3

PRESEK LETNIK 47 (2019/2020) ŠTEVILKA **3**

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#3

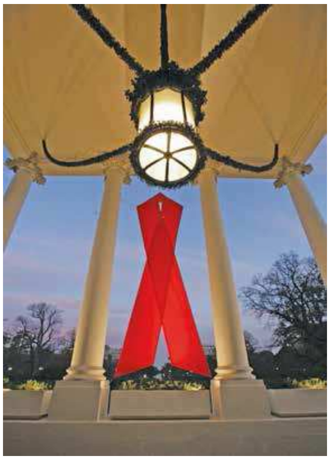
PRESEK

ISSN 0351-6652

9 770351 665739

MATEMATIČNI TRENUTKI

Ohranjanje življenj



Še nedolgo tega je diagnoza HIV pomenila gotovo smrt. Matematična analiza in verjetnostni račun sta pomagala pri spremembi tako neizprosne napovedi. Neodvisni skupini raziskovalcev sta rezultate eksperimentov s pomočjo analize spremenili v model razmnoževanja virusa in pokazali, da tudi v fazi, ko se zdi virus neaktiven, dnevno nastaja milijarde novih virusov. Navidezna faza neaktivnosti v resnici pomeni izenačen boj imunskega sistema z virusom. V tem času je zelo koristno, da pomagamo imunskemu sistemu. Raziskovalci so s pomočjo verjetnostnega računa predvideli, da bi kombinacija treh zdravil zelo dobro uravnavala razmnoževanje virusa, navkljub njegovim hitrim mutacijam. Imeli so prav. Pravočasna uporaba kombinacije zdravil je sicer draga in ne zagotavlja popolne ozdravitve, uspešno pa upočasni razmnoževanje virusa in njegovo širitev.

Matematika prav tako pomaga v svetovni borbi z malarijo, z boleznijo, ki pobije več kot štiristo tisoč ljudi na leto. Matematični model je uspešen tako na celični ravni, ko pomaga razumeti lastnosti rdečih krvničk po okužbi s paraziti, kot tudi na regionalni ravni, ko razloži širjenje infekcije in uspešnost cepljenj ter komarnikov v borbi z malarijo. Okuženi ljudje prenašajo parazite na komarje, ti pa okužijo dotlej zdrave ljudi. Ta dvosmerni model okužb komarjev in ljudi je sestavljen iz virov okužbe, ki se gibljejo naključno. Takšne modele lahko uporabimo tudi za druge bolezni, ki jih prenašajo komarji, recimo pri dengi ali ziki.

Za več informacij si lahko preberete knjigo *Infinite Powers: How Calculus Revels the Secrets of the Universe*, ki jo je napisal Steven Strogatz in je izšla letos.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Fotografija Bohinjskega jezera narejena na sončen, jesenski dan. V brezvetrju je gladina brez valov in gladka kot zrcalo. Ali na odsevu okolice jezera opazite kaj nenavadnega? Če ne, si oglejte prispevek o naravoslovni fotografiji.

Računovodsko pravilo 2

Ivan Lisac

Pred leti smo v Preseku [1] pisali o računovodskem pravilu, s katerim smo ugnali nekaj končnih vsot. Obudimo tokrat pravilo v nekaj novih primerih.

Računovodsko pravilo

Naj bosta A in B končni množici ter R poljubna podmnožica kartezičnega produkta $A \times B$. Podmnožici R pravimo tudi *relacija*. Da sta elementa $a \in A$ ter $b \in B$ v relaciji R zapišemo $(a, b) \in R$ ali krajše aRb. Za dani $a \in A$ lahko zberemo vse $b \in B$, ki so v relaciji R z a v množico

- $R(a) = \{b \in B : aRb\}$.

Obratno lahko definiramo za dani b množico

- $R^{-1}(b) = \{a \in A : aRb\}$.

Moč končne množice X bomo označili z $|X|$. Potem računovodsko pravilo pravi:

- $$|R| = \sum_{a \in A} |R(a)| = \sum_{b \in B} |R^{-1}(b)|. \qquad (1)$$

Z znakom $\sum_{a \in A} |R(a)|$ smo označili vsoto števil $|R(a)|$, ko a preteče množico A, podobno pojasnimo znak $\sum$ v ostalih primerih. Zgornjo trditev (1) si najlažje predočimo ob spodnji tabeli za poseben primer relacije $R \subseteq \{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum$
a_1	0	0	1	1	2
a_2	1	1	0	1	3
a_3	1	0	0	0	1
$\sum$	2	1	1	2	6

Zapišimo elemente množice A v skrajni levi stolpec, elemente množice B pa v zgornjo vrstico. Če je aRb, zapišimo na križišče ustrezne vrstice in stolpca enico, sicer postavimo tja ničlo. Potem so tri števila iz enakosti (1) zaporedoma: skupno število enic, vsota enic, šteta po vrsticah, in vsota enic, šteta po stolpcih $(2 + 1 + 1 + 2 = 2 + 3 + 1 = 6)$. Ta tri števila so enaka, zato enakost (1) velja. Sedaj si oglejmo nekaj primerov, kjer bomo izbirali množici A in B ter relacijo R, in tako našli ali vsaj preoblikovali nekaj končnih vsot.

Relacija 'deli' (|)

Označimo množico prvih n naravnih števil z znakom $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vzemimo $A = B = \mathbb{N}_n$ in $aRb \Leftrightarrow a|b$. Uvedimo še funkcijo *celi del*:

- $\lfloor x \rfloor = max(\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\})$.

Potem je

- $|R(a)| = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor$,

saj a deli števila

- $a, 2a, \ldots, \lfloor \frac{n}{a} \rfloor a$,

množica $R^{-1}(b)$ pa vsebuje delitelje števila b, tako da dobimo

- $$\sum_{a=1}^{n} \lfloor \frac{n}{a} \rfloor = \sum_{b=1}^{n} \tau(b). \qquad (2)$$

Tu je τ funkcija, ki šteje delitelje argumenta. Za npr. $n = 4$ je leva stran

- $\lfloor \frac{4}{1} \rfloor + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor + \lfloor \frac{4}{3} \rfloor + \lfloor \frac{4}{4} \rfloor = 4 + 2 + 1 + 1 = 8$,

desna pa

- $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(4) = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$.

Praštevilski kvocient

Vzemimo $A = B = \mathbb{N}_n$ in zahtevajmo za relacijo R še to, da je kvocient b/a praštevilo: $aRb \Leftrightarrow a|b \wedge b/a \in \mathbb{P}$. Potem je za dani a

- $|\{b \in B : pa = b, p \in \mathbb{P}\}| = |\{p \in \mathbb{P} : p \le \lfloor \frac{n}{a} \rfloor\}|.$

Moč množice $R^{-1}(b)$ pa je

- $|R^{-1}(b)| = |\{p \in \mathbb{P} : p|b\}| = \omega(b),$

kjer smo z $\omega(b)$ označili število praštevilskih deliteljev števila b. Uvedimo še funkcijo π, ki šteje praštevila do danega argumenta takole:

- $\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P} : p \le x\}|,$

pa že dobimo naslednjo enakost:

- $$\sum_{a=1}^{n} \pi(\lfloor \frac{n}{a} \rfloor) = \sum_{b=1}^{n} \omega(b). \qquad (3)$$

Primer.

- $$\pi\left(\lfloor \frac{4}{1} \rfloor\right) + \pi\left(\lfloor \frac{4}{2} \rfloor\right) + \pi\left(\lfloor \frac{4}{3} \rfloor\right) + \pi\left(\lfloor \frac{4}{4} \rfloor\right) = \\ = 2 + 1 + 0 + 0 = 3$$

in

- $\omega(1) + \omega(2) + \omega(3) + \omega(4) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3.$

Koreni

Vzemimo $A = B = \mathbb{N}_n$ in $aRb \Leftrightarrow a^2 \le b$. Potem so v $R(a)$ števila

- $a^2, a^2 + 1, \ldots, n,$

ki jih je natanko $(n - a^2 + 1)$, če je le $a^2 \le n$, ter 0 sicer. V množici $R^{-1}(b)$ pa so števila

$$1, 2, \ldots, \lfloor \sqrt{b} \rfloor.$$

Prvo vsoto zapišimo samo do tistega največjega m, pri katerem je $n + 1 - m^2 \ge 0$, tj. $m = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$, potem je

- $$\sum_{a=1}^{m} (n + 1 - a^2) = \sum_{b=1}^{n} \lfloor \sqrt{b} \rfloor = \\ = m(n + 1) - m(m + 1)(2m + 1)/6. \qquad (4)$$

Pri tem smo uporabili znano formulo za vsoto prvih m kvadratov

- $1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = m(m + 1)(2m + 1)/6.$

Za npr. $n = 10$ imamo $m = 3$ in

- $$\sum_{b=1}^{10} \lfloor \sqrt{b} \rfloor = 3 \cdot 11 - 3 \cdot 4 \cdot 7/6 = 33 - 14 = 19.$$

Negibne točke

Vzemimo $A = \mathbb{N}_n$ in $B = A^A$ množico preslikav f iz množice A vase. *Negibna točka* $a \in A$ funkcije f zadošča enakosti $f(a) = a$. Postavimo $aRf \Leftrightarrow f(a) = a$ in preštejmo negibne točke teh preslikav. Najprej je

- $|R(a)| = |\{f \in B : f(a) = a\}| = n^{n-1},$

saj preslikavi f predpišemo negibno točko a, iz ostalih $n - 1$ vrednosti izberemo poljubno iz množice A. Množica $R^{-1}(f)$ pa je množica negibnih točk preslikave f. Sledi

- $$\sum_{a \in A} n^{n-1} = n^n = \sum_{f \in B} |R^{-1}(f)|, \qquad (5)$$

kar pomeni, da ima naključno izbrana preslikava v povprečju eno samo negibno točko. Podoben premislek lahko naredimo za množico bijektivnih preslikav množice A vase in dobimo enak rezultat: naključno izbrana permutacija ima v povprečju eno samo negibno točko.

Potence dvojke

Vzemimo $A = \mathbb{N}_n$ in potenčno množico $\mathcal{B} = P(A)$. Postavimo še $aRB \Leftrightarrow a = \min(B)$ za $B \ne \emptyset$. Potem je leva stran

- $$\sum_{a \in A} |R(a)| = \sum_{a=1}^{n} 2^{n-a} = \sum_{a=0}^{n-1} 2^a,$$

saj dobimo množice B z minimumom a tako, da izberemo ali opustimo elemente iz množice $\{a+1, a+2, \ldots, n\}$ moči $(n - a)$, kar da skupaj 2^{n-a} možnosti. Desna stran pa je

- $$\sum_{B \in \mathcal{B}} |R^{-1}(B)| = \sum_{B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}} 1 = 2^n - 1, \qquad (6)$$

saj ima neprazna množica B natanko en minimum. To je še en način seštevanja geometrijske vrste s koeficientom 2.

Dvojke ponovno

Vzemimo $A = \{(m, M) : 1 \leq m < M \leq n\}$ in potenčno množico $\mathcal{B} = P(\mathbb{N}_n)$. Postavimo tokrat

- $(m, M)RB \Leftrightarrow m = \min(B) \wedge M = \max(B)$.

Potem je $|R((m, M))| = 2^{M-m-1}$, saj so za dana minimum m in maksimum M v množici B prosti elementi za izbiro le še tisti vmes ($M - m - 1$ jih je). Ko m in M tečeta po množici A, zavzame izraz $M - m$ vrednosti od 1 do $n - 1$. Vrednost 1 zavzame $(n-1)$-krat, vrednost 2 zavzame $(n-2)$-krat, ... in vrednost $(n-1)$ enkrat tako, da velja

- $$\sum_{(m,M)\in A} 2^{M-m-1} = \sum_{v=1}^{n-1} (n - v)2^{v-1}.$$

Po drugi strani pa za vsako množico B z vsaj dvema elementoma dobimo natanko en tak par $(m, M) \in A$, da je $m = \min(B)$ in $M = \max(B)$, zato je

- $$\sum_{v=1}^{n-1} (n - v)2^{v-1} = \sum_{B\in\mathcal{B}'} 1 = 2^n - n - 1. \qquad (7)$$

V enakosti (7) smo se v drugi vsoti izognili enkrat prazni množici in n-krat enoelementnim množicam. Za npr. $n = 6$ dobimo

- $$5 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = \\ = 5 + 8 + 12 + 16 + 16 = 57 = 2^6 - 6 - 1.$$

Ciklične grupe

Oglejmo si še najbolj zahteven primer v tem članku. Definirajmo množico $\mathbb{Z}_n$ ostankov pri deljenju z n. Operacija na njej sešteva ostanke po *modulu* n in iz nje napravi *grupo*. Vzemimo za primer grupo $\mathbb{Z}_{12} = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Podobna je vsakdanjemu gledanju na uro, kjer lahko seštevamo ure preko poldneva, npr. $10 + 4 = 2(+12)$. Ostanek 12 je tu nevtralni element. Vsakega od ostankov lahko dobimo že zgolj s seštevanjem samih enic. Učeno pravimo, da ostanek 1 *generira* grupo $\mathbb{Z}_{12}$. Ni pa edini: družbo mu delajo še taki ostanki m, da števila $m, m + m, m + m + m, \ldots, 12m$ zasedejo vseh 12 ostankov, za kar zadošča, da za nek naravni k ostanek km zasede tudi enico oz. velja $km \equiv 1 \pmod{12}$ oz. je m tuj modulu 12. Generatorji $\mathbb{Z}_{12}$ so tako še ostanki 5, 7 in 11.

Grupe, ki jih generira že en sam generator, so *ciklične*. Podmnožicam grupe, ki so zaprte za dano operacijo (in njen inverz), pravimo *podgrupe*. Naštejmo vse podgrupe grupe $\mathbb{Z}_{12}$:

- $\{\underline{1}, 2, 3, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12\}$,
  $\{\underline{2}, 4, 6, 8, \underline{10}, 12\}$, $\{\underline{3}, 6, \underline{9}, 12\}$,
  $\{\underline{4}, \underline{8}, 12\}$, $\{\underline{6}, 12\}$, $\{\underline{12}\}$.

Tu smo generatorje podgrup podčrtali. Iz teorije grup si sedaj brez dokaza izposodimo tele trditve:

- Podgrupe ciklične grupe so ciklične.
- Za vsak delitelj d števila n obstaja natanko ena podgrupa moči n/d z generatorjem d.
- Vseh podgrup $\mathbb{Z}_n$ je kot deliteljev števila n, tj. $\tau(n)$.
- $\mathbb{Z}_n$ ima $\phi(n)$ generatorjev: to so ostanki, ki so tuji n.

