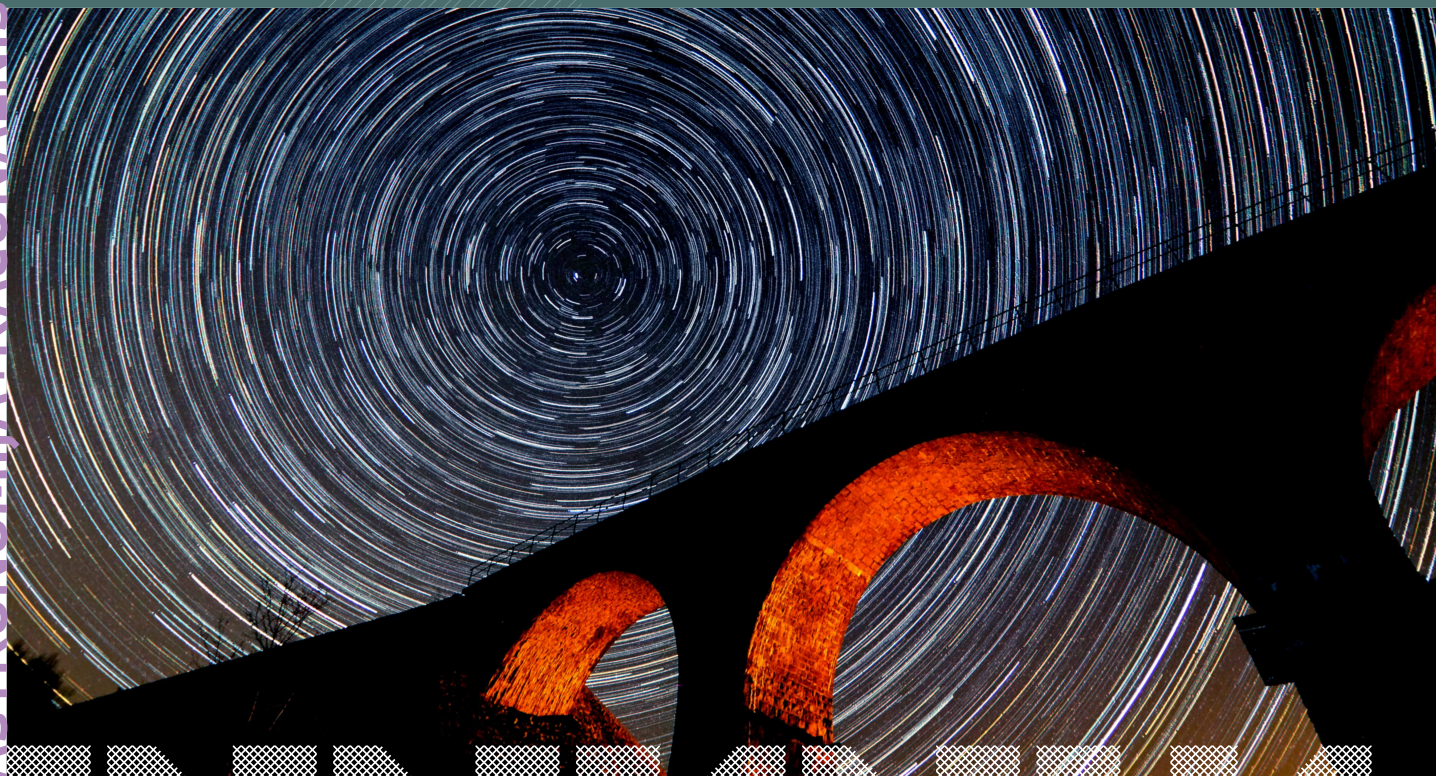




PRESEK LETNIK 48 (2020/2021) ŠTEVILKA 6

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

6



- IGRA TREH BARV
- ELASTIČNI TRKI
- IN PREVAJANJE TOPLOTE
- ASTRONOMSKA FOTOGRAFIJA
- BREZ GESLA IN BREZ OMEJITEV
- S PRELIVOM SPOMINA

ISSN 0351-6652



9 770351 665869

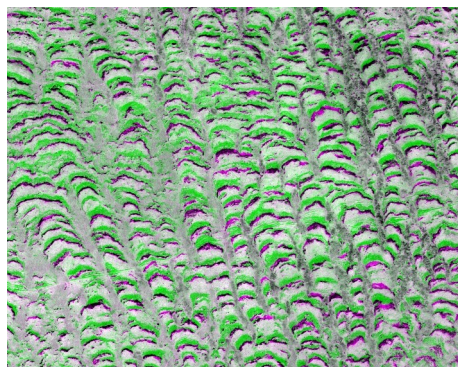
Vzorci vegetacije na sušnih območjih

↓↓↓

→ Matematiko pogosto opisujemo kot znanost o vzorcih. Številne vzorce najdemo tudi v naravi okrog nas, denimo pasove vegetacije, ki se pogosto razrastejo na položnih območjih v skoraj puščavskih ekosistemih. S pomočjo podatkov o padavinah in obliki terena so raziskovalci z uporabo parcialnih diferencialnih enačb sestavili matematični model, ki je pojasnil, zakaj taki pasovi večinoma rastejo konkavno v smeri vzpona terena. To razumevanje nam lahko pomaga vegetacijo zaščititi pred uničenjem.

Ekipe ekologov, hidrologov in matematikov pa so model nedavno še izboljšale in prilagodile različnim časovnim razponom. Novi model omogoča upoštevanje hitrih sprememb, kot je, denimo, pretok vode med neurji, pa tudi počasnejših sprememb, kot je, denimo, rast rastlinstva. Iz novega modela sledi tudi to, da se pasovi vegetacije zelo počasi pomikajo vzdolž terena navzgor. To je mogoče potrditi z opazovanji in pojasniti z razlago, da pas ujame nekaj vode in hranil, kar spodbuja rast na zgornji strani pasu.

Več o tem najdete v članku *Vegetation pattern formation in drylands*, Gandhi, Iams, Bonetti, in Silber, *Dryland Ecohydrology*, str. 469-509 (2019).



SLIKA.

»A slow march through the desert«, K. Gowda, Iams, Silber (2018), Scientific Reports.

Izvirno besedilo: *Describing Drylands Vegetation Patterns, Mathematical moments from the AMS*. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman.

× × ×

KOLOFON

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2020/2021 je za posamezno naročnike 22,40 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2021 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 2135

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Vzorci vegetacije na sušnih območjih

MATEMATIKA

- 4-6** Igra treh barv
(Matevž Črepnjak, Tina Sovič)
- 7-9** Parabola na zaključnem izpitu Jurija Vege
(Marko Razpet)

FIZIKA

- 10-13** Elastični trki in prevajanje toplote
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 14-15, 18-22** Astronomska fotografija za butalce
(Andrej Kregar)

RAČUNALNIŠTVO

- 23-26** Brez gesla in brez omejitev s prelivom spomina
(Maks Kolman)

RAZVEDRILO

- 9** 10. evropska dekliška matematična olimpijada
(Boštjan Kuzman)
- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 26** Križne vsote
- 27** Rešitev nagradne križanke Presek 48/5
(Marko Bokalič)
- 28-30** Maturantski matematični geolov v okolici Postojne
(Miha Šušteršič)
- 31** Naravoslovna fotografija - Dvignjene stopinje
(Nada Razpet)

TEKMOVANJA

- priloga** 30. tekmovanje iz razvedrilne matematike - državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje - šolsko tekmovanje
- priloga** Tekmovanje srednješolcev v znanju fizike - šolsko tekmovanje Čmrlj

SLIKA NA NASLOVNICI: Severni nebesni pol in navidezno vrtenje neba. Fotografija: Andrej Guštin

Igra treh barv

↓↓↓

MATEVŽ ČREPŇAK, TINA SOVIČ

→ Predstavili bomo Igro treh barv, ki sta jo prva opisala matematika Ehrhard Behrends in Steve Humble v članku *Triangle Mysteries*, *Mathematical Gems and Curiosities*, leta 2013 in je dostopen na www.ehrhard-behrends.de/pdf_zaubern/behrends_humble.pdf. Igra je precej preprosta, v ozadju pa se skriva zanimiva matematika.

Konfiguracijo enakostraničnega trikotnika bomo sestavili iz pravih šestkotnikov tako, da bo vsaka od stranic sestavljena iz štirih pravih šestkotnikov (glej sliko 1). Predpostavimo, da je konfiguracija vedno orientirana tako, da ena izmed njenih stranic leži vodoravno zgoraj, posledično je nasprotno oglišče spodaj. Pri takšni orientaciji bomo zgornjo stranico, torej prvo vrsto šestkotnikov, imenovali prva vrstica, tri šestkotnike, ki ležijo tik pod njo, bomo imenovali druga vrstica, preostali dve pa tretja in četrta vrstica, kjer je slednja zgolj oglišče. Opisano konfiguracijo bomo v nadaljevanju imenovali *trikotnik reda 4*. Za poljubno naravno število $n \geq 2$ na podoben način definiramo *trikotnik reda n*.

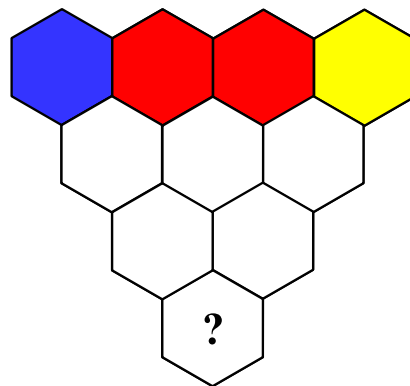
Na voljo imamo tri različne barve, denimo rumeno, modro in rdečo. Trikotnik z njimi pobarvamo tako, da vsakemu šestkotniku priredimo natanko eno izmed barv na način, opisan spodaj.

Prvo vrstico šestkotnikov pobarvamo poljubno. Ena od možnosti je predstavljena na sliki 1.

Barva vsakega nadaljnega šestkotnika je določena z barvo tistih dveh šestkotnikov, ki ležita v vrstici neposredno nad njim in se ga dotikata. Pravili sta sledeči:

- če sta šestkotnika iste barve, je takšne barve tudi spodnji šestkotnik;
- če sta šestkotnika različnih barv, potem je spodnji šestkotnik tiste barve, ki ne nastopa kot barva šestkotnikov nad njim.

Sedaj si zastavimo naslednji vprašanje: *Ali lahko na podlagi barv prve vrstice v enem koraku (tj. še*



SLIKA 1.

Primer barvanja prve vrstice trikotnika reda 4

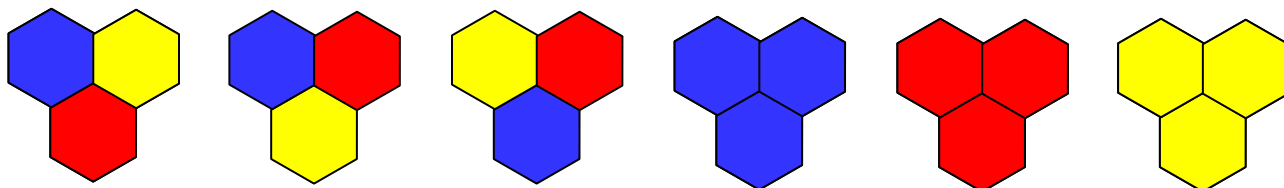
pred barvanjem preostalih šestkotnikov danega trikotnika) določimo barvo šestkotnika v zadnji vrstici? Ali je barva šestkotnika v zadnji vrstici odvisna od vseh barv prve vrstice ali zgolj od nekaterih izmed njih?

Preden odgovorimo na zgornji vprašanje, pobarvamo trikotnik s slike 1 v celoti.

Ugotovimo, da je šestkotnik na dnu trikotnika rdeče barve. Oglejmo si barve oglišč dotičnega trikotnika. Prvi in zadnji šestkotnik prve vrstice smo pobarvali z modro in rumeno barvo. Skupaj določata rdečo barvo, kar je natanko barva šestkotnika v zadnji vrstici. Gre za naključje? Poskusimo prvo vrstico pobarvati drugače. Hitro ugotovimo, da je barva oglišča v zadnji vrstici spet barva, ki jo določata preostali dve oglišči trikotnika. Izkaže se, da je odgovor na obe zastavljeni vprašanji pritrdilen in velja naslednje: Barvo nepobarvanega oglišča na dnu trikotnika lahko v enem koraku določimo že na podlagi barv preostalih dveh oglišč. Trditev lahko dokažemo s seznamom vseh možnih barvnih kombinacij prve vrstice. Mi bomo trditev dokazali s pomočjo aritmetike. Tak dokaz je za nas bolj zanimiv, saj ga lahko posplošimo tudi na trikotnike višjega reda.

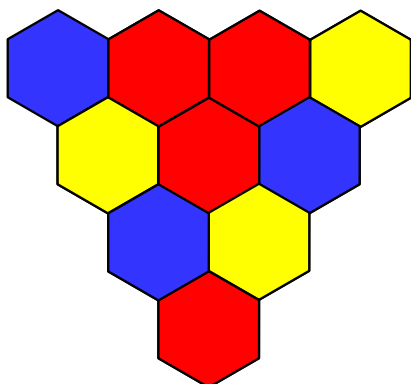
Najprej vsaki izmed barv priredimo natanko eno od števil 0, 1 in 2 tako, da je vsaka barva na enoličen način opredeljena s številom. Predpostavimo, da rumeni barvi priredimo število 0, modri barvi število 1 in rdeči barvi število 2. Barvanje bomo sedaj lahko predstavili v obliki računske operacije.

Ker s kombinacijo dveh barv s seznama spet dobimo barvo z istega seznama, bomo množico prireje-



SLIKA 2.

