aproksimacijo rešitev, ki jih je v predavanju razgrnil pred poslušalci, v sodelovanju z vrhunskimi zdravniškimi ekipami omogočajo najsodobnejše metode zdravljenja srčnih bolezni.

Svoje raziskovalne rezultate je profesor Quarteroni objavil v vrsti znanstvenih člankov in tudi v knjigi *Modelling the Heart and the Cardiovascular System* (Modeliranje srca in krvožilnega sistema), Springer 2015. Njegovo predavanje s kongresa v Portorožu pa si lahko tudi sami ogledate na spletnem naslovu www.youtube.com/watch?v=87rMlUk31Js.



× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 49, šolsko leto 2021/2022, številka 1

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2021/2022 je za posamezno naročnika 22,40 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2021 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 2138

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI UTRINKI

- 2 Srčni utrip matematike

MATEMATIKA

- 4 Vroče matematično poletje
(Boštjan Kuzman)
- 5-7 Marjan in oksitanski križ
(Aleksander Simonič)
- 8 Natečaj Matematika za boljši svet
(Neža Mramor Kosta)

FIZIKA

- 9-10 Zakaj dimnik »potegne«?
(Jože Rakovec)

ASTRONOMIJA

- 15, 18-21 Vpliv konstelacij satelitov na
astronomska opazovanja
(Jure Japelj)

RAČUNALNIŠTVO

- 22-26 Podatkovna struktura za
disjunktne množice
(Damjan Strnad)

RAZVEDRILO

- 11-13 5. Evropska in 51. Mednarodna
fizikalna olimpijada 2021
(Barbara Rovšek)
- 13-14 62. mednarodna matematična olimpijada
(Jakob Jurij Snoj)
- 14 Križne vsote
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 26 Rešitev nagradne križanke Presek 48/6
(Marko Bokalič)
- 27-28 Geogebriin kotiček – Mnogokotniška števila
(Boštjan Kuzman)
- 29-31 Naravoslovna fotografija –
Rentgensko slikanje
(Barbara Rovšek)
- 32 Bilo je nekoč v reviji Presek

TEKMOVANJA

- priloga 12. tekmovanje iz znanja astronomije –
šolsko tekmovanje
- priloga 31. tekmovanje iz razvedrilne matematike –
šolsko tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Rentgenska posnetka zlomljene podlah-
tnice, posneta v dveh med seboj pravokotnih smereh. Rentgen vidi tudi skozi mavec. Več o tem si lahko preberete v prispevku na
straneh 29-31.

Vročje matematično poletje

↓↓↓

DR. BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

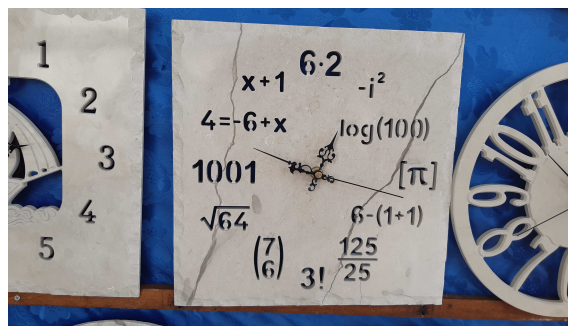
→ Lansko šolsko leto se je izteklo s kratko vrnitvijo učencev in dijakov v šole po dolgem zaprtju zaradi epidemije COVID-19 in gotovo se te dni vsi sprašujemo, kako bo pouk potekal letos. Virusu navkljub pa je tudi med letošnjimi poletnimi počitnicami potekalo ogromno dejavnosti, ki bi morale pritegniti pozornost vseh, ki se vsaj malo zanimajo za matematiko in znanost nasploh.

Začnimo z največjim dogodkom. V Portorožu je konec junija preko spleta potekal **8. Evropski kongres matematike** (www.8ecm.si), največje evropsko znanstveno srečanje s področja matematike, na katerem je referate predstavilo več kot 1000 udeležencev. Prvič v zgodovini kongresa je bil med desetimi plenarnimi predavatelji tudi slovenski, in sicer prof. Franc Forstnerič. Kongres so spremljale še številne druge zanimive dejavnosti, tudi umetniške razstave in otroške delavnice na temo matematike.

Konec junija je v Murski Soboti pod okriljem ZOTKS potekalo **Srečanje mladih raziskovalcev**, na katerem smo prav tako videli kar nekaj odličnih matematičnih raziskovalnih nalog učencev in dijakov. Pri izdelavi raziskovalne naloge je zelo pomembna vloga mentorja; lepo je videti, da lahko zelo dobre naloge nastanejo tudi pod mentorstvom učiteljev matematike v osnovnih in srednjih šolah.

V mesecu juliju sta kot običajno potekali tudi **Mednarodna matematična** in **Mednarodna fizikalna olimpijada**, žal že drugo leto zapored pretežno preko spleta brez tradicionalnega potovanja in druženja tekmovalcev z vrstniki z vsega sveta. Slovenski ekipi sta se ponovno dobro odrezali, več o tem lahko preberete v rubriki Tekmovanja.

Tudi za netekmovalce pa je bilo med počitnicami končno spet v živo na voljo nekaj zanimivih poletnih taborov. Na matematičnem taboru **MARS** so dijaki



SLIKA 1.

Matematična ura na stojnici v obmorskem letovišču

ob podpori študentov izdelali zanimive skupinske projekte, o katerih bomo pisali v eni od naslednjih števil. Osebo pa sem s predavanjem o matematiki starega Egipta poskušal zamotiti mlade tabornike v Ribnem pri Bledu, da bi v neurju pozabili na dež in mokre šotore.

Ko pišem te vrstice, poletnih počitnic za mlade matematike še ni povsem konec. V zadnjem tednu avgusta bodo v Plemljevi vili na Bledu potekale priprave za 12 osnovnošolcev, izmed katerih bo izbrana ekipa za **Mednarodno mladinsko olimpijado iz znanosti**, ki bo potekala jeseni. Prav tako bo do začetka pouka gotovo izvedeno še kakšno mednarodno tekmovanje in morda osvojena še kakšna matematična medalja.

Za konec pokukajmo še v našo revijo. V letošnjem letniku revije Presek uvajamo dve novi redni rubriki. Prva je **GeoGebrin kotiček**, v katerem bomo vsakokrat predstavili, kako s programom GeoGebra izdelamo ponazoritev izbrane matematične ali fizikalne vsebine. Druga nova rubrika je **Bilo je nekoč v reviji Presek**. Ob bližajoči se 50-letnici revije bomo v njej objavljali kratke utrinke iz starih števil in jih pospremili s komentarji.

Vsako novo številko revije v letu 2021/22 bo pospremlil tudi **Presekov seminar**. To bo triurno popoldansko spletno srečanje za učitelje matematike in fizike, na katerem bomo sodelavci revije predstavili nekaj zanimivih vsebin iz revije, s katerimi lahko učitelji popestrijo svoj pouk. Več informacij o tem boste našli na spletni strani www.dmfa.si.

Upam, da bomo z zanimivimi vsebinami pritegnili čimveč novih bralcev in obdržali stare. Hvala vsem za vašo podporo!

× × ×

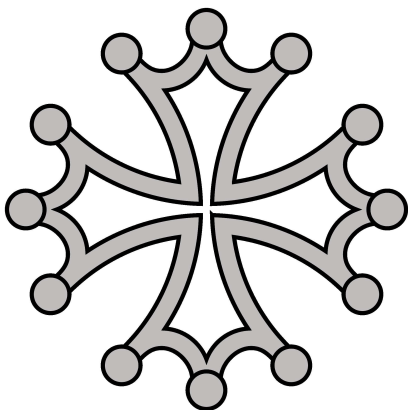
Marjan in oksitanski križ



ALEKSANDER SIMONIČ

V spomin Marjanu Jermanu.

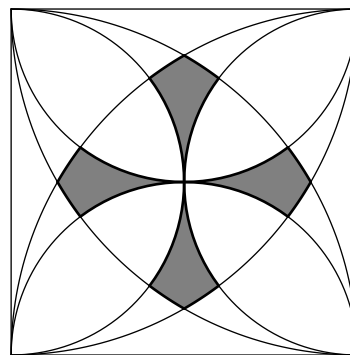
→ Marjan je med počitnicami obiskal Francijo. Med ogledom mesta Toulouse je v mestnem grbu opazil geometrijski lik v obliki križa (slika 1). To je bil štirikraki *oksitanski križ*, imenovan po pokrajini na jugozahodu Francije.



SLIKA 1.

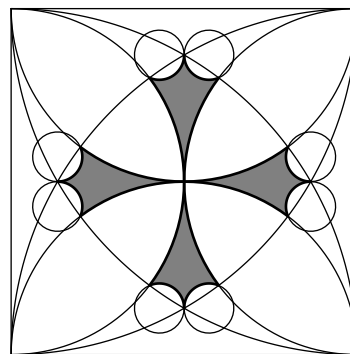
Oksitanski križ

Kot strasten ljubitelj geometrije je Marjan takoj poiskal elegantno geometrijsko konstrukcijo oksitanskega križa. Najprej je v kvadrat s stranico 1 včrtal štiri polkrožnice in štiri četrtkrožnice. Iz delov teh krožnic je dobil križ (slika 2), pri katerem so krajši loki izbočeni in ne vbočeni kakor na pravem oksitanskem križu. Nato je svojo skico še izpopolnil, tako da je krajše loke zamenjal z deli manjših krožnic, ki se dotikajo simetrijske osi križa v enem od njego-



SLIKA 2.

Marjanov poskus konstrukcije oksitanskega križa



SLIKA 3.

Popravljen konstrukcija slike 2

vih oglišč in potekajo skozi sosednje oglišče (slika 3). Tako je postal njegov križ res zelo podoben pravemu oksitanskemu križu.

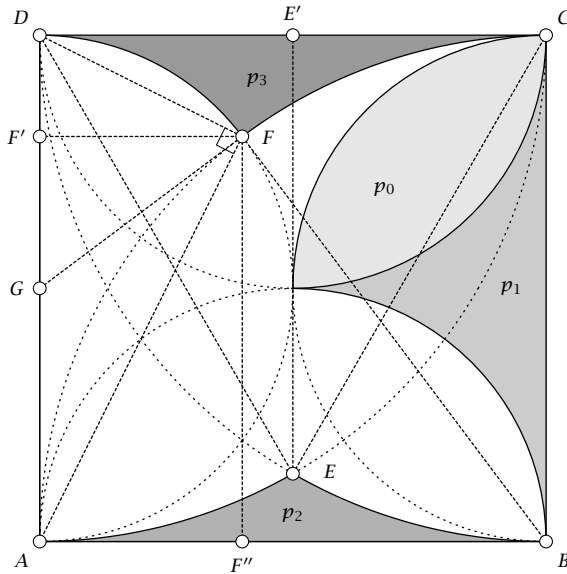




Bralci Preseka bodo verjetno opazili, da je risanje oksitanskega križa po tej konstrukciji odlična in ne prezahtevna vaja za vse, ki se učijo uporabe programa *GeoGebra*. Tistim bralcem Preseka, ki poznajo osnove trigonometrije, pa lahko zastavimo še nekoliko zahtevnejši izziv.

Naloga. Za vsakega od križev na sliki 2 in sliki 3 natančno izračunajte njegovo ploščino.

Rešitev. Najprej bomo podali izpeljavo ploščine za prvi križ. Naj bo $ABCD$ kvadrat s stranico $|AB| = 1$. Označimo s p_0 , p_1 , p_2 in p_3 ploščine pripadajočih likov na sliki 4.



SLIKA 4.

Izpeljava ploščine križa s slike 2

Naj bo P_1 ploščina križa. Ni težko videti, da potem velja

$$P_1 = 4(p_1 + p_2 - 2p_3). \quad (1)$$

V naslednjih treh odstavkih bomo izračunali p_1 , p_2 in $2p_3$.

Zaradi simetričnosti konstrukcije velja $p_1 + 2p_0 = \pi/8$ in $p_0 + p_1 = 1/4$, od koder dobimo

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}. \quad (2)$$

V nadaljevanju bomo privzeli, da so vsi koti izraženi vadianih. Označimo z E tisto presečišče krožnic s polmeroma 1 in središčema v C in D , ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. Naj bo E' pravokotna projekcija točke E na stranico CD . S tem je $|DE| = 1$ in $|DE'| = 1/2$. Ploščino p_2 bomo dobili tako, da bomo od ploščine kvadrata odšteli ploščino $\triangle DEC$ in ploščini krožnih izsekov ADE in ECB , torej

$$p_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(|DC| \cdot |EE'| + |AD|^2 \cdot \angle ADE + |BC|^2 \cdot \angle ECB \right).$$

Izračunajmo manjkajoče količine. Po Pitagorovem izreku imamo

$$|EE'| = \sqrt{|DE|^2 - |DE'|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

Ker je še $\angle ADE = \pi/2 - \angle EDE' = \pi/2 - \angle E'CE = \angle ECB$ in $\angle EDE' = \pi/3$, saj je $\triangle DEC$ enakostranični trikotnik, sledi

$$p_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}. \quad (4)$$

Označimo z F tisto presečišče polkrožnice nad AD s krožnico polmera 1 in središčem v B , ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. S tem je $|AG| = |GD| = 1/2$ in $|BF| = 1$. Naj bosta F' in F'' pravokotni projekciji točke F na stranici AD in AB . Podobno kot prej bomo ploščino p_3 dobili tako, da bomo od ploščine kvadrata odšteli ploščini $\triangle AFG$ in $\triangle ABF$ ter ploščini krožnih izsekov FGD in CBF , torej

$$p_3 = 1 - \frac{1}{2} \left(|AG| \cdot |FF'| + |AB| \cdot |FF''| + |GD|^2 \cdot \angle FGD + |BC|^2 \cdot \angle CBF \right).$$

Evklidov izrek $|AF'| \cdot |F'D| = |FF'|^2$ za pravokotni trikotnik $\triangle DAF$ zagotavlja

$$|AF'| - |AF'|^2 = |FF'|^2.$$

Iz

$$1 = |BF|^2 = |FF''|^2 + |BF''|^2 = |AF'|^2 + (1 - |FF'|)^2$$

sledi še $|AF'| = 2|FF'|$ ter s tem

$$|FF'| = \frac{2}{5}, \quad |FF''| = \frac{4}{5}. \quad (5)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \angle FGD &= 2 \cdot \angle FAD = \pi - 2 \arctan \frac{|FF''|}{|FF'|} \\ &= \pi - 2 \arctan 2, \\ \angle CBF &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{|FF''|}{1 - |FF'|} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{4}{3}, \end{aligned} \quad (6)$$

imamo

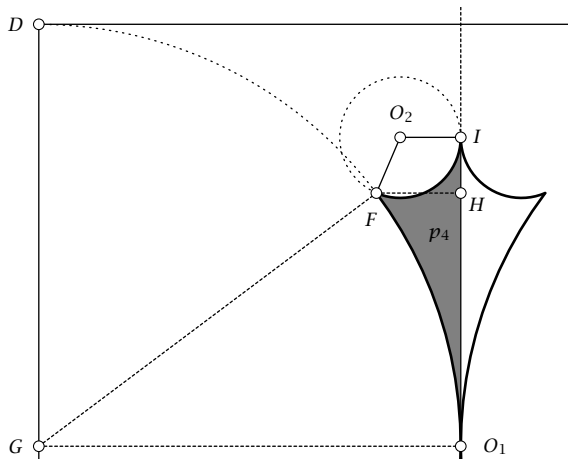
$$2p_3 = 1 - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan 2 + \arctan \frac{4}{3}. \quad (7)$$

Po upoštevanju izrazov (2), (4) in (7) v (1) dobimo

$$P_1 = 2 - \sqrt{3} + \frac{11\pi}{6} - 2 \arctan 2 - 4 \arctan \frac{4}{3}.$$

Ploščina prvega križa je tako približno 0.10406.