Tu je $\phi(n)$ *Eulerjeva funkcija*, ki vrača število proti n tujih števil iz $\mathbb{Z}_n$. Sedaj vzemimo $A = \mathbb{Z}_n$ in $B = \{b \in \mathbb{Z}_n : b|n\}$ ter aRb, če a in b generirata isto podgrupo. Potem je $|R(a)| = 1$, saj obstaja natanko en tak generator $b \in B$, da je podgrupa generirana z a enaka podgrupi generirani z b. Obratno pa dani b generira ciklično podgrupo moči n/b, ki ima $\phi(n/b)$ generatorjev. Zato dobimo

- $$\sum_{a\in A} 1 = n = \sum_{b|n} \phi(n/b) = \sum_{b|n} \phi(b). \qquad (8)$$

V enakosti (8) smo pri tretjem enačaju elemente n/b samo našteli v obratnem vrstnem redu. Še primer: za $n = 12$ imamo

- $$\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(6) + \phi(12) = \\ = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.$$

Literatura

[1] I. Lisac, *O računovodskem pravilu*, Presek **24** (1997), 6, 346–351.

×××

Revolucija na področju oken

Peter Legiša

Odboj na steklu

Svetloba v prozornih snoveh potuje počasneje kot v vakuumu. Če je c hitrost svetlobe v vakuumu in c' hitrost svetlobe v snovi, je $n = c/c'$ *lomni količnik* snovi. Za zrak je lomni količnik praktično 1, za navadno steklo okrog 1,5, za vodo 1,33. Ko svetloba zadene mejo dveh prozornih snovi z lomnima količnikoma n in n', se del svetlobe odbije. Pri pravokotnem vpadu na mejo dveh prozornih snovi je delež odbite svetlobe enak [1, str. 472]

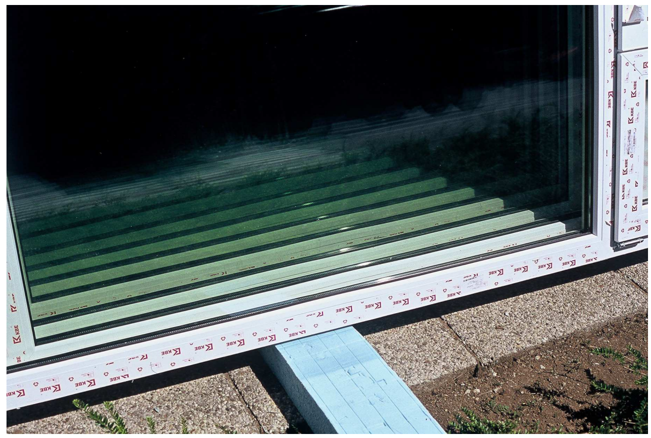
$$\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2.$$

Na meji zrak-steklo je tako delež odbite svetlobe enak $(1{,}5-1)^2/(1{,}5+1)^2 = (\frac{1}{5})^2 = 0{,}04$. Tako se pri pravokotnem vpadu na vsaki meji zrak-steklo odbije kake 4 % svetlobe. Na meji zrak-voda pa se odbije približno $((1/3)/(7/3))^2 = 1/49$ vpadle svetlobe, torej približno 2 %.

Bolj ko svetloba na tako mejo vpada poševno, večji je delež odbitega valovanja. To opazimo na vodni gladini, ko je sonce nizko nad obzorjem.

Šipa ima dve meji steklo-zrak, tako da se na eni šipi odbije približno osem odstotkov pravokotno vpadle svetlobe. Narcis v starogrški pripovedki se je torej v vodni gladini precej teže občudoval kot nekdo, ki uporabi štirikrat močnejši odsev na šipi. Nekaj svetlobe se v šipi tudi absorbira. Koliko, je odvisno od debeline šipe in kakovosti stekla.

Na skladovnici oken na sliki 1 opazimo, kako se svetloba izgublja ob prehodu skozi plasti stekel in kako se zmeraj bolj zeleno obarva. Vzrok za zeleno barvo so primesi železa v steklu. Če privzamemo, da običajna štiri milimetrska šipa absorbira dva odstotka pravokotno vpadle svetlobe, potem ta šipa prepušča približno 90 odstotkov pravokotno vpadle svetlobe. Čim več je šip, skozi katere potuje svetloba, tem manj je pride skozi.



SLIKA 1.
Zelenkasta barva stekla in naraščajoče izgube svetlobe pri prehodu skozi več šip

Dobijo pa se tudi šipe iz zelo čistega in zelo prozornega stekla, tako da se v njih absorbira le zelo malo svetlobe. Skozi dve taki tanjši šipi pride pri pravokotnem vpadu približno $0{,}92^2$ vpadle svetlobe, torej, če zaokrožimo navzdol, kakih 84 odstotkov. Delež svetlobe, ki pride skozi tri take šipe, je približno $0{,}92^3$, kar je, zaokroženo navzdol, 77 odstotkov.

Zasteklitve

V Sloveniji že dolgo uporabljamo dvojno zasteklitev. Okna lahko imajo dvojna krila, vsako krilo pa enojno steklo. To so tako imenovana *škatlasta okna*. Razmik med šipama je od decimetra do več decimetrov. Pozimi so med krili pogosto polagali po meri narejene blazinice, da bi omejili vdor hladnega zraka skozi reže med krili in okvirjem. Druga možnost je krilo z dvema stekloma v razmiku nekaj centimetrov. Krilo je z izvijačem ali kako drugače mogoče razstaviti. To so tako imenovana *vezana okna*. V obeh primerih je menjava razbite šipe enostavna in poceni. Steklar odreže potrebno velikost, nato pa je potrebno imeti le še nekaj kita in zatičev. Steklo je bilo pred pol stoletja in več rahlo valovito, tako da pogled skozenj prinese nekoliko deformirano sliko. V hudi zimi se na notranji strani zunanje šipe pojavijo ledene rože, ko vodna para iz stanovanja skozi reže pride v vmesni prostor in zamrzne na zunanjem steklu.

Delež svetlobe, ki pride skozi tako dvojno zasteklitev pri pravokotnem vpadu, ocenimo z $0{,}9^2$, torej približno 81 %.

Že leta 1930 so v ZDA izumili »termopan« steklo. Dve šipi sta ob robu prilepljeni na aluminijasto letvico – distančnik – širine kakih 10 mm (v ZDA sta po mojih izkušnjah šipi pogosto bili še bliže skupaj), med njima pa je suh plin. Nekateri so verjeli, da je med šipama vakuum, a je to seveda nemogoče, razen če so med stekloma precej na gosto nameščene prozorne opore, ki kljubujejo brutalni sili zunanjega tlaka. Okna so dobila tudi gumijasto tesnilo. Konstrukcija je enostavnejša in imamo pol manj dela s čiščenjem v primerjavi s škatlastimi okni. Ledene rože so praktično izginile. Toplotna izolacija pa se ni izboljšala – zaradi premajhnega razmika med šipama in aluminijaste letvice. Aluminij je namreč zelo dober prevodnik toplote. V mrzlem vremenu se na steklih in tenkih okvirjih še zmeraj pojavlja kondenz in z njim povezane težave – plesni, gnitje lesenih okvirjev.

Okna nam dajejo dnevno svetlobo. Pozimi je prijetno in koristno, ko nas sonce skozi južna okna greje. Poleti je tega gretja pogosto preveč, še posebno pri strešnih oknih; zunanja senčila so nujna. Notranja senčila so bolj ali manj neučinkovita pri zaustavljanju toplote, še posebno, če so temna. Dobra rešitev je nadstrešek: visoko poletno sonce ne more v stanovanje, nizko zimsko sonce pa nas greje. Ob oblačnem in mrzlem vremenu tudi skozi južna okna lahko izgubljamo toploto. Te izgube ni lahko oceniti.

Toplotni tok skozi homogeno ploščo debeline d in s površino S lahko izračunamo po formuli

$$\Phi = \lambda S \frac{T - T'}{d} = \lambda S \frac{\Delta T}{d}, \qquad (1)$$

kjer je λ *koeficient toplotne prevodnosti*, T in T' pa sta temperaturi na obeh straneh plošče. Za staro stavbo s pol metra debelimi stenami iz polne opeke ($\lambda \approx 0{,}7$ W/mK, enako kot za steklo) dobimo tok $\Phi = (1{,}4\ \mathrm{W/m^2K}) S\Delta T$. Če je znotraj 22 stopinj in zunaj -8 stopinj Celzija, je $\Delta T = 30$ K in je toplotni tok 42 $\mathrm{W/m^2}$. Skozi 100 kvadratnih metrov take stene izgubljamo ravno toliko energije, kot jo dajeta dve pečici z močjo 2,1 kW.

Beton ima $\lambda \approx 1{,}3$ W/mK; železobeton približno 1,5 W/mK. Oba materiala prevajata bistveno bolje kot opeka.

Toplotni tok skozi 20 cm debelo toplotno izolacijo z $\lambda = 0{,}04$ W/mK je $(0{,}2\ \mathrm{W/m^2K}) S\Delta T$. Pravimo, da je *koeficient toplotne prevodnosti* take izolacije 0,2 $\mathrm{W/m^2K}$. Pri $\Delta T = 30$ K skozi vsak kvadratni meter stene s tako izolacijo izgubljamo manj kot 6 W, torej neprimerno manj kot skozi debelo neizolirano steno iz prejšnjega primera.

Denimo, da imamo dvoslojno okno z razmikom d =16 mm med šipama. Toplotna prevodnost zraka je približno 26 mW/mK (milivatov na meter Kelvin). Po formuli (1) bi za toplotni tok dobili približno $(1{,}6\ \mathrm{W/m^2K}) S\Delta T$. V resnici je skoraj dvakratnik te vrednosti.

Zdi se, da je potrebno samo povečati razmik med šipama, pa bo toplotni tok manjši in izolativnost še večja. Ampak brž ko povečamo razmik, se poveča tudi *konvekcija*. S tem pojmom opišemo dogajanje, pri katerem se zrak spušča ob notranjosti mrzle šipe in vzdiguje ob notranjosti tople šipe. Ta krožni tok v zračnem sloju med šipama poveča transport toplote s toplejše šipe na hladno. Skrivnost izolacijskih materialov, kot so kamena volna, ekspandirani polistiren (stiropor). je ravno v tem, da so sicer skoraj sam »zrak«, ampak konvekcija je praktično eliminirana.

Ker je zasteklitev prozorna, moramo upoštevati še sevalne izgube, ki so zelo pomembne. V mrzlem vremenu brez sonca dolgovalovno infrardeče sevanje tople notranjosti prenaša energijo v mrzlo zunanjost. Tudi radiatorji vsaj tretjino svoje toplote oddajajo s sevanjem, zato je napačno, če jih prekrivamo. Črno ali sivo telo pri sobni temperaturi relativno največ sevanja oddaja pri valovni dolžini okrog 10 mikrometrov, praktično ves izsev pa je na območju od 5 do 50 mikrometrov.

V vročem vremenu prav tako ne želimo, da zunanjost seva toploto v ohlajeno notranjost.

Za dvoslojno zasteklitev, polnjeno z zrakom, naj bi optimalna debelina zračnega sloja znašala dva do tri centimetrov in *koeficient* U_g celotne *toplotne prevodnosti* take zasteklitve naj bi bil okrog 2,9 W/m^{2}K. Črka g pomeni *glass*, torej zasteklitev.

To vrednost lahko znižamo, če namesto zraka uporabimo žlahtna plina **argon** (toplotna prevodnost je precej nižja kot pri zraku in znaša približno 18 mW/mK) ali **kripton** (10 mW/mK). Argon sestavlja približno en odstotek Zemljine atmosfere in ga je torej več kot dovolj. Zdaj je tudi poceni. Kripton je dražji in bolje izolira. Optimalni razmik med šipama za argon naj bi bil približno 16–18 mm, za kripton pa je 10–12 mm. Po evropskih normah naj bi iz zasteklitve letno uhajalo manj kot en odstotek polnitve. Nevarnost, da bo večji del plina ušel, je zaradi boljših materialov še manj verjetna, kot da »spusti« klasični termopan. V tem primeru v zasteklitev pride okoliški zrak, ki ni nikoli povsem suh; zato med šipama pride do kondenzacije vodne pare. Med šipama je včasih sicer snov, ki absorbira vlago – silikagel, a ta ima omejeno kapaciteto.

Nizkoemisijski nanosi

Pred trinajstimi leti je avtor tega članka dal zamenjati okna. Na sliki 2 imamo odsev sveče v enem od teh oken. Sveča je na zunanji strani zasteklitve.

Kot pričakujemo, dobimo pri dvojni zasteklitvi štiri odseve. Eden od odsevov pa je bistveno drugačen. To je zato, ker je na notranji strani ene od šip (tiste, ki je bliže notranjosti) *nizkoemisijski nanos*, angleško *low emissivity coating*, kratko *low-E*. Gre za izredno tanek sloj, ki je skoraj prozoren za vidno svetlobo in za večino sončnega sevanja, odbija pa zelo velik delež dolgovalovne infrardeče svetlobe. Očitno po fotografiji ta nanos odbija tudi mnogo večji delež rdeče svetlobe kot navadna steklena površina. Kot smo že rekli, je sevanje notranjosti v glavnem na območju od 5 do 50 mikrometrov. Nizkoemisijski nanos deluje kot zrcalo za tako dolgovalovno infrardeče sevanje in izredno zmanjša izgube zaradi sevanja.

SLIKA 2.
Odsevi sveče na dvoslojni zasteklitvi z nizkoemisijskim nanosom

Nizkoemisijski nanos je danes skladovnica večjega števila (tudi 12) slojev. Posamezni sloji vsebujejo cink, kositer, titan in okside teh kovin, navadno tudi srebro. Nekateri od teh slojev (npr. srebro) so občutljivi, tako da jih imamo zmeraj v zaprtem prostoru med stekloma. Sloji so tudi izredno tanki, tako da bi jih s čiščenjem hitro poškodovali in odstranili. Nizkoemisijski nanosi so produkt zapletene znanosti ter visoke tehnologije in imajo lahko precej različne karakteristike. Skupna debelina teh nanosov je precej manjša kot valovna dolžina vidne svetlobe, ki znaša nekako od 0,4 mikrometra za vijolično svetlobo do 0,7 mikrometra za rdečo svetlobo.

Nizkoemisijski nanosi so povzročili pravo revolucijo. Vse take zasteklitve imajo tudi polnitev z argonom ali celo kriptonom. Standardna dvoslojna zasteklitev z argonom ima pri nas $U_g = 1{,}1$ W/m^{2}K, s kriptonom pa se ta vrednost zniža na $U_g = 1{,}0$ W/m^{2}K. Taka zasteklitev je torej neprimerno boljša kot termopan. Nekatera podjetja vrednost za U_g in morda še kake druge podatke o zasteklitvi odtisnejo na distančnik med šipama.

Po evropski normi mora biti že kako desetletje za vse nove izdelke na tržišču $U_g \leq 1{,}3\ \mathrm{W/m^2K}$. Torej imajo čisto vse zasteklitve na tržišču nizkoemisijski nanos in polnjenje z žlahtnim plinom. Celo v ZDA, kjer je energija poceni, ima več kot 90 odstotkov novih zasteklitev nizkoemisijski nanos. Zanimivo je, da so šipe v ZDA večinoma tanjše – trimilimetrske, kljub ekstremnim vremenskim pojavom v nekaterih delih te države.

Faktor g prehoda celotnega sončnega sevanja je za dvojno zasteklitev z nizkoemisijskim nanosom navadno okrog 63 %. Tolikšen delež sončne energije torej pride skozi zasteklitev. Sončno sevanje na nizkih nadmorskih višinah je v glavnem na območju od 0,28 mikrometra (UVB svetloba) do 2,5 mikrometra.