Barvanje z uporabo zgoraj zapisanih pravil



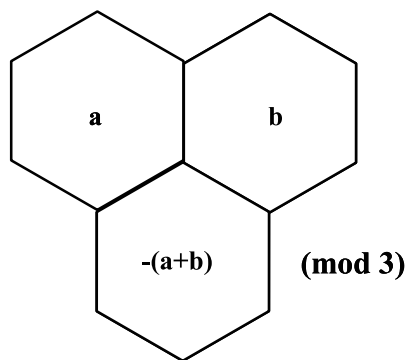
SLIKA 3.

Trikotnik s slike 1 pobarvan v celoti

nih števil $\{0, 1, 2\}$ opremili s t. i. seštevanjem po modulu 3. Gre za sistem aritmetike celih števil, kjer se števila ponovno vrtijo v krogu, ko dosežejo določeno vrednost, ki se imenuje *modul*. Števili sta kongruentni po modulu n , kar zapišemo $a \equiv b \pmod{n}$, če je $a - b = nk$ za neko celo število k . Tako je npr. $2 + 2 \equiv 1 \pmod{3}$, saj je $4 - 1 = 3 \cdot 1$. Vrnimo se k barvam, ki smo jim na enoličen način priredili števila. Opazimo, da barvi a in b določata barvo, ki ji pripada število $-(a + b) \pmod{3}$. Bralec lahko zapisano enostavno preveri s pomočjo slike 2.

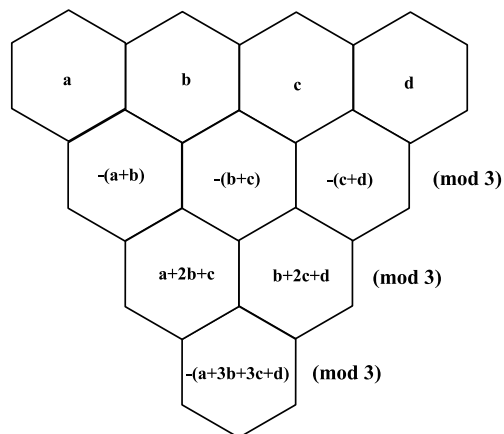
Dokažimo torej, da barvi prvega in zadnjega šestkotnika v trikotniku reda 4 vedno določata barvo šestkotnika v zadnji vrstici. Predpostavimo, da smo prvo vrstico trikotnika pobarvali z barvami a, b, c in d ter izračunajmo barvo šestkotnika v zadnji vrstici.

Kot rezultat (glej sliko 5) dobimo število $-(a + 3b + 3c + d)$, ki je kongruentno številu $-(a + d) \pmod{3}$. Pri tem smo, med drugim, upoštevali dej-



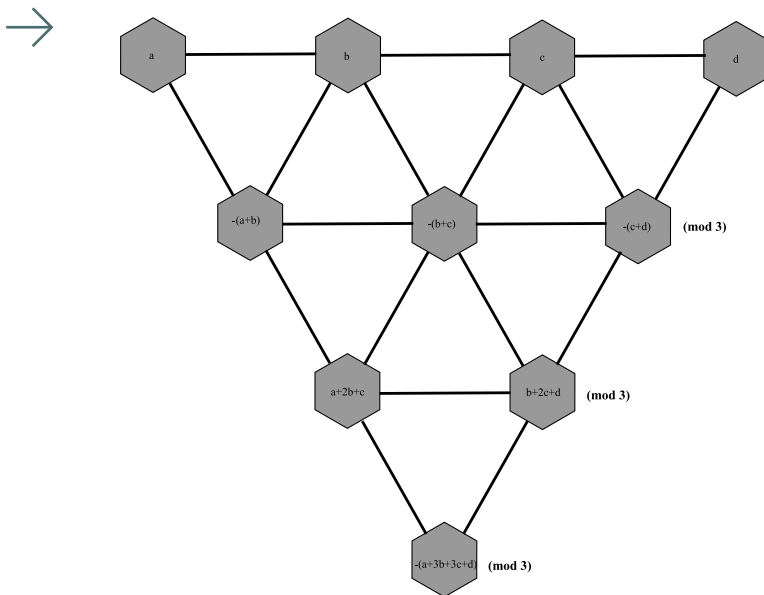
SLIKA 4.

Barvanje kot računska operacija



SLIKA 5.

Izračun barve šestkotnika v zadnji vrstici trikotnika reda 4



SLIKA 6.

Trikotniki reda $3^n + 1$ v trikotniku reda $3^{n+1} + 1$ z opazovanimi oglišči

stvo, da za poljubna cela števila x, y, x' in y' velja: če je $x \equiv x' \pmod{3}$ in $y \equiv y' \pmod{3}$, tedaj je $x + y \equiv x' + y' \pmod{3}$. Izračunano število torej pripada barvi, ki jo določata a in d , le-ta pa je neodvisna od preostalih barv v trikotniku. S tem smo dokazali, da je v igri treh barv barva oglišča na dnu trikotnika reda 4 res določena le z barvo oglišč iz prve vrstice in jo lahko določimo še preden prepoznamo barve preostalih šestkotnikov.

Na tem mestu se pojavi vprašanje, ali zapisano velja le za trikotnike reda 4. Seveda velja za trikotnike reda 2, saj smo seštevanje barv tam vpeljali (glej sliko 2), vendar s poskušanjem lahko pridemo do sklepa, da za trikotnike reda 3, 5, 6, 7, 8 in 9 to ne velja.

Izkaže se, da trditev velja za vse trikotnike reda $3^n + 1$, kjer je n poljubno naravno število. Zapisano dokažimo s pomočjo *matematične indukcije*. Pred tem se spomnimo, da gre za metodo dokaza, ki poteka v dveh korakih in se običajno uporablja pri dokazovanju dane trditve za vsa naravna števila. Prvi korak, imenovan *baza indukcije*, je dokaz trditve za prvo naravno število, ki naj bi trditvi zadoščalo. Sledi *indukcijski korak*, v katerem predpostavimo, da trditev velja za poljubno izbrano naravno število n in jo dokažemo za $n + 1$.

Da je baza indukcije izpolnjena, smo razmislili zgoraj. Za indukcijski korak izberimo poljubno na-

ravno število n in predpostavimo, da za trikotnik reda $3^n + 1$ trditev velja, tj. barva oglišča v vrstici $3^n + 1$ je natanko določena z barvo oglišč iz prve vrstice. Dokažimo, da ta trditev velja tudi za trikotnik reda $3^{n+1} + 1$.

Trikotnik reda $3^{n+1} + 1$ je sestavljen iz trikotnikov reda $3^n + 1$ na način, kot kaže slika 6, kjer so narisane le oglišča teh trikotnikov. Zanimajo nas samo trikotniki, ki so orientirani na način, zapisan zgoraj. Poljubno pobarvajmo prvo vrstico trikotnika reda $3^{n+1} + 1$. Denimo, da smo oglišča trikotnikov reda $3^n + 1$, ki ležijo v prvi vrstici trikotnika reda $3^{n+1} + 1$, pobarvali z barvami a, b, c in d , kot prikazuje slika 6.

Ker je v vsakem izmed trikotnikov reda $3^n + 1$ po indukcijski predpostavki barva oglišča na dnu trikotnika določena z barvo preostalih dveh oglišč, lahko izračunamo barvo šestkotnika, ki leži v zadnji vrstici trikotnika reda $3^{n+1} + 1$. Analogno, kot smo to storili v trikotniku reda 4, tudi tukaj pridemo do rezultata $-(a+3b+3c+d)$, kar je kongruentno številu $-(a+d)$ po modulu 3. S tem je trditev dokazana.

Ob koncu dodajmo, da lahko podobno, kot smo vpeljali pravila v igri treh barv, vpeljemo pravila za barvanje trikotnikov z uporabo dveh barv. Razmisli, kakšna pravila bi bila smiselna v tem primeru in kateri trikotniki bi s tem postali zanimivi.

Parabola na zaključnem izpitu Jurija Vege



MARKO RAZPET

→ Jurij Vega (1754–1802) je moral leta 1775 za dokončanje dveletnega študija na ljubljanskem liceju opraviti obširen izpit *Tentamen philosophicum*. Izpitne teme so bile natisnjene v latinščini na 52-ih straneh, od katerih je bilo 26 strani posvečenih matematiki, 20 strani fiziki in štiri strani logiki ter metafiziki. Vega je zaključni izpit opravil z odliko. O svojem študiju na ljubljanskem liceju pa je kasneje zapisal, da vstop v to učilišče spada med najsrečnejše dogodke njegovega življenja.

Ogledali si bomo dve trditvi o paraboli iz poglavja o stožnicah v Tentamenu. Domnevamo lahko, da je izpitna komisija od kandidatov pričakovala natančno poznavanje trditev, njihovo razlago in morda tudi dokaz. Ker tedanjih postopkov reševanja natanko ne poznamo, bomo najprej ponovili nekaj osnovnih pojmov in trditvi predstavili v današnjem jeziku.

Pri stožnici so nam znani pojmi: teme, gorišče, vodnica, tetiva, tangenta in simetrala. V Vegovem času so parameter parabole imenovali dolžino tiste tetive, ki poteka skozi gorišče, pravokotno na simetralo parabole. Danes imenujemo parameter parabole polovico te dolžine in jo označujemo s p .

Poznali so tudi pojem premera ali diametra parabole. To je vsak poltrak, ki ima krajišče na paraboli in poteka vzporedno z njeno simetralo po notranjosti parabole. Izraz *premer parabole* je smiseln, če imamo parabolo za v neskončnost razpotegnjeno elipso, pri čemer premer elipse preide v premer parabole. Vsako tetivo skozi središče elipse imenujemo premer ali diameter elipse.

Parabolo najlažje obravnavamo v analitični obliki. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu

Oxy postavimo njeno teme v koordinatno izhodišče O , gorišče pa v točko $F(p/2, 0)$. Vodnica parabole je premica $x = -p/2$, enačba parabole pa se glasi $y^2 = 2px$.

Vedeti pa je treba tudi, da ima tangenta na parabolo $y^2 = 2px$ v točki $T(\xi, \eta)$ enačbo $\eta y = px + p\xi$. Pri tem je seveda $\eta^2 = 2p\xi$. Kako pridemo do enačbe tangente? Poljubna premica, ki poteka skozi točko $T(\xi, \eta)$, ima enačbo $x - \xi = k(y - \eta)$, kjer je k realno število, ki ga je treba določiti tako, da bo ta premica imela s parabolo eno samo skupno točko, in sicer $T(\xi, \eta)$. Iz enačbe premice izrazimo $x = k(y - \eta) + \xi$, kar vstavimo v enačbo parabole in dobimo kvadratno enačbo za y :

$$y^2 = 2pk(y - \eta) + 2p\xi = 2pky - 2pk\eta + \eta^2.$$

Preuredimo in razstavimo:

$$y^2 - 2pky + 2pk\eta - \eta^2 = (y - \eta)(y + \eta - 2pk) = 0.$$

Enačba ima rešitvi $y_1 = \eta$ in $y_2 = 2pk - \eta$. Iz zahteve $y_1 = y_2 = \eta$ dobimo $k = \eta/p$. Iskana tangenta ima torej enačbo $x - \xi = (y - \eta)\eta/p$ oziroma $\eta y = px + p\xi$. Zdaj se lahko lotimo naših nalog.

Tentamen, Naloga CLXII.

Naj bo t tangenta v temenu parabole, d pa tangenta v presečišču parabole s poljubno vzporednico s' simetrale s parabole. Če se premica t' , ki je vzporedna t , in premica d' , ki je vzporedna d , sekata v točki na paraboli, potem je ploščina trikotnika, omejenega s t' , d' in s , enaka ploščini pravokotnika, omejenega s t , t' , s in s' (slika 2).

Dokaz.

Zapišimo točke s koordinatami $T(\xi, \eta)$, $T'(\xi', \eta')$. Pri tem je $\xi \geq 0$ in $\xi' \geq 0$. Upoštevati je treba tudi,





TENTAMEN PHILOSOPHICUM

EX

LOGICA, METAPHYSICA;
ALGEBRA, GEOMETRIA, TRI-
GONOMETRIA, GEODESIA, STERE-
OMETRIA, GEOMETRIA CURVA-
RUM, BALISTICA, ET PHYSICA
TAM GENERALI, QUAM PAR-
TICULARI,

QUOD

ANNO MDCCLXXV. MENSE AUGUSTO DIE
IN ARCHID. ACADEMIA LABACENSI

EX PRÆLECTIONIBUS

ADM. R. AC CL. D. GREGORII SCHÖTTL,
PHYS. PROF. PUBL. ET ORD.

ADM. R. CL. AC PERILL. D. JOSEPHI MAFFEI
DE GLATTFORT, MATH. PROFES.
PUBL. ET ORD.

ADM. R. AC CL. D. ANTONII TSCHOKL,
LOG. ET MET. PROF. PUBL. ET ORD.

SUBIVERE.

PERD. D. FIDELIS POGLAYN, CARN. CRABNE.
PERD. D. GEORG. VEHA, CARN. MORAITSCH.
PERD. D. MATHÆUS KALLAN, CARN. LO-
COPOL. E SEM. EPISC. ALUM. SCHIFFER.

QUÆ.

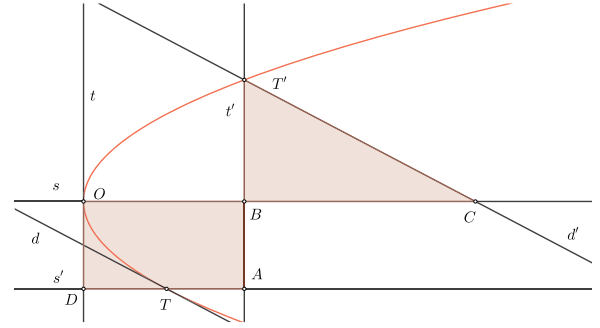
SLIKA 1.