Sedaj bomo podali še izpeljavo ploščine za drugi križ. Označimo s p_4 ploščino osenčenega lika na sliki 5, pri čemer sledimo tudi oznakam s slike 4. Po tem bo ploščina križa P_2 na sliki 3 enaka $8p_4$.



SLIKA 5.

Izpeljava ploščine križa s slike 3

Označimo z O_1 presečišče polkrožnic nad stranica AD in BC . S tem je

$$\begin{aligned} |GF| &= |GO_1| = \frac{1}{2}, \quad |FH| = \frac{1}{2} - |FF'| = \frac{1}{10}, \\ |O_1H| &= |FF''| - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}, \\ |HI| &= |EE'| - |FF''| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

pri čemer smo uporabili (3) and (5). Označimo z I isto presečišče krožnic s polmeroma 1 in središčema v A in B , ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. Naj bo O_2 središče krožnice, katere krožni lok podaja stranico križa, torej $|O_2I| = |O_2F|$ ter premica skozi O_2 in I je pravokotna na premico skozi O_1 in I . Točka H naj bo pravokotna projekcija točke F na stranico O_1I .

Ploščino p_4 bomo dobili tako, da bomo od ploščine štirikotnika O_1IO_2F z »ukriviljeno« stranico O_1F odšteli ploščino krožnega izseka FO_2I , torej

$$2p_4 = (|FH| + |O_2I|) \cdot |HI| + (|GO_1| + |FH|) \cdot |O_1H| - |GF|^2 \cdot \angle O_1GF - |O_2I|^2 \cdot \angle FO_2I.$$

Izračunajmo manjkajoče količine. Po (6) imamo

$$\angle O_1GF = \frac{\pi}{2} - \angle FGD = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan 2.$$

Ker je

$$(|FH| - |O_2I|)^2 + |HI|^2 = |O_2F|^2 = |O_2I|^2,$$

sledi

$$|O_2I| = \frac{|FH|^2 + |HI|^2}{2 \cdot |FH|} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Po kosinusnem izreku za $\triangle FIO_2$ imamo še

$$\begin{aligned} \angle FO_2I &= \arccos \left(1 - \frac{|FH|^2 + |HI|^2}{2 \cdot |O_2I|^2} \right) \\ &= \arccos \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} P_2 &= 8p_4 = 27\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} - 46 - 2 \arctan 2 - \\ &\quad 4 \left(7 - 4\sqrt{3} \right)^2 \arccos \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}. \end{aligned}$$

Ploščina drugega križa je tako približno 0,08116.

× × ×

Natečaj Matematika za boljši svet



NEŽA MRAMOR KOSTA

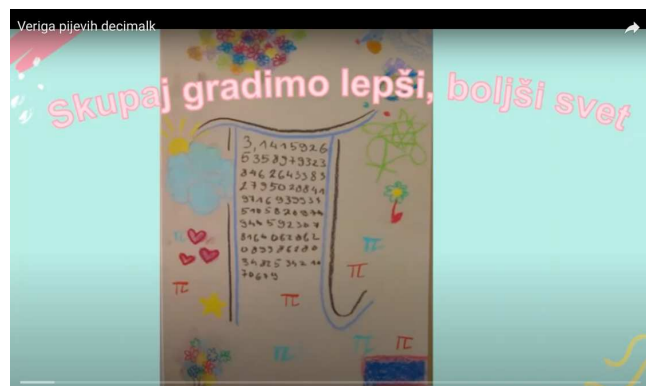


→ Tudi ob letošnjem Mednarodnem dnevu matematike, 14. 3. 2021, na dan, znan tudi kot dan števila π , smo na pobudo Mednarodne matematične unije (IMU) pri DMFA Slovenije povabili učence osnovnih in srednjih šol, da sodelujejo z ustvarjanjem plakatov, videoposnetkov, poezije ali drugih del, ki na izvirni način prikazujejo, kako matematika izboljšuje svet.

V nenavadnih pandemičnih okoliščinah to pomlad, ob odpiranju in zapiranju šol ter javnega življenja, nas je odziv na naše povabilo navdušil. Prejeli smo več kot 100 izdelkov, videov, plakatov, pesmi in risb, avtorsko skladbo in celo novo matematično družabno igro. Članice natečajne komisije Sandra Cigula, Marjeta Kramar-Fijavž, Neža Mramor Kosta in Anja Petković Komel smo izdelke natančno pregledale. Sodelujočim smo poslale simbolična darila, natančnejši seznam z opisi prejetih izdelkov ter povezavo na virtualno razstavo pa lahko najdete med novicami na spletni strani DMFA. Zahvaljujemo se vsem mentoricam, mentorjem, učenkam in učencem, ki ste se na

naše vabilo odzvali. Čestitamo za lepe domiselne izdelke in vam želimo še veliko matematičnega veselja in ustvarjalnosti!

Posebno priznanje med letošnjimi izdelki pa zagotovo zasluži film **Veriga decimalk števila Pi**, ki je nastal v sodelovanju petih šol, in sicer OŠ Prule, OŠ Brinje Grosuplje, OŠ Oskarja Kovačiča, OŠ Leskovec pri Krškem in SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo v Ljubljani. Kot so sami avtorji zapisali se je 5 šol odločilo za sodelovanje, združilo moči in skupno ponazorilo 3335 decimalk števila Pi ter s tem simbolično podrlo dosedanja rekord. Veriga števila Pi gradi, gradi vezi med šolami, ljudmi. Združuje učence različnih razredov, različnih šol, celo narodnosti. Geslo našega ustvarjanja je: S sodelovanjem gradimo lepši, boljši svet. Film, v katerem so učenci različnih starosti na izvirne načine (z igranjem violine in klavirja, recitiranjem, lego kockami, okrašenimi nohti, epruvetami, kartanjem, ropotanjem, plesom, risbami, različnimi predmeti) naštevati in ponazorili decimalke števila pi, si lahko ogledate na spletnem naslovu youtu.be/GkgOm41rROE.



× × ×

Zakaj dimnik »potegne«?

↓↓↓

JOŽE RAKOVEC

→ Ljudje radi opazujemo ogenj, gledamo rumene in oranžne plamene, kako se zvijajo in vrtinčijo na tisoče načinov. Zato ima marsikdo tudi v stanovanju s centralnim ogrevanjem v sobi peč ali kamin s steklenimi vrati, da lahko opazuje to lepoto.



SLIKA 1.

Kovinske peči imajo po navadi priključek za dimnik na vrhu in zato vsaj nekaj kovinskega dimnika kot priključek vanj tudi v zidu sobe – tako, kot pri peči na levi sliki. Odvod dimnih plinov se potem nadaljuje skozi zidan dimnik navzgor nad streho hiše, včasih pa tudi kar skozi kovinsko cev.

Peč na sliki 1 ima spodaj dovod zraka, ki ga je mogoče uravnavati. Dokler se ogenj še ne razžari, mora biti ta povsem odprt, potem pa se dovod zraka primerno zmanjša. Na zadnji steni namreč skozi luknjice v peč vstopajo dodatni curki zraka. Ko pogledamo sliko ognja v peči podrobno (zgornji izrez), vi-



dimo, da ti curki zraka povzročijo, da se plameni uvijajo okrog njih. Še dosti bolje to vidimo na video posnetku (www.presek.si/49/video.mp4). Opazimo tudi, da plameni nad curki še nekoliko svetleje zagorijo v dodatnem zraku.

Dimnik »potegne« navzgor, ker je vzgon segretyh plinov navzgor v njem večji od njihove teže navzdol. Potem se pojavi še sila trenja, ki zavira tok dimnih plinov. Tlak pri peči v sobi je približno enak kot je tlak na isti višini zunaj hiše. No, če peč, v kateri kurimo, zajema zrak za gorenje iz sobe, je v resnici v sobi nekaj podtlaka in prepiha. Kolikor se dimnih plinov dvigne skozi dimnik, toliko zraka mora od zunaj prihajati v sobo; torej je zaradi vleka skozi dimnik v sobi res nekaj malega podtlaka in »prepiha«. Celo obvezno je, da preprih zagotovimo: pri pečeh, ki nimajo posebnega dovoda zraka (kar je za novogradnje sicer obvezno), mora imeti soba zaradi varnosti zračnik s premerom najmanj 150 cm^2 (www.szpvp.si/wp-content/uploads/SZPV-407.pdf). Kolikor dimnih plinov skozi dimnik ven, toliko zraka noter skozi zračnik!

Strojniki se s pridobivanjem toplote z izgoravanjem zelo resno ukvarjajo predvsem zaradi čim bolj-ših izkoristkov, seveda pa tudi zaradi varnosti. Na ljubljanski Fakulteti za strojništvo na katedri za energetska strojništvo lab.fs.uni-lj.si/kes/ proučujejo peči in kotle, prenose toplote iz peči v vodo v kotlih ali v okolico peči, izračunavajo, kakšni morajo





biti dimniki glede na moč kurišč. Kako izračunajo, kakšen mora biti dimnik, si lahko ogledamo na lab.fs.uni-lj.si/kes/generatorji_toplote/gt-v07-preracun_dimnika.pdf. Mi poskusimo bolj preprosto odgovoriti na vprašanje, zakaj dimnik včasih močno »vleče«, drugič pa ne. Naš razmislek bo upošteval le malo podrobnosti in rezultat bodo le načelne ugotovitve.

Ko se dimni plini dvigajo skozi dimnik, jih navzgor potiska razlika med silo vzgona navzgor in težo navzdol ter silo upora pri toku skozi dimnik, ki zavira; torej imata tako upor kot teža smer navzdol.

Kaj je teža, vemo: vsaka masa m ima v polju zemeljske težnosti težo mg . V zunanjem zraku je gostota zraka okrog 1 kg/m^3 in torej masa zraka v enem kubičnem metru okrog 1 kg . Če je bolj mraz, je gostota večja, če je topleje, manjša. Po nižinah, kjer je zračni tlak višji, je zrak gostejši, v višinah pa redkejši. Gostota plinov je namreč sorazmerna tlaku p in obratno sorazmerna temperaturi T , nanjo pa vpliva tudi sestava plina, kar predstavlja specifična plinska konstanta R : $\rho = p/RT$; za zrak, ki je mešanica predvsem dušika in kisika, je $R = 287 \text{ J/kgK}$. Torej je masa 1 m^3 zraka ponavadi okrog 1 kg , pozimi, ko je mraz, pa tudi kaj več kot $1,2 \text{ kg}$. Teža pa je enaka masi, pomnoženi z $g = 9,81 \text{ N/kg}$.

Tudi upor F_u bolj ali manj poznamo: čim višja je hitrost skozi dimnik, tem večji je; čim ožji in čim bolj hrapav je dimnik, večji je upor.

Kaj pa vzgon? Kot je ugotovil že Arhimed več kot 200 let pr. n. št., je vzgon enak teži izpodrinjene tekočine. Zakaj? Najprej povejmo, da v tekočinah (kapljevinah in plinih) tlak z globino narašča oz. z višino pada. In zakaj je npr. zračni tlak višje v ozračju manjši? Na tla pritiska na enoto ploskve tal S sila teže vsega zraka nad to ploskvijo od tal do vrha ozračja. Če pa se dvignemo za Δz , pa smo pod seboj pustili en del mase zraka s težo $\Delta mg = \rho S \Delta z g$. Zato je na tej višini nad nami manj zraka in sila za $\Delta p S$ manjša: $\Delta p S = -\rho S \Delta z g$ oz. $\Delta p = -\rho \Delta z g$. Ta enačba $\Delta p = -\rho g \Delta z$ velja za hidrostatične tlake za vse tekočine – kapljevine in pline. V nestisljivi vodi je gostota konstantna in tlak zato z globino enakomerno narašča. V plinih pa je treba upoštevati, da se z višino (oz. globino) spreminja tudi gostota: v zraku pri tleh, kjer je gostota večja, pada z višino bolj, kot v višinah, kjer je zrak redkejši. Sedaj si zamislimo volumen zraka v ozračju z osnovno ploskvijo S in vi-

šino Δz : $\Delta V = S \Delta z$. Ta zrak ima gostoto ρ in torej težo $\Delta mg = \rho S \Delta z g$. Če kljub svoji teži ne »pade ne tla«, ampak lebdi v okolišnjem zraku, očitno sili njegove teže navzdol drži ravnotežje neka enako velika sila – vzgon F_{vzg} navzgor. Zračni tlak pod delom zraka povzroča silo na spodnjo ploskev ki je velika pS , nad njim pa je tlak za Δp manjši in zato sila na zgornjo ploskev navzdol tudi manjša za $\Delta p S$ – in razlika obeh je vzgon.

Vrnimo se k dimnim plinom v dimniku. Tako zrak okrog dimnika kot dimni plini v dimniku so plini. Kadar dim ni povsem prozoren, so v njem še kaki delci pepela ali saj. V našem primeru je razlika temperatur dosti, dosti večja od razlik tlakov in lastnosti zraka ter dimnih plinov, zato za p in za R privzamemo, da sta za v zraku in v dimnih plinih približno enaka. Razlika gostot je zato $\rho_{zr} - \rho_{dim} \approx \frac{p}{R} \left(\frac{1}{T_{zr}} - \frac{1}{T_{dim}} \right)$.

Torej je razlika med vzgonom in težo – čisti vzgon

$$\begin{aligned} \blacksquare F_{net} &= \Delta \rho g S \Delta z = \frac{p}{R} \left(\frac{1}{T_{zr}} - \frac{1}{T_{dim}} \right) g S \Delta z \\ &= \frac{p g S \Delta z}{R T_{dim} T_{zr}} (T_{dim} - T_{zr}). \end{aligned}$$

Vzemimo, da je povprečna temperatura dimnih plinov skozi dimnik okrog 400°C , zunaj hiše pa okrog 0°C stopinj. Razlika temperatur je okrog 400 stopinj; dimnik močno vleče navzgor! Kolikšen pa je čisti vzgon? Ker sta masa $m_{dim} \approx \frac{p S \Delta z}{R T_{dim}}$ in teža dimnih plinov tem večja, čim večji (širši in višji) je dimnik ($S \Delta z$), je smiselno oceniti čisti vzgon na masno enoto $\frac{F_{neto}}{m_{dim}} = g \frac{T_{dim} - T_{zr}}{T_{zr}} \approx 0,7 g$. Torej je vzgon precejšen.

Goriva gorijo v ogljikov dioksid CO_2 in v vodo H_2O (oba sta toplogredna plina). Vodna para H_2O , ki je v dimnih plinih veliko, se v dimniku ne sme utekočiniti v tekočo vodo, saj bi dimnik to poškodovalo. Tudi zato je treba kuriti tako, da je temperatura dovolj visoka. S tem pa je tudi izkoristek kurjenja večji.

Ali ste že kdaj poskusili zakuriti v peči ali štedilniku na drva? Kadar je zunaj toplo, nikakor noče dobro zagoreti in dim sili vse naokrog po kuhinji ali sobi. Kadar pa je zunaj zares mraz, pa takoj, ko odprete vratca, začutite, da »potegne«, še preden ste pritaknili vžigalico – že sam toplejši zrak v hiši zadoštuje za nekaj začetnega vleka. Ko pa zares zagori, pa tako vleče, da je morda dotok zraka v peč celo treba pripirati.

× × ×

5. Evropska in 51. Mednarodna fizikalna olimpijada 2021

↓↓↓

BARBARA ROVŠEK

→ Naneslo je, da sta se letos poleti (junija in julija 2021) obe tekmovanji odvili na daljavo. Evropska fizikalna olimpijada je na daljavo potekala že lani, Mednarodno pa je lani snedel covid-19 in je odpadla.