Prepustnost vidne svetlobe merimo s faktorjem $LT = T_V = \tau_v$, kjer LT pomeni *Light Transmission*. Za zgoraj omenjeno standardno dvoslojno okno z nizkoemisijskim nanosom je LT približno 78 %. Kot prej, ta podatek velja za pravokotni vpad svetlobe. Ta okna imajo tudi dvojna ali trojna tesnila in zato dobro dušijo hrup.

Toplotne izgube skozi okna lahko dodatno zmanjšamo s **trislojno zasteklitvijo**. Trislojna okna še bolje dušijo hrup. Tipične vrednosti so $U_g = 0{,}7\ \mathrm{W/m^2K}$, $g = 50\,\%$, $LT = 72\,\%$. Taka zasteklitev torej prepušča nekaj manj svetlobe in občutno manj sončne toplote kot dvoslojna. Na sliki 3 vidimo odsev sveče na taki zasteklitvi. Sveča je spet na zunanji strani.

Odsev na notranji šipi je enak kot pri dvoslojni zasteklitvi. Sklepamo, da gre za enak nanos. Odsev na zunanji šipi pa je drugačne barve in je torej tudi nanos drugačen. Iz podatkov o prepustnosti sončnega sevanja sklepamo, da ta nanos odbija ne samo dolgovalovno, ampak tudi nekaj kratkovalovnega infrardečega sevanja, in tako prepušča manj sončne toplote. Eden od možnih razlogov za to je, da proizvajalec ni želel, da se srednja šipa na soncu preveč segreje in posledično raztegne. Srednja šipa je namreč toplotno zelo dobro izolirana od okolice.

Danes lahko kupimo več tipov troslojne zasteklitve z $U_g = 0{,}5\ \mathrm{W/m^2K}$, torej z zelo dobrimi izolativnimi lastnostmi. Posebna izvedba, ki jo lahko naročimo tudi pri nas, ima pri $U_g = 0{,}5\ \mathrm{W/m^2K}$ celo $g = 60\,\%$ in $LT = 77\,\%$. Tak izdelek prepušča veliko sončne toplote in zelo velik delež svetlobe – povsem primerljivo s standardno dvoslojno zasteklitvijo. Narejen je iz zelo čistega stekla, tako da je absorbcija svetlobe in drugega sončnega sevanja v steklu minimalna.

SLIKA 3.
Odsevi sveče na trislojni zasteklitvi z dvema nizkoemisijskima nanosoma

Morda se sprašujete, zakaj ne bi uporabili štirislojne zasteklitve? V tem primeru lahko sonce močno segreje plin med osrednjima stekloma, saj ni veliko možnosti za odvajanje toplote. To lahko povzroči netesnost ali celo lom stekel. Potrebne so posebne tehnične rešitve z ekspanzijsko komoro, luknjicami za izenačevanja tlaka vmesnih prostorov. Slovenski podjetji Reflex in Trimo [2–3] sta za fasadne elemente obnovljene poslovne stavbe v Oslu na Norveškem izdelali in montirali celo šestslojno zasteklitev z $U_g = 0{,}3\ \mathrm{W/m^2K}$, $g = 24\,\%$ in $LT = 38\,\%$. Ta zasteklitev odlično izolira. Je pa očitno precej temna: prepušča pol manj svetlobe kot standardna dvoslojna zasteklitev in je podobna sončnim očalom. Prepušča le slabo četrtino sončnega sevanja, tako da senčila niso potrebna. Pri razvoju so sodelovali naš *Zavod za gradbeništvo* in dve norveški ustanovi.

Že trislojna zasteklitev je bolj problematična za spremembe temperature in zunanjega zračnega tlaka. Vsebuje namreč približno dvakrat toliko plina kot dvoslojna, tlačna razlika pa obremeni le zunanji šipi, ki se bolj ali manj vbočita ali izbočita. Zgodilo se je že, da je vbočeno steklo koncentriralo odbito sončno svetlobo in stopilo plastiko na sosedovi hiši ali avtomobilu. Razlike v nadmorski višini nad 300 m med krajema izdelave in montaže oken je menda že potrebno upoštevati. Če živimo na nadmorski višini 800 metrov in naročimo okna pri podjetju, ki je na višini 200 metrov, bo skrbno podjetje taka okna napolnilo z manjšim tlakom; takim, kot je v povprečju na 800 m.

Kvadratni meter štiri milimetrskega stekla ima prostornino štiri kubične decimetre. Pri gostoti 2,5 kg/l to tehta 10 kg. Dvoslojna zasteklitev tehta tako 20 kg na m^2, troslojna pa 30 kg/m^2, kar je veliko. V ZDA znani laboratorij Lawrence Berkeley poskuša v partnerstvu z industrijo spraviti v množično proizvodnjo lahko trislojno zasteklitev 3 /10 Kr /1/10 Kr/3. Stranski šipi sta trimilimetrski in imata nizkoemisijski nanos. Srednja šipa je iz kaljenega stekla in debela le en mm, polnitev je s kriptonom. Tudi okvirji teh oken naj bi zelo dobro izolirali. V Evropi poskušajo s formulo 3/2/4, ki je le malce težja od standardne dvoslojne rešitve s šipama debeline štiri mm.

Stekla z zaščito pred soncem

Poslovne stavbe iz težko razumljivih razlogov še zmeraj projektirajo z ogromnimi zasteklenimi površinami. Zunanja senčila (močne žaluzije, rolete, polkna, nadstreške) mnogi arhitekti zaradi videza odklanjajo, čeprav so pravi blagoslov za zaposlene, ki bi brez njih živeli v »topli gredi«. Tako obstaja tržišče za zasteklitve, ki odbijajo več kot polovico sončne toplote. Taki nanosi navadno vsebujejo srebro in odbijajo tudi precej vidne svetlobe; torej zatemnijo notranjost. Dobimo lahko, recimo, rahlo temno dvojno zasteklitev z $U_g = 1{,}1\ \mathrm{W/m^2K}$, $g = 27\,\%$ in $LT = 52\,\%$. Sprejemljivejši novejši različici sta dvoslojno $U_g = 1{,}1\ \mathrm{W/m^2K}$, $g = 36\,\%$ in $LT = 65\,\%$ in troslojno $U_g = 0{,}7\ \mathrm{W/m^2K}$, $g = 32\,\%$ in $LT = 58\,\%$.

V vsakem primeru je tudi v poslovnih prostorih cenejše, za bivanje neprimerno ugodnejše in energetsko bolj varčno, če zastekljene površine zmanjšamo in uporabljamo navadno trislojno (v toplejših delih Primorja pa dvoslojno) zasteklitev ter robustna zunanja senčila, ki jih veter ne bo polomil ali raztrgal. Za osvetlitev delovnih površin zasteklitev pod tem nivojem ne prinaša skoraj nič, poveča pa nihanja temperature v prostoru.

Okna do tal in obenem sive stene in/ali črni stropi, ki »požirajo« svetlobo, so primeri zmage mode nad interesi uporabnikov in zdravim razumom. Po ugotovitvah znanega psihologa Antona Trstenjaka temni stropi delujejo depresivno. Kako bomo ob takih nepremišljenih rešitvah zmanjšali ogljični odtis?

Distančniki, okvirji, vgraditev

Mnoga steklarska podjetja žal še zmeraj uporabljajo aluminijske distančnike med šipami. Pri naročilu moramo izrecno zahtevati boljše distančnike. Nerjaveče jeklo neprimerno slabše prevaja toploto kot aluminij in je tako inoks distančnik mnogo boljša rešitev. Danes večinoma uporabljajo plastične distančnike (reklamirajo jih pod vzdevkom *warm edge*, topli rob), ki še bolje izolirajo. Aluminijski distančniki v mrazu povzročajo zarositev okrog roba stekla, tudi pri trislojnih oknih, kot je izkusil avtor tega članka (ki mu v trislojno zasteklitev kljub zahtevi niso hoteli ali znali vgraditi boljših distančnikov). Posledica so lahko alge in plesni. Tudi sicer aluminijaste letvice opazno poslabšujejo izolativnost oken.

Izgube zaradi distančnika lahko ocenimo tako, da dolžino distančnika pomnožimo z linearnim koeficientom ψ_g toplotne prevodnosti distančnika in razliko ΔT temperatur. Koeficient ψ_g znaša za aluminij okrog 0,08 W/mK, za nerjaveče jeklo okrog 0,04 W/mK, za plastiko od 0,02 do 0,035 W/mK.

Okenski okvirji so tudi danes šibka točka oken, čeprav so širši in debelejši kot včasih. Njihov koeficient toplotne prevodnosti U_f (tu f pomeni angleško besedo *frame*, torej okvir) je pri plastičnih in lesenih izvedbah navadno od 1,1 do 1,5 $\mathrm{W/m^2K}$, pri specialnih izvedbah še manj. Prerez plastičnega okvirja ima obliko nekakšnega satovja. Votle, bolj ali manj pravokotne celice tega satovja imenujemo komore. Več komor navadno pomeni večjo debelino in boljšo →

izolacijo. Pogosto ena od komor vsebuje jekleno ojačitev, ki nekoliko poslabša izolativnost, a poveča trdnost okvirja.

Aluminijasti okviri so najmočnejši, najdražji, a najbolj prepuščajo toploto. Primerni so kvečjemu za poslovne in industrijske stavbe in sprejemljivi le, če imajo *prekinjen toplotni most*. To pomeni, da je okvir sestavljen iz dveh kovinskih delov, zunanjega in notranjega. Spojena sta recimo tako, da sta pritrjena na plastični večkomorni profil, vendar je med njima vsaj centimeter oddaljenosti. Za take okvirje znaša U_f navadno od 1,7 do 2,2 W/m^{2}K, pri specialnih izvedbah še manj.

Potem imamo pri okvirjih še kombinaciji aluminij-les in aluminij-plastika, kjer je aluminij seveda na zunanji strani.

Več slovenskih proizvajalcev izdeluje okna, ki so prestala zahteven postopek certifikacije za uporabo v *pasivnih hišah* [4], z $U_f < 0{,}8$. Tako vrednost dosežejo z debelimi lesenimi ali plastičnimi okvirji. Plastični okvirji imajo komore, zapolnjene z izolacijsko peno. Tudi leseni okvirji imajo velike utore ali votline, napolnjene z izolacijo.

Oznaka U_w je koeficient toplotne prevodnosti za celotno okno (angleško *window*). Pri pasivni hiši mora biti $U_w < 0{,}85$. Izgube skozi okno so tudi pri *pasivni hiši* nekajkrat večje od izgub skozi odlično izolirano steno, zato so okenske površine na severni strani take hiše minimalne ali pa jih sploh ni. Na južni strani pa ima taka hiša velika okna in zunanja senčila.

Primer.

V zidni odprtini velikosti 123 cm × 148 cm (kar je približno 1,82 m^2) imamo trislojno okno. Okvir ima širino 12 cm. Steklena površina je 99 cm × 124 cm, torej približno 1,23 m^2. Izgube skozi steklo so pri trislojni izvedbi z $U_g = 0{,}7$ W/m^2 enake $1{,}23 \times 0{,}7 \approx 0{,}86$ W/K.

Skupna dolžina aluminijastega distančnika je 4,46 m, izgube skozenj pa $4{,}46 \times 0{,}08 \approx 0{,}36$ W/K. (Z uporabo boljšega distančnika bi to vrednost zmanjšali za 50 do 75 odstotkov.)

Površina plastičnega petkomornega okvirja z jekleno ojačitvijo je približno 0,59 m^2. Pri $U_f = 1{,}3$ W/m^{2}K so izgube skozi okvir približno 0,77 W/K, kar je primerljivo z izgubami skozi steklo! Skupne izgube so 1,99 W/K. Če to delimo s površino zidne odprtine, dobimo $U_w \approx 1{,}1$ W/m^{2}K. Z boljšim distančnikom bi to vrednost znižali za deset do petnajst odstotkov na 1,0 ali celo 0,95. Čim manjše je okno, tem večji je vpliv okvirja in distančnika.

Kamnite okenske police dobro prevajajo toploto, torej so toplotni mostovi, in zato niso priporočljive. Okna morajo biti vgrajena tako, da je zunanja stran poravnana z zidom in vsaj nekaj centimetrov okvirja prekritih z izolacijo fasade. Tako zmanjšamo toplotni tok skozi zid okrog roba okvirja. Teoretično še bolje je, če je okno v izolaciji, a je to teže izvesti. Danes reže med oknom in zidom lahko povsem zatesnijo s trajnoelastičnimi trakovi (temu se reče *RAL montaža*).

Če je ena od šip debelejša, se izboljša zvočna zaščita. Eden od vzrokov za to je, da ima debelejša šipa drugačne lastne frekvence. Sestav debele in tanke šipe tako mnogo teže pride v resonanco s kakim zunanjim zvokom. Tudi sicer debela šipa bolje duši zvok.

Kaljeno steklo je odpornejše na udarce. Še močnejše so težke in debele lepljene šipe s sestavo steklo-plastika-steklo v raznih variantah (enojna, dvojna ... plastična folija, razne debeline stekla). Lepljena zasteklitev lahko ščiti pred vandalizmom in vlomilci. Plastika v taki zasteklitvi tudi absorbira ultravijolično svetlobo, kar je pomembno za muzeje in galerije, saj UV svetloba povzroča bledenje barv. Vse to je na razpolago v kombinaciji z nizkoemisijskimi nanosi, ki jih je mnogo laže nanesti na steklo kot na plastiko.

Kljub temu, da je avtor članka pri zamenjavi oken naredil nekaj napak in pred trinajstimi leti nekaterih njegovih upravičenih želj niso mogli ali hoteli uresničiti, zamenjave ne obžaluje. Nova okna prinašajo večje udobje: neprimerno boljšo zvočno zaščito, zaradi trojnih kakovostnih tesnil ni več prodora vode ob nevihtah in v bližini okna je v mrzlem vremenu prijetneje, ker je notranja šipa sorazmerno topla. Južna stran se manj pregreva; pozimi je račun za kurjavo manjši. Ob gradbeni adaptaciji je staro termopan okno bilo povsem zaroseno, novo okno zraven pa suho. Zdaj so na voljo še boljše rešitve in izvajalci imajo več izkušenj.

Nekateri prisegajo na »naravno« ventilacijo starih netesnih oken skozi reže med oknom in okvirjem ter razpoke med okvirjem in zidom. Te ventilacije pa ni mogoče kontrolirati. V hudem mrazu, pri močnem vetru je take »naravne« ventilacije preveč in so izgube energije velike, da ne govorimo o mrazu in prepihu. Trgovine za domače mojstre že desetletja dobro prodajajo razna tesnila, s katerimi ljudje poskušajo zmanjšati to neobvladljivo »naravno« ventilacijo.