Naslovnica zbirke izpitnih vprašanj z imeni članov komisije in kandidatov, med katerimi je tudi Jurij Vega (Georgius Veba). Naslovnica ni brez tiskarskih napak.

da veljata relaciji $\eta^2 = 2p\xi$ in $\eta'^2 = 2p\xi'$. Enačbe sodelujočih premic so:

- $(t) \quad x = 0, \quad (t') \quad x = \xi', \quad (s) \quad y = 0,$
 $(s') \quad y = \eta, \quad (d) \quad \eta y = px + p\xi,$
 $(d') \quad \eta(y - \eta') = p(x - \xi').$

Naj bo B presečišče premic t' in s , C pa presečišče premis s in d' . Potem je razlika abscis točk C in B



SLIKA 2.

Trikotnik in pravokotnik sta ploščinsko enaka.

enaka $-\eta\eta'/p$. Trikotnik BCT' je pravokotni s kate-
tama $|BC| = |\eta\eta'|/p$ in $|BT'| = |\eta'|$. Njegova ploščina
je

$$S(BCT') = \frac{1}{2}|BC| \cdot |BT'| = \frac{1}{2p}|\eta\eta'^2| = \xi'|\eta|.$$

Pravokotnik $DABO$ pa ima stranici $|OB| = \xi'$ in
 $|AB| = |\eta|$ in ploščino

$$S(DABO) = |OB| \cdot |AB| = \xi'|\eta|.$$

Torej je res $S(BCT') = S(DABO)$, kar je bilo treba
dokazati. ■

Tentamen, Naloga CLXV.

Naj bo t tangenta v temenu parabole, d pa tangenta
v presečišču parabole s poljubno vzporednico s' si-
metrale s parabole. Če se premica t' , ki je vzporedna
 t , in premica d' , ki je vzporedna d , sekata v točki na
paraboli, potem je ploščina trikotnika, omejenega s
 t' , d' in s' , enaka ploščini paralelograma, omejenega
z d , d' , s in s' (slika 3).

Dokaz.

Ohranimo oznake premic prve trditve. Sedaj je točka
 B presečišče premice s' in d' , C pa presečišče premic
 s' in t' . Razlika abscis točk C in B je $|\eta(\eta - \eta')/p|$,
razlika ordinat točk T' in C pa $|\eta - \eta'|$. Trikotnik
 BCT' je pravokotni s katetama $|BC|$ in $|CT'|$, njegova
ploščina je

$$S(BCT') = \frac{1}{2}|BC| \cdot |BT'| = \frac{1}{2p}|\eta(\eta - \eta')^2|.$$

10. evropska dekliška matematična olimpijada



BOŠTJAN KUZMAN

→ Med 9. in 15. aprilom 2021 je, zaradi pandemije, na daljavo v organizaciji Gruzije potekala Deseta evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO). Sodelovalo je 213 tekmovalk iz 54 držav. Slovenijo so zastopale Katarina Grilj (SŠ Slovenska Bistrica, Gimnazija), ki je osvojila bronasto medaljo, in Lana Prijon (Gimnazija Bežigrad), Kaja Rajter (II. gimnazija Maribor) ter Tjaša Sušnik (Gimnazija Kranj). Dijakinje so se na tekmovanje pripravljale tudi na celoletnih pripravah, ki jih pod okriljem DMFA Slovenije izvajajo bivši tekmovalci, med njimi Ana Meta Dolinar in Luka Horjak, ki sta tokrat poskrbela tudi za brezplačno izvedbo tekmovanja v Plemljevi vili na Bledu. V uredništvu vsem čestitamo in dodajamo dve nalogi iz tekmovanja. Ostale naloge in rešitve najdete na spletni strani EGMO, www.egmo.org.

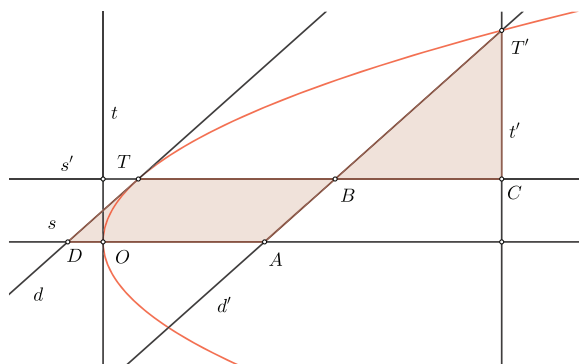
Naloga 1. Število 2021 je čudovito. Če je katerikoli element množice $\{m, 2m + 1, 3m\}$ čudovit za neko pozitivno celo število m , potem sta tudi ostala dva elementa čudovita. Ali je število 2021²⁰²¹ čudovito? (Angelo Di Pasquale, Avstralija)

Naloga 5. V ravnini leži točka O , ki jo imenujemo izhodišče, in naj bo P neka množica 2021 točk v ravnini, za katero velja:

- poljubne tri različne točke iz P ne ležijo na skupni premici;
- poljubni dve različni točki iz P ne ležita na skupni premici skozi O .

Trikotnik z oglišči v P imenujemo *debel*, če leži točka O strogo znotraj trikotnika. Določite največje možno število debelih trikotnikov. (Veronika Schreitter, Avstrija)

× × ×



SLIKA 3.

Trikotnik in paralelogram sta ploščinsko enaka.

Stranica paralelograma $DABT$ je $|TB| = |\xi - \xi' - \eta(\eta - \eta')/p|$, višina nanjo pa $|\eta|$. Ploščina paralelograma je torej

$$\begin{aligned} S(DABT) &= \left| (\xi - \xi') - \frac{\eta(\eta - \eta')}{p} \right| \cdot |\eta| \\ &= \frac{1}{2p} |\eta|(\eta - \eta')^2. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali relaciji $\eta^2 = 2p\xi$ in $\eta'^2 = 2p\xi'$. Torej je res $S(BCT') = S(DABT)$, kar je bilo treba dokazati. ■

Radovedni bralec z znanjem latinščine bo v Tentamenu našel še več zanimivih trditev o parabolah. Ena izmed njih je tudi naslednja. Njen dokaz prepustimo bralcem.

Tentamen, Naloga CLXVI.

Tangenta na parabolo v krajišču premera, ki poteka skozi središče katerekoli njene tetive, je vzporedna tej tetivi. Ta premer razpolavlja vse tetive, ki so tej tetivi vzporedne.

Tentamen je dosegljiv na spletni povezavi www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:DOC-TQDP2BPU.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

Elastični trki in prevajanje toplote



ANDREJ LIKAR

→ V enem prejšnjih prispevkov [1] smo se prepričali, da dobimo smiselne rezultate pri opisu dvorazsežnega toka tekočin, če se opremo le na elastične trke med molekulami, okroglimi ploščicami. Hitrosti ploščic smo na danem mestu povprečevali, povprečna hitrost pa je dobro sovpadala s hitrostjo pri gibanju tekočine, če smo le poskrbeli za smiselne hitrosti na njenem robu.

Pri zaprti posodi z mirujočimi stenami se povprečne hitrosti ploščic povsod hitro bližajo ničli. Ploščice pa se kljub temu ves čas neurejeno gibljejo sem in tja, se odbijajo od sten in trkajo med seboj. Tudi pri tekočini je tako, saj se pri dani temperaturi molekule ves čas neurejeno gibljejo. Povprečna kinetična energija molekule je sorazmerna z absolutno temperaturo tekočine. Ali lahko z elastičnimi trki med ploščicami opišemo tudi prevajanje toplote od toplejšega dela stene proti hladnejšemu tako, da na danem mestu povprečimo kinetično energijo ploščic? Pri prevajanju toplote se v tekočini po daljšem času vzpostavi, kot pravimo, časovno neodvisno temperaturno polje – na izbranem mestu je temperatura tekočine konstantna, od mesta do mesta pa se spreminja. Pod vplivom teže se toplota prevaja tudi s konvekcijo. Torej zaradi vzgona segrete tekočine. Vpliva teže tu ne bomo upoštevali; denimo, da smo v breztežnem prostoru. Do časovno nespremenljivih polj pridemo računsko z reševanjem posebne enačbe, imenujemo jo *difuzijska enačba*, za katero vemo, da pravilno napove potek temperature v posodi, če le poznamo temperaturo na njenem robu. Teh računov se tu ne bomo lotili, uporabili pa bomo njihove rezultate, da jih bomo primerjali z izidi pri elastičnih trkih ploščic. Preizkusili bomo torej možnost, da s sledenjem ploščic pridemo do temperatur znotraj posode na podlagi znanih temperatur na robu. S tem bi prispevali nov način reševanja difuzijske enačbe, ki ji za časovno nespremenljive primere rečemo *Laplaceova*

enačba. Ta metoda ne bo posebno uporabna, je pa zanimiva, ker razkrije osnovne pojave pri prevajanju toplote.

Ukvarjali se bomo z dvorazsežnimi primeri, ker so le-ti pregledni. Tu gre za toplotno prevajanje v dolgih ceveh, kjer so po vsej dolžini cevi razmere enake. Presek cevi bo pri vseh primerih kvadraten. Izbrali bomo tri primere časovno nespremenljivih polj, ki jih narekuje difuzijska enačba. Pri vseh treh je torej temperaturno polje vnaprej znano, ploščice pa bodo seznanjene le s temperaturo polja na robu kvadrata. Zanima nas, če bomo s povprečevanjem njihove kinetične energije znotraj kvadrata prišli do polja, kot ga tam napove Laplaceova enačba.

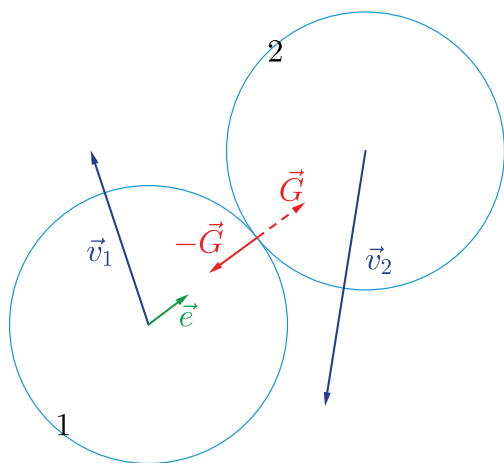
Da bi zgornjo idejo preverili, naredimo načrt. Okrogle ploščice naj drsijo po ravnini xy in naj predstavljajo molekule tekočine. Zvezo med absolutno temperaturo (merjeno v Kelvinih) tekočine na danem mestu in kinetično energijo molekul prav tam poznamo:

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = 2 \frac{kT}{2}.$$

Vsaka komponenta hitrosti, torej v_x in v_y , kjer je $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, prinese molekuli v povprečju kinetično energijo $\frac{kT}{2}$. Povprečna kinetična energija molekule je torej kar enaka kT , kjer je k Boltzmannova konstanta. Ker sta povprečna kinetična energija molekule in absolutna temperatura sorazmerni, lahko odslej temperaturo predstavimo kar s povprečno kinetično energijo. Bomo pač namesto kelvinov uporabili joule. S sledenjem ploščic in računanjem njihove povprečne kinetične energije na danem mestu bomo ocenjevali temperaturo in jo primerjali s pravo vrednostjo, ki jo napove difuzijska enačba. Vse to bomo opravili z računalnikom in se tako izognili zapletenemu eksperimentiranju.

Ker bo glavno vlogo igral elastični trk, povzemimo, kar smo že dognali o njem.

Na sliki 1 sta ploščici ravno v stiku. Po trku se obema spremeni gibalna količina. Zaradi tretjega



SLIKA 1.

Ploščici med trkom – izmenjana gibalna količina $G\vec{e}$ je v smeri veznice obeh središč. Enotski vektor $\vec{e}$ kaže od enega središča do drugega, vektor, ki ju povezuje, je torej $2r\vec{e}$, kjer je r polmer ploščice

Newtonovega zakona, ki pravi, da je sila ene ploščice na drugo nasprotno enaka sili druge na prvo, in enakega časa delovanja obeh sil sta spremembi gibalnih količin nasprotni, po velikosti pa enaki. Sili delujeta le vzdolž enotskega vektorja $\vec{e}$, ki povezuje središči obeh ploščic in kaže od ploščice 1 k ploščici 2 zato, ker se ploščici pri trku vdata le pravokotno na obod, sicer pa ob stiku le zdrsneta. Sprememba gibalne količine druge ploščice je potem $\Delta\vec{G}_2 = G\vec{e}$, prve pa $-G\vec{e}$. Da določimo velikost G , upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri trku ohrani, torej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e})^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e})^2.$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo ploščic pred trkom, na desni pa po njem. Ko maso ploščice m pokrajšamo, sledi po krajšem računu

$$\frac{G}{m} = \vec{e} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

od tod pa takoj dobimo hitrosti ploščic po trku $\vec{v}_1^{po} = \vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e}$ in $\vec{v}_2^{po} = \vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e}$. Enotski vektor $\vec{e}$ moramo določiti za vsak trk posebej. Pri sledenju ploščic zaznamo trk, ko se središči približata bolj kot na razdaljo premera. Vmes ploščice premikamo glede na njihove hitrosti in čas med zaporednimi koraki. Na robu posode se ploščice odbijajo v posodo enakomerno na vse strani s povprečno kinetično energijo,

ki je skladna s tamkajšnjo temperaturo. Pri vsakokratnem trku na robu določimo hitrosti po odboju naključno, da dobijo ploščice v povprečju kinetično energijo, ki ustreza temperaturi roba. Na tak način se najbolj približamo pravim razmeram pri trku molekul s steno. Izidi računov pa se ne bi kaj dosti spremenili, če bi ob trku ploščici podelili kar povprečno energijo pri znani temperaturi na mestu odboja.