SLIKA 1.

Kaj pa zdaj? (EFO 2021)

Evropska fizikalna olimpijada (EFO ali EuPhO) se je godila med 19. in 26. junijem 2021. V soboto in nedeljo, 19. in 20. junija 2021, se je šest dijakov med 9.00 in 14.00 razbijajoč si glavo sklanjalo nad bele liste na rumenih mizah na Pedagoški fakulteti v Ljubljani (slika 1). V soboto so dijaki reševali teoretične naloge, v nedeljo pa dve eksperimentalni nalogi. Teoretične so bile, kot običajno in se spodobi za Evropsko fizikalno olimpijado, kratke, jedrate in še kar zaguljene, eksperimentalni pa sta bili simulaciji. Originalna angleška besedila letošnjih nalog in simulacijo, pa tudi arhiv nalog in rešitev na-

log s prejšnjih tekmovanj lahko najdeš na spletnih straneh EFO (eupho.ee/archive/); prevodi nalog v slovenščino pa so »skriti« na spletnih straneh DMFA Slovenije (www.dmfa.si/tekmovanja/FiSS/Default.aspx).

V ekipi za 5. EFO so bili (na sliki 2 z leve): **Lev Podbregar** z Gimnazije Lava, Šolski center Celje, **Vid Kavčič** z Gimnazije Bežigrad, **Simon Bukovšek** z Gimnazije Kranj, **Jaka Vrhovnik** s I. gimnazije v Celju in **Vito Levstik** z II. gimnazije Maribor. Kot gost (ker ni slovenski državljan in ker veljavna pravila tujcem sodelovanja v slovenski ekipi niso dovoljevala) se je olimpijade udeležil še **Alexander Gaydukov** z Gimnazije Koper (prvi z desne). Simon, Alexander, Jaka in Lev so na EFO 2021 osvojili bronasto medaljo, Vid pa je prejel pohvalo. Na olimpijadi je sodelovalo 46 držav s skupno 220 tekmovalci. Zlatih medalj so razdelili 15, srebrnih 30, bronastih 66 in pohval 27. O pravilih olimpijade, kako natančno poteka, kdo sestavlja naloge, kdo lahko na njej sodeluje in kdo na koncu dobi medaljo, si tudi lahko prebereš na spletni strani tekmovanja.

Minil je skoraj en mesec, ko se je pričela še druga letošnja oddaljena fizikalna olimpijada, 51. Mednarodna fizikalna olimpijada (MFO ali IPhO). Nismo šli v Vilno v Litvi, ampak smo ostali kar doma. Na 51. MFO so se z dosežki na tekmovanju srednješolcev v znanju fizike za Stefanova priznanja uvrstili (kot stojijo na sliki 3 z leve) **Domen Lisjak** z Gimnazije Bežigrad, **Simon Bukovšek** z Gimnazije Kranj, **Lev Podbregar** z Gimnazije Lava, Šolski center Celje, **Anže Krejan** z Gimnazije, Šolski center Velenje in **Nejc Funtek** z Gimnazije Lava, Šolski center Celje.

Mednarodna fizikalna olimpijada je velika reč; na njej je tekmovalo 368 dijakov iz približno 76-ih držav. Začela se je 17. in končala 24. julija 2021. Pri eksperimentalnih nalogah so v ponedeljek, 19. julija, dijaki raziskovali neidealne kondenzatorje in sveteče





SLIKA 2.

Slovenska ekipa na 5. EFO 2021.

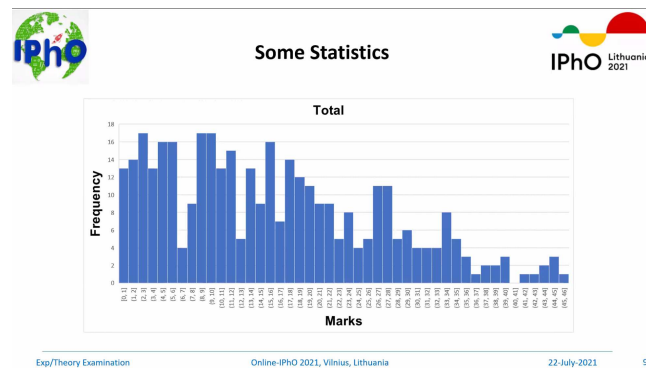


SLIKA 3.

Slovenska ekipa z vodjema Barbaro in Juretom ter so-prevajalcem nalog Mitjo na 51. MFO 2021 oziroma na strehi Pedagoške fakultete v Ljubljani (po drugem tekmovalnem dnevu).

diode. Nalogi so reševali, kot se eksperimentalne naloge običajno rešuje na olimpijadah: v živo in z realnimi pripomočki, ki so jih organizatorji iz Vilne v Litvi na naslove po celem svetu razposlali vnaprej. Dva dni kasneje so reševali še tri teoretične naloge: v prvi so obravnavali oceanski hrbet, v drugi elektrostatsko lečo za curek elektronov in v tretji nekaj primerov iz kvantne fizike. Vse naloge so v arhivu na spletni strani MFO (www.ipho-new.org) (slovenski prevodi nalog pa na spletnih straneh DMFA Slovenije).

Pri eksperimentalnih nalogah so lahko tekmovalci dosegli največ 20 točk, pri teoretičnih pa za vsako nalogo največ 10 točk (skupaj 30). Slika 4 prikazuje porazdelitev udeležencev 51. MFO po skupnih doseženih točkah, preden so se pri moderaciji točke še nekoliko spremenile (povečale). Moderacija je proces, pri katerem vodje ekip razrešujemo morebitna neujemanja pri ocenjevanju. Naloge vseh tekmovalcev ocenijo uradni ocenjevalci, naloge tekmovalcev iz svojih državnih ekip pa ocenimo tudi vodje ekip. Če se naše ocene razlikujejo od uradnih (in so naše višje), lahko pri moderaciji naše ocene utemeljimo, in če smo pri tem dovolj prepričljivi (imamo argumente in dokaze), se lahko vsota točk, ki jih je dosegel posamezni tekmovalec, še malce dvigne. Kot vidimo iz porazdelitve, nihče od 368-ih tekmovalcev ni dosegel vseh možnih točk. Dijakov, ki so pri uradnih ocenjevalcih v prvo dosegli vsaj 40 točk (od skupno 50), je le toliko, kot prstov mizarja na obeh rokah.



SLIKA 4.

Porazdelitev udeležencev 51. MFO po skupnih doseženih točkah.

Na koncu so nas naši dijaki spet razveselili s svojimi rezultati: Simon je na 51. MFO osvojil srebrno medaljo, Domen in Lev sta osvojila bronasti medalji, Anže pa je prejel pohvalo.

Na obeh tekmovanjih sva ekipi vodila Jurij Bajc in Barbara Rovšek, pri prevajanju nalog v slovenščino nama je pomagal še Mitja Zidar. Ker sta se obe tekmovanji godili na daljavo (to za naše dijake pomeni, v Ljubljani – konkretno na Pedagoški fakulteti), je pri izvedbi EFO in MFO, da sta se tekmovanji sploh

lahko zgodili in je vse teklo gladko, sodelovalo še več pomočnikov, ki so opravili različna dobra dela (dve od njih sta v rumenih majicah na sliki 5). Pripraviti so morali učilnico, kjer so naši dijaki tekmovali, primerno so morali namestiti kamere, preko katerih je potekal vrhovni nadzor, preizkušali so internetne povezave, razporedili eksperimentalno opremo po mizah, ko je bil čas za to, kopirali naloge, nadzirali dijake med tekmovaljem, skenirali izdelke, na EFO pa so pomagali tudi pri koordinaciji nadzora in nadzoru vseh tekmovalcev preko kamer, in, zelo pomembno, pri ocenjevanju (anonimiziranih) nalog vseh tekmovalcev. To zadnjo nalogo, ocenjevanje izdelkov na EFO, so izvršno opravili udeleženci preteklih olimpijad. V ekipi 43-ih ocenjevalcev so bili tudi slovinci Marko Ljubotina, Mitja Zidar, Žiga Krajnik, Simon Čopar in Tevž Lotrič.



SLIKA 5.

Ivana, Jure in Saša potem, ko so pripravili učilnico na Pedagoški fakulteti za tekmovalje.

Bila je zanimiva izkušnja, a v prihodnosti bi bilo za vse udeležence, še posebej dijake, bolje, če bi olimpijade spet lahko potekale v živo. Najpomembnejši del dogajanja je letos na žalost odpadel: to pa je spoznavanje in živo druženje mladih, ki so si zelo različni po barvi kože in las ter potezah obraza, pa zelo podobni po zanimanju in sposobnostih. Tekmovanje in dokazovanje teh sposobnosti je šele na tretjem mestu. (Na drugem je druženje vodij ekip.)

Če bosta leta 2022 Evropska in Mednarodna fizikalna olimpijada potekali v živo, bo 6. EFO v Ljubljani, 52. MFO pa v Belorusiji.

× × ×

62. mednarodna matematična olimpijada

↓↓↓

JAKOB JURIJ SNOJ

→ Od 14. do 24. julija 2021 je potekala 62. Mednarodna matematična olimpijada (IMO). Slovensko ekipo so sestavljali Nejc Amon, Lovro Drofenik in Jaka Vrhovnik s I. gimnazije v Celju, Juš Kocutar z II. gimnazije Maribor, Lana Prijon z Gimnazije Bežigrad in Gal Zmazek z Gimnazije Ptuj. Ekipo sva spremljala Gregor Dolinar in Jakob Jurij Snoj. Lovro Drofenik in Nejc Amon sta na tekmovalju osvojila bronasti medalji, Jaka Vrhovnik in Juš Kocutar pa pohvali.



SLIKA 1.

Grafika IMO2021.

Tekmovanje je bilo že drugo leto zapored organizirano na daljavo v organizaciji Rusije – večina ekip je naloge reševala v svoji državi ob prisotnosti mednarodnih nadzornikov, slovenska ekipa pa je obeležila dolgoletno prijateljstvo s švicarsko ekipo in je v času olimpijade gostovala v Wildhausu v Švici (lani





SLIKA 2.

Fotografija slovenske ekipe.

so njihovi tekmovalci gostovali pri nas na Bledu v Plemljevi vili). Kot običajno so imeli tekmovalci v dveh tekmovalnih dneh na voljo vsakič po 4,5 h časa za reševanje treh od skupaj šestih nalog. V netekmovalnih dneh sta si ekipi krajšali čas predvsem z raziskovanjem narave, med drugim sta se odpravili tudi na celodnevni pohod v Liechtenstein.

Naloge na olimpijadi so bile letos nadpovprečno zahtevne – meja za zlato medaljo, ki je bila letos pri 24 točkah, se običajno giblje pri okoli 30 točkah. Za najbolj presenetljivo se je izkazala naloga št. 2 z dokazovanjem neenakosti, ki je bila izbrana kot srednje zahtevna, a jo je v popolnosti rešilo le 16 tekmovalcev, s čimer se je izkazala za skoraj najzahtevnejšo na tekmovanju. Slovenski tekmovalci so večino svojih točk zbrali pri tradicionalno lažjih nalogah št. 1 iz teorije števil z rahlim kombinatoričnim pridihom in št. 4 iz geometrije. V nadaljevanju bomo predstavili nalogo št. 5, ki ima s pravim navdihom kratko elegantno rešitev. Nalogo je od slovenskih tekmovalcev v celoti rešil Nejc Amon. Besedila ostalih nalog bralci najdejo na spletni strani MMO.

Naloga. Veverici Eva in Vera sta nabrali 2021 orehov za zimo. Vera je oštevilčila orehe od 1 do 2021 in nato skopala 2021 majhnih lukenj, ki so oblikovale krožni vzorec okrog njunega najljubšega drevesa. Naslednje jutro je Vera opazila, da je Eva položila po en oreh v vsako luknjo, vendar se pri tem ni ozirala na oštevilčenje orehov. Vera se je zato odločila, da bo prerazporedila orehe v 2021 zaporednih korakih. V k -tem koraku Vera med seboj zamenja sva oreha, ki sta sosednja orehu, oštevilčenim s številom k .

Dokaži, da obstaja število k , tako da Vera v k -tem koraku zamenja oreha s številoma a in b z lastnostjo $a < k < b$.

Rešitev. Napisali bomo dokaz s protislovjem. Predpostavimo, da takšno število k ne obstaja, torej v vsakem koraku zamenjamo oreha s številoma, ki sta obe večji ali obe manjši od k . Predstavljajmo si, da v k -tem koraku oreh številka k tudi pobarvamo – to na razporeditev seveda ne vpliva. Po predpostavki torej v vsakem koraku zamenjamo dva oreha, ki sta že oba pobarvana ali pa oba še nepobarvana. Zato zamenjava ne spremeni položajev lukenj, v katerih so pobarvani orehi. Predstavljamo si lahko, da v posameznem koraku pobarvamo oreh št. k , barva orehov v ostalih luknjah pa se torej ne spremeni.

Opazujmo sedaj število parov dveh sosednjih pobarvanih orehov. Na začetku je to število enako 0, na koncu pa 2021. Vsakič, ko pobarvamo en oreh, se to število bodisi ne spremeni (če sta bila oba sosedna nepobarvana) bodisi se poveča za 2 (če sta bila oba sosedna pobarvana). To število torej ves čas ostaja sodo, kar nas privede do protislovja.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	5	7			
8				11	
11					15
			8		
			11		

× × ×

Vpliv konstelacij satelitov na astronomska opazovanja

↓↓↓

JURE JAPELJ

→ Astronome skrbi dramatično povečanje števila telekomunikacijskih satelitov okoli Zemlje. Sateliti puščajo svetle sledi na astronomskih posnetkih in motijo opazovanja v radijskem delu spektra. Medtem ko astronomi iščejo rešitve, postaja jasno, da se vplivu satelitov v prihodnosti ne bo mogoče povsem izogniti. V tem prispevku si pogledimo, kako sateliti nagajajo astronomom.

Osnovni koncept astronomskega opazovanja je preprost. Teleskop ali mrežo teleskopov usmerimo v nebo in zbiramo fotone. Med opazovanjem se včasih v vidnem polju teleskopa znajdejo objekti, kot so oblaki, letala in sateliti, ki kvarijo meritve. Oblakom se izognemo tako, da opazujemo v lepem vremenu. Število letal je tako majhno, da le redko zmotijo opazovanja. Do nedavnega je enako veljalo za satelite. A število satelitov se je v zadnjih letih močno povečalo, njihova rast pa se še lep čas ne bo ustavila.

Napovedana inflacija satelitov

Številna podjetja so nedavno napovedala, da bodo v nizko Zemljino orbito, ki sega nekje med 180 in 2000 km nad površjem, poslala lastno konstelacijo telekomunikacijskih satelitov. Konstelacija je mreža večjega števila satelitov. Težko je predvideti, kako bo število satelitov raslo v prihodnosti. Lastnosti napovedanih konstelacij – število konstelacij, število satelitov v posamezni konstelaciji, višine orbit – se namreč s časom spreminjajo in prilagajajo razmeram na trgu. Zato si pogledimo zgolj nekaj okvirnih števil za občutek. Pred letom 2019 je bilo v nizki Zemljini orbiti okoli 5000 satelitov, od tega polovica delujočih. V zadnjih dveh letih je samo podjetje Starlink v vesolje izstrelilo okoli 1500 satelitov, število satelitov pa bi se lahko do konca desetletja povečalo

tudi za sto tisoč. Priložena tabela (slika 1) prikazuje karakteristike nekaterih konstelacij. Ni rečeno, da bodo vsi naštetih projekti udeleženi, po drugi strani pa se bodo pojavila tudi nova podjetja.

