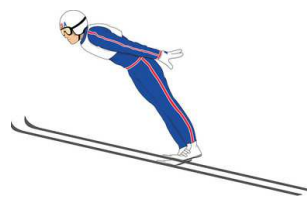
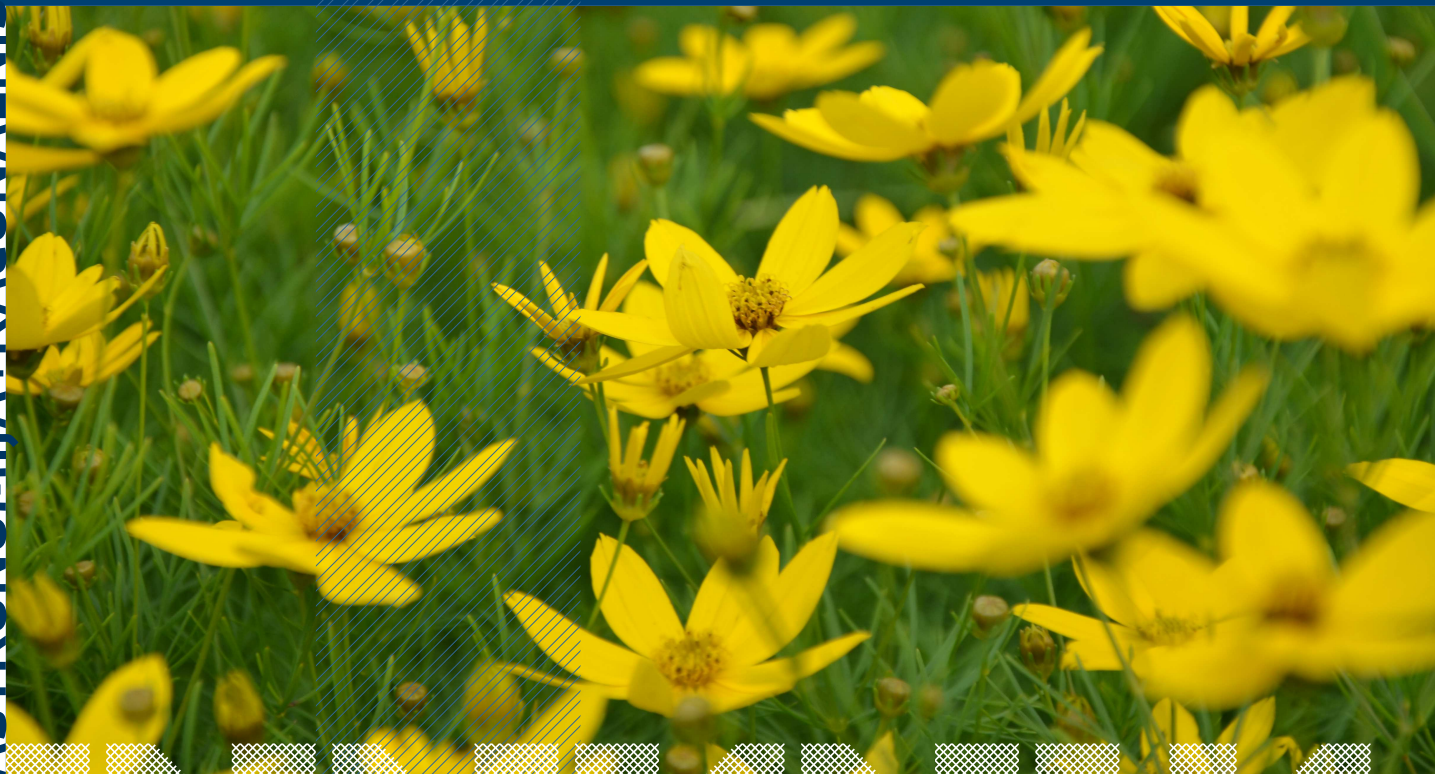


VO#
5



PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA 5

MATEMATIKA - FIZIKA - ASTRONOMIJA + RAČUNALNIŠ



PRESEK



- PREČKANJE REKE
- SMUČARSKI POLETI V PLANICI
- NALOGE SANKTPETERBURŠKE
ASTRONOMSKE OLIMPIJADE
- GENERIRANJE NAKLJUČNIH ŠTEVIL