Z nekaj preprostega računanja pridemo do kinetične energije ploščice po trku:

$$E_1^{po} = E_1 - \frac{m}{2}(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 + \frac{m}{2}(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2,$$

pri čemer je E_1 kinetična energija pred trkom. Pri povprečnem trku je pri danih hitrostih pred trkom $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ $(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 = \frac{1}{2}v_1^2$ in $(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2 = \frac{1}{2}v_2^2$, zato sledi

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{1}{2}(E_2 - E_1).$$

Kinetična energija se v povprečju torej spremeni prav za razliko kinetičnih energij E_1 in E_2 ploščic pred trkom. To je v skladu s toplotno prevodnostjo, kjer teče toplota od mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo temperaturo. Hladna ploščica, torej taka z manjšo kinetično energijo, se segreje na račun toplejše. Pri ploščicah, ki se povsod od roba elastično odbijajo ali kjer je robna temperatura povsod enaka, se torej hočeš nočeš vzpostavi ravnovesje; takrat imajo vse v povprečju enako kinetično energijo, torej enako temperaturo. To je v skladu s spoznanjem, da se v toplotno izoliranem delu narave vzpostavi ravnovesno stanje s povsod konstantno temperaturo.

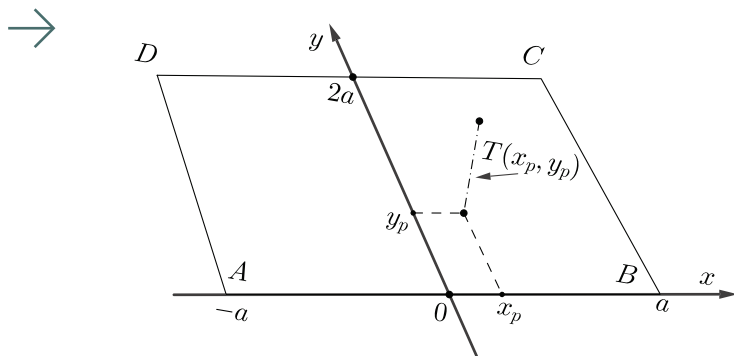
Sedaj pa pogledjmo, kako se trkajoče ploščice odrežejo pri nalogah o prevajanju toplote. Ker bomo zaradi nazornosti obravnavali dvorazsežne primere, bomo postavili koordinatni sistem tako, kot kaže slika 2. Presek cevi je pri vseh obravnavanih primerih kvadraten z dolžino stranice $2a$. Temperaturo v točki s koordinatama x_p in y_p prikažemo kot daljico, pravokotno na ravnino xy z enim krajiščem v tej točki in z dolžino $T(x_p, y_p)$.

V **prvem primeru** izberemo temperaturo znotraj preseka in na robu cevi takole:

$$T(x, y) = T_c \frac{2a - y}{2a} + T_0.$$

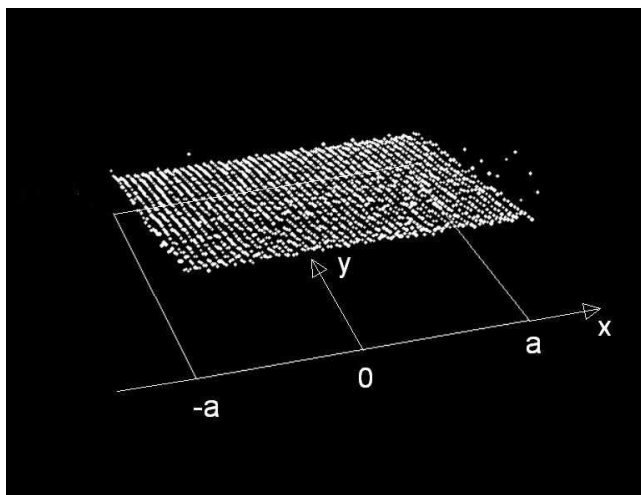
S T_0 smo označili absolutno temperaturo na stranici $\overline{CD}$, stranica $\overline{AB}$ pa je pri temperaturi $T_c + T_0$. Ostali





SLIKA 2.

Postavitev koordinatnega sistema pri slikah temperaturnih polj. V navpični smeri, torej pravokotni na ravnino xy , nanašamo temperaturo $T(x_p, y_p)$ pri točki s koordinatama x_p in y_p . Rob kvadrata tvorijo stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ in $\overline{DA}$.



SLIKA 3.

Slika temperaturnega polja pri prevajanju toplote v prvem primeru

dve stranici sta toplotno izolirani. Ploščice se na njima le elastično odbijajo. Difuzijska enačba pove, da se takšno temperaturno polje s časom ne spreminja. Pri tako preprostem polju bi to lahko tudi uganili. V poljubno področje znotraj cevi priteče prav toliko toplote, kot je iz njega odteče, zato se področje niti ne segreva niti ohlaja. Tolpotni tok je pri zgoraj omenjenem polju povsod enak, v tenko plast z debelino $2\delta y$ pri konstantnem $y + \delta y$ priteče prav

toliko toplote, kot je pri $y - \delta y$ odteče. Vsa plast ima tako ves čas enako temperaturo. Pri obravnavi toplotnega toka se že v osnovni šoli seznanimo s takim potekom temperature v prevodni plasti.

Prepustimo sedaj ploščicam, da same zgradijo temperaturno polje znotraj kvadrata le na podlagi odbojev na robu. Na začetku imajo ploščice sicer poljubne, od nič različne hitrosti, ki jih izberemo naključno. V izbranih točkah čakamo na ploščice in tam ves čas računamo povprečno kinetično energijo. Po daljšem času, ko se temperaturno polje dovolj zgladi, ga primerjamo s pravim, ki ga podaja zgornja enačba za $T(x, y)$. Pogled na sliki 3 pove, da so se ploščice tu dobro izkazale, slika temperaturnega polja je res ravnina, čeprav smo pri zgledu uporabili le kakih sto ploščic.

V **drugem primeru** si izberemo nekoliko bolj zapleteno polje, podano takole:

$$T(x, y) = \frac{T_c \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\pi \frac{2a-y}{a}\right)}{\sinh(2\pi) + T_0}.$$

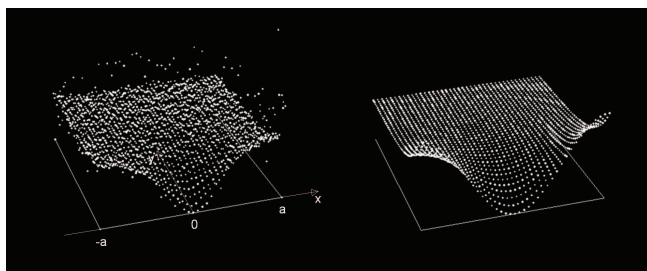
Funkcija $\sinh$ je definirana takole:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in jo imenujemo hiperbolični sinus. Zaradi preglednosti smo izbrali $T_c < 0$; kljub temu je temperatura povsod večja od nič. Spet ploščice vedo le za temperaturo na robu kvadrata. Slika 4 pokaže primerjavo temperaturnega polja, ki ga dobimo s trki, s privzetim poljem pri enakem poteku temperature po robu. Primerjava je kar dobra. Upoštevati moramo, da se povprečje kinetične energije ploščic na danem mestu le počasi bliža končni vrednosti. K temu precej prispeva vnašanje negotovosti z roba cevi, kjer po odboju naključno spreminjamo kinetično energijo in smer odbite ploščice, a v skladu s predpisano temperaturo roba na mestu odboja. Za primerjavo si pogledjmo še potek temperatur pri zasukani sliki 4, kjer kaže os x proti nam (slika 5). Tudi tu je primerjava prav dobra.

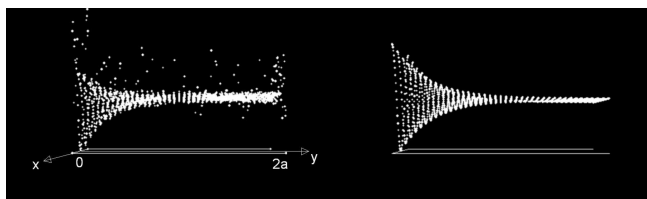
Podobno ujemanje opazimo za temperaturo točk znotraj kvadrata v **tretjem primeru**:

$$T(x, y) = \frac{T_c \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sinh\left(\pi \frac{2a-y}{2a}\right)}{\sinh(\pi)} + T_0.$$



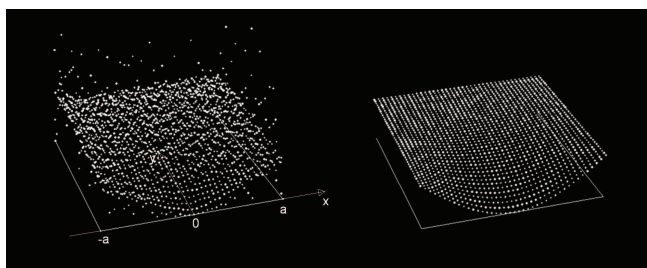
SLIKA 4.

Temperaturni polji, kot ju dobimo s trki ploščic (leva slika), in z računom (desna slika) za polje $T(x, y) = T_c \cos(\frac{\pi x}{a}) \sinh(\pi \frac{2a-y}{a}) / \sinh(2\pi) + T_0$.



SLIKA 5.

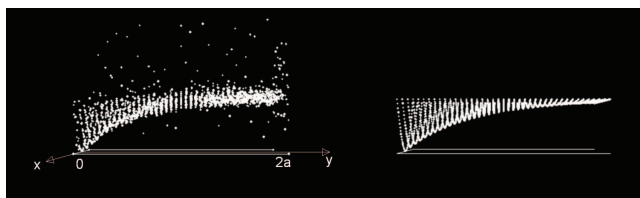
Sliki temperaturnih polj, ko sliko 4 zasučemo tako, da os x kaže proti nam.



SLIKA 6.

Temperaturni polji, kot ju dobimo s trki ploščic (leva slika), in z računom (desna slika) za polje $T(x, y) = T_c \cos(\frac{\pi x}{2a}) \sinh(\pi \frac{2a-y}{2a}) / \sinh(\pi) + T_0$.

Spet smo odvisnost $T(x, y)$ izbrali tako, da se s časom ne spreminja, kar potrdi difuzijska enačba. Le ta se po preseku cevi nekoliko počasneje spreminja v primeri s prejšnjo. Tudi tu so ploščice dobro našle temperature znotraj kvadrata.



SLIKA 7.

Pogled na temperaturno polje v tretjem primeru pri zasukani sliki 6.

Doslej smo obravnavali dvodimenzionalne primere. Ploščice so se gibale po gladki plošči z robom. Ne dvomimo, da bi pri trirazsežnih primerih prav tako dobili dobro ujemanje med pravim in temperaturnim poljem, dobljenim s trki. Kaj pa v enorazsežnem primeru, ko ploščicam dovolimo le gibanje po daljici? Ploščice tedaj le čelno trkajo med seboj, pri takih trkih pa velja

$$\blacksquare E_1^{po} = E_2.$$

Po trku dobi prva ploščica kinetično energijo E_2 druge. Ploščici le izmenjata energiji, pri taki dinamiki pa ne moremo pričakovati kaj drugega kot konstantno temperaturno polje ne glede na temperaturo na koncih. Na izbranem mestu namreč lahko pričakamo le ploščico z energijo enega ali drugega konca. Na počasnejše ploščice naletimo pogostejše kot na hitrejše. Konstantna temperatura po celi dolžini daljice je zato nekoliko nižja kot povprečna temperatura na koncih. Tudi porazdelitev ploščic po hitrosti ni taka kot v dvo ali trirazsežnih primerih. Podobnosti trkajočih ploščic s primeri prevajanja toplote je v tem primeru konec. Seveda tako tanke palice, po kateri bi se pretakala toplota iz enega konca na drugi le s centralnimi trki med molekulami, pač ni. Primer pa pokaže, da ploščic ne gre preveč utesnjevati, če želimo z njimi rešiti kako zapleteno nalogo o prevajanju toplote.

Literatura

- [1] A. Likar, *Vrtinci v toku kapljev in plinov*, Presek 48 (20020/2021) 3, 15, 18-20.

× × ×

Astronomska fotografija za butalce



ANDREJ KREGAR

→ Začnimo zgodbo o astronomske fotografiranju tako, kot se za zgodbe spodobi.

Nekoč, v davnih časih, se je fotografiralo s fotoaparati in pogovarjalo po telefonih. Če si kupil motor, si dobil tudi navodila za uporabo. V njih je pisalo, kakšna mora biti in kako se nastavi zračnost ventilov.

Potem se je zgodil *napredek*. Zdaj fotografiramo s telefoni in se pogovarjamo po fotoaparatih. Če kupimo motor, dobimo tudi navodila za uporabo. V njih pa piše, da tekočina v akumulatorjih ni primerna za pitje. *Napredek* je koristna zadeva. Če ga imajo Tepanjčani, dajmo, imejmo ga še mi!, so bili navdušeni Butalci. In so namesto tablic čokolade začeli s seboj nositi pametne telefone. Ali so to morda pametni fotoaparati, ki mislijo in odločajo namesto njih? Butalcem so v veliko korist. Recimo fotografirajo Luno! Le kako jim to uspe?

To vam bo povedala ta zgodba, ampak prej pogledajmo še nekaj stvari. Luna je daleč, majhna je, planeti so še manjši, imeti moramo torej lečje, ki nam bo Luno približalo in ki ima dobro kotno ločljivost.

Ločljivost optičnega sistema je omejena z aberacijo in difrakcijo. Oba pojava sta med seboj nepovezana, aberacijo povzroči slabo načrtovanje in/ali izdelava optičnega elementa. Aberacij je več: krogelna aberacija, barvna aberacija, astigmatizem, popačenje. Do difrakcije pride zaradi valovne narave svetlobe in jo lahko razložimo z valovno optiko. Na aberacijo lahko vplivamo z globino svojega žepa – dražje lečje bo verjetno imelo manj napak. Na difrakcijo pa lahko vplivamo z izbiro ustreznega, to je čim večjega premera leče.

Kotno ločljivost lahko izračunamo po naslednji formuli:

- Kotna ločljivost $\sin \Theta = \frac{1,22\lambda}{D_{\text{ob}}}$, Θ = v radianih.