Podjetje	Št. satelitov	Višina orbite [km]	Začetek delovanja
Starlink/SpaceX	42000	340, 550	2020-2021
OneWeb	7000	1200	2022
Kuiper/Amazon	3236	590, 610, 630	2022-2025
Samsung	4700	1400	2022-2030
Athena/Facebook	> 10000	500, 550	2021-2030
GW	13000	500/600, 1150	?
Huawei	10000	< 1000	2022-2030

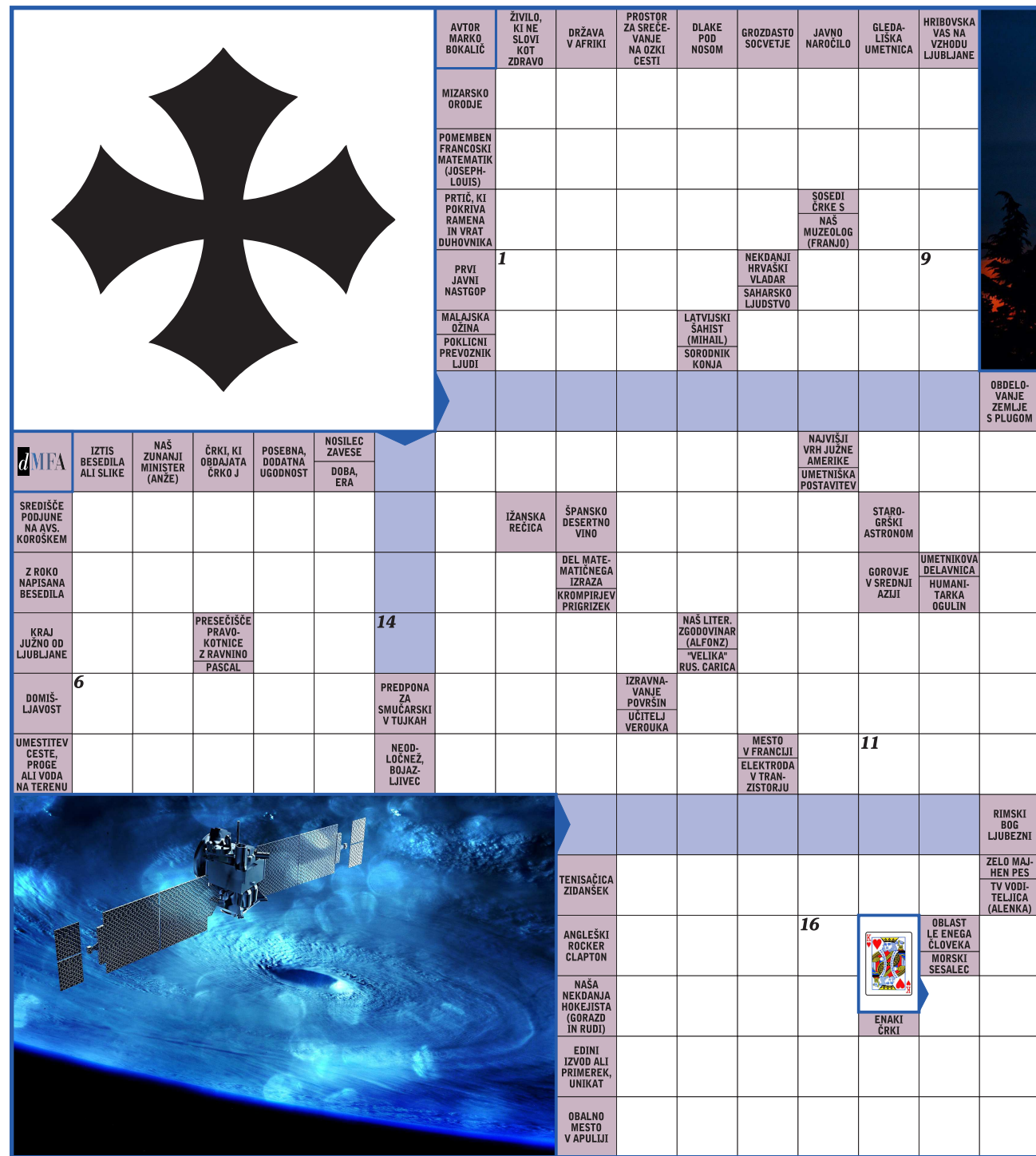
SLIKA 1.

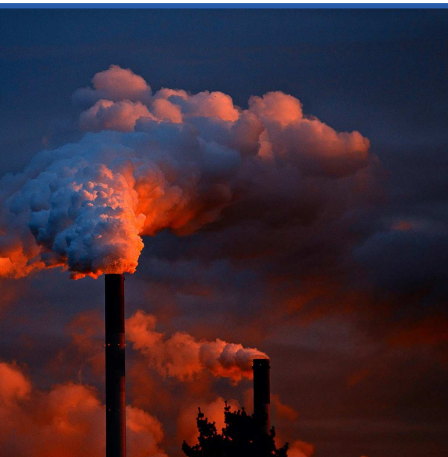
Primer nekaterih konstelacij, ki bi v naslednjih letih lahko zaživele v nizki Zemljini orbiti. Seznam predstavlja le del napovedanih projektov.

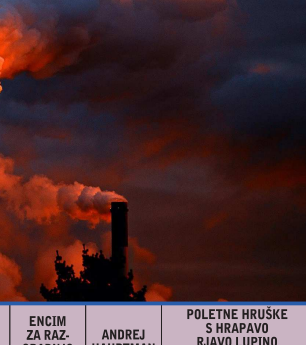
Vredno se je vprašati, kaj je prednost konstelacij. Mreža satelitov omogoča globalno pokritje Zemlje. Telekomunikacijski satelit z Zemljo komunicira s pomočjo radijskega signala. Signal oddaja v obliki stožca, ki lahko naenkrat doseže le manjšo površino Zemlje. Konstelacije imajo satelite enakomerno porazdeljene okoli Zemlje¹ in tako lahko pokrijejo večji del površine planeta, kjer se nahajajo uporabniki. Pri načrtovanju konstelacije je ena izmed najpomembnejših lastnosti višina orbite. Konstelacije v visokih orbitah lahko celotno Zemljo pokrijejo z manjšim številom satelitov. A ker so od Zemlje bolj oddaljene, ima njihov signal večjo zakasnitev. Številna podjetja zato načrtujejo konstelacije v nižjih orbitah, kjer je zakasnitev krajša, s čimer zadostijo apetite bolj zahtevnih uporabnikov.

¹V resnici konstelacija ne pokriva celotne Zemlje, temveč le določeno področje med dvema zemljepisnima širinama.









						GRAFIČNO OBLIKO- VANJE MATEVŽ BOKALIČ	POKOJNA OPERNA PEVKA MRAK	UGANKA	PEVEC PESTNER	ZELO POZITIVNA, NEREALNA PREDSTAVA O ČEM	ITALIJAN. PISATELJ (UMBERTO)	NEKAJ ČRKA ZA ROČNO STAVLJENJE	RDEČI KRIZ	DEKLE IZ PREDINOVE PESMI	NEKANJA TEKAČKA ČEPLAK	IZUMRLI VZHOJNI SLOVAN
						PODROČJE MATE- MATIKE						8				
						OBMOČJE VISOKEGA ZRAČNEGA TLAKA										
						ŽIVLJENJ- SKI PROSTOR		2					ROMUNSKA REKA			
						ROK GOLOB NEKD. EVRO- POSLANKA (MOJCA) MURKO			NINA VALIČ	ČRKA, KI OBICAJNO OZNAČUJE NEZNANKO	MOZOLJ		NAŠA PEVKA (MAJA)			NEKANJA NORVEŠKI BIATLONEC BJÖRN- DALEN
													ODPRTINA V STENI			
ZBIRKA ZEMLJE- VIDOV V OBLIKU KNJIGE	ZABOJ IZ LETVIC	ENCIM ZA RAZ- GRADNJO SEČNINE	ANDREJ HAUPTMAN		POLETNE HRUŠKE S HRAPAVO RJAVO LUPINO UKRIVLJENA STROPNA KONSTRUKCIJA							NEKD. MADŽ. PRESEDNIK (FERENC)				
					STARŠ MOSKEGA SPOLA			SKLADA- TELJ KUMAR	JAPONSKA ROKOBORBA DEBELIH BORCEV		5			ALBERT EINSTEIN NEKANJA SL. PEVKA (IRENA)		
					STISNIJEN ZVITEK BLAGA ZA TRANSPORT ČRKA Q				PODOFICIR	DRUGO NAJVEČJE IRS. MESTO AM. PEVKA FITZGERALD					SVEŽENJ URADNIH SPISOV O ČEM, MAPA	ZADRUGA V STARI RUSIJI
				AVSTRIJ. POGORJE, GOLICA KRIVINA ORGANA							ELEKTRIČNI USMERNIK DRUGA MOHAMEDO- VA ZENA					
			7				KRAJ PRI VELENJU	AMERIŠKA VALUTA KRAJ V DOLINI PRI IDRJI			17		EG. BOG V PODOBI SOKOLA VOLILNA ENOTA			
					PRVA SAMO- GLASNIKA	NASPROTJE KORIST- NOSTI LISTNATO DREVO										
TRAKOVI ZA OVLANJE MEČ	PRIPADNICA ORIENTAL. LJUDSTEV ORAL JUTRO							IZKAZOVA- NJE ČASTI KOMU DRAGO IVANUSA							12	
		ZASTEKLJEN PROSTOR OB HIŠI NAŠ PISA- TELJ (SAŠA)							ENAKA VOKALA DEL VEČ- DNEVNE DIRKE				UMETNO NASUTA BIVALNA VZPETINA V NEOLITIKU			
					FRANCOSKO ŽENSKO IME REKA V SRBIJI											
									TADEJ TOŠ NEKD. NIZ. HITROSTNI DRSALEC POSTMA							
4	ZMEČKA- NINA NA TKANINI ZAPOREDNI ČRKI					MAJHNA ODPRTINA, OKENCE SOSEDNI ČRKI										
						TRAGIČNI GRŠKI JUNAK (KRALJ)			15							
		STO KVAD- RATNIH METROV				ZAŠČITNI PROTI- KORONSKI REKVIZIT										

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišete osebni podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra** 2014, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki prejmejo **jeli knjižno nagrado**.

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



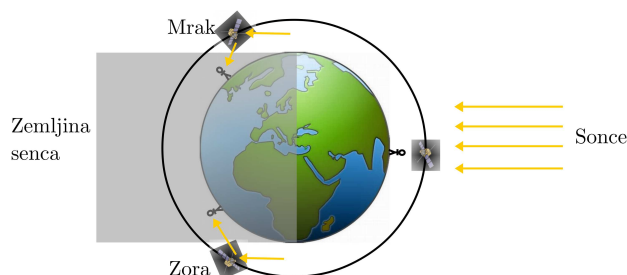
Sateliti in vidna svetloba

15

nadaljevanje
s strani

Satelit sam ni močan vir vidne svetlobe. Vidimo ga, ker odbija Sončevo svetlobo (slika 2). Medtem ko se opazovalci nahajamo v Zemljini senci, so sateliti osvetljeni, ker krožijo visoko nad površjem. Največ satelitov vidimo v mraku in zori. Višje, ko je satelit, bolj dolgo v noč ga lahko vidimo osvetljenega.

V astronomiji svetlost merimo v magnitudah. Telesa z manjšo magnitudo so svetlejša od teles z višjo magnitudo. Lestvica magnitud je logaritmčna: zvezda magnitude 1 je natanko stokrat svetlejša od zvezde magnitude 6. Magnitude lahko zavzamejo negativne vrednosti. Sonce, najsvetlejšje telo na nebu, ima tako magnitudo -27 . Najsvetlejšja zvezda na nebu, Sirij, ima magnitudo $-1,46$. S prostim očesom lahko vidimo telesa z magnitudo 6 ali manj.



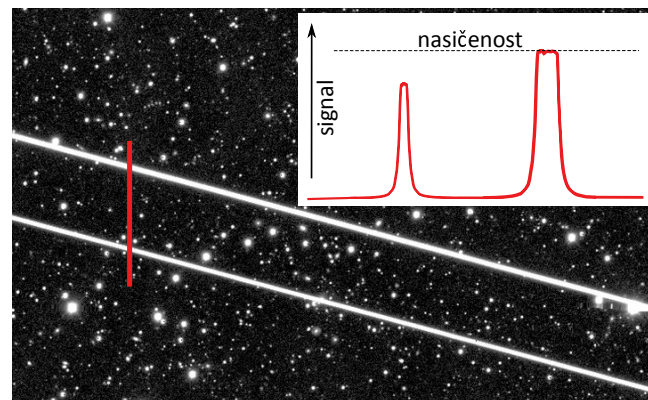
SLIKA 2.

Satelite vidimo, ker odbijajo Sončevo svetlobo.

Svetlost satelita je odvisna od velikosti površine, ki odbija svetlobo, albeda (odsevnosti) odbojnega materiala, orientacije satelita glede na Sonce in opazovalca ter oddaljenosti od opazovalca. Kmalu po izstrelitvi so sateliti zelo svetli (magnituda 1–3), nato pa njihova svetlost pada pri potovanju v končno orbito. Žal so sateliti tudi v končni orbiti izjemno svetli, mnogi vidni s prostim očesom. A tudi tisti očem nevidni so presvetli za moderne teleskope in kamere.

Ker v astronomiji opazujemo temna telesa, običajno opazujemo del neba dalj časa. Ekspozicijski časi trajajo od nekaj sekund do več deset minut. Satelit, ki se v tem času znajde v vidnem polju teleskopa in kamere, na kameri pusti svetlo sled (slika 3). Signal izredno svetle sledi je nasičen, kar pomeni, da je vsa informacija pod sledjo izgubljena. Tudi če signal ni nasičen, je sled težko popolnoma odstraniti.

Velja omeniti še dva pojava, povezana z lastnostjo kamer in načinom branja signala. V primeru nasičenega signala je pri nekaterih kamerah potrebno počakati nekaj minut, preden lahko naredimo naslednji posnetek. Svetli sateliti tako preprečijo učinkovito porabo dragocenega časa na teleskopu. Svetla sled lahko onesnaži tudi dele kamere, ki so daleč stran od sledi. Gre za komaj zaznaven, a v primeru natančnih opazovanj pomemben pojav. Če je namen opazovanja natančna študija zelo temnih objektov, je posnetek praktično brez vrednosti. Ni presenečenje, da so največja žrtev satelitov veliki teleskopi z občutljivimi kamerami in velikim vidnim poljem.



SLIKA 3.

Primer sledi dveh satelitov na astronomskem posnetku. Vložen graf prikazuje signal na kameri vzdolž rdeče navpične črte.

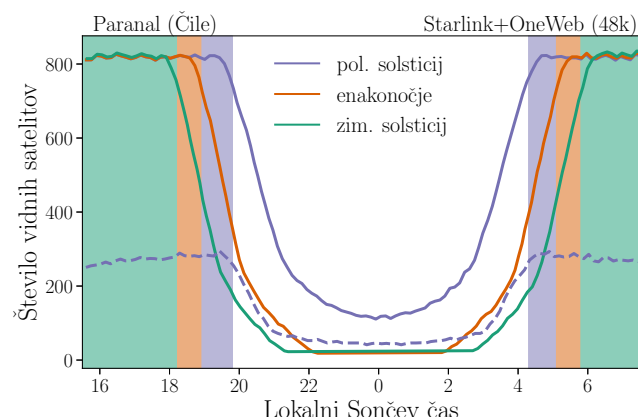
Odvisno od materiala in položaja satelita se lahko svetloba odbije na različne načine. Do sedaj smo govorili o difuznem odboju, kjer se Sončeva svetloba od satelita odbije v vse smeri. V posebnih primerih pa je lahko odboj svetlobe usmerjen. Če je usmerjen proti opazovalcu, ta vidi svetel blišč, ki lahko brez večjih težav doseže negativne magnitude. Tak blišč je še posebej nevaren za občutljive kamere. Po bliščih so znani telekomunikacijski sateliti Iridium, priljubljene tarče ljubiteljskih astronomov. Ni jasno, koliko bliščev bodo ustvarile nove konstelacije in kolikšen problem bodo predstavljali za astronomijo.