Tudi povsem tesna okna omogočajo zelo učinkovito zračenje: le nekajkrat na dan jih je potrebno za nekaj minut na stežaj odpreti, po možnosti več oken naenkrat, tako da imamo prepih. To je prava in zaželena naravna ventilacija. Seveda pa moramo s kakim stolom ali s čim drugim fiksirati vsako od oken, da jih prepih ne zaloputne ali celo razbije. V vročinskih valovih lahko prostore ohladimo ponoči z zračenjem skozi odprta ali nagnjena okna, če seveda ne živimo v vročinskem otoku sredi mesta, kjer se zaradi pregretih stavb in asfalta zrak pogosto tudi ponoči ne ohladi kaj dosti.

Če hočemo zmanjšati vlago v stanovanju, moramo večkrat na kratko prezračiti takrat, ko je zunanja temperatura precej nižja od notranje. Mrzel zrak namreč ne more vsebovati dosti vodne pare. Odpiranje kletnih oken v toplem vremenu je pa velika napaka, ki bo za posledico imela mokre stene kleti.

Literatura

[1] J. Strnad, *Fizika 2. del, Elektrika, Optika*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2014.

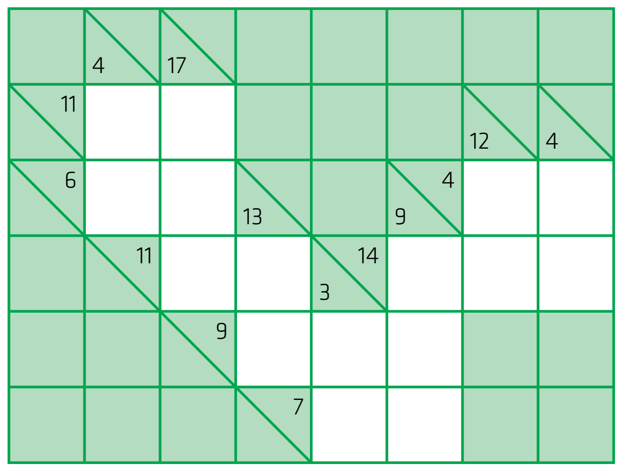
[2] A. Kralj, M. Drev, M. Žnidaršič, B. Černe, J. Hafner in B. P Jellede, *Investigations of 6-pane glazing: Properties and possibilities*, Energy and Buildings 190, 2019, 61–68, dostopno na `www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778818331554`, ogled 5. 12. 2019.

[3] *Quadruple glazing*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Quadruple_glazing`, ogled 5. 12. 2019.

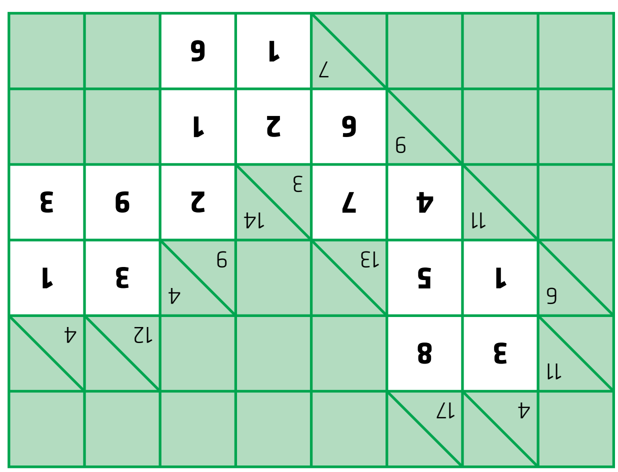
[4] Pasivna hiša, dostopno na `sl.wikipedia.org/wiki/Pasivna_hiŽa`, ogled 5. 12. 2019.

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



Magneti 1. Kaj smo spoznali

Odgovor naloge

↓↓↓
Mojca Čepič

→ Najprej naštejmo, kaj o magnetih že vemo.

- Magneti imajo dva pola, severnega in južnega.
- Enaki poli magnetov se med seboj odbijajo, različni pa privlačijo.
- Zemlja je velik magnet. Imeni njenih geografskih polov sta nasprotni magnetnim polom. Geografski severni pol je južni magnetni pol in obratno.
- Magneti privlačijo predmete iz feromagnetnih snovi, kot je železo.
- Privlačne ali odbojne sile do predmetov iz drugih snovi so zelo šibke in jih običajno ne zaznamo.
- Magnet spremeni prostor okoli sebe tako, da se v njem drugi magneti sučejo. Pravimo, da je v prostoru magnetno polje.
- Smer magnetnega polja določimo iz smeri prosto se vrtečega magneta, katerega pole poznamo. Zveznica med južnim in severnim polom magneta je vzporedna magnetnemu polju, severni pol magneta je v smeri polja.
- Če magnet prelomimo, ima novo nastali magnet tudi dva pola, kar imenujemo dipol. Ne obstaja delec, ki bi imel le južni ali le severni pol. Imenovali bi ga monopol.

V dveh poizkuševalnicah, v katerih smo raziskovali obnašanje neodimskih magnetov, smo zastavili kar nekaj vprašanj. Poleg takih, na katera so bili odgovori že zapisani, npr. tudi močni neodimski magneti ne dvignejo zlatega prstana z mize, je bila večina vprašanj takšna, da je zahtevala izvedbo poskusa. V nadaljevanju bomo ob fotodokumentaciji postopoma opisovali opažanja ob izvedbi poskusov. Poročilo o izvajanju poskusov bomo na nekaj mestih prekinili z razlago, zakaj so bila opažanja takšna, kakršna so bila.

Poskus M1.[1]

Na magneta pritisnite s kazalcema. Enega od magnetov počasi potiskajte proti drugemu. Kaj se zgodi?

Pri izvedbi poskusa smo želeli imeti eno roko prosto, zato smo zalepili magnet ob mizo (slika 1). Merilo ob magnetih pove nekaj o oddaljenostih, pri katerih že občutimo interakcijo med magnetoma. Magneta sta na videz popolnoma enaka, zato zaenkrat še ne vemo, kje sta njuna pola.

Desni magnet počasi primikamo levemu. Ko sta robova magnetov oddaljena nekaj manj kot centimeter, začutimo bodisi odboj med magnetoma bodisi začne levi magnet vleči proti desnemu. Če ga spustimo, skoči izpod prstov in se »prilepi« na levi magnet.

Očitno sta lahko v taki postavitvi sili med magnetoma ali odbojni ali privlačni.

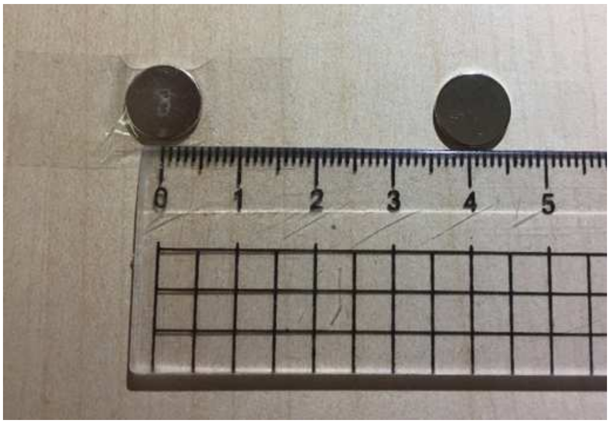
Od česa je odvisno, ali je sila med magnetoma odbojna ali privlačna, pokaže Poskus 2 [1].

Poskus M2.

Desni magnet postavite na izhodiščno mesto in ga obrnite tako, da je ploskev, ki je bila pri prejšnjem poskusu obrnjena proti mizi, sedaj obrnjena proč od nje. Ponovno primikajte desni magnet proti levemu. Opazujte, kaj se zgodi. Kako se rezultata obeh poskusov razlikujeta?

Se je zgodilo enako kot pri prejšnjem poskusu?

[1] Ker se bomo z magneti ukvarjali v nekaj srečanjih, dejavnosti pa počasi vodijo v prepoznavanje različnih pojavov v magnetizmu, bomo poskuse v pojasnjevalnih prispevkih številčili zaporedoma. Oznaka M pomeni, da se ukvarjamo z magneti. Cilj tega letnika je zbirka poskusov z magneti, ki jih lahko izvaja bralec sam ali pa jih uporabi učitelj za naravoslovni dan ali eksperimentiranje v razredu.



SLIKA 1.
Magneta sta videti popolnoma enako. Desnega približujemo počasi levemu.

Se je zgodilo nekaj drugega? Pri tem poskusu je važno sosledje. Magnet mora biti obrnjen le enkrat, da lahko primerjamo vpliv obrata. Zato je lahko v pomoč, če eno stran desnega magneta označimo. Za označevanje smo uporabili alkoholne flomastre.

Izkaže se, da se v medsebojni orientaciji pri prvem poskusu magneta na primer odbijata, v drugi (ko je magnet označen npr. na spodnji strani) pa privlačita in obratno. Če ste slučajno izbrali drugačno orientacijo magnetov v izhodiščnem poskusu, se pri prvem poskusu privlačita in pri drugem odbijata.

Označimo še levi magnet z enako oznako kot desni magnet. Izberimo orientacijo levega magneta, ko se magneta odbijata. Če je označena stran desnega magneta obrnjena navzdol, označite tudi spodnjo stran levega magneta in obratno.

Če levi magnet sedaj približate desnemu in ga spustite, bo desni magnet skočil na levega tako, da bosta označeni strani enako usmerjeni, ali obe navzdol ali obe navzgor. Imenujmo to strukturo kupček magnetov.

Poskus M3.

Ponovimo še oba poskusa z dvema kupčkoma magnetov ali z enim kupčkom magnetov in enim magnetom. V čem se poskusa 1 in 2 razlikujeta od poskusa 3, v čem sta si podobna?

Nič presenetljivo novega ne bomo izvedeli. Oba magneta se odbijata ali privlačita, odvisno od medsebojne orientacije. To je enako. A ob približevanju magnetov opazimo, da so sile večje in da lahko odboj občutimo že na večji razdalji. Pogovorno bi rekli, da je kupček magnetov »močnejši« od enega samega magneta.

Prof. Leoš Dvorak je v svojih delavnicah razdelal tudi načine, kako take sile enostavno meriti, a temu se bomo posvetili v kasnejših preizkuševalnicah
[2, 3].

Kaj pa lahko odgovorimo na vprašanje, ali sta pola magnetov na robovih ali kje drugje? In kako svojo trditev preveriti?

Če sta pola na robovih, bi se interakcija s sukanjem enega od magnetov okoli navpične osi morala spremeniti (slika 2). A poskus kaže, da se ne. Obnašanje dveh magnetov v spodnjih dveh primerih, kjer je oznaka zagotavljala, da smo približevali različno stran desnega magneta, kaže, da je obnašanje vedno enako. Zato pola ne moreta biti na robovih magnetov, temveč sta na ploskvah.

Sedaj nam preostane le še, da določimo, kateri od polov je severni in kateri južni. Ker smo ploskev, ki pripada enemu od polov v prejšnjih poskusih že označili, je dovolj, da ugotovimo pol označene ploskve. Za določanje polov sta bila predlagana dva načina, s postavljanjem kupčka magnetov na gladko površino ali obešanjem na vrvico. Uporabimo le prvi način, drugi omogoča še kup dodatnih raziskav.

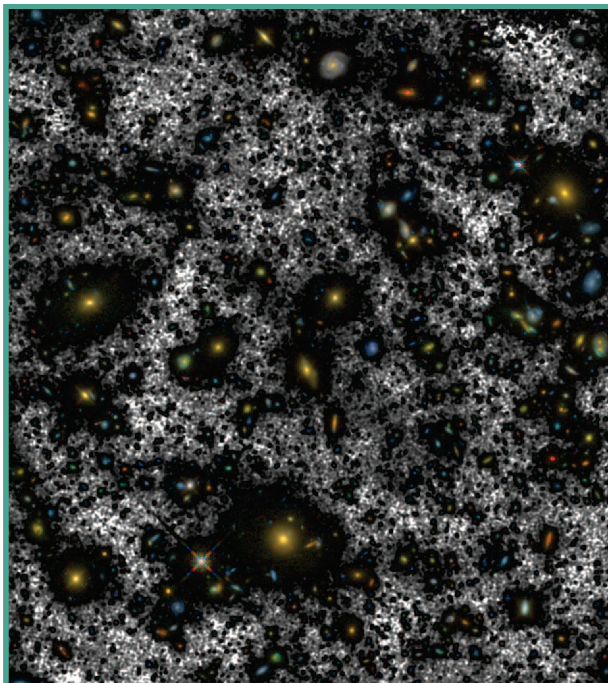
Poskus M4.

Na narobe obrnjeno čašo ali na gladek krožnik postavite kupček magnetov na rob, kot je kazala slika 4 v prejšnjem članku. Kaj se zgodi, ko magneta spustite? Kaj se zgodi, če počasi sučete kozarec okoli navpične osi?

Ne glede na to, kako postavimo magneta na kozarec, se magneta orientirata enako. Vedno se zasučeta s severnim polom proti severnemu polu Zemlje. Tudi pri sukanju kozarca ostajata usmerjena enako. Ker ste pri poskusu 2 (M2) označili eno stran magneta, lahko sedaj z gotovostjo trdimo, da je ta pol sever, če je kupček z označeno smerjo obrnjen proti severnemu polu Zemlje. Velja seveda tudi obratno. Če je obrnjen stran od severnega pola, je magnetni jug.