Kotno ločljivost običajno podamo v kotnih sekundah. Formula nam kotno ločljivost poda v radianih, za preračun moramo vedeti, da ima 1 radian 206265 kotnih sekund. Za valovno dolžino λ običajno vzamemo valovno dolžino rumene svetlobe, to je 580 nm. Faktor 1,22 je vrednost prve ničle Besslove funkcije prve vrste reda 1, deljene s π . Če bi imeli opravka z režo z vzporednima robovoma in ne okroglo lečo, bi bil ta faktor 1. Ker so koti majhni, lahko mirno rečemo, da je $\sin \Theta = \Theta$.

Kotna ločljivost, ki smo jo tako izračunali, ustreza Rayleighovemu kriteriju. John William Strutt, tretji Baron Rayleigh (1842–1919), je bil vsestranski angleški znanstvenik, fizik. Za odkritje argona je leta 1904 dobil Nobelovo nagrado za fiziko.

Predvsem proizvajalci optičnih sredstev pogosto navajajo ločljivost po Dawesovem kriteriju, ker da ta nekaj boljše rezultate. William Rutter Dawes je bil angleški astronom (1799–1868), ki je to mejo postavil povsem izkustveno. Njegova formula je

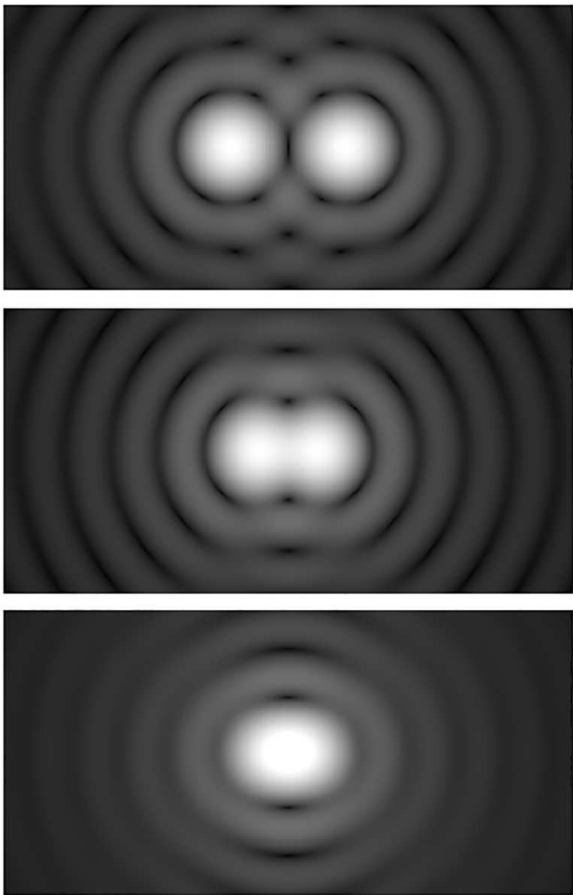
- $\Theta = \frac{4,56}{D_{\text{ob}}}$, D_{ob} = premer leče v colah.

Kotno ločljivost po Dawesu lahko izračunamo tudi po Rayleighovi formuli, vendar moramo za valovno dolžino svetlobe vzeti 562 nm.

Poglejmo še pod kakšnimi zornimi koti vidimo posamezna nebesna telesa (tabela 1).

Zvezde so vedno točkaste, le ozračje, optične aberacije in difrakcija jih razmažejo v večje pike.

Oko z zenico premera 5 mm ima kotno ločljivost okoli 30". Ta je premajhna, da bi lahko s prostim očesom na Luni videli kakšne podrobnosti. Daljnogled s premerom objektiva 50 mm ima kotno ločljivost 3", kar že zadostuje za opazovanje kraterjev na Luninem površju. V primeru dobre vidljivosti bomo s takim daljnogledom zaslitili tudi Saturnov kolobar, opazili štiri velike Jupitrove satelite, Sončeve pege in



SLIKA 1.

Airyjev vzorec, kot bi ga povzročili dve enobarvni točkasti svetili, gledani skozi okroglo odprtino. Gornji dve točki še jasno ločimo, srednji dve točki pa sta na kotni razdalji, ki ustreza Rayleighovemu kriteriju. Na spodnji sliki sta dve točki že združeni v eno in ju med seboj le še težko ločimo.

videli bomo, da je Rimska cesta sestavljena iz množice zvezdic. Z daljnogledom, teleskopom ali spektivom s premerom objektiva 100 mm, ki ima kotno ločljivost 1,3", bomo v dobrih pogojih v Saturnovem kolobarju že opazili Cassinijevo ločnico, seveda ob ustreznih izbiri povečave.

Omejena kotna ločljivost optike povzroči še nekaj: omejeno povečavo. Največjo smiselno povečavo lahko ocenimo po preprosti formuli

- Povečava $m \approx 2D_{ob}$, D_{ob} = premer leče v mm.

	min	max
Sonce	31,6'	32,7'
Luna	29,43'	33,5'
Venera	9,7"	66,0"
Jupiter	29,8"	50,1"
Mars	3,5"	25,1"
Saturn	14,5"	20,1" (planet), 34" 45" (obroči)
Merkur	4,5"	13,0"
Uran	3,3"	4,1"
Neptun	2,2"	2,4"

TABELA 1.

Ker leče nimajo omejene ločljivosti samo zaradi difrakcije, ampak tudi zaradi aberacij, se v praksi še ta povečava pokaže za preveliko. Realno je pričakovati največjo povečavo, ki je enaka premeru objektiva v mm.

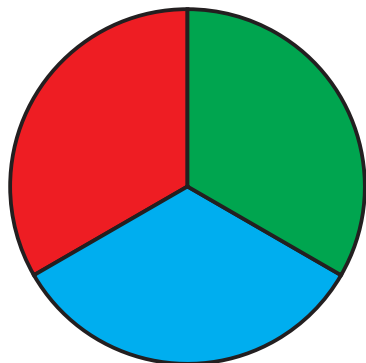
Seveda lahko določimo tudi najmanjšo, še smiselno povečavo za določen premer objektiva. Izhodna zenica daljnogleda (premer svetlobnega snopa, ki izhaja iz okularja) je

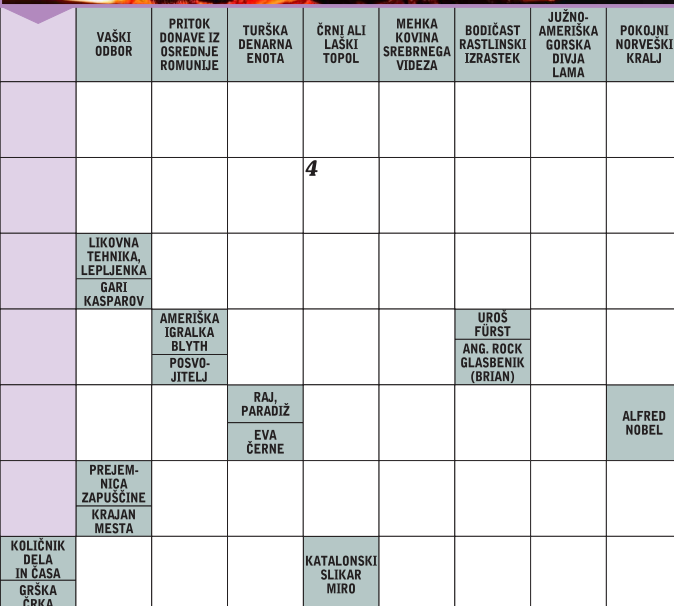
▪ Izhodna zenica $\Phi = \frac{D_{ob}}{m}$.

Če je premer izhodne zenice daljnogleda večji od premera zenice očesa, del svetlobe ne bo prišel v naše oko. Prav majhne povečave torej niso smiselne.

Do sedaj smo našli dve prednosti velikega premera objektiva: dobra kotna ločljivost in možnost velike povečave. Zlahka pa najdemo še tretjo. Velika površina objektiva pomeni, da bo v naše oko prišlo več svetlobe. Površina zenice premera 5 mm je malo manj kot 20 mm², površina objektiva s premerom 50 mm pa malo manj kot 2000 mm². V naše oko bo ob pogledu skozi daljnogled prišlo 100 krat več svetlobe. S prostim očesom v idealnih pogojih še vidimo zvezde z magnitudo +6, z daljnogledom pa že zvezde z magnitudo +11. Mimogrede smo ugotovili tudi, da je zvezda magnitude +6 kar 100 krat svetlejša od zvezde z magnitudo +11.







NAGRADNI RAZPIS

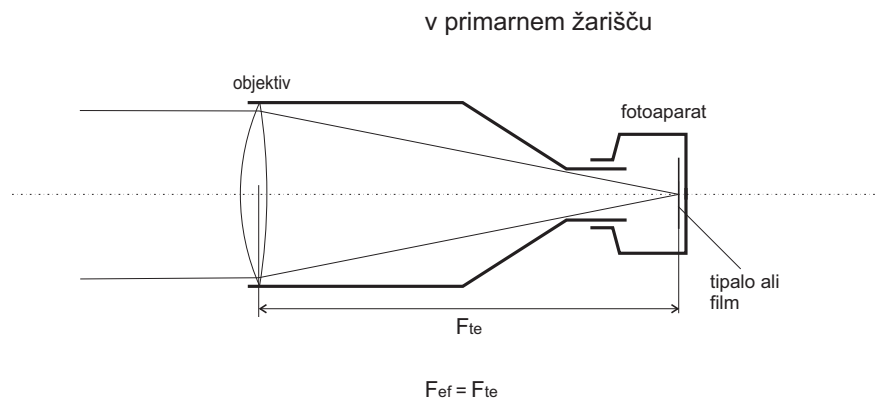
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. avgusta 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



15

nadaljevanje
s strani



SLIKA 2.

Seveda tudi s premerom objektiva nima smisla pretiravati. Zaradi turbulenc ozračja so slike zvezd, ki so sicer vedno točkaste, pri najboljših opazovalnih pogojih razmazane na približno 1". Za optično opazovanje torej zadostuje od 125 mm do 150 mm velik premer objektiva. Seveda se stvari spremenijo, če nameravamo postaviti opazovalnico nekje visoko v hribih in daleč od vsakih motenj in/ali se resno ukvarjati z astronomsko fotografijo. Za fotografiranje Lune imamo tri možnosti.

Fotografiranje v primarnem žarišču

Če imamo fotoaparata s snemljivim objektivom, tega odstranimo in namesto njega uporabimo objektiv teleskopa. Vpliva na goriščnico F_{ef} nimamo nobenega, velja $F_{ef} = F_{te}$. Kakovost slike bo zelo dobra.

Teleskopi in spektivi so običajno opremljeni s T2 (M42 $\times$ 0,75) navojem. Z le malo truda bomo na spletu našli adapter, ki bo ustrezal našemu fotoaparatu. Če fotoaparata s snemljivim objektivom nimamo, lahko namesto njega uporabimo (poceni) elektronski okular oziroma (drago) astronomsko kamero. Ti imajo običajni $1\frac{1}{4}$ colski nastavek, torej moramo poiskati ustrezen adapter. Tak okular ali kamero na računalnik priklopimo preko USB vmesnika, sliko opazujemo na zaslonu.

Kako velika bo ta slika? Velikost izračunamo po formuli

- $d = F_{te} \tan \varphi$, F_{te} = goriščna razdalja objektiva,
 φ = zorni kot opazovanega objekta.

Pri goriščni razdalji objektiva $F_{te} = 500$ mm in zornem kotu $0,5^\circ$ (Sonce ali Luno vidimo pod takim zornim kotom) bo slika objekta v gorišču velika 4,4 mm.

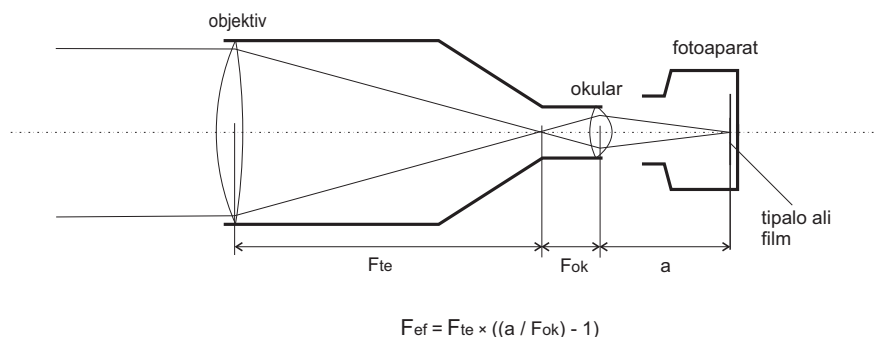


SLIKA 3.

Sončev mrk, fotografiran 11. avgusta 1999 v Siofoku na Madžarskem. Takrat še klasični film je bil postavljen v primarno žarišče objektiva tipa Maksutov z goriščno razdaljo 1000 mm in premerom 100 mm.

Če ima naša astro kamera tipalo IMX179, ki je veliko $6,18 \text{ mm} \times 5,85 \text{ mm}$, bo slika Sonca ali Lune zasedla skoraj vse tipalo, 75 % njegove višine, slika bo velika 1840 točk. Priljubljena astro kamera ASI071MC ima vgrajeno tipalo IMX071 velikosti $23,6 \text{ mm} \times 16,6 \text{ mm}$ in slika bo zasedla le še 28 % višine tipala, velika pa bo 670 točk. Na velikost slike objekta torej težko vplivamo, odvisna je od velikosti tipala in goriščne razdalje objektiva. Goriščno razdaljo objektiva lahko spreminjamo z Barlowovo lečo, ki goriščno razdaljo poveča, ali Shapleyevo lečo (focal reducer), ki goriščno razdaljo zmanjša.

okularna projekcija



SLIKA 4.