Koliko satelitov bo vidnih ponoči?

Čeprav ne poznamo natančnih podatkov o satelitih in njihovih orbitah, lahko vseeno naredimo statistič-

no analizo in dobimo občutek o tem, koliko satelitov lahko pričakujemo osvetljenih na nočnem nebu. Število bo odvisno od velikosti konstelacije, položaja observatorija na Zemlji in letnega časa. Satelit je viden z določene točke na Zemlji, če je nad obzorjem in osvetljen s Soncem. Le manjši del konstelacije je v vsakem trenutku nad obzorjem. Poleg tega je običajno nemogoče videti objekte, ki se nahajajo manj kot deset stopinj nad obzorjem (profesionalni observatoriji redko opazujejo pod dvajsetimi stopinjami). Tudi višina vpliva na vidnost. Višje ko je satelit, dalj časa ostane nad obzorjem. Ker satelite osvetljuje Sonce, je število osvetljenih satelitov odvisno tudi od višine Sonca. Ko je Sonce na obzorju, so osvetljeni vsi sateliti. Bolj ko je Sonce pod obzorjem, manj satelitov je osvetljenih.

Na sliki 4 so prikazani rezultati simulacije, ki jo je pripravil Olivier Hainaut². Slika prikazuje spreminjanje



SLIKA 4.

Simulacija števila vidnih satelitov za opazovalca na observatoriju Paranal v Čilu. Barve označujejo opazovanja v treh različnih obdobjih. Rob osenčenega dela označuje trenutek, ko je Sonce 12 stopinj pod obzorjem (takrat se pričnejo prva opazovanja). Črtna črta prikazuje število satelitov, ki so ob poletnem solsticiju vidni s prostim očesom. Simulacija je bila narejena za primer satelitov konstelacij Starlink in OneWeb, kar skupaj znaša 48000 satelitov v različnih orbitah (glej sliko 1). Prikazani so samo sateliti, ki se nahajajo več kot deset stopinj nad obzorjem. Za izris grafa sem uporabil rezultate simulacije, ki jo je pripravil Olivier Hainaut.

nje števila osvetljenih satelitov skozi noč. Vključeni so le sateliti, ki se nahajajo več kot deset stopinj nad obzorjem. Rezultati pokažejo, kaj pričakovati na observatoriju Paranal v Čilu v primeru, da se v orbiti nahaja 50000 novih satelitov. Predvsem v poletnih mesecih bo dobršen del satelitov viden skozi celo noč. Število satelitov, vidnih s prostim očesom, ni veliko, a tudi ne zanemarljivo. Opozoriti velja, da bodo s prostim očesom vidni predvsem pravkar izstreljeni sateliti, ki potujejo proti končni orbiti. Ker gre za tako velike konstelacije, bodo izstrelitve novih satelitov zelo pogoste. Prizor vlakca svetlih pik, premikajočega se po nebu, bo postal vedno bolj pogost. Kot rečeno, se razmere spreminjajo z zemljepisno širino. V Sloveniji, ki je bolj oddaljena od ekvatorja kot observatorij Paranal, bo poleti skozi noč pričakovati več vidnih satelitov.

Kaj te številke pomenijo za profesionalne teleskope? Vsak teleskop ima drugačne karakteristike (velikost zrcala in vidnega polja, lokacija), zato sateliti na njihove opazovalne programe različno vplivajo. Omenimo le en večji projekt, to je Observatorij Vere Rubin v Čilu. Veliki teleskop bo začel obratovati čez leto ali dve. Krasijo ga veliko zrcalo in veliko vidno polje, zato znanstvena skupnost upravičeno od teleskopa pričakuje veliko (pri projektu sodeluje tudi Univerza v Novi Gorici). Simulacije kažejo, da bo od 20–30 procentov vseh posnetkov vsebovalo sledi satelitov. Določeni opazovalni programi bodo za doseg cilja potrebovali veliko več časa od načrtovanj, kar v praksi pomeni izgubo denarja.

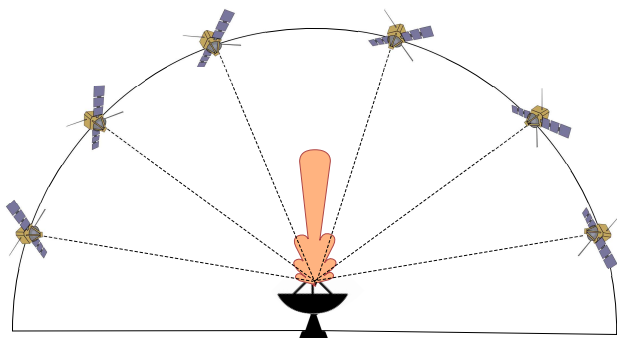
Sateliti in radijska svetloba

Radijski teleskopi lovijo radijske signale iz vesolja. Večina signalov je izredno šibkih: mobilni telefon, postavljen na Luno, bi bil eden izmed radijsko najsvetlejših teles na nebu. Lahko si predstavljate, da desetstisoče satelitov radijskim astronomom povzroča sive lase. Ker sateliti sami sevajo radijsko svetlobo, njihova svetlost ni odvisna od položaja Sonca na nebu, temveč so ves čas vidni vsi (na sliki 4 bi lahko potegnili ravno črto). Kar je še huje, v principu radijski teleskop, ne glede na to, kam je obrnjen, lahko vidi satelite na večjem delu neba nad obzorjem (slika 5).

Radijski astronomi so motečih signalov sicer navajeni. Kmalu po rojstvu radijske astronomije so astro-



²www.eso.org/~ohainaut/satellites/



SLIKA 5.

Radijski teleskop lahko radijski signal satelitov detektira v vseh smereh. Oranžni vzorec prikazuje občutljivost radijskega sprejemnika v različnih smereh neba. Teleskop je najbolj občutljiv na signale, ki prihajajo direktno iz smeri, v katero je obrnjen. Vseeno pa lahko detektira tudi signale, ki prihajajo iz drugih smeri. Sateliti prav tako ne oddajajo popolnoma usmerjenega signala, temveč sevajo (nekateri manj drugi več) v relativno širok prostorski kot.

nomi uspeli zaščititi številne frekvence radijskega spektra. Na primer, pomembna tarča radijskih astronomov so atomi vodika, ki sevajo svetlobo v bližini frekvence 1.4 GHz, zato je območje okoli te frekvence zaščiteno. V principu naj človeštvo ne bi uporabljalo tega dela spektra za oddajanje signalov. Vseeno nekateri oddajniki zaradi malomarnosti ali napak pri načrtovanju sevajo v tem delu spektra. Zaradi slabih izkušenj astronome skrbi, ker sateliti konstelacije Starlink med drugim sevajo v bližini zaščitene frekvence 10.7 GHz. Obenem je zaskrbljujoča tudi vedno večja obremenjenost radijskega spektra. V preteklosti so astronomi brez težav opazovali nebo tudi izven zaščitene delu spektra, v kolikor ta del spektra niso uporabljali vojska ali podjetja. To je med drugim pomembno za opazovanje zelo oddaljenih teles, katerih spekter je zaradi širjenja vesolja premaknjen k nižjim frekvencam. Ker pa je vedno več spektra uporabljenega za različne storitve, astronomi izgubljajo spekter in s tem možnost raziskovanja določenih teles in pojavov v vesolju.

Rešitve in širša slika

Sateliti ne bodo odšli nikamor in vedno več jih bo. Astronomi se bodo morali prilagoditi novim razme-

ram. Skupaj s podjetji in zakonodajnim telesom pa lahko močno omilijo negativne posledice. Podjetje Starlink že nekaj časa sodeluje z astronomi in poskuša potemniti svoje satelite, pri čemer je delno uspešno. Astronomi upajo, da bodo Starlinku sledila tudi druga podjetja. Predvsem si želijo, da so sateliti temnejši, se nahajajo na čim nižjih orbitah (da v vidni svetlobi ne bodo vidni celo noč), ter da podjetja z astronomi delijo natančne podatke o satelitih. Slednji omogočajo astronomom predvideti, kje na nebu bo ob določenem času najmanj satelitov ter tako temu primerno načrtovati opazovanja. Obenem astronomi razvijajo nove programske rešitve, s katerimi bi čimbolje odstranili škodljive sledi na posnetkih. Omenjajo se tudi tehnološke rešitve, kot je hitro pokritje kamere v primeru, da se vidnemu polju bližja eden ali več satelitov. Radijski astronomi si želijo, da sateliti upoštevajo t. i. radijsko tiha območja, v katerih se nahajajo večji radijski teleskopi. To pomeni, da sateliti ne bi oddajali neposredno v območje, ker bi močan signal poškodoval teleskope. Potrebno bo tudi dopolniti mednarodno zakonodajo, ki zaenkrat ne more slediti hitremu razvoju vesoljske tehnologije.

Opisane zagate s sateliti pa presega astronomijo samo. Praktično eksponentno naraščanje števila satelitov v nizki Zemljini orbiti povečuje verjetnost trkov med sateliti in kosi vesoljskih smeti. Vsak trk ustvari dodatne smeti. Čeprav vesoljske agencije aktivno poskušajo rešiti problem vesoljskih smeti, zaenkrat prave in delujoče rešitve še ni. Za vse bi bilo bolje, če bi se izstreljevanje satelitov za krajši čas ustavilo ali vsaj upočasnilo, kar bi vsem udeležencem dalo potreben čas za rešitev problema. A to se najverjetneje ne bo zgodilo. Lahko le upamo, da nas kletka, ki si jo gradimo okoli našega planeta, kmalu povsem ne odreže od preostalega vesolja.

Nekaj podrobnih zgledov

Za boljše razumevanje opisanega problema si podrobneje pogledjmo nekaj računskih zgledov.

Sledi satelitov

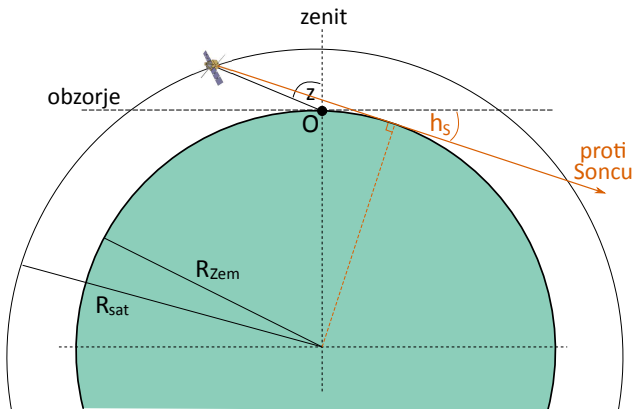
Kako svetla je sled satelita? Recimo, da naredimo ekspozicijo dela neba. Posamezna zvezda med ekspozicijo vedno pošilja fotone na isti del kamere. Satelit pa se med ekspozicijo premika preko vidnega

polja, zato v istem času svoje fotone porazporedi po večjem delu kamere. Tudi če sta zvezda in satelit enako svetla, bo sled satelita temnejša. To lahko zapišemo s sledečo enačbo. Naj bo t_{sat} čas, v katerem satelit prečka en ločljivostni element CCD kamere. Efektivna magnituda satelita magnitude m_{sat} je enaka

$$m_{\text{eff}} = m_{\text{sat}} - 2,5 \log \left(\frac{t_{\text{sat}}}{t} \right).$$

Kotna hitrost satelita se spreminja z višino njegove orbite. To ima zanimive posledice za svetlost sledi. Bolj oddaljen satelit je temnejši ($\propto r^{-2}$). Po drugi strani pa ima tudi manjšo kotno hitrost ($\propto r^{-1,5}$). Če isti satelit prestavimo na višjo orbito, je njegova sled res temnejša, a vseeno ne pridobimo tako veliko.

Naloga 1. Satelit se nahaja v orbiti na višini 550 km nad Zemljo. V zenitu (točno nad opazovalcem) ima magnitudo 5,5. Kolikšna je efektivna magnituda tega satelita v zenitu za sistem z ločljivostnim elementom 1" ob 10 s dolgi ekspoziciji? Predpostavite, da ima Zemlja radij 6400 km, maso 6×10^{24} kg, vrednost gravitacijske konstante pa je $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. (Rešitev: $m_{\text{eff}} = 16,6$ mag.)



SLIKA 6.

Satelit kroži v orbiti na višini $R_{\text{sat}} = R_{\text{Zem}} + h$. Višino satelita nad obzorjem za opazovalca v točki O lahko izrazimo s pomočjo zenitnega kota z . Sonce, ki se nahaja h_S pod obzorjem, osvetljuje satelite.

Sateliti nad obzorjem

Koliko satelitov vidi opazovalec nad obzorjem? Naredimo preprost račun. Najprej privzemimo, da je N_{sat} satelitov enakomerno porazdeljenih okoli Zemlje. Vsi sateliti se nahajajo na višini h nad površjem (slika 6). V tem primeru je število satelitov nad obzorjem sorazmerno deležu površine sfere (ki jo definirajo orbite satelitov) nad obzorjem:

$$N = N_{\text{sat}} \frac{S_{\text{obz}}}{S_{\text{sfera}}}.$$

V matematičnem priročniku preberemo³, da je $S_{\text{sfera}} = 4\pi R_{\text{sat}}^2$ in $S_{\text{obz}} = 2\pi R_{\text{sat}} h$, torej

$$N = N_{\text{sat}} \frac{h}{2(R_{\text{Zem}} + h)}.$$

Višje ležeča konstelacija bo imela v vsakem trenutku na nebu vidnih več satelitov kot nižje ležeča (a enako velika) konstelacija.

Naloga 2. Satelitov, ki ležijo nizko na obzorju, običajno ne vidimo zaradi ovir (gore, oblaki, drevesa). Tudi brez ovir teleskopi ne opazujejo nizko nad obzorjem zaradi debele plasti Zemljine atmosfere med objektom in teleskopom. Bolj ustrezna bi bilo, če izračunamo število satelitov nad določeno višino nad obzorjem. Pokaži, da se zgornji izraz da posplošiti za poljuben zenitni kot (slika 6) z kot

$$N = \frac{N_{\text{sat}}}{2} \left(1 - \cos \left(z - \arcsin \left(\frac{R_{\text{Zem}}}{R_{\text{sat}}} \sin z \right) \right) \right).$$

Naloga 3. Sonce se nahaja pod obzorjem. Vsak trenutek ne bo moglo več osvetljevati satelitov v zenitu ($z = 0$). Koliko satelitov je osvetljenih nad obzorjem? Kako nizko pod obzorjem se nahaja Sonce? Sateliti se nahajajo na višini 550 km, Zemlja pa ima radij 6400 km. (Rešitev: polovica; $h_S = 23^\circ$)

× × ×

³mathworld.wolfram.com/Zone.html

Podatkovna struktura za disjunktne množice



DAMJAN STRNAD

→ Pri reševanju praktičnih problemov z računalniškimi algoritmi pogosto naletimo na naslednjo situacijo: dano je večje število objektov, ki jih združujemo v vedno večje množice, tako da v vsakem trenutku vsak objekt pripada natanko eni množici.