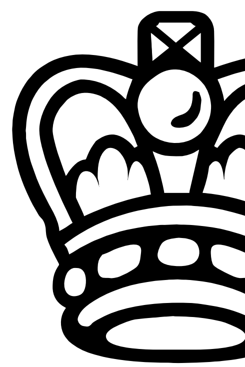
nadaljevanje na strani 18

Nagradna križanka



3

- AVTOR MARKO BOKALIČ
- TEKMOVALNI ČOLN ENOJEC
- LOVORU PODOBEN ZIMZELEN OKRASNI GRM
- VOJVODINSKO MESTO OB DONAVI
- VOLILNA ENOTA
- MEHKO, KOSMATENO USNJE, ŠAMOA
- PADAVINA, KI POBELI POLJANE
- RIMSKI CESAR, KI JE NASLEDIL SVOJEGA OČIMA AVGUSTA
- STROKOVNJAK ZA SLOVANSKE JEZIKE
- ŠTIRIKOTNA POVRŠINA ALI OBMOČJE
- POLJSKI ASTRONOM (NIKOLAJ)
- 1
- VRBA Z ŽENSKIM IMENOM
- GRŠKA BOGINJA MLADOSTI, HČI ZEVSA IN HERE
- GRŠKI BOG SONCA
- ST. ENOTA ZA OSVETLJENOST, 10000 LUKSOV
- ŠPORTNA DVORANA V MARIBORU
- AM. PREDSEDNIK FORD
- NOČNI METULJ
- POKOJNI AMERIŠKI REŽISER (MARTIN)
- NAŠ MATEMATIK (DUŠAN)
- NAŠ IGRALEC IN ZABAVLJAČ (RADO)
- TLA POD VODO
- NEKDANJE ITALIJAN. MOŠTVO FORMULE 1
- MAJHEN OTOK
- SESTAVINA MAŠČOB
- UČENJE
- NASELJE NA RABU
- DEL SAPNIKA Z GLASILKAMA
- ANGLEŠKI FILOZOF (FRANCIS)
- 7
- ARKTIČNI JELEN
- PEVKA ČENA (ALENKA)
- KAR SE DODATNO PLAČA
- KDOR IMA PRAVICO ODLOČANJA IN VODENJA V DRUŽBI
- REDKO LISTNATO DREVO
- DELOVNI POMNILNIK RAČUNALNIKA
- ZALEDENEL STRM GORSKI ŽLEB, KULOAR
- GOLJUFIJA, NATEG
- ROGLJATO KMEČKO ORODJE
- KRAJ PRI LJUBLJANI OB REKI SAVI
- PEROCI
- PROSTOVOLJEC
- NEODLOČEN REZULTAT PRI ŠAHU
- NAŠA PISAVA
- POKOJNI RADIJEC VODOPIVEC
- SOSEDNJI ČRKI
- PREGIBNA KONČNICA BESEDE
- KRAJ NAD VIPAVSKO DOLINO
- 6
- AMERIŠKI DRŽAVNIK (ABRAHAM)
- AM. PISAT. (NEILL)
- NAŠ MATEMATIK (JOSIP)
- ČEŠKO-AMERIŠKI REŽISER FORMAN
- MANJŠA KOLIČINA SNOVI ZA ANALIZO
- OFENZIVNA AKCIJA
- EVA BOTO
- REZEK PISK ALI ŽVIŽG
- NITAST IZRASTEK NA GLAVI
- NEMŠKI AVTO (POGOVOR.)
- IT. MESTO PRI ANCONI
- TERITORIALNA OBRAMBA
- POLMER
- ANG. KEMIK IN FIZIK, NOBELOVEC (FRANCIS WILLIAM)
- 2
- LESENO KORITO ZA VODO DO MLIN. KOLESA
- ČRTANJE S SEZNAMA
- REKA V NORMANDIJI
- ČEŠKA TELEVIZIJA
- SNOV ZA KOAGULACIJO MLEKA
- ČASOVNA ENOTA
- PRIPADNIK IZUMRLIH VZHODNIH SLOVANOV
- KAZALEC DOLOČENEGA PROCESA
- ZNANILEC OGNJA
- NIKELJ
- IRSKI IGRALEC NEESON
- HRIBOVSKI TRAVNIK, KI SE KOSI LE ENKRAT NA LETO
- 5
- ODPRTINA V STENI
- ALFRED NOBEL
- TV SCENARISTKA IN NOVINARKA (NINA)



324984685

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | ITALIJAN. NARAVOSLOVEC IN IZUMITELJ (LUIGI) | SESTAV OSMIH PEVCEV | KOLIČNIK SILE IN PLOSKVE, NA KATERO TA DELUJE | VZKLIK | HRVAŠKA PEVKA (ALKA) | ATI, ATEK | ČISTOČA | DAN V TEDNU

VERJETNOST 1

HUSSERLOV FILOZOFSKI POJEM

ENOTA ZA TRGOVANJE V VREDNOSTNIMI PAPIRJI | SKEPSA

SOSEDI ČRKE V | MALI TRAVEN | OTOK PRED SPLITOM | PISKAJOČ GLAS PRI DIHANJU

GRŠKI LETALEC, KI JE PADEL V MORJE | 9

VLOGA, KI KAJ TERJA | DVOKOLESNO VOZILO

AMERIŠKI IGRALEC (NICOLAS) | ŽLAHTNA KAPLJICA

PREMOČ, NADVLADA | JAPONSKI FIZIK (LEO)

4

VOLT-AMPER | NAJVEČJE MESTO V OREGONU

GOZDARSKI DROG Z ŽELEZNIM KAVLJEM

NAŠ SKAKALEC S PALICO (JURE) | HRVAŠKI PARLAMENT

MATEMAT. KONSTANTA | NAŠ KLARINETIST (TADEJ)

NEBESNA SINJINA | CESTNI PRELAZ V KARAVANKAH, POD KATERIM JE PREDOR | NEHUMAN ODNOS DO PODREJENIH

NAJVEČJA REKA SEV. AMERIKE | ČUDNO BITJE

NANJO KLIKNEMO | MOŠKI SPOLNI HORMON

NARAVNI LOGARITEM | SPOJINA Z ENAKO FORMULO

VZPOREDNICA | ANGLEŠKA IGRALKA IRELAND

BRAZDANJE ZEMELJSKEGA POVRŠJA | ZAPOR

10

AM. KEMIK IN DIPLOMAT (JAMES B.) | NAŠ FIZIK (ANTON)

OBIČAJNA POSLOVNA PRAKSA

3

OLIVER MANDIĆ | NAKLJUČNA PRAVILNA REŠITEV

PRISLOV ČASA

MEHANIČNO URJENJE SPRETNOSTI | SKOK PRI PLESU

ROBERT (LJUBKOV.) | TOYOTIN ŠPORTNI TERENEC

NAŠ ŽEN. ROKOMETNI SELEKTOR | POLNA RAZVITOST

8

IGRALEC GIBSON | JAPONSKA MISELNA IGRA

GRŠKI OTOK V SKUPINI DODEKANEZ | UMIVALNIK

PRAZNIČNI CVET

JADRANSKI OTOK | KDOR DELA S PLIGOM

VAS PRI CERKLJAH NA GORENJSKEM

UJEMANJE PRAV V VSEM

NAŠ POKOJNI GLASBENIK (KAREL-ATI) | POKOJNA AMERIŠKA PEVKA JAMES

LITINA

IGRALKA WITHERSPOON | KRAJ PRI DOMŽALAH

11

DRAVA DRUGE KOŠNJE

NAŠ LITERAT IN PUBLICIST (ANDREJ) | PREDLOG

EGOIZEM

TUR. FURUNKEL

ITALIJAN. TISKOVNA AGENCIJA

NAGRADNI RAZPIS

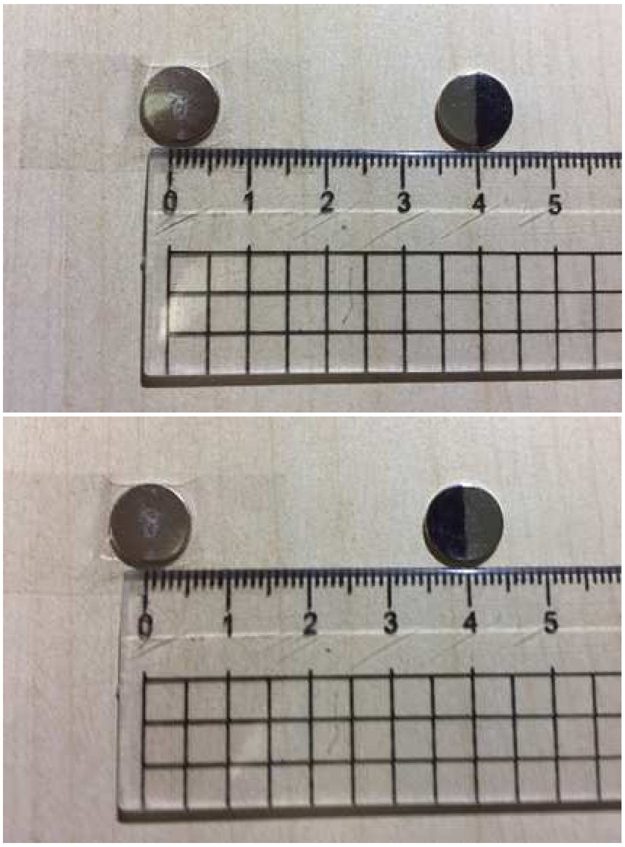
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. februrja 2020**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

×××

15 nadaljevanje s strani



SLIKA 2.
Desni magnet je različno orientiran na sliki zgoraj in na sliki spodaj, obnašanje pa je enako. Zato lahko trdimo, da pola ne moreta biti na robovih magnetov.

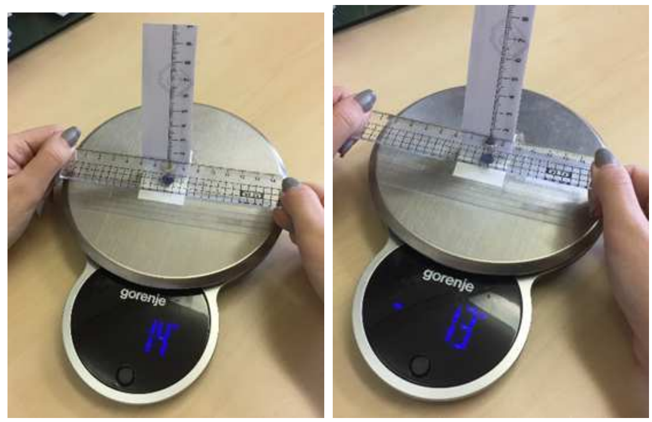
Neodimski magneti so močni in zato občutljivi. Za natančnejšo določanje smeri geografskega severa lahko uporabimo različne aplikacije na mobilnih telefonih. Iz bližine mesta, na katerem izvajamo poskus, je treba odstraniti vse ostale magnete, pa tudi na železne predmete je treba pomisliti. Zavedati se moramo, da so mobilni telefoni precej občutljivi na prisotnost drugih magnetnih polj. Zato preverimo, ali res kompas mobilnega telefona kaže proti severnemu polu tako, da ga vzporedno premikamo vsaj pol metra v vse smeri okoli mesta, na katerem izvajamo poskus. Orientacija kompasove igle v aplikaciji mora ostati enaka.

Nazadnje se posvetimo še ocenam velikosti in dosegu sil med magneti.

Poskus M5.

Na kuhinjsko tehtnico prilepimo z lepilnim trakom magnet ali kupček magnetov. Taro tehtnice postavimo na 0 g. Z roko približujmo drug magnet ali kupček magnetov in opazujmo, kaj kaže tehtnica. Ploskvi obeh magnetov naj bosta vzporedni, magneta pa drug nad drugim.

Najprej opazimo, da se odčitek na kuhinjski tehtnici začne spreminjati, kot sta magneta (ali kupčka) približno 2 cm narazen. Tehtnica kaže pozitivne odčitke, če se magneta odbijata, in negativne, če se privlačita.



SLIKA 3.
Merilo in spodnji magnet, pravzaprav kupček dveh magnetov, so prilepljeni na kuhinjsko tehtnico. Izhodiščno taro smo nastavili na 0 g. Gornja dvojica magnetov je nalepljena na spodnjo stran plastičnega merila. Tehtnica kaže privlačno (predznak na tehtnici −) ali odbojno silo med magnetoma.

Če vas mikajo natančnejše meritve, pa se je treba nekoliko bolj potruditi. Kot kaže slika 3, velja razmisliti o trdnejši podpori magnetu in merilniku razdalje med magnetoma. Na spletu najdete merila, ki jih natisnete in nalepite na tehtnico tako, da je začetek merila na poljubnem mestu. Magnet, ki smo ga približevali, je bil prilepljen na plastično merilo s spodnje strani. Tako smo kontrolirano dosegli razdalje do nekaj milimetrov med magnetoma. Navadne kuhinjske tehtnice so natančne na g ali morda dva. Z piezoelektričnim efektom merijo sile zaradi teže teles na merilnem podstavku, ki jih nato z zvezo $F_g = mg$ izrazijo v masi teles, ki so te sile povzročile. A sila, ki jo meri tehtnica, ima lahko tudi drugačen vzrok, npr. pritisk roke na tehtnico ali v našem primeru silo med magnetoma. Zato tehtnica kaže silo, sila pa je izražena v gramih. 1 g odgovarja sili 0,01 N. Če smo nastavili taro, predznak na tehtnici kaže, ali se je obremenitev tehtnice povečala (pozitivni predznak) ali zmanjšala (negativni predznak).

Sila s približevanjem močno narašča. Odbojna sila doseže tudi nekaj N na razdalji 2–3 mm, privlačne pa ne moremo dovolj dobro nadzorovati, ker se eden od magnetov navadno odtrga in prilepi na drugega. Na sliki 3 vidimo, da sta sili pri enaki oddaljenosti v okviru napake enaki, da pa imata nasprotni smeri, kar smo ugotovili že s predhodnimi poskusi.

Vabim vas, da izmerite odvisnost sile med magnetoma od razdalje med njima natančneje, v prihodnjem prispevku pa bomo to odvisnost analizirali podrobneje.

Tudi te dejavnosti so spodbudile delavnice Leoša Dvoraka [2, 3]

Literatura

[1] M. Čepič, *Magneti 1*, Presek: list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, 2019/2020, **47**, 1, 18–20.

[2] Dvořák L., *O magnetu, magnetických tělesech a velikém magnetu Zemi*, In: Dílny Heuréky 2016/Heureka Workshops 2016. Sborník konference projektu Heuréka. E.: V. Koudelková. Matfyzpress Praha 2017. ISBN 978-80-7378-338-9 (PDF, v češčini), str. 7–23. Dostopno na `kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf`, ogled 6. 12. 2019.

[3] Dvořák L., *Magnets and magnetic field around them: what can we learn from simple experiments*, sprejeto v objavo v zbornik konference GIREP v Dublinu 2017.

× × ×

Barvni sudoku

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

	8				1	7	
2			1			5	
7					4		1
					8		
	6		5	8			
	3	4				6	
		2					
5					7		

→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	8	5	3	2	1	7	6
2	7	6	1	4	3	5	8
7	5	3	8	6	4	2	1
6	2	1	4	7	8	3	5
1	6	7	5	8	2	4	3
8	3	4	2	1	5	6	7
3	1	2	7	5	6	8	4
5	4	8	6	3	7	1	2

× × ×

Nekaj srednješolskih astrofizikalnih nalog

Dunja Fabjan in Andrej Guštin

Med srednješolskimi mentorji je veliko zanimanje za težje astrofizikalne naloge, predvsem kozmološke, s katerimi bi zadostili radovednosti dijakov in dijakinj. S to mislijo objavljamo nekaj nalog 5. tekmovanja treh dežel, ki smo ga v letu 2019 v okviru DMFA Slovenije organizirali v Avberju in Braniku.

Naloga

Zvezdana si je zamislila čisto svoj kozmološki model. Predpostavila je, da je vesolje neskončno staro, neskončno veliko, in ima v vseh delih in dobah v povprečju enako gostoto. Kolegi so jo opozorili, da se vesolje širi, zato je morala svoj model popraviti. Širjenje vesolja namreč pomeni, da se njegova gostota s časom manjša, zato je Zvezdana predpostavila, da snov v vesolju ves čas nastaja. Predpostavi, da se vesolje širi s konstantno hitrostjo, ki jo *opiše* Hubblova konstanta $H = 70$ km/s/Mpc, da je njegova gostota konstantna in znaša maso 1 atoma vodika na kubični meter. Koliko atomov vodika mora nastati v kubičnem Mpc prostora na leto, da bo gostota vesolja kljub njegovemu širjenju ostala konstantna?