Postavitev optike pri okularni projekciji

Okularna projekcija

Zanjo potrebujemo fotoaparatus s snemljivim objektivom ali elektronski okular oziroma astronomsko kamero. Običajni digitalni in telefonski fotoaparati torej ne pridejo v poštev. Postavitev je razvidna s slike 4.

Fotoaparatu odstranimo objektiv in ga postavimo v optično os teleskopa. Ostrino na tipalu (ali filmu) bomo dosegli s premikanjem okularja in/ali fotoaparata. Z izbiro goriščne razdalje okularja in s spreminjanjem razdalje a bomo dosegli različne F_{ef} in s tem različne povečave. Te so seveda odvisne od velikosti tipala.

Efektivno goriščno razdaljo izračunamo

$$\blacksquare F_{ef} = F_{te} \left(\left(\frac{a}{F_{ok}} \right) - 1 \right).$$

Primer. Pri teleskopu z goriščno razdaljo objektiva $F_{te} = 500$ mm in goriščno razdaljo okularja $F_{ok} = 20$ mm ter razdaljo $a = 100$ mm bomo dosegli efektivno goriščno razdaljo $F_{ef} = 2000$ mm.

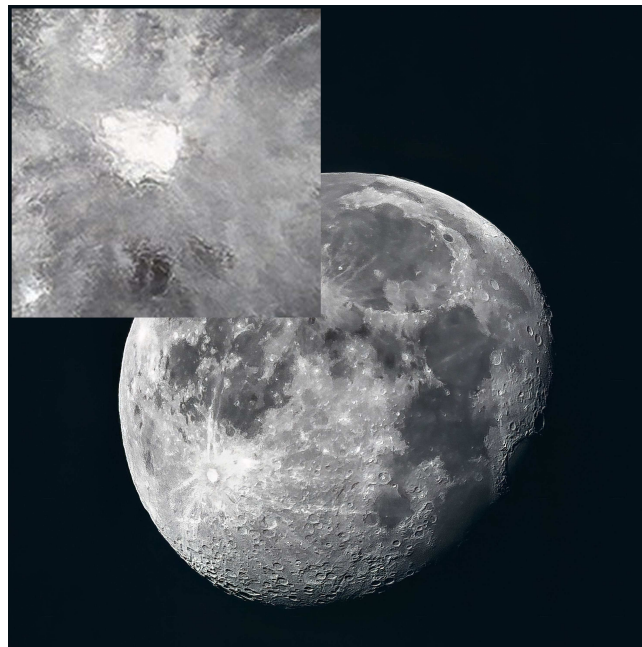
Pri $F_{ok} = 10$ mm bo F_{ef} že 4500 mm. Z uporabo dobrega okularja bo tudi kakovost slike dobra. Če bo imel okular široko zorno polje, tudi vinjetiranja ni pričakovati.

Filtre lahko privijemo seveda kar pred okular. Kak filter ne bo škodil v nobenem primeru.

Ne smemo pozabiti tistega, česar smo se naučili na začetku. Največja uporabna povečava je približno enaka premeru objektiva v mm. Z uporabo različnih okularjev in izbiro razdalje a smo sicer povečali goriščno razdaljo, premera objektiva pa žal ne. S povečavami zato ne pretiravajmo.

Afokalna projekcija

Ta pristop je danes znan tudi pod imenom digiskopija. S fotoaparatom fotografiramo sliko, ki bi jo videli ob pogledu skozi okular. Za digiskopijo je dober prav vsak daljnogled ali spektiv, prav tako lahko za fotografiranje uporabimo vsak fotoaparatus in celo telefon, če le ni Ericsson GA 628 ali Nokia 3110. Foto-

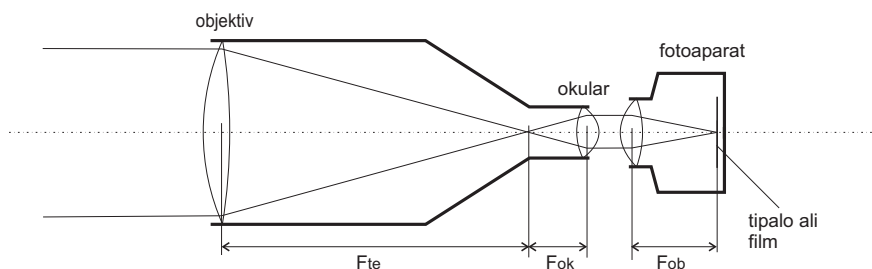


SLIKA 5.

Luna, slikana v okularni projekciji. Navidezno brezhibna slika pri večji povečavi pokaže neostrost zaradi turbulenc v Zemljinem ozračju.



afokalna projekcija



$$F_{ef} = (F_{te} \times F_{ob}) / F_{ok}$$

SLIKA 6.

aparati so primernejši, ker imajo na sprednji strani objektiva navoj za filtre. Ta navoj nam lahko pride prav za pritrditev fotoaparata na okular teleskopa. Če ima fotoaparat zoom, boste lahko z njim določali efektivno goriščno razdaljo F_{ef} .

Postavitev je razvidna s slike 6.

Najprej moramo pripraviti daljnogled ali teleskop. Zostrimo ga na objekt, ki ga nameravamo slikati. Če nosimo očala, ostrimo z očali. Svetlobni žarki, ki izhajajo iz objektiva, morajo biti vzporedni. Tudi fotoaparatu nastavimo ostrino na neskončno in ga postavimo pred okular. Razdalja med okularjem in fotoaparatom ali telefonom ne vpliva na efektivno goriščno razdaljo, lahko pa zelo vpliva na vinjetiranje. Najboljšo določimo s poskušanjem, naj pa bo čim krajša. Recepta ni, pojav je odvisen od konstrukcije in zornega kota okularja. Okular naj bo torej dober, s širokim zornim poljem (> 47 stopinj) in očesno razdaljo (eye relief), ki naj bo večja od 15 mm. Zoom fotoaparata nastavimo na najdaljšo goriščnico. Lepo je, če je goriščna razdalja objektiva fotoaparata večja od goriščne razdalje okularja.

Poskusimo fotoaparat ali telefon nastaviti na makro.

Digitalni zoom, ki ga ima večina telefonov, nikakor ni enakovreden pravemu, optičnemu zoomu.

Efektivno goriščno razdaljo F_{ef} določimo z izbiro goriščne razdalje okularja F_{ok} in goriščne razdalje fotoaparata F_{ob} . Izračunamo jo po formuli

$$\blacksquare F_{ef} = \frac{F_{te} F_{ob}}{F_{ok}}.$$

Primer. Pri teleskopu z goriščno razdaljo objektiva $F_{te} = 500$ mm in goriščno razdaljo okularja $F_{ok} = 20$ mm ter goriščno razdaljo objektiva $F_{ob} = 100$ mm

bomo dosegli efektivno goriščno razdaljo $F_{ef} = 2500$ mm.

Pri $F_{ok} = 10$ mm bo F_{ef} že 5000 mm.

Kakovost slike je seveda odvisna od kakovosti uporabljenih optičnih sistemov, bo pa verjetno slabša kot pri prejšnjih dveh načinih. Filter pred okularjem bo zelo koristen. Problem zna biti vinjetiranje, vendar to načeloma pri slikanju Lune in planetov ni zelo pomembno.

Ne pozabimo na to, da smo pri povečavi omejeni s premerom objektiva.

V nobenem primeru ne pričakujemo odličnih rezultatov, če bomo fotoaparat ali telefon držali v roki in z njim slikali v objektiv. Vsi optični elementi morajo biti čim bolj natančno poravnani v optični osi.



SLIKA 7.

Precej neuspela afokalna fotografija prehoda Venere čez Sončevo ploskev 8. 6. 2004. Kljub redkosti dogodka, se na fotografiranje z afokalno projekcijo nisem ustrezno pripravil.

Raznih adapterjev in pripomočkov za pritrditev fotoaparata ali telefona na objektiv daljnogleda, spektiva ali teleskopa je na spletu poljubno mnogo.

Za silo gre tudi z izolirnim trakom in s črnimi plastičnimi cevmi ali kartonastimi tulci WC papirja, plastičnimi škatlicami starih, dobrih filmov. Z zasilnimi rešitvami si lahko pomagamo vsaj pri določitvi najboljše razdalje med objektivom fotoaparata in okularjem, tako da lahko potem na spletu poiščemo najustrenejši adapter. Objekтиви telefonov imajo običajno tako kratko goriščno razdaljo, da jih moramo prisloniti praktično na okular.

O povečavi pri afokalnem fotografiranju težko govorimo. Velikost slike v goriščni ravnini smo se naučili izračunati pri fotografiranju v primarnem žarišču. Približno velikost slike Sonca ali Lune lahko izračunamo tudi po formuli, ki si jo lahko zapomnimo:

$$\blacksquare \quad d \approx \frac{F_{\text{ef}}}{111} \quad \text{velikost slike } d \text{ v mm.}$$

Potem pa je vse odvisno od velikosti našega tipala.

Ekspozicija – čas osvetlitve

Zavedati se moramo, da smo s podaljševanjem F_{ef} goriščno razdaljo objektiva povečali, premera njegove leče pa žal ne. Največja koristna povečava se torej ni povečala. Še vedno velja največja povečava = premer objektiva (v mm).

Zmanjšalo se je tudi f razmerje teleskopa:

$$\blacksquare \quad f = \frac{F_{\text{ef}}}{D_{\text{ob}}}, \quad D_{\text{ob}} \text{ je premer objektiva teleskopa v mm.}$$

Časi ekspozicije znajo biti torej dolgi.

Izračunamo jih lahko še vedno po stari formuli, le nov f moramo vzeti.

$$\text{Ekspozicija (sec)} = f^2 / (k \text{ISO}).$$

Faktor k je za različne objekte različen (tabela 2).

Primer. $D_{\text{ob}} = 120 \text{ mm}$

$$F_{\text{ef}} = 2500 \text{ mm}$$

$$k = 40 \text{ (prvi krajec)}$$

$$\text{ISO} = 100$$

$$f \text{ razmerje} = 25,5, \quad \text{ekspozicija } 0,15 \text{ sec}$$

Faktorje k smo našli v knjigi Thomasa Rackhama *Astronomical Photography at the Telescope*. Knjiga je izšla davnega leta 1959; vmes se je sicer zgodil napredek, faktorji pa so ostali enaki.



SLIKA 8.

Univerzalni adapter, s katerim pritrdimo telefon na okular daljnogleda ali teleskopa.



SLIKA 9.

Adapter za pritrditev fotoaparata na teleskop s priključkom T2





20	mlada/stara Luna
40	prvi/zadnji krajec
200	polna Luna
13,6	Saturn
32,5	Jupiter in Mars
1310	Venera

TABELA 2.

Da se teleskop s fotoaparatom ali telefonom ne trese, je stabilno stojalo obvezno. Tresenju pri proženju se lahko izognemo s uporabo samosprožilca ali daljinskega proženja.

Samodejno določanje faktorja ISO in/ali časa osvetlitve se pri fotografiranju nočnega neba praviloma ne bo obneslo, pametni fotoaparati in telefoni bodo težili k temu, da bo objekt preveč osvetljen.

Nočno nebo je pač črno in tej črnini se hoče avtomatika prilagoditi. Prisilimo torej napravo, ki jo uporabljamo za fotografiranje, naj se odpove svoji pameti, mi pa, vsaj ta čas, uporabljajmo lastno.

Če so objekti zadosti svetli (polna Luna, Venera), posnemimo kratek filmček, dolg sekundo ali dve.

Zakaj? Na spletu najdemo kup programov, ki znajo posamezne sličice filmčka zložiti v eno sliko. Izginilo bo precej napak in kakovost slike se bo zelo povečala, šuma bo manj in kontrasti bodo boljši.

Večino teh programov dobimo na spletu zastonj, vsaj njihovo osnovno različico, ki običajno zadostuje. Najbolj znani so Sequator, RegiStax, Planetary Imaging PreProcessor, SharpCap, AutoStakkert!, DeepSkyStacker.

Pri fotografiranju objektov globokega vesolja brez take obdelave posnetkov sploh ne gre.

Filtri

Če imamo sistem zastavljen tako, da lahko vanj vgradimo filtre, potem to možnost uporabimo. Običajno se filtri privijejo v navoj okularja, obstajajo pa tudi druge možnosti. Pri 1¼ colskih okularjih ima navoj filtra mere M28 × 0,6 mm. Univerzalno uporaben je filter za povečavo kontrasta (Contrast Booster). Fotografije Lune bodo mnogo lepše, če jih bomo foto-



SLIKA 10.

Saturn, posnet skozi objektiv refraktorja premera 102 mm in goriščno razdaljo 500 mm. Kratek filmček je bil zajet s pomočjo poceni elektronskega okularja v primarnem gorišču in obdelan v Registaxu.

grafirali skozi ustrezen zelen filter. Za fotografiranje Jupitra in Saturna uporabimo svetlo rumen ali temno rumen filter, če hočemo poudariti Cassinijevo ločnico. Lepa Venera bo še lepša, če jo bomo gledali skozi moder filter ... Pri uporabi filtrov vsekakor velja, da imajo vsake oči svojega malarja, a edino veljavno pravilo je: poskušajmo, poskušajmo.

Nikoli, ampak prav nikoli pa ne usmerimo nobene optične naprave proti Soncu, če na napravi nimamo nameščenega ustreznega filtra! Ta mora nujno zadržati tudi in predvsem infrardečo svetlobo. Večina ustreznih filtrov ima na površini nanese-
n tanko plast kroma, srebra ali aluminija, ki slabi tako vidno kot infrardečo svetlobo. Da bo sončni filter varen, sme prepuščati manj kot 0,0003 % vidne in manj kot 0,5 % infrardeče svetlobe. Najprimernejša je aluminizirana Mylar folija, narejena posebej za opazovanje Sonca. Mylar folijo lahko režemo v poljubne oblike in se ne razbije, če nam po nesreči pade na tla. Na objektiv jo lahko enostavno namestimo s pomočjo elastike, enakomerno napnemo in potem še zavarujemo z lepilnim trakom, da nam je med opazovanjem ali fotografiranjem po nesreči ne izstreli z objektiva. Nikoli ne uporabljajmo poceni sončnih filtrov, ki se privijejo na okular. Zaradi pregrevanja lahko počijo in do poškodbe mrežnice bo prišlo prej, preden bomo lahko reagirali.