Pri tem na trenutni skupini množic pogosto izvajamo naslednji dve operaciji:

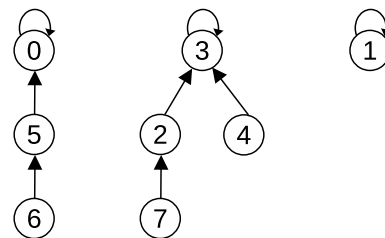
- preverjanje, ali dva objekta x in y pripadata isti množici, in
- združevanje množic, ki jima pripadata objekta x in y .

Običajno začetno stanje je takšno, da vsak objekt predstavlja samostojno množico, te pa nato zaporedoma združujemo.

Za množici, ki nimata skupnih elementov, pravimo, da sta *disjunktne* (disjoint). Objekti so torej v vsakem trenutku razporejeni v skupino disjunktne množice, katerih število se z njihovim združevanjem samo manjša. Z naivno implementacijo disjunktne množice lahko dosežemo hitro izvajanje ene od operacij, ne pa obeh hkrati. Če npr. disjunktne množice predstavimo s seznama elementov, bo združevanje množic hitro, za preverjanje pripadnosti elementov isti množici pa bomo morali izvesti pregled seznama in pri tem v splošnem opraviti reda N primerjav, kjer je N število elementov. Po drugi strani bi bila implementacija s poljem, v katerem hranimo oznake množic za posamezne elemente, neučinkovita pri združevanju množic, kjer bi morali posodo-

biti reda N oznak v polju. Potrebujemo torej boljšo rešitev. V tem prispevku bomo opisali implementacijo *podatkovne strukture za disjunktne množice* (disjoint-set data structure), ki omogoča učinkovito izvajanje zaporedja prej opisanih operacij. Ker to dosežemo z implementacijo dveh metod, imenovanih IŠČI (FIND) in UNIJA (UNION), to podatkovno strukturo v literaturi pogosto imenujejo tudi *podatkovna struktura UNIJA-IŠČI* (union-find data structure).

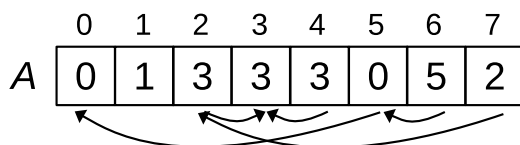
Pri implementaciji podatkovne strukture za disjunktne množice je vsaka množica predstavljena kot drevo, v katerem so elementi množice hierarhično povezani preko kazalcev na starše, pri čemer koren drevesa kaže sam nase. Kot primer vzemimo množico objektov, ki so označeni s celimi števili od 0 do 7. Če so ti objekti razdeljeni v tri disjunktne množice $\{0, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 7\}$ in $\{1\}$, lahko to grafično ponazorimo s sliko 1. Oblika posameznih dreves je lahko tudi drugačna in je odvisna od tega, v kakem vrstnem redu smo množice združevali.



SLIKA 1.

Predstavitev disjunktne množice z drevesi, v katerih so elementi povezani s kazalci na starše. Reprezentativni element množice je koren, ki kaže sam nase.

V podatkovni strukturi za disjunktne množice je vsaka množica enolično določena z njenim *reprezentativnim elementom*, ki je v tem primeru koren drevesa. V nadaljevanju bomo zato za reprezentativni element množice uporabljali kar krajši izraz *koren* (root). Pripadnost dveh objektov isti množici lahko ugotavljamo s preverjanjem enakosti njunih korenov, pri združevanju dveh množic pa koren unije postane eden od dosedanjih dveh korenov. Podatkovna struktura za disjunktne množice je torej neke vrste nadstruktura ali gozd dreves, ki predstavljajo posamezne disjunktne množice. Označitev objektov z zaporednimi celimi števili od 0 naprej omogoča še posebej elegantno programsko predstavitev dreves v strnjenem polju A dolžine N , v katerem i -ti element polja hrani oznako starša objekta i . Disjunktne množice s slike 1 bi lahko tako opisali s poljem na sliki 2.



SLIKA 2.

Zapis drevesnih struktur s slike 1 s poljem. Vrednost na položaju i v polju je indeks starša objekta i .

Ob inicializaciji podatkovne strukture za disjunktne množice z N objekti je potrebno ustvariti N množic, katerih koreni (in hkrati edini elementi) so posamezni objekti. Pri zgoraj opisani implementaciji s poljem A je postopek zelo enostaven, potrebno je le vsem objektom postaviti »kazalec« nase (algoritem 1).

Algoritem 1 Inicializacija disjunktne množice

```

function INICIALIZACIJA(N)
  for  $i \leftarrow 0 \dots N-1$  do
     $A[i] \leftarrow i$ 
  end for
end function

```

Ključni metodi, ki ju implementira podatkovna struktura za disjunktne množice, sta že omenjeni IŠČI in UNIJA. Metoda IŠČI kot argument prejme oznako objekta in vrne oznako korena disjunktne množice, ki ji objekt pripada. Osnovna implementacija metode je zelo preprosta, saj je potrebno le sle-

diti verigi staršev od danega objekta navzgor proti korenu. Slednjega prepoznamo po tem, da kaže sam nase. Postopek je v obliki rekurzivne funkcije zapisan v algoritmu 2, možna pa je tudi iterativna implementacija z enako časovno zahtevnostjo, ki zaporedje prednikov hrani na skladu.

Algoritem 2 Osnovna metoda IŠČI

```

function IŠČI( $x$ )
  if  $A[x]=x$  then
    return  $x$ 
  else
    return IŠČI( $A[x]$ )
  end if
end function

```

Problem zgornjega postopka je v tem, da bomo ob naslednjem klicu IŠČI z istim argumentom spet morali prehoditi isto zaporedje kazalcev, kar postane ob velikem številu ponavljajočih se klicev neučinkovito. Podatkovna struktura za disjunktne množice zato uporabi t. i. *stiskanje poti* (path compression), pri katerem ob vračanju iz rekurzije vsem objektom na poti postavimo kazalec na starša na najdeni koren množice, kot prikazuje algoritem 3.

Algoritem 3 Metoda IŠČI s stiskanjem poti

```

1: function IŠČI( $x$ )
2:   if  $A[x]=x$  then
3:     return  $x$ 
4:   else
5:      $A[x] \leftarrow$  IŠČI( $A[x]$ )
6:     return  $A[x]$ 
7:   end if
8: end function

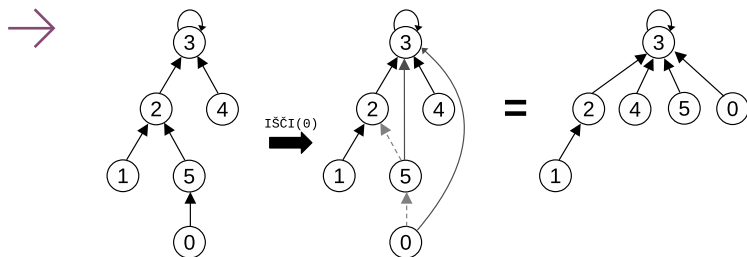
```

Princip delovanja stiskanja poti prikažimo na zgledu disjunktne množice na levi strani slike 3. Po izvedbi klica IŠČI(0) bo novo stanje drevesa in pripadajočega polja takšno, kot je prikazano na desni strani slike. Vsak naslednji klic IŠČI(0) ali IŠČI(5) se bo sedaj zaključil v enem koraku.

S tako definirano metodo IŠČI lahko preverjanje, ali objekta x in y pripadata isti disjunktne množici, izvedemo s primerjavo IŠČI(x)=IŠČI(y).

Druga ključna operacija na podatkovni strukturi za disjunktne množice je združevanje ali unija dveh množic. Metoda UNIJA kot argument prejme dva





SLIKA 3.

Stiskanje poti pri klicu $I\check{S}\check{C}I(0)$ poveže vse elemente prehojene verige neposredno s korenem množice, zaradi česar bodo naslednji klici $I\check{S}\check{C}I$ bolj učinkoviti.

objekta in izvede združevanje disjunktnih množic, ki jima ta objekta pripadata. Če objekta že pripadata isti disjunktni množici, se ne zgodi nič. V nasprotnem primeru je potrebno povezati drevesi obeh množic tako, da koren ene množice priključimo kot naslednika korenu druge množice, ki s tem postane koren celotne unije. Združevanje dveh dreves si želimo izvesti tako, da bo imelo drevo unije čim manjšo višino, saj bo povprečna dolžina poti v takšnem drevesu manjša in bo iskanje korena zato učinkovitejše. Kadar torej združujemo dve drevesi različnih višin, je potrebno nižje drevo priključiti višjemu, katerega višina se zaradi tega ne spremeni (slika 4 levo). Če pa združujemo dve drevesi enake višine, je smer priključevanja nepomembna, višina združenega drevesa pa bo za ena večja (slika 4 desno).

Za učinkovito implementacijo unije je torej potrebno voditi višine dreves. Ker pa se višina drevesa zaradi stiskanja poti lahko spremeni tudi ob izvajanju klicev $I\check{S}\check{C}I$, je beleženje in posodabljanje točne višine dreves nepraktično. V podatkovni strukturi za disjunktno množico zato vodimo samo *range* (rank) posameznih dreves. Rang drevesa je zgornja meja višine drevesa, ki ne odraža nujno njegove dejanske višine, ampak samo njeno največjo možno vrednost. Pri združevanju množic priključimo množico z nižjim rangom tisti z višjim rangom, kar imenujemo *unija po rangi* (union by rank). Za beleženje rangov uporabimo ločeno polje R , v katerem so veljavni rangi zapisani samo pri objekti, ki so koreni svojih disjunktnih množic (algoritem 4). Začetne vrednosti vseh rangov pri inicializaciji podatkovne strukture za disjunktno množico (algoritem 1) postavimo na 0.

Algoritem 4 Unija po rangi

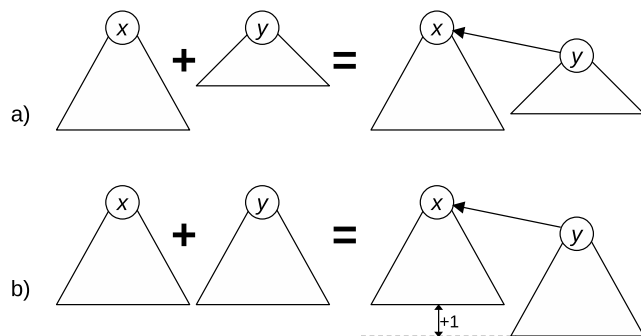
```

1: function UNIJA(x,y)
2:   a ← IŠČI(x)
3:   b ← IŠČI(y)
4:   if a≠b then
5:     if R[a] ≥ R[b] then
6:       A[b] ← a
7:     if R[a] = R[b] then
8:       R[a] = R[a] + 1
9:     end if
10:  else
11:    A[a] ← b
12:  end if
13: end if
14: end function

```

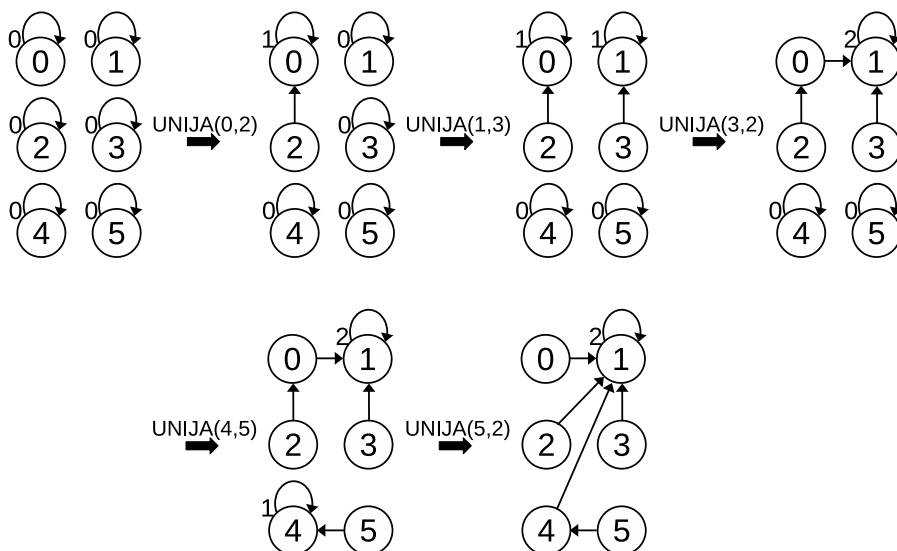
Zgled zaporednega združevanja disjunktnih množic je prikazan na sliki 5, pri čemer so rangi posameznih množic zapisani ob korenskem vozlišču.

V praktičnih aplikacijah običajno želimo za posamezne disjunktno množice voditi še dodatne opisne parametre, kot je npr. število objektov v množici. Tudi sami objekti imajo lahko lastne številske attribute, ki jih želimo pri združevanju množic na določen način zlivati (npr. vsota ali povprečje vrednosti atributa elementov množice). Vsako od teh statistik lahko beležimo z ločenim dodatnim poljem, v katerem trenutno vrednost za vsako množico hranimo na indeksu njenega korena (na podoben način kot



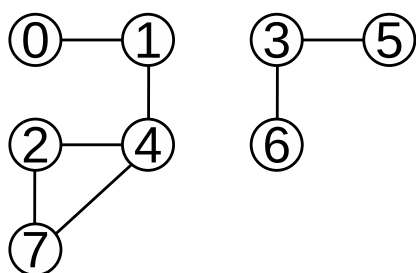
SLIKA 4.

Pri združevanju disjunktnih množic v primeru različno visokih dreves manjše drevo priključimo večjemu, zato da višina drevesa ostane enaka (a). V primeru enako visokih dreves je smer povezovanja nepomembna, višina združenega drevesa pa se poveča za ena (b).



SLIKA 5.

Primer zaporednega izvajanja unije po rangi. V zadnjem koraku se pri iskanju korena disjunktno množice za objekt 2 izvede tudi stiskanje poti. Bodimo pozorni na to, da je vrstni red argumentov klica UNIJA pomemben, ko združujemo drevesa z enakim rangom (npr. klic UNIJA(2,3) v tretjem koraku bi tvoril drugačno drevo).



SLIKA 6.

Predstavitev stikov (povezave) med osebami (vozlišča) z grafom. Vsak povezan del grafa predstavlja neodvisen mehurček.

prej rang v polju R). Včasih pa nas tudi zanima samo število disjunktnih množic na koncu, kar je prav tako enostavno ugotoviti – po zaključku združevanja se sprehodimo skozi polje A in preštejemo primere, ko je $A[i] = i$.

Najbolj znan primer aplikacije podatkovne strukture za disjunktne množice je vodenje minimalnih vpetih dreves pri Kruskalovem algoritmu, o katerem je bilo v Preseku v preteklosti že pisano. Našo obravnavo zato zaključimo z naslednjim, za trenutne čase precej aktualnim primerom: V populaciji N oseb razsaja prenosljiva virusna bolezen, ki pa jo oboleli preboli v sedmih dneh. Ker se testiranje še ni začelo, se

ne ve, kdo je okužen, imamo pa podatke o tem, kdo je bil s kom v stiku v zadnjih sedmih dneh. Da preprečimo nadaljnje širjenje bolezni, želimo oblikovati

1. po inicializaciji:

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	0	0	0	0	0	0
C	1	1	1	1	1	1	1	1

5. po obravnavi (2,7):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	3	0	5	6	0
R	1	0	0	0	0	0	0	0
C	5	1	1	1	1	1	1	1

2. po obravnavi (0,1):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	2	3	4	5	6	7
R	1	0	0	0	0	0	0	0
C	2	1	1	1	1	1	1	1

6. po obravnavi (3,5):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	3	0	3	6	0
R	1	0	0	1	0	0	0	0
C	5	1	1	2	1	1	1	1

3. po obravnavi (1,4):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	2	3	0	5	6	7
R	1	0	0	0	0	0	0	0
C	3	1	1	1	1	1	1	1

7. po obravnavi (3,6):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	3	0	3	3	0
R	1	0	0	1	0	0	0	0
C	5	1	1	3	1	1	1	1

4. po obravnavi (2,4):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	3	0	5	6	7
R	1	0	0	0	0	0	0	0
C	4	1	1	1	1	1	1	1

8. po obravnavi (4,7):

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	3	0	3	3	0
R	1	0	0	1	0	0	0	0
C	5	1	1	3	1	1	1	1

SLIKA 7.