Rešitev

Podatki:
$H = 70$ km/s/Mpc
$\rho_V = 1 m_H/m^3$
$t = 1$ leto

Najprej izrazimo gostoto vesolja v časih t_1 in t_2:

$$\rho(t_1) = \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$
$$\rho(t_2) = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi (R + R\cdot H\cdot t)^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R^3 (1 + H\cdot t)^3}.$$

Zaradi širjenja vesolja se njegova prostornina poveča za faktor $(1+Ht)^3$. Ker model zahteva, da je gostota vesolja konstantna, se mora njegova masa povečati za enak faktor. Iščemo število novonastalih atomov vodika v prostornini Mpc^3 (dodatno nastala masa), zato:

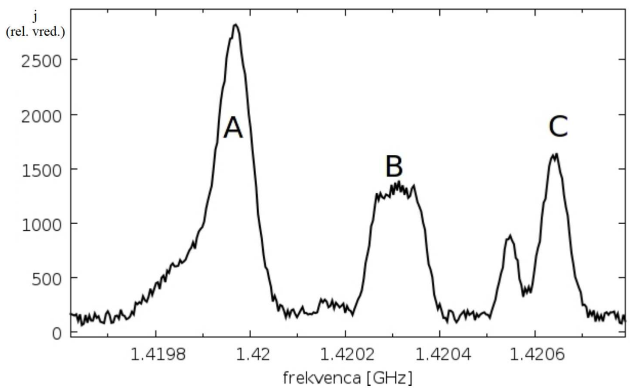
$$\begin{aligned}
\Delta M &= M_2 - M_1\\
&= \rho_V \frac{4}{3}\pi R^3 (1+Ht)^3 - \rho_V \frac{4}{3}\pi R^3\\
&= \rho_V \frac{4}{3}\pi R^3 ((1+Ht)^3 - 1)\\
&= \rho_V (1\mathrm{Mpc})^3 ((1+Ht)^3 - 1)\\
&= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3}((1\mathrm{Mpc} + 70\mathrm{km/s}\cdot 1\mathrm{yr})^3 - 1\mathrm{Mpc}^3)\\
&= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3}(3{,}08\cdot 10^{22}\mathrm{m} + 2{,}2\cdot 10^{12}\ \mathrm{m})^3 -\\
&\quad - 3{,}08\cdot 10^{22}\mathrm{m}\\
&= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3} 6{,}261\cdot 10^{57}\mathrm{m}^3\\
&= 6{,}261\cdot 10^{57} m_H
\end{aligned}$$

Naloga

Na sliki 1 je spekter, ki ga posnamemo, ko z radijskim teleskopom gledamo vzdolž galaktične ravnine pri galaktični dolžini $l = 320°$.

- Izračunaj, kje v Galaksiji (na kateri razdalji od središča Galaksije) se nahajajo oblaki nevtralnega vodika, ki jih vidimo kot vrhove označene z A, B in C.
- Oceni velikost oblaka B.

Mirovna frekvenca, ki jo izseva atom vodika, je 1,42040 GHz. Predpostavi, da je rotacijska krivulja na razdaljah, kjer se nahajajo oblaki, ravna in da znaša $v_{rot} = 218$ km/s in razdalja Sonca od središča Galaksije je 8 kpc. Vse ocene iz grafa naj bodo jasno navedene.



SLIKA 1.
Svetlobni tok v HI črti za oblake v Galaksiji v odvisnosti od frekvence

Rešitev

Najprej ocenimo, na kateri frekvenci so oblaki A, B in C

- A: $\nu = 1{,}41998$ GHz; $z = 0{,}000295779$; $v_{\mathrm{rel}} = 88{,}733$ km/s
- B: $\nu = 1{,}42030$ GHz; $z = 0{,}000070408$; $v_{\mathrm{rel}} = 21{,}12$ km/s
- B_{min}: $\nu = 1{,}42025$ GHz; $v_{\mathrm{rel}} = 31{,}68$ km/s
- B_{max}: $\nu = 1{,}42035$ GHz; $v_{\mathrm{rel}} = 10{,}56$ km/s
- C: $\nu = 1{,}42065$ GHz; $z = -0{,}000175976$; $v_{\mathrm{rel}} = -52{,}79$ km/s

Pri tem smo upoštevali, da je

- $$z = \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1/\nu - 1/\nu_0}{1/\nu_0}.$$

Uporabimo formulo

- $$v_{\mathrm{rel}} = (\omega(r) - \omega(r_\odot))r_\odot sin\theta = \left(\frac{v(r)}{r} - \frac{v(r_\odot)}{r_\odot}\right) r_\odot sin\theta.$$

Če uporabimo $v(r) = v(r_\odot) = 218$ km/s in $r_\odot = 8{,}5$ kpc ter $\theta = 320°$, dobimo:

- A: $r = 23{,}1$ kpc
- B: $r = 10{,}0$ kpc
- C: $r = 6{,}17$ kpc
- $\mathrm{B_{min}}$: $r = 10{,}9$ kpc
- $\mathrm{B_{max}}$: $r = 9{,}19$ kpc

Ocenjena velikost oblaka je 1,71 kpc v premeru oziroma približno 0,855 kpc v polmeru.

Naloga

Spiralna galaksija, ki je vidna s strani, ima razmerje med veliko in malo polosjo 1,74. Poznamo izmerjeno rotacijsko hitrost galaksije, 300 km/s, in vemo, da je njena navidezna magnituda v H filtru 18,0. Pri izračunih upoštevaj, da je absolutna magnituda Sonca v H filtru $M_{H,\odot} = 3{,}48$.

- Kolikšna je inklinacija galaksije? Kolikšna je maksimalna rotacijska hitrost?
- Kolikšna je absolutna magnituda galaksije (v H filtru)? Upoštevaj Tully-Fisherjevo relacijo (za H filter) v zapisu
  - $\log L_{[L_\odot]} = 3{,}44 \cdot \log v_{\mathrm{rot,max[km/s]}} + 0{,}83,$

  kjer je izsev podan v Sončevih izsevih in hitrost v km/s.
- Iz spektra galaksije razberemo rdeči premik, ki je $z = 0{,}15$. Kolikšna je izmerjena Hubblova konstanta?

Rešitev

Podatki:
$v_{rot} = 300$ km/s
$M_{H,\odot} = 3{,}48$

- Ker poznamo razmerje med veliko in malo polosjo izračunamo, da je $i = \arccos(1/1,74) = 54,9°$. Maksimalna rotacijska hitrost je enaka $v_{max,rot} = v_{rot}/\sin i = 366,5$ km/s.
- Absolutna magnituda galaksije je

  - $$\begin{aligned} M_H - M_{H,\odot} &= -2{,}5 \cdot \log(L/L_\odot) \\ &= -2{,}5 \cdot (3{,}44 \log(v_{\mathrm{max,rot}}) + 0{,}83) \\ &= -24{,}12 \\ M_H &= -24{,}12 + 3{,}48 = -20{,}64. \end{aligned}$$

- Oddaljenost galaksije izračunamo iz $m_H - M_H = -5 + 5 \log d$ in dobimo, da je $(18 + 20{,}64 + 5)/5 = \log d$ in torej $d = 10^{8{,}73}\mathrm{Mpc} = 534{,}5$ Mpc. Ker poznamo rdeči premik lahko izračunamo Hubblovo konstanto, $H_0 = c \cdot z/d = 83{,}19$ km/s Mpc^{-1}.

Naloga

Opazujemo zvezdo, ki ima temperaturo $T = 5000$ K in radij $R = 0{,}9 R_\odot$ in se nahaja v kroglasti kopici na razdalji 8 kpc. Opazujemo jo s teleskopom, katerega premer zrcala meri $D = 2$ m in CCD kamero s filtrom B ($\lambda_B = 440$ nm, $\Delta\lambda = 100$ nm). Koliko fotonov na sekundo ujamemo?

Gostota svetlobnega toka z zvezde v ozkem pasu valovnih dolžin (pri izbranem filtru) naj bo

- $$j_{\lambda_B,\star} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_B}} - 1} \Delta\lambda.$$

Rešitev

Gostota svetlobnega toka, na detektorju:

- $$\begin{aligned} j_\lambda &= \frac{L}{\pi (D/2)^2} \\ &= \frac{dE}{dt} \frac{4}{\pi D^2} \\ &= h\nu \frac{dN}{dt} \frac{4}{\pi D^2}. \end{aligned}$$

Gostota svetlobnega toka, ki ga prejmemo z zvezde:

- $$\begin{aligned} j_\lambda &= j_{\lambda,\star} \frac{R_\star^2}{d^2} \\ j_\lambda &= j_{\lambda_B,\star} \frac{R_\star^2}{d^2} \\ &= \frac{2\pi h c^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ h\nu \frac{dN}{dt} \frac{4}{\pi D^2} &= \frac{2\pi h c^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\pi D^2}{4h\nu} \frac{2\pi h c^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ &= 149. \end{aligned}$$

×××

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

		1	8		3		
		7			8		
						1	
2			3		1		7
			1	4		2	
7				2			6
	2	4		8			

×××

Proceduralna generacija: od naključnih števil do neskončnih svetov

Blaž Stojanovič

Ali lahko ustvarimo neskončen svet, ne da bi za to porabili neskončno truda? Na prvi pogled se to zdi nemogoče. Kaj pa če sveta ne bi ustvarjali ročno, ampak algoritmično? Računalnisko orodje, ki se ukvarja s takšnimi in podobnimi problemi, se imenuje *proceduralna generacija*.

Proceduralna generacija s pomočjo nekaj ročno zapisanih pravil in računalniško generiranega naključja ustvarja gromozanske količine vsebine. Praktična uporaba te metode je predvsem v računalniški grafiki, kjer se uporablja za generacijo tekstur in v računalniških igrah. Zgodovinski mejnik uporabi proceduralne generacije v računalniških igrah sta postavili igri *Beneath Apple Manor* (1978) in *Rogue* (1980), ki sta prvi na tak način ustvarjali svetove, v katerih se znajde igralec. Glavna prednost, ki sta jo pred svojimi tekmeci imeli igri davnega leta 1980, je velikost pomnilnika. Ker svetov, ustvarjenih s pomočjo proceduralne generacije, ni treba spraviti v pomnilnik, ampak jih lahko generiraš sproti, sta imeli *Beneath Apple Manor* in *Rogue* svetove večje, kot bi jih lahko spravili v katerikoli pomnilnik tistega časa.

Ena izmed glavnih prednosti proceduralnih pristopov je doseganje velikih razsežnosti in majhnih podrobnosti. Tak pristop lahko prihrani ogromno časa, poslužujejo se ga igre z zelo velikimi svetovi, kot npr. *Skyrim*. Proceduralno generacijo uporabljajo na dva načina; proceduralna orodja lahko uporabijo za ustvarjanje grobega reliefa, ki ga potem dovršijo ročno, ali pa pokrajino ustvarijo ročno in potem malenkosti, kot so rastlinje, naselja in prebivalstvo, generirajo proceduralno. Še eno prednost je modularnost – novo vsebino lahko v igro dodajamo z veliko manj truda, vsaka majhna sprememba pa se pozna na celotni skali igre. Poleg tega lahko en sam generator ustvari neskončno podobnih, vseeno še raznolikih svetov, kar močno zmanjša možnost, da se bo igralec igre naveličal. To mojstrsko izkoristi igra *Spelunky*.

Seveda ima proceduralna generacija kot vsaka metoda tudi svoje slabosti. Zagotavljanje kakovosti postane težavno, sama metoda vpelje v igro negotovost in praktično nemogoče je preizkusiti vse izide. Tako vedno obstaja majhna možnost za nepredvidljivo in nezaželeno obnašanje igre. Poleg tega proceduralna generacija ne sme biti edina zanimiva reč v računalniški igri, saj se tudi neskončno velikih svetov lahko naveličamo, če ni v njih nič zanimivega. To je razlika med zelo uspešnim *Minecraftom* in malo manj uspešnim *No Man's Sky*.

Proceduralna generacija ima dve plati; prva je delovanje samega algoritma, s katerim generiramo vsebino, druga pa je uporaba algoritma z jasnim namenom, naj bo to kot poseben efekt v filmski uspešnici ali pa kot pomemben del videoigre. Ustvarjenje vsebine s proceduralno generacijo je večna bitka med kaosom in dolgčasom; parametre generatorja želimo nastaviti tako, da dobimo nekaj, kar je dovolj naključno, da ni dolgočasno/monotono, in ne tako naključno, da je nesmiselno. Grajenje proceduralnih sistemov je svojevrstna umetnost in bralci, ki jih to področje zanima, si lahko več o tem preberejo v izvrstni knjigi *Procedural Generation in Game Design* [1].

Generiranje terena

Uporabo proceduralnih metod si bomo ogledali na najbolj osnovnem primeru, generiranju reliefov. Relief bomo predstavili kot višinsko karto (*angl. heightmap*), razpredelnico, v kateri je v vsaki celici zapisana nadmorska višina.

1	2	2	4	10
0	1	2	1	6
−1	2	2	0	3
−2	0	0	3	6

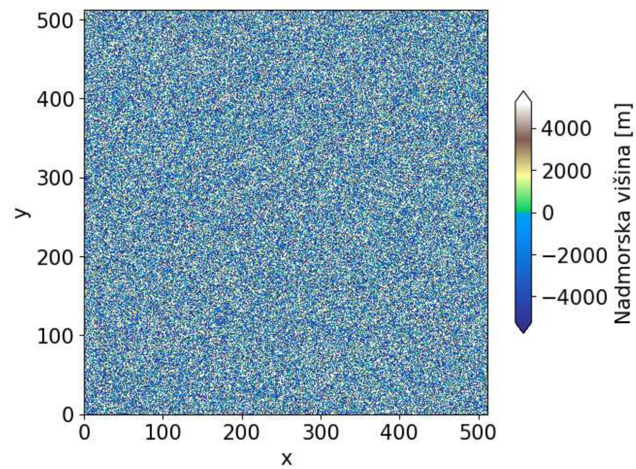
TABELA 1.
Primer 5×5 višinske razpredelnice

Takšno razpredelnico lahko s procesom upodabljanja (*rendering*) spremenimo v 3D sliko reliefa. Ker takšna razpredelnica vsebuje vse želene informacije o terenu, lahko na nov način definiramo problem. Zanima nas, kako ustvariti višinsko razpredelnico, da bo relief podoben nečemu, kar bi srečali v naravi. Jasno je, da vrednosti nadmorske višine ne moremo kar naključno žrebati, saj tako dobimo nekaj nesmiselnega. Z naključnim žrebanjem se vrednosti lahko prehitro spreminjajo, kar lahko vodi do prevelike višinske razlike med sosednjimi točkami (npr. globoko morje in visokogorje, ki sta postavljena na sosednji točki, vidno na sliki 1). Treba je poiskati način, kako naključnost oblažiti.

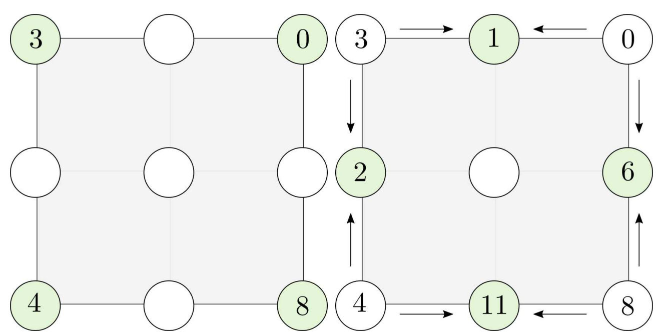
Pomik središča

Želimo si ustvariti relief, kjer obstaja možnost, da imata dve točki zelo različno nadmorsko višino, ampak ti dve točki ne smeta biti preveč blizu skupaj. Z drugimi besedami, želimo si relief, kjer je razlika v višini dveh točk manjša, če sta ti dve točki blizu skupaj, kot če sta daleč narazen.