× × ×

Brez gesla in brez omejitev s prelivom spomina



MAKS KOLMAN



Uvod

Ko se poglobimo v računalništvo, spoznamo, da težo modernega sveta držijo le desetletja stara koda, lepilni trak in upanje. To negotovost najbolj prikažejo varnostne luknje v sistemih, ki so razširjeni po celem svetu. Primer take ranljivosti je *Heartbleed*, ki je bil zaznan leta 2014. *Heartbleed* je omogočal javen vpogled v sisteme z ranljivo verzijo knjižnice OpenSSL, ki jo uporabljamo za vzpostavljjanje varne povezave do strežnikov. Prvo ranljivo verzijo so izdali leta 2012, do odkritja napake pa je bila ta prisotna že v več kot dveh tretjinah vseh spletnih strežnikov.

V tem članku se bomo poglobili v napako (poimenovano *Baron Sameedit*), ki so jo januarja letos odkrili na sistemih Linux in macOS. Ranljivost so našli v programu *sudo* in pokazali, da lahko dobi vsak uporabnik administratorske (root) pravice na sistemu, ne da bi imel za to pravice in brez poznavanja kakršnih koli gesel.

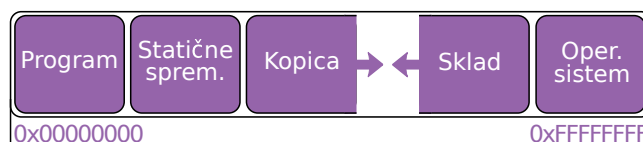
Tako *Heartbleed* kot *Baron Sameedit* sta ranljivosti, povzročeni s prekomernim in neželenim dostopom do pomnilnika. Takšne vrste napak so med najbolj pogostimi in so tipične za programe, napisane v jezikih C/C++. Da bomo lahko razumeli, zakaj pride do takih ranljivost in zakaj lahko ostanejo tako dolgo skrite, moramo najprej razumeti, kako programi uporabljajo spomin.

Model računalniškega pomnilnika

Računalniški pomnilnik (*angl.* Random Access Memory – RAM) opravlja pomembno vlogo pri delovanju računalnika. Vsakič, ko zaženemo katerikoli pro-

gram, mu operacijski sistem dodeli del pomnilnika in vsak bajt spomina označi z unikatnim naslovom. Na 32-bitnih sistemih je vsak naslov sestavljen iz 32 bitov. Ko jih zapišemo v šestnajstiškem sistemu, segajo od 0x00000000 do 0xFFFFFFFF.

Pomnilnik je razdeljen na predele, ki opravljajo različne naloge (slika 1). Ob zagonu programa se v najmanjše naslove pomnilnika naloži koda zagnanega programa. Poleg je prostor za vse statično definirane spremenljivke v našem programu. Na drugem koncu pomnilnika so programu na voljo knjižnice operacijskega sistema, ki jih uporablja za dostop do povezanih naprav, kot so ekran, miška, tiskalnik ali trdi disk. Med dvema skrajnostma pomnilnika se nahajata dve vrsti dinamičnega spomina: kopica in sklad.



SLIKA 1.

Model računalniškega pomnilnika ob delovanju programa

Skald se nahaja pri višjih naslovih pomnilnika. V njem so shranjeni trenutno aktivni klici funkcij ter lokalne spremenljivke. Skald deluje hitro, vendar je njegova velikost omejena na nekaj megabajtov (točna omejitev je odvisna od operacijskega sistema). Vse večje objekte mora program posledično shraniti v kopico. Kopica se nahaja pri manjših naslovih in raste proti večjim. Velikost mu omejuje le skupno število naslovov, ki jih ima program na voljo, ter količina prostega spomina v računalniku.



→ Preprost primer ranljivosti

Kako zgleda ranljiv program v praksi? V tem delu bomo pregledali konkretni primer napake. Spodaj je program, napisan v jeziku C++ in skriva kritično napako. Jo opazimo?

```
#include <stdio>
#include <cstring>

const char* const GESLO = "geslo123";
int main() {
    int geslo_je_pravilno = 0;
    char prebrano_geslo[100];

    printf("Vpiši geslo: ");
    gets(prebrano_geslo);

    if (strcmp(prebrano_geslo, GESLO)) {
        printf("Napačno geslo.\n");
    } else {
        printf("Pravilno geslo.\n");
        geslo_je_pravilno = 1;
    }

    if (geslo_je_pravilno) {
        // Uporabnik se je uspešno prijavil
        printf("Dobrodošli v vaš račun.\n");
    }
    return 0;
}
```

Preden poskušamo razumeti napako, se posvetimo delovanju programa. V prvih dveh vrsticah z uvozom knjižnic poskrbimo, da bomo lahko brali iz standardnega vhoda, pisali na standardni izhod in primerjali nize znakov. Naša prva spremenljivka, GESLO, je enaka »geslo123« in predstavlja skrivno geslo, ki ga uporabnik potrebuje za vstop v svoj račun.

Program se začne izvajati na peti vrstici s funkcijo main(). Najprej si pripravimo spremenljivko, ki nam bo povedala, ali je to geslo pravilno, in jo nastavimo na ničelno vrednost. Potem rezerviramo 100 bajtov prostora za geslo, ki ga bo vpisal uporabnik. Obe spremenljivki se nahajata na skladu ena za drugo.

Uporabnika prosimo, da vnese geslo, ga preberemo in shranimo v prebrano_geslo. Naslednji blok kode primerja prebrano geslo in GESLO ter obvesti uporabnika, ali je vneseno geslo pravilno. Če je ge-

slo pravilno, si to zabeležimo v geslo_je_pravilno. Če se je uporabnik uspešno vpisal, ga na koncu pozdravimo v njegovem računu. V primeru resničnega programa bi imeli uporabniki tu dostop do podatkov ali funkcionalnosti, ki je namenjena le njim.

Kako izvedba programa zgleda v praksi? Poglejmo si dva primera:

Vpiši geslo: geslo123 Pravilno geslo. Dobrodošli v vaš račun.	Vpiši geslo: 123456 Napačno geslo.
--	--

PRIMER.

Levo: uspešen vpis v sistem. Desno: neuspešen vpis v sistem.

Vidimo, da program očitno deluje. Kje je torej težava? Poglejmo, kaj se zgodi, če poskusimo vnesti daljše geslo:

```
Vpiši geslo: iiii
iiii
iiii
iiii
iiii
Napačno geslo.
Dobrodošli v vaš račun.
[1] 692249 segmentation fault
```

Zanimivo. Program zazna, da je geslo napačno, vendar nas na koncu vseeno spusti v račun, preden se sesuje z napako segmentation fault. Kako je to mogoče? Kaj se je zgodilo?

Problem je v delovanju funkcije gets. Ta se namreč ne meni za to, koliko spomina ima na voljo, ampak veselo napiše vse dobljene znake v spomin, četudi to pomeni, da ob tem prepiše druge spremenljivke. Kot smo že omenili, je spremenljivka prebrano_geslo shranjena na skladu. Tabela 1 prikazuje strukturo spomina v treh primerih.

Zanima nas predvsem tretji primer, kjer smo z besedilom prepisali število geslo_je_pravilno. Ponavljajoče zapisan bajt je 01101001₂. Kot znak se to prevede v 'i', kot število pa v 105. Vrednost spremenljivke geslo_je_pravilno je tako neničelna, kar nam dovoli vstop v račun. Bolj natančno je vrednost štirikrat ponovljena vrednost 105 v binarnem siste-

	prebrano_geslo											geslo_je_pravilno				
...	'1'	'2'	'3'	'4'	'5'	'6'				...		0	0	0	0	...
...	'g'	'e'	's'	'l'	'o'	'l'	'2'	'3'			...	1	0	0	0	...
...	'i'	'i'	'i'	'i'	'i'	'i'	'i'	'i'	'i'	...	'i'	105	105	105	105	...

TABELA 1.

Vsaka celica tabele predstavlja en bajt spomina v skladu. Na levi je spomin z manjšim naslovom, na desni pa z večjim. Tri vrstice ponazarjajo tri različne primere, ki smo jih poizkusili. Vidimo, da je v tretjem primeru vneseno besedilo preseglo 100 bajtov, dodeljenih spremenljivki `prebrano_geslo`, in se prelilo v naslednje celice spomina.

mu, kar je enako

$$\begin{aligned} & 01101001\ 01101001\ 01101001\ 01101001_2 = \\ & 105 + 105 \cdot 2^8 + 105 \cdot 2^{16} + 105 \cdot 2^{24} = 1768515945. \end{aligned}$$

Zaradi prekomerne količine i-jev se ti nadaljujejo še naprej po spominu. Za potrebe našega razumevanja je pomembno, da nekoč naletijo na vrnitveni naslov funkcije (return address). To je spremenljivka, v kateri je shranjen naslov spomina, kjer bo program nadaljeval izvajanje, ko se trenutna funkcija zaključi. Ker smo ta naslov prepisali z `0x69696969` (105_{16}), je program poskusil dostopati do neveljavnega spomina, kar je povzročilo napako `segmentation fault`. Iz tega smo se naučili, da ni potrebno pretiravati z dolžino gesla, ki ga vpišemo. Če je geslo daljše od 100 znakov, vendar ne predolgo, lahko dobimo dostop do sistema, ne da bi se ta sesul.

Takšna previdnost podcenjuje dejstvo, da imamo dostop do vrnitvenega naslova in do razmeroma velikega dela spomina, ki ga lahko prepisemo po svoji volji. Vrnitveni naslov bi lahko spremenili tako, da bi bil usmerjen v spomin znotraj spremenljivke `prebrano_geslo`. To pomeni, da bi računalnik začel interpretirati bajte kot ukaze programa. V našem primeru bi ponavljal ukaz `0x69`, kar je na 32-bitnih Intel procesorjih ukaz za množenje.

V principu lahko v ta del spomina napišemo, kakršenkoli program si zaželim. Potrebno je samo, da je program manjši od 100 bajtov in da se lahko izvede v takih okoliščinah. Najbolj zanimiv program, ki ga lahko zaženemo, je ukazna vrstica (shell), saj lahko z njeno pomočjo zaženemo poljubne druge programe. Točna priprava in umestitev programa presega namen tega članka. Več učnih virov na to temo pa lahko najdete na spletu.

Ranljivi Baron Samedit

Ukaz *sudo* (angl. SuperUser DO) dovoli izbranim uporabnikom sistema, da zaženejo druge programe s pravicami superuporabnika. Podobno kot administrator na sistemu Windows ima superuporabnik neomejeno moč na sistemu. Namesti lahko nove programe, prebere vse datoteke na sistemu, tudi tiste, ki so last drugih uporabnikov. Če želi, lahko iz računalnika celo izbriše operacijski sistem. Superuporabnik je vsemogočen.

Torej si lahko mislite, kako nevarno bi bilo, če bi imeli do tega ukaza nenadzorovan dostop vsi uporabniki. Prav takšno ranljivost so letos odkrili raziskovalci pri Qualys Research Labs. Vsak z dostopom do uporabniškega računa na sistemu lahko dobi pravice superuporabnika. Tudi če ta račun sicer nima dovoljenja za uporabo *sudo*, ali če uporabnik ne pozna gesla računa, ki ga upravlja. Najbolj presenetljivo je, da je ta napaka v *sudo* prisotna že od julija 2011.

Dejansko napako so našli pri uporabi ukaza *sudoedit*, ki je točna kopija ali celo povezava programa *sudo*. Ukaz je namenjen urejanju tekstovnih datotek s pravicami superuporabnika. *Sudoedit* avtomatično odpre urejevalnik besedila in v njem datoteko, ki jo hoče uporabnik urediti. Pred tem program preveri, da ima uporabniški račun dovoljenje za uporabo *sudo*, in zahteva, da vnese uporabnik geslo računa, ki ga uporablja.

Ranljivost je prisotna pri uporabi argumenta `-s`. V primeru, da se njegov argument konča s poševnico (`\`), bo prekoračil meje svoje spremenljivke in začel nenadzorovano pisati po spominu. Za razliko od našega primera v prejšnjem odseku se vse to dogaja v kopici, ne v skladu. Če vas zanima, ali je vaš sistem ranljiv, lahko poizkusite pognati spodnji ukaz



→ sudoedit -s '\ ' 'To besedilo se bo prelilo po spominu'

Če dobite napako Segmentation Fault, je vaš sistem še vedno ranljiv in ga morate posodobiti. V nasprotnem primeru bi se vam morala na zaslon izpisati navodila za uporabo, začenši z »usage: sudoedit«. Ker je napaka prisotna v kopici in ne v skladu, nam izkoriščanje te ranljivosti preprečuje še randomizacija spomina (angl. Address space layout randomization - ASLR). Naloga ASLR je, da naključno spreminja, na katerem naslovu pomnilnika se nahaja kakšna spremenljivka. S tem zaščitimo programe pred napadi, za katere je potreben natančen dostop do spremenljivk.

V tem primeru so problem rešili tako, da so napad pogнали 128 tisočkrat na različnih naslovih. Ker ranljivost preverijo hitro in je možnosti razmeroma malo, lahko raziskovalci dobijo neomejen dostop do sistema v manj kot 20-ih sekundah. Po tem, ko so raziskovalci našli ranljivost, so 13. januarja o tem skrivaj obvestili razvijalce programa sudo. Nato so 19. januarja poslali popravek vzdrževalcem vseh večjih distribucij Linuxa, ki so teden dni kasneje istočasno izdali popravljene verzije. Pri takšni ranljivosti je zelo pomembno, da ni prehitro javno razkrita. Z etičnim razkritjem kritičnih napak raziskovalci poskrbijo, da lahko vsak zaščiti svoje naprave, preden navodila za napad pristanejo v rokah javnosti.