Postopek reševanja problema z mehurčki





»mehurčke«, tj. skupine oseb, ki so bile v omenjenem času v neposrednem ali posrednem stiku. Vsak stik je podan kot par oseb (x, y) , ki sta bili v stiku. Zaradi zaščite osebnih podatkov so osebe označene s števili od 0 do $N - 1$. Zanima nas število mehurčkov in velikost največjega mehurčka.

Kot zgled podajmo primer z osmimi osebami, od katerih so bili v zadnjem tednu v stiku pari $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$ in $(4, 7)$. Če osebe narišemo kot vozlišča grafa, stike pa kot povezave med njimi, dobimo graf iz dveh ločenih delov (t. i. povezani komponenti) na sliki 6, ki v tem primeru predstavljata iskana mehurčka $\{0, 1, 2, 4, 7\}$ in $\{3, 5, 6\}$.

Problem lahko rešimo, če mehurčke obravnavamo kot disjunktne množice. Postopek reševanja prikazuje slika 7.

Na začetku je vsaka oseba v lastnem mehurčku, vsak ugotovljeni stik pa predstavlja možen prenos okužbe, zato je potrebno mehurčka oseb v stiku združiti (razen če sta že v istem mehurčku). V zanki zato obravnavamo zgoraj naštetih stike in za vsak

stik (x, y) izvedemo klic $\text{UNION}(x, y)$. Število oseb v mehurčku vodimo pri korenu pripadajoče disjunktne množice, pri združevanju pa seštejemo vrednosti pri korenih obeh množic. Na sliki 7 so prikazane vsebine polj A (indeksi staršev), R (rangi) in C (velikosti disjunktne množice). Po zaključku postopka lahko ugotovimo, da sta osebi 0 in 3 korena dveh preostalih mehurčkov, od katerih je večji prvi ($C[0] = 5$).

Literatura

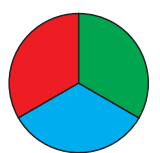
- [1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3. izdaja, The MIT Press, 2009.

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.obzornik.si

× × ×





1	F	R	E	S	N	E	L
2	R	A	D	I	A	N	T
3	A	Z	I	J	K	A	
4	K	M					
5	T	E	S	N	O	B	A
6	B	A	R	V	E	A	V



7	B	O	B	E	R
8	I	Z	I	D	A
9	C	E	N	I	K
10	E	L	O	N	
11	S	P	O	M	I



12	A	L	J	O	Š	A	S	K	E	L	E	T	O	N	Z	A	D	O	V	O	L	J	S	T	V	O						
13	V	A	K	S	E	L	J	E	R	T	L	E	R	M	I	T	A	Ž	R	D	P	O	L	I	A	K	R	I	L			
14	A	D	I	A	B	A	T	A	N	E	T	S	C	A	P	E	B	I	B	L	I	O	F	I	L	T	R	G	A	N	K	A
15	T	O	L	T	E	K	O	L	I	V	E	R	N	J	E	R	V	A	N	A	S	V	A	R	O	G	A	N	N	U	F	
16	E	L	A	N	A	B	R	E	K	N	J	E	N	J	E	P	O	S	A	K	A	C	V	E	T	K	A	E	D	E	N	
17	R	E	Ž	A	J	A	T																									
18	P	S	A	L	M																											
19	O	C	V	A	I	L	D	A	T	U	M	H	O																			
20	L	E	V	E	R	K																										
21	I	N	D	O	N	E	Z	I	J	A	B	R	V	A	R	A	B	E	R	A	C	I	J	A	Č	A						
22	S	C	O	L	A	O	L	A	J	S	A	V	A	M	E	H	A	N	I	K												
23	T	A	R	A	U	N	A	A	Z	N	A	R	A	J	D	A	Z	I	A	K	C	E	N	T								

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 48/6

→ Pravilna rešitev nagraadne križanke iz šeste številke Preseka letnika 48 je **Butalci**. Izmed pravih rešitev so bili izžrebani MARKO KUBALE iz Rogaške Slatine, ANŽE MIHELČIČ iz Kresnic in MANJA FERME iz Celja, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Mnogokotniška števila



BOŠTJAN KUZMAN

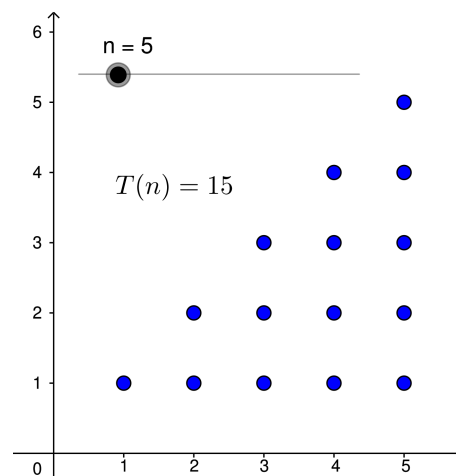
→ **Mnogokotniška števila** dobimo z razporejanjem enakih krožcev v obliko pravih mnogokotnikov. Lastnosti takih števil so starodavne civilizacije občudovale še pred odkritjem pisave in zahtevnejših matematičnih postopkov, mi pa si bomo ogledali, kako jih narisati s pomočjo programa GeoGebra.

Trikotniška števila

Najpreprostejša mnogokotniška števila so trikotniška. Za n -to trikotniško število $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ potrebujemo trikotnik z n stolpci (ali vrsticami), v katerem ima vsak naslednji stolpec en krožec več kot prejšnji. Z uporabo dvojnih zaporedij lahko trikotniška števila v GeoGebri narišemo z le enovrstičnim ukazom. Namesto krožcev bomo risali kar točke in jih nato nekoliko odebelili z orodji za obliko. Najprej ustvarimo drsnik z imenom n , ki naj bo celo število med 1 in 10. Nato ustvarimo zaporedje $j = 1, \dots, n$ stolpcev, v katerem j -ti stolpec predstavlja zaporedje $k = 1, \dots, j$ točk tako, da uporabimo ukaz `Zaporedje(Zaporedje((j,k),k,1,j),j,1,n)` (glej sliko 1).

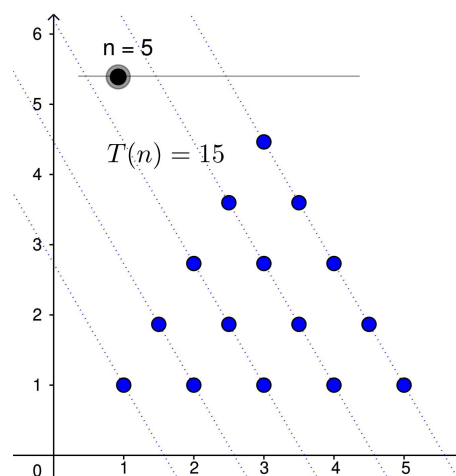
Da bodo točke zares predstavljale pravilni oziroma enakostranični trikotnik, pa jih moramo še nekoliko zamakniti. Predstavljajmo si, da točke v j -tem stolpcu ležijo na premici skozi točko $(j, 1)$ z enotskim smernim vektorjem $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, kar ustreza desni stranici enakostraničnega trikotnika z vodoravno osnovnico. Ustrezno razporeditev dobimo z ukazom `Zaporedje(Zaporedje((j,1)+(k-1)*(-1/2,sqrt(3)/2),k,1,j),j,1,n)` (glej sliko 2).

S premikanjem drsnika lahko zdaj prikažemo različna trikotniška števila, dodatno pa lahko z orodjem za besedilo na zaslon izpišemo tudi ustrezno vrednost $T(n)$.



SLIKA 1.

`Zaporedje(Zaporedje((j,k),k,1,j),j,1,n)`

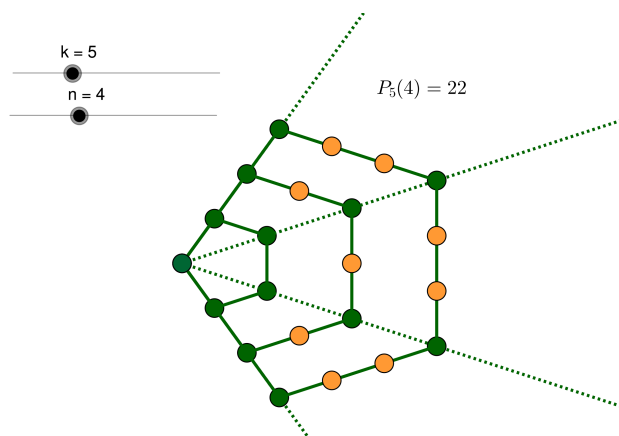


SLIKA 2.

`Zaporedje(Zaporedje((j,1)+(k-1)*(-1/2,sqrt(3)/2),k,1,j),j,1,n)`

Splošna k -kotniška števila

Splošna mnogokotniška števila dobimo z dodajanjem krožcev v pravilni k -kotnik, tako da v n -tem koraku na vsaki stranici leži en krožec več kot prej. Z nekaj truda bi lahko izpeljali znano formulo za izračun n -tega k -kotniškega števila $P_k(n) = \frac{n}{2}((k-2)(n-1) + 2)$, a se bomo raje posvetili potrebnim korakom za izdelavo prikaza mnogokotniških števil z dvema drsnikoma v GeoGebri.



SLIKA 3.

Možnih je seveda več načinov, sam pa predlagam uporabo polarnih koordinat: ukaz (r;a) v GeoGebri nariše točko, ki je za razdaljo r oddaljena od koordinatnega izhodišča, premica skozi to točko in izhodišče pa z osjo x oklepa kot a . Oglišča pravilnega petkotnika s središčem v točki $(0,0)$ lahko zato narišemo z ukazom $\text{Zaporedje}((1;2\pi*j/5),j,0,4)$, ki razdeli kot 2π na pet enakih delov in označi ustrezne točke na enotski krožnici.

Mnogokotniška števila zdaj narišemo z naslednjimi koraki:

- Izdelamo drsnika za k in n ter označimo točko $(0,0)$.
- Izdelamo zaporedje n naraščajočih k -kotnikov s skupnim krajiščem v točki $(0,0)$. Oglišča posameznega k -kotnika pri tem narišemo z uporabo polarnih koordinat in delitvijo kroga na k delov,

denimo $\text{Zaporedje}((1;2\pi*j/k),j,0,k-1)$. Z uporabo dvojnega zaporedja pa narišemo zaporedje k -kotnikov tako, da v vsakem koraku nekoliko povečamo radij in premaknemo središče. V moji rešitvi raste radij od 1 do n , središče pa se pomika v desno od $(1,0)$ do $(n,0)$. S tem smo dobili točke, ki so na sliki zelene:

$\text{Zaporedje}(\text{Zaporedje}((i,0)+(i;2\pi*j/k+\pi),j,0,k-1),i,1,n-1)$

- Če želimo narisati tudi stranice mnogokotnikov, lahko posebej dodamo še ustrezno zaporedje daljic, ki povezujejo dve zaporedni točki od prej:

$\text{Zaporedje}(\text{Zaporedje}(\text{Daljica}((i,0)+(i;2\pi*j/k+\pi),i,0)+(i;2\pi*(j+1)/k+\pi)),j,0,k-1),i,1,n-1)$

Ukaz, s katerim so na sliki narisane zeleno črtkane nosilke oglišč, pa prepustimo bralcu.

- Narisali smo mnogokotnike, a dodati je potrebno še delitvene točke na notranjih stranicah j -tega k -kotnika. Delitvene točke neke daljice AB lahko določimo s pomočjo vektorske enačbe premice $A + s(B - A)$, kjer parameter s zavzame ustrezne vrednosti med 0 in 1. Ukaz $\text{Zaporedje}((0,0)+s*(1,1)/5,s,1,4)$ bi na primer razdelil daljico od $(0,0)$ do $(1,1)$ na pet enakih delov in vrnil štiri notranje delitvene točke. Če to idejo uporabimo za točke, ki predstavljajo krajišča notranjih daljic mnogokotnikov, bomo s tem dodali še manjkajoče točke, ki so na sliki oranžne:

$\text{Zaporedje}(\text{Zaporedje}(\text{Zaporedje}((i,0)+(i;\pi+2\pi*j/k)+s*((i;\pi+2\pi*(j+1)/k)-(i;\pi+2\pi*j/k))/i,s,1,i-1),j,1,k-2),i,1,n-1)$

- V zadnjem koraku lahko vse skupaj še nekoliko grafično dodelamo in s pomočjo formule za $P_k(n)$ tudi izpišemo željeno vrednost na zaslon.

Tako izdelano ponazoritev mnogokotniških števil si lahko bralci ogledajo na spletnem naslovu www.geogebra.org/classic/ukkzg4ps.

× × ×

www.dmfa.si

Rentgensko slikanje



BARBARA ROVŠEK

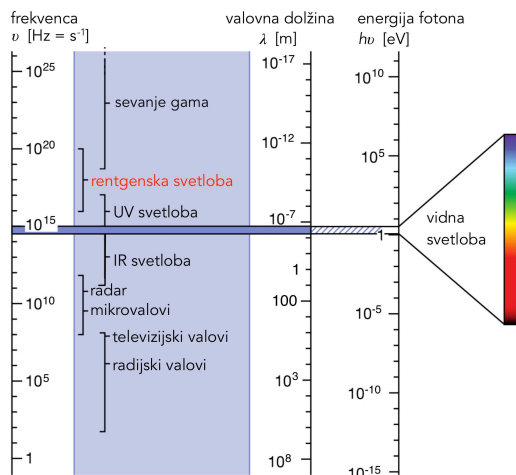
→ V življenju se zgodi, da človek pade in si zlomi nogo ali roko. Ker se zlomov kosti skozi kožo ne vidi ali se jih ne sluti dovolj natančno, pošlje zdravnik pacienta na rentgensko slikanje. Potem, ko si zdravnik sliko ogleda, lahko odredi nadaljnje potrebne ukrepe, da se zlom pozdravi. V nadaljevanju bomo povedali, kaj je rentgenska svetloba, kako nastane, kaj je rentgensko slikanje in kaj prikazuje slika na naslovnici.

Rentgenska svetloba je elektromagnetno valovanje (EMV), kamor sodijo tudi vidna, ultravijolična (UV) in infrardeča (IR) svetloba, mikrovalovi (v pečici, za brezžično komunikacijo, astronomiji), radijski valovi in sevanje gama. Vsa ta valovanja potujejo skozi prazen prostor z isto hitrostjo $c_0 = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Med seboj se razlikujejo po valovni dolžini λ oziroma frekvenci ν^4 oziroma energiji fotonov E_ν^5 , s katerimi si s snovjo izmenjujejo energijo. Valovna dolžina rentgenske svetlobe je v območju med 10^{-11} m in 10^{-8} m (oziroma 0,01 nm in 10 nm), energija fotonov pa med 124 eV⁶ in 124 keV. Manjša kot je va-

⁴Med parametri, s katerimi opišemo vsako valovanje, so hitrost valovanja c , valovna dolžina λ in frekvenca valovanja ν . Te tri količine povezuje zveza $c = \lambda \cdot \nu$.