Zelo preprost algoritem, ki poskrbi za take lastnosti reliefa, je pomik središča (angl. *midpoint-displacement*) [2]. Ta deluje tako, da razpredelnico najprej polni na grobo, z vrednostmi, ki se lahko zelo razlikujejo, potem pa jo polni vedno bolj podrobno z vrednostmi, med seboj vedno manj razlikovale. Poglejmo, kako natančno se to zgodi. Začnemo s kvadratno razpredelnico, ki ima stranico dolgo $2^n + 1$; takšna dolžina stranice olajša deljenje razpredelnice na kvadratne podrazpredelnice. Vse skupaj bomo ilustrirali za primer, kjer je $n = 2$. Najprej naključno izberemo vrednosti v ogliščih razpredelnice, te bomo izžrebali kar iz intervala $[0, 10]$.



SLIKA 1.
Popolnoma naključni relief.



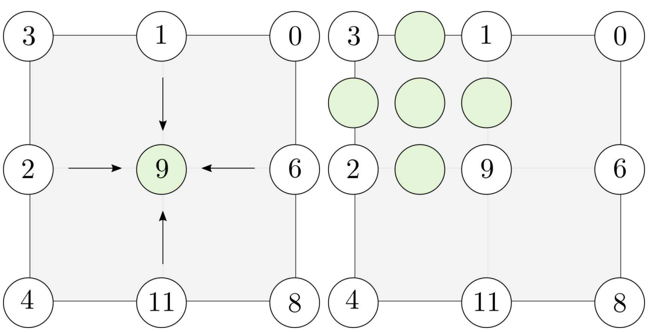
SLIKA 2.
Prvi in drugi korak pomika središča. Levo: Začetne naključne vrednosti, desno: robne vrednosti dobimo iz kotnih.

Ogliščne vrednosti bomo uporabili za generiranje vrednosti na robovih, ki povezujejo pare oglišč. To storimo tako, da izračunamo povprečje vrednosti v ogliščih in povprečni vrednosti dodamo še naključno vrednost iz intervala $[-r, r]$. Izračunajmo vrednost na spodnjem robu za primer, prikazan na sliki 2, če vzamemo $r = 5$. V ogliščih imamo vrednosti 4 in 8, potem pa naključno izžrebamo 5, vrednost v sredini spodnjega roba tako znaša:

- spodnji rob $= (4 + 8)/2 + 5 = 11$.

Prosti parameter r bomo imenovali *naključnost*, ki nadzoruje razgibanost reliefa. Večji kot je r, večja bo razlika med najvišjo in najnižjo točko na reliefu. Ko imamo vrednosti na robu kvadrata, lahko izračunamo še vrednost v sredini. Postopamo enako kot prej, le da sedaj upoštevamo vrednosti iz robov. Izračunamo povprečje števil $1, 6, 11$ in 2 in mu dodamo naključno vrednost iz intervala $[-5, 5]$, npr. 4. Tako dobimo:

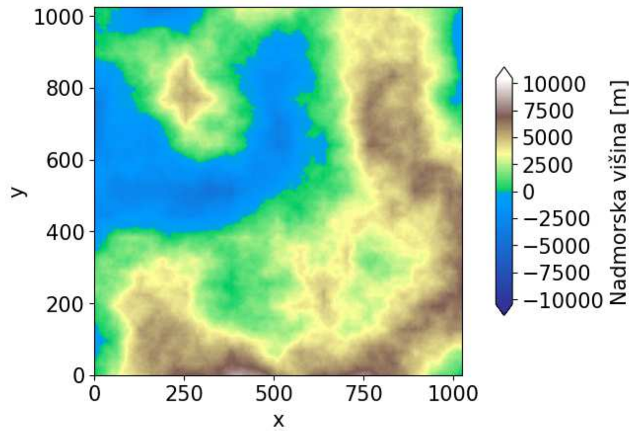
- sredina $= (2 + 1 + 6 + 11)/4 + 4 = 9$.



SLIKA 3.
Tretji in četrti korak pomika središča. Levo: Srednjo vrednosti dobimo iz robnih, desno: tretji in četrti korak pomika središča.

Ko izračunamo vrednost v sredini, nadaljujemo z napolnitvijo manjših kvadratov. Pomembno pa je, da naključnost r zmanjšamo vsakič, ko polnimo manjši kvadrat. Če smo pri polnjenju velikega kvadrata na slikah 2 levo, 2 desno in 3 levo žrebali vrednosti na intervalu $[-5, 5]$, bomo pri polnjenju kvadrata, na obarvanega na sliki 3 desno, žrebali vrednosti na intervalu $[-2, 2]$. Na ta način poskrbimo, da bo razlika med vrednostmi v majhnem kvadratu manjša kot tista med vrednostmi v velikem kvadratu. Tako polnimo čedalje manjše kvadrate in v relief dodajamo vedno večje podrobnosti. Relief ustvarjen na zgoraj opisani način je predstavljen na sliki 4.

Seveda je tudi hitrost padanja naključnosti pomembna lastnost generatorja. Če si želimo ustvariti npr. strma gorovja, obkrožena z ravninami, bomo v takem primeru r hitro zmanjševali.



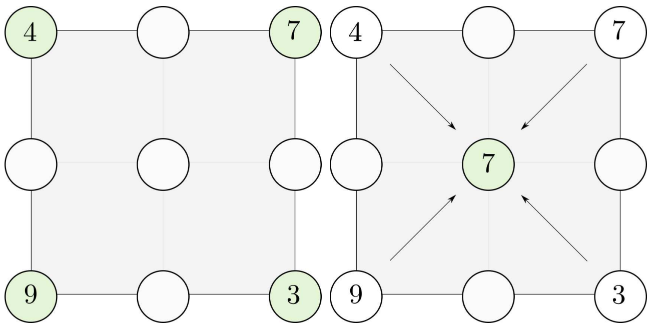
SLIKA 4.
Relief, ustvarjen z algoritmom pomika središča. Velikost razpredelnice je 1025×1025, $r = 10250$, r se v vsaki iteraciji razpolovi in začetne ogliščne točke so enakomerno naključno izžrebane iz intervala [-205, 205].

Karo-kvadrat

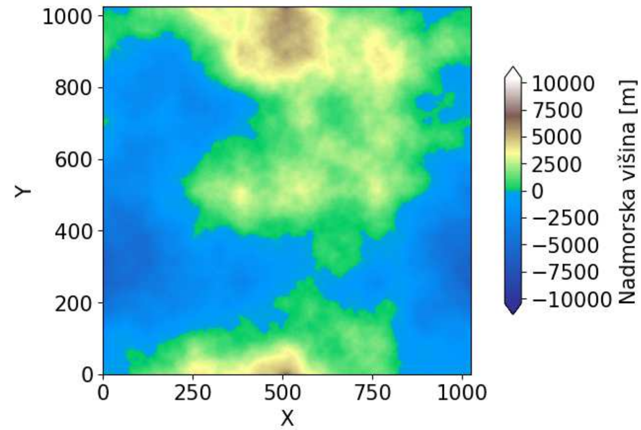
Ko s pomikom središča nekajkrat na tak način pri različnih semenih ustvarimo relief, opazimo, da nastanejo v reliefu razpoke. Te razpoke vedno potekajo navpično ali pa vodoravno. Takšne razpoke so nezaželene, saj jih lahko kdo z ostrim očesom opazi in ugotovi, da relief ni resničen. Generirano vsebino, ki ni zaželena, imenujemo *artefakti*.

Izboljšava pomika središča, ki delno odpravi artefakte, imenujemo karo-kvadrat (angl. *diamond-square*) algoritem. Ime izvira iz karo in kvadratnega koraka algoritma. Izkaže se, da ni dobro, če vrednosti v robovih kvadratov računamo le iz dveh ogliščnih vrednosti.

Lahko postopamo v drugem vrstnem redu. Najprej iz vseh ogliščnih vrednosti izračunamo srednjo vrednost, to imenujemo karo korak. Potem pa s pomočjo srednje vrednosti izračunamo vrednosti na

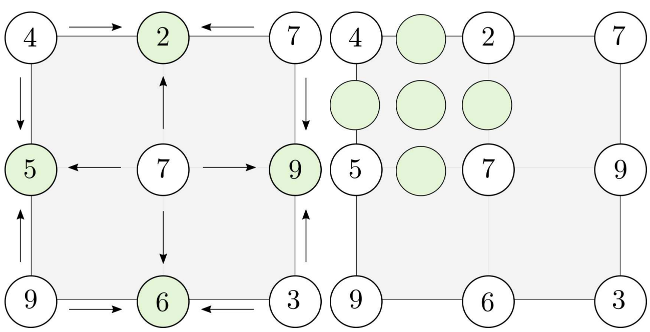


SLIKA 5.
Prvi in drugi korak algoritma karo-kvadrat. Levo: Začetne naključne vrednosti, desno: karo korak.



SLIKA 7.
Relief, ustvarjen z algoritmom karo-kvadrat. Velikost razpredelnice je 1025×1025, $r = 10250$, r se v vsaki iteraciji razpolovi in začetne ogliščne točke so enakomerno naključno izžrebane iz intervala [-205, 205].

robovih kvadrata, kar imenujemo kvadratni korak. Na tak način se nikoli ne zanašamo na samo dve vrednosti pri generiranju nove. Algoritem je malce boljši od pomika središča, ustvarjeni relief je prikazan na sliki 7. Seveda obstajajo tudi nadaljnje izboljšave [3], ki se artefaktov znebijo tako, da pri računanju novih vrednosti iz starih le-te obtežijo. Uteži izračunajo iz majhnega linearnega sistema, ki ga dobijo s pomočjo teorije približkov (*angl.* approximation theory).



SLIKA 6.
Tretji in četrti korak algoritma karo-kvadrat. Levo: Kvadratni korak, desno: za manjši kvadrat zmanjšamo naključnost

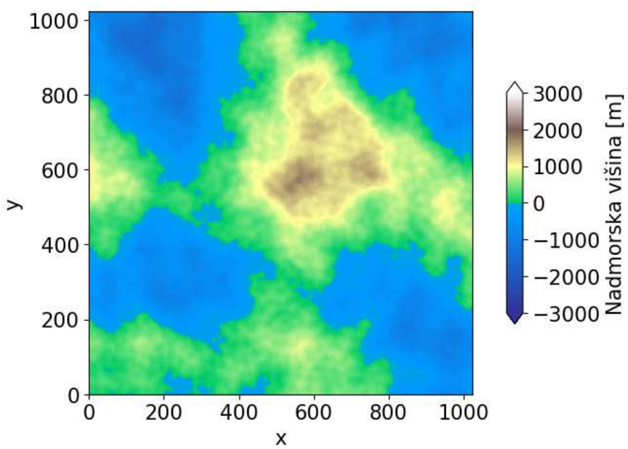
Perlinov šum

Za konec si oglejmo še, kako bi lahko ustvarili relief s posebno vrsto šuma, imenovano Perlinov šum. Šum je iznašel Ken Perlin [4], ko je delal posebne učinke za film Tron (1982). Za svojo iznajdbo je leta 1997 prejel tudi Oskarja, Perlinov šum in njegove izboljšave se še danes pogosto uporabljajo.

Ne bomo se spuščali v to, kako sam šum generiramo, osredotočili se bomo na njegovo uporabo. Vse kar moramo vedeti je, da gre za *koherenten* šum, to je šum, v katerem se spremembe v vrednostih od mesta do mesta dogajajo postopoma. Do realističnega terena bomo prišli tako, da bomo sešteli več šumov z različnimi frekvencami in amplitudami. Preden storimo to, pa se moramo naučiti terminologije v zvezi s Perlinovim šumom:

- *Oktave.* To pomeni, koliko šumov z različnimi frekvencami bomo uporabili. Posamezno oktavo označimo z naravim številom, n.
- *Lakunarnost.* To pomeni, kako se med oktavami spreminja frekvenca, koliko podrobnosti dodamo /odvzamemo pri vsaki oktavi. Označimo jo z l. Frekvenca v n-ti oktavi je enaka l^{n-1}.
- *Persistenca.* To pomeni, kako se med oktavami spreminja amplituda, koliko prispeva posamezna oktava. Označimo jo s p. Amplituda v n-ti oktavi je enaka p^{n-1}.

Glavna ideja generiranja tekstur s Perlinovim šumom je ta, da seštejemo med sabo več šumov, ki pa imajo različne frekvence in amplitude. Frekvenca pove, kako hitro se vrednosti šuma spreminjajo od točke do točke, medtem ko amplituda pove, kako velike so te spremembe. Šumi z nizkimi frekvencami in velikimi amplitudami ustvarijo makroskopske tvorbe, v našem primeru so to hribi, gore in doline. Šumi z visokimi frekvencami in majhnimi amplitudami pa ustvarijo majhne hitre spremembe površja in v našem primeru predstavljajo manjše skale in luknje na površju. Če želimo ustvariti realističen relief, morajo biti prispevki visokih frekvenc manjši kot prispevki nizkih frekvenc; gore in doline so večje, kot pa skale na njih. Od tod sledi, da če se frekvenca iz oktave v oktavo narašča ($l > 1$), mora amplituda padati in mora tako biti $p < 1$. Relief ustvarjen s Perlinovim šumom vidimo na sliki 8.



SLIKA 8.
Relief, ustvarjen s Perlinovim šumom. Velikost razpredelnice je 1024×1024, uporabili smo osem oktav, persistenco 0.3 in lakunarnost 4.

Zaključek

Metode proceduralne generacije smo ilustrirali na preprostem primeru ustvarjanja umetnih reliefov, a to še zdaleč ni vse, kar proceduralna generacija lahko ponudi. Z njo lahko ustvarimo svetove, polne rastlinstva in živalstva. Svetove lahko napolnimo z vasmi in mesti, polnimi ljudi, vsak izmed njih pa ima lahko svojo videz in svojo zgodbo. Še več kot to, v našem svetu lahko dežuje in sneži, erozija pa počasi preoblikuje pokrajino. Seveda so možne tudi interakcije med prebivalci sveta, plenilci tako lovijo svoj plen, rastlinojedci pa jedo rastlinje. Metode proceduralne generacije nam tako omogočajo, da je edina stvar, ki nas omejuje pri ustvarjanju svetov, naša domišljija.

Implementacijo algoritmov karo-kvadrat in pomik središča v programskem jeziku Python ter kodo, potrebno za ustvarjanje slik, lahko najdete na `github.com/BlazStojanovic/ProceduralnaGeneracija`. Vsekakor predlagamo, da se poigrate s parametri algoritmov in poskusite ustvariti čim bolj zanimive reliefe tudi sami.

Literatura

[1] N. Shaker, J. Togelius in M. J. Nelson, *Procedural content generation in games*, Springer, 2016.

[2] A. Fournier, D. Fussell in L. Carpenter, *Computer rendering of stochastic models*, Communications of the ACM, 25(6): 371–384, 1982.