Več podrobnosti o raziskavi in ranljivosti si lahko preberete na njihovi spletni strani blog.qualys.com.

Zaključek

Naslednjič, ko boste programirali, raje dvakrat preverite, ali ima vaš sistem trdne temelje in ali uporabljate ranljive funkcije. Uporaba funkcije gets nam na primer v novejših prevajalnikih kode prikaže opozorilo, da njena uporaba ni varna. Od verzije C++14 naprej pa gets sploh ni več na voljo. Varnost programov in programskih jezikov se izboljšuje, vendar so jim varnostni raziskovalci vselej za petami, da najdejo vse, še tako skrite, napake.

Če vas ta članek nauči le eno stvar, naj bo to: redno in skrbno posodablajte svoje računalnike, še posebej sisteme, do katerih ima dostop veliko ljudi.

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	9	17					
8						3	14
13			9		21	8	
	12			14			
		12		11			
			17				

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

		6	8	17			
		7	3	2	12		
8	1	5	14	11	7	5	12
9	2	21	8	9	6	4	13
14	3				3	5	8
				17	9		

Maturantski matematični geolov v okolici Postojne



MIHA ŠUŠTERŠIČ

→ Geolov je pustolovska igra, ki združuje reševanje ugank in rekreacijo z GPS orientacijo. Postavlja ob znamenitostih v naravi ali mestu skrije škatlico, ki mora vsebovati vpisno knjigo, v katero najditelji vpišejo svoj vzdevek in datum najdbe. Na spletnem portalu [1] avtor objavi zemljepisno širino in dolžino lokacije, zahtevnost naloge in terena, opis znamenitosti, velikost zaklada ter morebitni namig o skrivni lokaciji. Iskalci oziroma igralci geolova na spletu poiščejo zemljevid, na katerem so vrisane lokacije skritih zakladov. S pomočjo GPS naprave oziroma aplikacije na telefonu se nato podajo na teren in poiščejo izbrano skrito škatlico. Svoja doživetja ob iskanju nato opišejo na portalu, kjer jih lahko vidijo naslednji iskalci. Končna lokacija in oblika zaklada je seveda skrivnost, ki je iskalci po pravilih igre ne smejo izdati v svojih zapisih. Od postavljalca zakladov se pričakuje, da bo svoje zaklade tudi vzdrževal: odpravljaj morebitne poškodbe, zamenjal premočene vpisne dnevnike, dopolnjeval vsebino škatlic.

Igra izvira iz ZDA, začetki pa segajo v leto 2000, ko je bil GPS signal prvič dovoljen tudi v civilne namene. V Sloveniji je bil prvi zakladek postavljen že junija 2001 na obali (pri Luciji), konec marca 2021 pa je bilo pri nas nekaj manj kot 5500 skrivališč [2]. Obstaja več vrst zakladov, tri najpogostejše so:



Tradicionalni zakladi, ki jih iščemo samo s pomočjo koordinat, ki predstavljajo točno lokacijo zaklada;



Večstopenjski zakladi, ki vsebujejo dve ali več lokacij, ki jih je potrebno obiskati, če želimo pridobiti informacije glede končne lokacije zaklada;



Ugankarski zakladi, pri katerih moramo najprej rešiti uganko, s pomočjo katere pridobimo končne koordinate.

Nekateri postavljalci zakladov se odločijo za postavitev serije oziroma t. i. traila – poti v naravi, na kateri je skritih več zakladov. Pri tem se morajo držati pravila, da je medsebojna razdalja dveh zakladov vsaj 161 metrov (0,1 milje). Serije se običajno zaključijo z bonus zakladom, ki ga iskalec najde s pomočjo podatkov iz skrivališč obiskane poti.

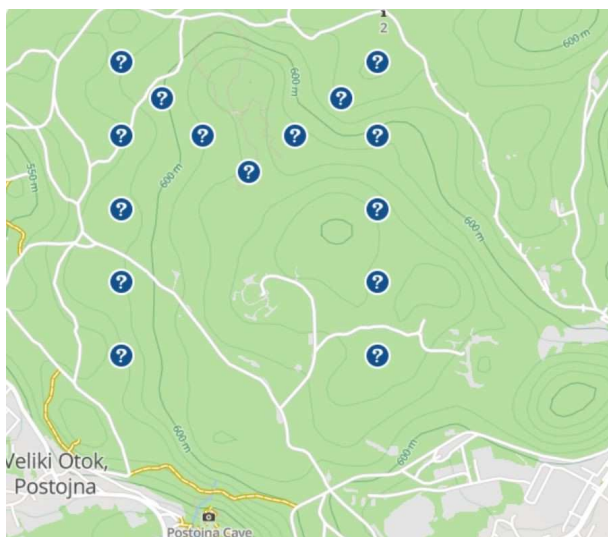
Serijski zakladi MM – matura iz matematike

Avtor članka se z geolovom ljubiteljsko ukvarja že nekaj let; poleg iskanja zakladov na družinskih izletih mu poseben izziv predstavlja skrivanje zakladov. Med njimi je tudi serija petnajstih **ugankarskih zakladov** z imenom **MM – matura iz matematike**, katerih koordinate iskalec pridobi z reševanjem matematičnih nalog. Serijo po vzoru maturitetne pole osnovnega nivoja sestavlja **osem zakladkov tipa A** (kratke naloge) in **šest zakladov tipa B** (krajše strukturirane naloge). Štirinajstim nalogam je dodan še **bonus zakladek**, za katerega je potrebno uporabiti podatke iz obiskanih zakladov in rešiti strukturirano nalogo višje ravni mature, prav tako je potrebno v iskanje vložiti še približno uro dodatnega časa.



SLIKA 1.

Zakladi so običajno skriti tako, da jih naključni mimoidoči ne opazijo.



SLIKA 2.

Približne lokacije 15-ih zakladov serije MM oblikujejo črko M, natančne koordinate se pridobimo s pomočjo rešenih nalog.

Trasa serije poteka po kraški pokrajini severno od Postojne, nekje nad Postojnsko jamo. Pot je skrivna, saj se natančne lokacije zakladov razkrijejo šele potem, ko iskalec uspešno reši vse naloge. Skoraj krožna pot meri približno sedem kilometrov, je nezahtevna in primerna tudi za otroke (vendar ne z otroškim vozičkom), zakladi pa so postavljeni ob nekaterih markantnih objektih v naravi. Razdalje med posameznimi škatlicami so med 200 in 500 metri, sku-

pne hoje je za tri do štiri ure – odvisno, koliko časa iskalci porabijo za iskanje posameznega zaklada. Natančnejše informacije o posameznih zakladkih (konkretna naloga, dodatni namigi o skrivališčih, napotki za pretvorbo koordinat, priporočeno parkirišče) najdete tako, da poiščete naloge MM na že omenjenem portalu [1] (potrebna je brezplačna registracija).

Serijo zakladov MM je od postavitve sredi februarja do konca marca 2021 obiskalo približno 20 geolovskih ekip. Nekajmesečni trud postavljavca je poplačan z zadovoljstvom iskalcev, izraženim v njihovih zapisih, Slovenski Geocaching klub pa je zakladu MM – Bonus podelil tudi naziv Zakladek meseca marca 2021 [3]. Opisana serija pa ni edini primer matematike v slovenskem geolovstvu. Omenimo le nekaj v zadnjem času objavljenih: v bližini Vipave je isti avtor zlahka skril pet večstopenjskih zakladov z imenom Mostovi Vipave s krajšimi matematičnimi ugankami; v Dobovi pri Brežicah najdemo serijo osmih zakladov z naslovom Sprehod z nalogo avtorja »fpetel1«, ki je del nalog priredil iz objav v reviji Presek, geolovec »bojank« pa je objavil zakladek Mathematicians, pri katerem je za pridobitev koordinat potrebno najprej določena področja matematike povezati z matematiki, nato pa še rešiti nalogo iz geometrije.

Kot vabilo bralcem na naš geolov v okolico Postojne si oglejmo dva primera nalog iz opisane serije. Prvo nalogo predstavlja elementaren račun, kakršnega je potrebno na maturi rešiti brez računalna, pri drugi je potrebna nekaj znanja o elipsi.





Zaklad MM – A1

Uganka.

Izračunajte vsoto $A = 0,8\overline{3} + i^{1000} + \binom{4}{3} + \log_2 8 + e^0 + \frac{1}{6} + 83$.

Lokacija zaklada:

N 45°47.A–91, E 14°12.2*A+16 (Primer. Za vrednost $A = 93$ bi po vstavljanju v formulo dobili GPS koordinate N 45° 47.002, E 14° 12.202.)

Velikost zaklada: mikro (do 10 cm),

Zahtevnost iskanja: 3 / 5,

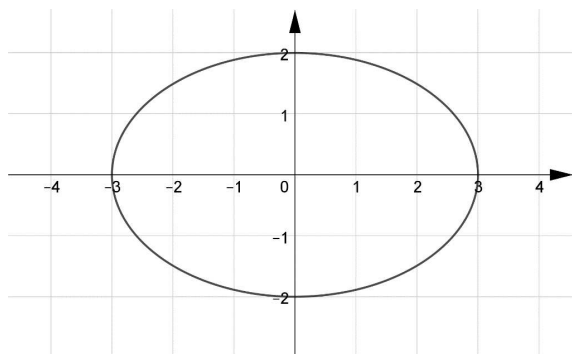
Zahtevnost terena: 2 / 5,

Dodaten namig: V mednožju.

Zaklad MM – A5

Uganka.

Enačba elipse na sliki je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Izračunaj vrednost $E = (a + b + e^2)^2$, kjer je e linearna ekscentričnost elipse.



Lokacija zaklada:

N 45°47.3*E+334, E 14°12.E–13

Velikost zaklada: mikro (do 10 cm)

Zahtevnost iskanja: 2.5 / 5

Zahtevnost terena: 2 / 5

Dodaten namig: Pri tleh enega od dvojčkov.

Vtisi obiskovalcev

»Z matematiko se je poigrala naša bodoča maturantka, zato je večina nalog imela hitro pravo rešitev. Lahko bi rekli, da je bila za nas cela serija objavljena ravno pravi trenutek, nekakšna predpriprava na letošnjo prav posebno covid-19 maturo.«

»Vsi zakladi v trailu so ODLIČNO pripravljeni in na super lokacijah. Lahko rečem, da je to eden najboljših trailov v Sloveniji! Preživel sem nepozaben dan v Postojni!«

»Junija bo minilo 50 let, ko sem pisal gimnazijsko maturo. Rešitvi zanimivih nalog iz metanja ikozaedra, upoštevanje med potjo nabranih vrednosti iz A in B zakladov, oboje nas je pripeljalo na končno točko. Bilo nas je dovolj, da je vsak imel svojo funkcijo, eden na drevesu, eden ob kamnih, eden na skalah, eden je računal in odklepal.«

»Ob 8h zjutraj se nas je na parkirišču nabrala skupina »sivih eminenc« s povprečjem kar veliko preko $3e^3$ let. Začeli z A-ji in nadaljevali z B-ji, končali pa seveda z bonusom. Brez dvoma je tole finale nad finali vseh trailov v Sloveniji.«

Literatura

[1] *Geocaching*, dostopno na www.geocaching.com/play, ogled 8. 4. 2021.

[2] *Statistics*, dostopno na project-gc.com/Statistics/Overview, ogled 8. 4. 2021.

[3] *Zaklad meseca – MM*, dostopno na www.geocacher.si/zaklad-meseca-mm-bonus-by-susterji/, ogled 11. 4. 2021.

× × ×

www.obzornik.si

www.presek.si

Dvignjene stopinje



NADA RAZPET

→ Ne le otroci, tudi odrasli radi hodimo po sveže zapadlem snegu in opazujemo sledi, ki jih puščamo za seboj. Pri hoji se sneg pod nogami stisne, zato se pogrezamo.

Globina ugreza je odvisna od vrste snega in podlage, na katero je zapadel sneg, in seveda tudi od pohodnikove mase ter velikosti podplatov. Pohodnik s svojo težo pritiska na podlago. Teža se porazdeli po stičnih ploskvah podplatov s snežno površino. Čim manjša je stična površina, tem večja sila deluje na plosčinsko enoto, zato se pohodnik globlje ugreza. Manj se vdira, če je stična površina večja, to je takrat, ko smo na smučeh ali pa si nataknemo krplje. To lahko opazimo na fotografiji (slika 1). Krplje so pustile plitek odtis, medtem ko so pohodnikove stopinje ugreznjene za nekaj centimetrov.



SLIKA 1.

Odtisi pohodnikov s krpljami in brez njih

Če je področje vetrovno, veter spiha nesprijet sneg in ostanejo dvignjene stopinje. Višina dvignjenih stopinj je odvisna od višine stisnjenega svežega snega nad sprijeto podlago. Enega takih pojavov opazimo tudi na fotografiji (slika 2), ki je bila posneta konec letošnjega januarja malo pred poldnevom nekaj metrov stran od Roblekovega doma.



SLIKA 2.

Dvignjene stopinje

Fotografiji je posnel Andrej Razpet.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

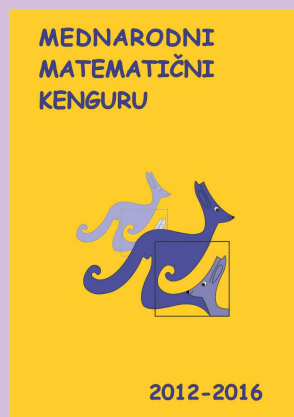
Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR



v pripravi

Pri DMFA – založništvo je izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016.*

V pripravi na tisk pa je že šesta knjiga Matematičnega kenguruja. Izšla bo v juniju.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!