⁵Foton si lahko predstavljamo kot paket energije, ki ga svetloba izmenja s snovjo (ko ne potuje več po praznem prostoru, ampak osvetljuje predmete, ki so iz snovi). Energija fotona je prenosorazmerna s frekvenco svetlobe, $E_\nu = h \cdot \nu$. Sorazmerno-stna konstanta je Planckova konstanta h , ki je pomembna konstanta v atomski, jedrski in fiziki osnovnih delcev. Njena vrednost je $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js

⁶Enota eV je *elektronvolt* in je majhna enota za energijo, primerna za uporabo v atomski in jedrski fiziki. V kombinaciji eV pomeni e kar osnovni naboj (z enoto As vred), $e = e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As. Za 1 eV se poveča kinetična energija nabitega delca z nabojem $e = \pm e_0$, ki ga pospeši napetost 1 V, za 1 keV pa, ko ga pospeši napetost 1 kV = 1000 V. Velja 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J.



© Encyclopædia Britannica, Inc.

SLIKA 1.

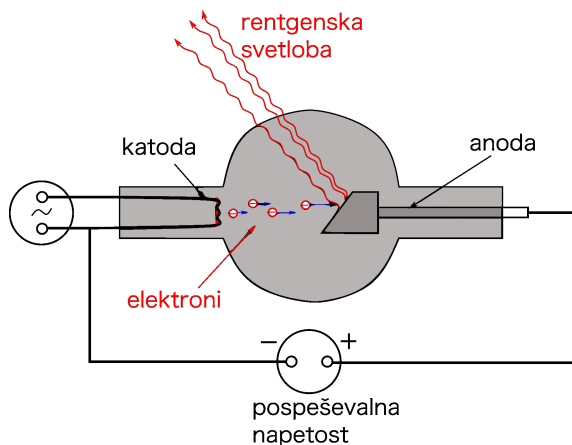
Spekter elektromagnetnega valovanja: različne vrste EMV, kot so urejene po valovni dolžini, frekvenci in energiji fotonov (prirejeno po: Encyclopædia Britannica, www.britannica.com/science/electromagnetic-spectrum#/media/1/183297/106806)

lovna dolžina svetlobe, višja je njena frekvenca in večja je energija njenih fotonov. Spekter EMV – območja valovnih dolžin, frekvenc in energij fotonov – prikazuje slika 1.

Rentgenska svetloba je dobila ime po svojem odkritelju, nemškem fiziku Wilhelmu Conradu Röntgenu, ki je o njej poročal leta 1895. Wilhelm Conrad je sicer ni poimenoval po sebi; ker je bila do odkritja nepoznana, jo je sam imenoval X-žarki (angl.: X-rays).

Obstajata dva glavna mehanizma, po katerih v katodni cevi, ki jo prikazuje slika 2, nastane rentgenska svetloba: **zavorno sevanje** in **karakteristično sevanje**. Zavorno sevanje oddajajo elektroni, ki jih do velike hitrosti (in velike kinetične energije, ki je primerljiva z energijo fotonov rentgenske svetlobe) najprej pospeši visoka napetost (oziroma električno polje) med katodo in anodo v katodni cevi, potem pa se jim ob trku z anodo med gibanjem v anodi in v električnem polju jeder atomov, ki gradijo anodo, hitrost in kinetična energija na zelo kratki razdalji močno zmanjšata (se tam zavrejo, ustavljajo); in medtem zavorno sevajo. Pri tem posamezni elektron odda foton rentgenske svetlobe, ki je z energijo omejen navzgor: največja energija fotona, ki ga lahko odda

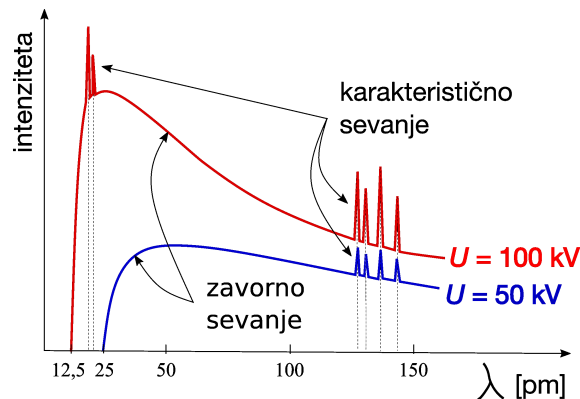



SLIKA 2.

Katodna cev: v stekleni cevi, v kateri je vakuum, sta elektrodi, med katerima je visoka napetost. Katoda, ki jo greje izmenični električni tok, da z nje izhlapevajo elektroni, je negativna, pozitivna pa je anoda iz kovine (volfram, molibden). Elektrone proti anodi pospeši visoka pospeševalna napetost. Ko se elektroni zaletijo v anodo, sevajo oni (zavorno sevanje) ali atomi kovine, iz katere je anoda (karakteristično sevanje).

hitri elektron ob trku z anodo, je enaka njegovi celotni kinetični energiji pred trkom. Fotoni z največjo energijo imajo najkrajšo valovno dolžino, ki ji rečemo kratkovalovna meja spektra rentgenskega sevanja λ_m . Večina fotonov zavornega sevanja pa ima energijo, manjšo od največje mogoče (in valovno dolžino daljšo od λ_m), ker se večina elektronov po tem, ko se zaletijo v anodo, svoje celotne kinetične energije ne znebi v enem zamahu. In znebijo se je lahko še na druge načine, ne le tako, da oddajo foton(e) zavornega sevanja. Porazdelitev fotonov zavornega sevanja po energiji (ali frekvenci), ki jo imajo, imenujemo spekter zavornega sevanja. Spekter zavornega sevanja je zvezen in ga prikazuje slika 3.

V katodni cevi nastanejo fotoni rentgenske svetlobe še na drug način. Ko hitri elektron trči ob anodo (ki je seveda sestavljena iz atomov), ima dovolj energije, da včasih iz posameznega atoma v anodi izbije katerega od notranjih (nevalenčnih) elektronov. Nastali ion ima v nižjeenergijskih elektronskih stanjih (mestih v notranjih orbitalah) vrzel, ki jo kmalu zasede kateri od njegovih višjeenergijskih in od jedra atoma bolj oddaljenih elektronov. Ko se tak elektron seli iz bolj zunanje orbitale v nezasedeno


SLIKA 3.

Spekter rentgenske svetlobe, ki jo oddaja katodna cev. Gladka (zvezna) krivulja ustreza zavornemu sevanju, zobci na krivulji pa karakterističnemu sevanju volframove anode. Ko elektrone v cevi pospeši večja napetost (rdeča krivulja), je najkrajša valovna dolžina pri zavornem sevanju ($\lambda_m = 12,5 \text{ pm} = 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$) krajša od najkrajše valovne dolžine pri manjši napetosti (modra krivulja, $\lambda_m = 25 \text{ pm} = 25 \cdot 10^{-12} \text{ m}$).

stanje v bolj notranji orbitali, se odvečne energije znebi v obliki fotona karakterističnega rentgenskega sevanja. Zakaj karakterističnega? Ker so energije elektronskih stanj odvisne od snovi, iz katere je tarča (del anode, v katerega se zaletavajo hitri elektroni) in so zato za to snov značilne tudi razlike med energijami teh stanj. Razlika med energijama dveh stanj pa je enaka energiji (karakterističnega) fotona, ki ga izseva (ali absorbira, če selitev elektrona poteka v drugi smeri), elektron, ki se seli med tema stanjema. Ker je elektronskih stanj v atomu končno mnogo, je tudi energij teh stanj končno mnogo, in končno mnogo je tudi razlik med energijami teh stanj. Karakteristično sevanje ima zato črtast (zobčast) spekter. In zakaj rentgenskega? Ker so razlike med energijami elektronskih stanj v območju energij, ki jih imajo fotoni rentgenske svetlobe.

Rentgenske cevi sevajo na oba načina, zavorno in karakteristično. Primer celotnega spektra sevanja za anodo iz volframa prikazuje slika 4.

Rentgensko slikanje je medicinska diagnostična metoda, pri kateri del človeka osvetlijo, obsevajo, z rentgensko svetlobo, ki jo oddaja katodna cev v obsevalni napravi. Vidna svetloba ne gre skozi človeka, rentgenska pa. Na drugo stran namestijo film (v mo-

dernih časih pa CCD/CMOS/NMOS senzorje). Svetlobo, ki gre skozi človeka, zazna film (ali drugačen senzor).

Rentgenska svetloba skozi človeka ne potuje neovirano; človeška tkiva film (ali senzor) pred rentgensko svetlobo nekoliko zasenčijo. Rentgenska svetloba se namreč v tkivih delno vpije ali absorbira⁷, a ne v vseh tkivih enako. Za vsako diagnostično metodo je bistveno, da se to, kar se v telesu s svetlobo (ali z ultrazvokom ali s pozitroni ali z magnetnim poljem) zgodi, v različnih tkivih zgodi različno. Rentgenska svetloba se najbolj vpija v kalciju, ki ga je največ v kosteh in zobeh. Kostni zobje zato bolje zasenčijo film kot drugo tkivo, v katerem so voda ali maščobe, to tkivo pa zasenči film bolje kot tkiva, v katerih je zrak (npr. pljuča). Ko rentgenska svetloba potuje od svojega vira skozi človeka do filma, jo različna človeška tkiva bolj ali manj zasenčijo in na rentgenski sliki lahko opazimo sence teh tkiv, ki so različno svetle – od bele do črne in vmes različne stopnje sive. Lahko vidimo, kako smo sestavljeni, ali imamo vseh 200 in še nekaj kosti in ali so cele. Ugotovimo lahko tudi, ali smo zdravi, ali imamo pljučnico. Tkivo bolnih pljuč je spremenjeno in rentgensko svetlobo na obolelih delih vpija drugače kot zdravo tkivo, kar lahko izkušen radiolog hitro opazi.

Rentgenska slika je torej senčna slika notranjosti človeka. Ali so kosti videti bele in so pljuča črna, ali pa je ravno obratno, je odvisno od tega, ali gledamo negativ ali pozitiv slike (oba sta na sliki 4). Si že opazil, da obstajajo eni in drugi?

⁷ Absorpcija rentgenske svetlobe v snovi je posledica štirih procesov, v katerih lahko svetloba odda snovi oziroma elektronu te snovi vso ali del ali nič svoje energije. Ti procesi so: elastično sipanje, neelastično (Comptonovo) sipanje, fotoefekt in tvorba parov. Pri elastičnem sipanju se rentgenski svetlobi ob interakciji z elektroni v nekem atomu spremeni smer potovanja, ne spremeni pa se energija valovanja. Pri neelastičnem (Comptonovem) sipanju svetloba (foton) odda del svoje energije nekemu valenčnemu (šibko vezanemu) elektronu v snovi, ki zato zapusti svoj atom (kot rečemo v žargonu, foton iz atoma izbije elektron), foton (ki ni več isti kot prej) pa potuje v spremenjeni smeri in z manjšo energijo kot prej. O fotoefektu govorimo, ko foton rentgenske svetlobe odda svojo celotno energijo (sebe v celoti) elektronu iz notranjih orbital atoma (močno vezanemu elektronu), ki nato zapusti svoj atom. Tvorba parov pa nastane, ko ob podpori težkega atoma foton v bližini jedra nekega atoma izgine, pri tem pa iz sebe ustvari par delcev elektron – pozitron. V kolikšni meri potekajo posamezni od teh procesov, je odvisno od snovi (vrstnega števila, ki pove nekaj o gostoti elektronov) in od energije fotonov rentgenske svetlobe.



SLIKA 4.

Pozitiv in negativ istega rentgenskega posnetka

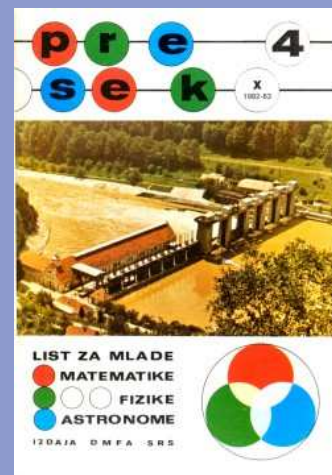
Vpogled v telo, ki ga nudi rentgensko slikanje, je nedvomno koristen. Naprave neprestano izboljšujejo in doze, ki jih prejmemo ob slikanju, so bistveno manjše kot pred desetletji. Pri enostavnem slikanju prsnega koša je doza na primer približno enaka dozi, ki jo prejmemo iz naravnega okolja v desetih dnevih, pri enostavnem slikanju zob pa dozi, ki jo iz naravnega okolja prejmemo v enem dnevu. Po drugi strani pa je bolj zapletena rentgenska diagnostična preiskava, kot je na primer CT (computed tomography), povezana s precej večjim tveganjem za zdravje. Doza, ki jo prejmemo pri enkratnem CT slikanju prsnega koša ali trebušnega predela je enaka kar dveh do trem letnim dozam sevanja iz naravnega okolja. Odločitev o tem, ali je koristi pri slikanju več od tveganja za škodo in ali potrebujemo slikanje ali ne, prepustimo zdravnikom.

Če te zanima še več podrobnosti o rentgenski svetlobi in njeni uporabi v medicini, si lahko pogledaš na spletni strani www-f9.ijs.si/~krizan/sola/medfiz/slides/fiz-anat-slik/1FAS-RTGsvetlobaCB.pdf. Če te zanima, kako je rentgensko svetlobo odkrival W. C. Röntgen, pa si preberi članke o njem v starejših letnikih Preseka, na primer tega: www.presek.si/22/1232-Strnad-Conrad.pdf.

× × ×

Bilo je nekoč v reviji Presek

Akad. prof. Josip Plemelj (1873–1967) je bil matematik svetovnega slovesa, soustanovitelj in prvi rektor Univerze v Ljubljani (1918–1919), in častni član DMFA Slovenija. O ugledu, ki ga je prof. Plemelj užival v svojem rojstnem kraju, priča spodnja novica, ki je bila objavljena v 4. številki revije Presek, letnik 1983/84. Novica omenja tudi Plemljevo spominsko sobo. Ta je urejena v Plemljevi vili na Bledu, lepi stavbi z vrtom, sobami in manjšo predavalnico. V njej dandanes občasno še vedno potekajo delavnice in priprave dijakov za olimpijade, rednih obiskovalcev in sobotnega dežurstva šolarjev v Plemljevi spominski sobi pa že dolgo ni več. Morda pa vila zopet oživi v letu 2023, ko bomo praznovali 150 let rojstva prof. Plemlja?



BLEJSKI OSNOVNOŠOLCI POČASTILI SPOMIN NA SVOJEGA VZORNIKA

Osnovna šola na Bledu že več let nosi ime po svetovno znanem matematiku prof. dr. Josipu Plemlju. Rojen je bil 11. decembra 1873 na Bledu. Ta dan so si izbrali za šolski praznik. Vsako leto posvetijo nekaj časa spominu svojega velikega vzornika s priložnostnimi govori, recitacijami in zborovskim petjem. Učenci osnovne šole pa skrbijo pod vodstvom mentorice prof. Alenke Plestenjak za sprejem obiskovalcev v bližnji Plemljevi spominski sobi.

V lanskem decembru je bila proslava še posebej slovesna. V parku pred osnovno šolo so odkrili preko tri metre visoko in skoraj tri tone težko skulpturo. V hrastov hlod so člani šolskega likovnega krožka, ki ga vodi akademski slikar prof. Janez Ravnik, vklesali podobo prof. dr. Josipa Plemlja in njegovih učencev. Ta spomenik je prvi v načrtovani novi šolski "formi vivi". Veliko delo so mladi umetniki lahko opravili le ob pomoči delovnih organizacij z Bleda in njegove okolice.

Ciril Velkoverh