[3] G. S. P. Miller, *The definition and rendering of terrain maps*, In ACM SIGGRAPH Computer Graphics, volume 20, 39–48, ACM, 1986.

[4] K. Perlin, *An image synthesizer*, ACM Siggraph Computer Graphics, 19(3): 287–296, 1985.

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

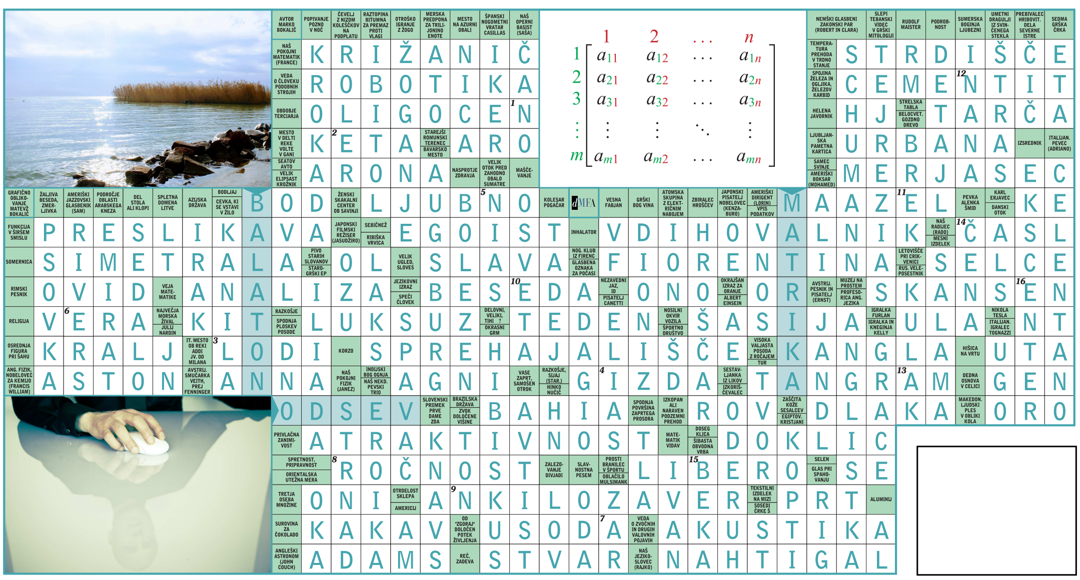
→

REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	**6**	1	8	**5**	3	**7**	**2**
5	**3**	**2**	**7**	**1**	**6**	**4**	**8**
1	**5**	7	**2**	**3**	8	**6**	**4**
6	**8**	**3**	**4**	**7**	**2**	1	**5**
2	**4**	**5**	3	**6**	1	**8**	7
8	**7**	**6**	1	4	**5**	2	**3**
7	**1**	**8**	**5**	2	**4**	**3**	6
3	2	4	**6**	8	**7**	**5**	**1**

× × ×

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 47/2

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Nelinearne enačbe.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Martin Mah iz Šmartnega pri Litiji, Marijan Hafner iz Šenčurja in Lidija Mikec iz Novega mesta, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

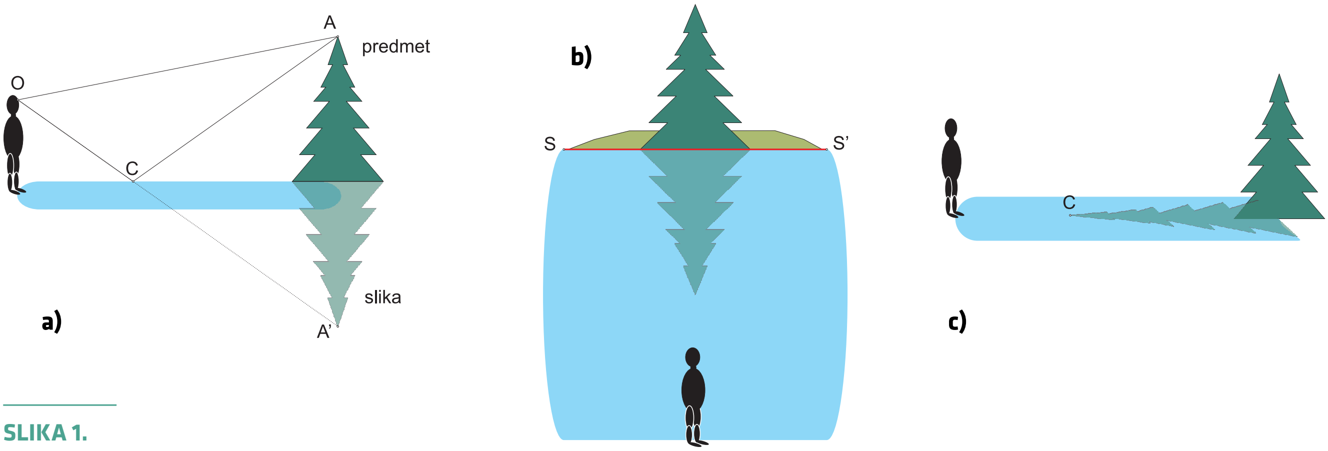
Zrcalna gladina

Aleš Mohorič

→ **Na mirni, ravni jezerski gladini se zrcali pokrajina nad njo. Slika na naslovnici kaže tak primer, fotografija je bila narejena v Bohinju. Površen razmislek nas napelje na misel, da je zrcalna slika na vodni gladini, kar enaka pokrajini nad gladino prezrcaljeni na glavo preko obalne črte. V stavku se skrivata dve tipični napačni ideji. Pa si jih poglejmo.**

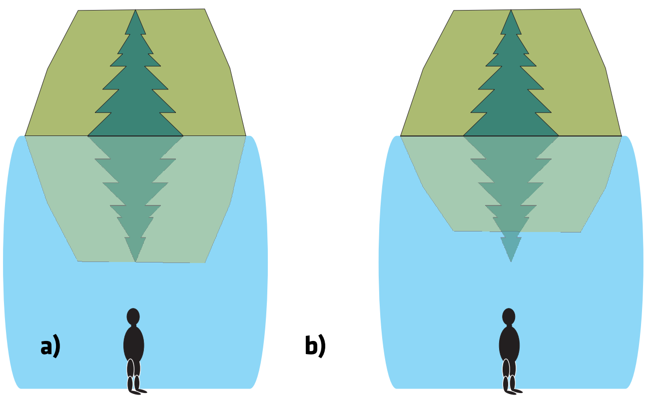
Z žarkovnim diagramom, ki ga kaže slika 1a, opišemo nastanek slike pri zrcaljenju. Drevo stoji na obali in z njegovega vrha, iz točke A, poteka šop žarkov naravnost v oko opazovalca. Na ta način opazovalec vidi predmet. S točke A pa izhajajo žarki tudi na vse druge strani in ozek šop poteka v smeri proti vodni gladini, tako da se od nje v točki C odbije proti očesu. Žarek se odbije tako, da vpadni in odbiti žarki oklepajo enak kot s pravokotnico na zrcalno ravnino. Na ta način opazovalec vidi sliko. Točki A ustrezna točka slike A' se nahaja v točki, kjer se sekajo podaljški šopa žarkov, ki po odboju na gladini vstopajo v oko. Točka A' je na pravokotnici iz A na zrcalno ravnino na tolikšni razdalji pod gladino, kot je točka A nad njo. Slika je torej pri zrcaljenju z ravnim zrcalom enako velika kot predmet. Pogled na sliko in predmet v smeri opazovalca kaže slika 1b. Na podlagi te slike bi sklepali, da smo predmet prezrcalili preko obalne črte, označena z rdečo daljico SS'. Ker je drevo na nasprotni obali jezera, slika nastane tako daleč stran od opazovalca, kot je obala in zato pridemo na idejo, da je obalna črta tista, preko katere se zrcalijo predmeti. Ideja, ki jo tudi pogosto zasledimo je, da slika nastane na vodni gladini, kot kaže slika 1c. Oko vidi vse predmete, ki so oddaljeni šest ali več metrov enako ostro. Zato oko ne loči, ali se vrh drevesa nahaja v točki A' ali v točki C, če sta obe dovolj daleč od točke O.

Oglejmo si še primer, ko je na obali več predmetov, npr. drevo na obali in gora za njim, kot ju vidimo na izseku slike z naslovnice na sliki 2. Zaradi perspektive vidimo drevo segati enako visoko kot goro, čeprav je drevo nižje, je pa gora bolj oddaljena od opazovalca. Zaradi napačne ideje o preslikavi kot zrcaljenju preko obalne črte, bi prvi hip pomislili, da je zrcalna slika enaka kot predmet, kot kaže slika 3a. Torej, če vidimo drevo in goro enako velika, bi sklepali, da bosta enako veliki tudi njuni zrcalni sliki. Zrcalna slika drevesa pa je videti večja od zrcalne slike gore (slika 3b).



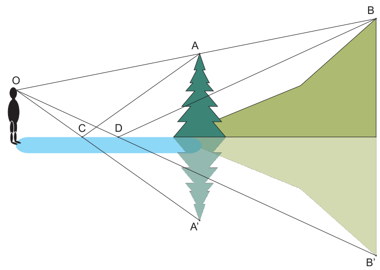
SLIKA 1.
a) Žarkovni diagram preslikave predmeta na vodoravni gladini. b) Pogled na predmet in sliko iz smeri opazovalca, z daljico SS' je označena obalna črta, ki prispeva k napačni ideji, da je zrcalna slika taka, kot da bi predmet prezrcalili preko nje. c) Demonstracija napačne ideje, da slika nastane na vodni gladini.

SLIKA 2.
Izsek slike z naslovnice.



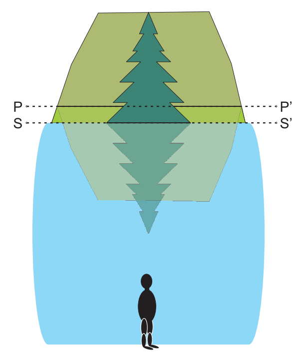
SLIKA 3.
Gora in drevo sta nad gladino videti enako visoka. Tako ju vidimo zaradi perspektive, gora je sicer višja, a drevo je bližje. Katera skica bolje prikaže to, kar zares opazimo, skica a) ali skica b)? Skica kaže pogled iz strani opazovalca.

Kako pojasnimo, da se zrcalni sliki ne ujemata s pričakovanima? Pomagajmo si z žarkovnim diagramom, ki ga kaže slika 4. Z vrha drevesa v točki A in z vrha gore v točki B izhajata po dva žarka. Eden gre naravnost v oko opazovalca O (žarek AO in BO). Drugi žarek iz točke A se v točki C na vodni gladini odbije v oko opazovalca O. Drugi žarek iz točke B pa se v oko odbije v točki D. Opazovalec vidi sliko vrha drevesa v smeri žarka CO v točki A', sliko vrha gore pa v smeri žarka DO, v točki B'. Žarka AO in BO ležita na isti premici, žarka DO in CO pa ne. Čeprav opazovalec vidi drevo in goro enako visoka, to ne velja za zrcalno sliko. Zrcalna slika drevesa je videti višja od zrcalne slike gore, ker je drevo bližje opazovalcu kot gora. Razmislite, kaj bi videl opazovalec, če bi spustil oči do gladine jezera?



SLIKA 4.
Diagram žarkov, s katerim pokažemo, da je zrcalna slika bližjega predmeta na videz večja (pogled od strani).

Kako pa uskladimo opisano ugotovitev z na začetku omenjeno idejo o preslikavi kot zrcaljenju preko obalne črte? Mar ne velja, da je zrcalna slika enako velika kot predmet? Seveda to še vedno velja, le razumeti moramo, da bi morali črto zrcaljenja postaviti pod zrcaljeno točko predmeta in ne na obalo. Vrh gore se zrcali preko črte, ki bi jo tvorila obala jezera, ki bi segalo do razdalje navpično pod vrhom gore (slika 5).



SLIKA 5.
Slika zrcaljenega predmeta je enako velika kot predmet, le črta, preko katere preslikamo, mora biti od opazovalca odmaknjena toliko, kot je predmet: za drevo je to daljica SS', za goro pa daljica PP'.

× × ×

Uganka

Tine Golež

Italijan Giovanni de Galliano Pieroni (1586–1654) je bil vojaški inženir, ki se je izkazal pri utrjevanju mest in gradov; o tem je napisal tudi knjigo. Poleg arhitekture je bil še kar spreten astronom, matematik in zemljemerec. Prijateljeval je tako s Keplerjem (nekaj časa je živel v Pragi) kot z Galilejem.

Leta 1639 se je mudil v Ljubljani. Naše prestolnice ni narisal le kot sliko za razglednico, pač pa je narisal tudi načrt. Zelo natančno je prikazal obzidje, stolpe in vsa vrata, ki so varovala mesto. Na načrtu zlahka prepoznamo grad, Stari trg, Novi trg in Mestni trg, prav tako pa ne bomo zgrešili Čevljarskega mosta, na katerem so tedaj stale obrtniške kolibe. Kaj je torej naša uganka?

Na levi spodaj opazimo merilo. Izrez dela načrta, na katerem je merilo, je tu povečan. Ugotovi, za katere merske enote gre, in oceni, kako natančen je načrt.

Rešitev

Pojdimo od zadaj: di Vienna pomeni, da gre za dunajsko mero. Malo nazaj preberemo: di piedi 6. Ta beseda je največkrat v uporabi, ko namesto »gonilka« rečemo pedal. Gre za nogo oziroma stopalo, lahko tudi dolžino obutega stopala, za čevelj. Natančno šest čevljev pa je bila dolga dunajska klaftra, ki ji po naše rečemo seženj; meri približno toliko, kot odrasla oseba (moški) izmeri z razprtimi rokami. Uzakonil jo je že Rudolf II. (1588; 1 klaftra = 1,896 m). Šele Marija Terezija pa je poskrbela, da je bila ta mera povsod po cesarstvu obvezna.

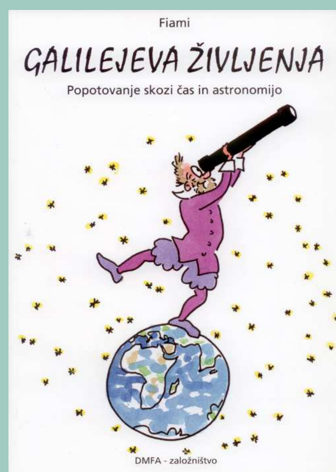
Pri preverjanju natančnosti moramo izbrati dve točki na zemljevidu. Če izberemo točki, kjer se Čevljarski most stika z desnim bregom in kjer se most, ki je danes srednji most Tromostovja, dotika desnega brega, dobimo razdaljo 170 sežnjev ali 320 m. Današnji zemljevid kaže, da je to le nekaj metrov manj kot 300 m. Napaka res ni velika. Seveda ne pozabimo, da gre za leto 1639. Pri poznejši regulaciji Ljubljanice sta tudi omenjeni točki doživeli nekaj premika, da o natančnosti merilne palice, ki jo je imel gospod na voljo, niti ne govorimo. Zato: kapo dol pred tem mojstrom!

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.