ISSN 2630-4317

ISSN 0351-6652



9 770351 665654

Težave s kopičenjem avtobusov

↓↓↓

Pogosto se zgodi, da zelo dolgo čakamo na avtobus. Ko končno prispe, se takoj za njim pojavi še eden. To nadlogo bi lahko poimenovali tudi kopičenje avtobusov. Hkrati se kopičijo tudi težave. Na poznen avtobus bo čakalo več potnikov, ki bodo vstopali več časa, in s tem še povečali zamudo avtobusa. Prezgoden avtobus pa bo čakalo manj potnikov, ti bodo vstopili hitreje in avtobus bo prispel na naslednjo postajo še malenkost prej. Težko predvidljiv promet in naključno število potnikov, ki se pojavijo na določeni postaji, naredita problem kopičenja avtobusov zelo zapleten. Nekateri logistični sistemi uporabljajo tehnologijo sledenja avtobusov v povezavi s kontrolno teorijo, ki s pomočjo običajnih diferencialnih enačb avtobuse obravnava podobno, kot če bi bili med seboj povezani z vzmetmi. Če sta avtobusa preblizu, dobita njuna voznika navodila, kako avtobusa razmakniti; če sta avtobusa preveč narazen, pa navodila, kako doseči, da se bosta avtobusa zblížala.

Raziskovalci so preizkušali rešitve tako s pomočjo simulacij z matematičnimi modeli kot tudi na resničnih avtobusnih progah. Za najbolj uspešne pristope so se izkazali tisti, ki se osredotočijo na posamične avtobuse, pošiljajo povratne informacije voznikom in jim nato prepustijo dokončne odločitve na podlagi prometa. Ti pristopi so veliko učinkovitejši kot hkratna kontrola celotnega sistema. Rešitev problema pomaga tako uporabnikom avtobusa kot tudi ostalim. Zaradi večje učinkovitosti potniki rajši uporabljajo avtobuse, ki so bolj enakomerno zasedeni, boljša pa je tudi raba goriva, vozil in delovne sile.

Za več informacij si lahko preberete prispevek *Matematika razloži, zakaj je vaša avtobusna proga tako nezanesljiva* avtorjev V. V. Gayah in S. I. Guler, ki je bil objavljen junija 2018 v reviji The Conversation.

× × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2019 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2091

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Težave s kopičenjem avtobusov

MATEMATIKA

- 4–9** Prečkanje reke
(*Aleksandra Tepeh*)
- 9–10** Naloge na Plemljevi maturi
(*Marko Razpet*)
- 11–13** Naloge z okroglim mestom
(*Marko Razpet*)

FIZIKA

- 14–15, 18** Smučarski poleti v Planici
(*Andrej Likar*)

ASTRONOMIJA

- 19–23** Naloge 26. sanktpeterburške
astronomske olimpijade
(*Andrej Guštin*)
- 23–24** Vodnikovo leto
(*Marijan Prosen*)

RAČUNALNIŠTVO

- 25–29** Generiranje naključnih števil
(*Blaž Stojanovič*)

RAZVEDRILO

- 16–17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 46/4
(*Marko Bokalič*)
- 31** Naravoslovna fotografija – Zakaj se sneg
bolj oprijema na mostovih?
(*Kristina Pahor*)

TEKMOVANJA

- priloga** 54. tekmovanje iz matematike za Vegovo
priznanje – državno tekmovanje
- priloga** 16. tekmovanje v znanju poslovne in
finančne matematike ter statistike za
srednje šole – državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje v znanju finančne
matematike in statistike –
državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Na naslovnici je roža BIDENS ali ameriški brkač. Ameriški brkač je bujno rastoča rastlina s krasnimi živahnimi rumenimi cvetovi. Ameriški brkač uspeva na soncu in je vedno žejen. Foto: Aleš Mohorič

Prečkanje reke

↓↓↓

ALEKSANDRA TEPEH

→ Prečkanje reke spada med tiste vrste nalog, v katerih moramo z majhnim čolnom z enega na drugi breg reke prepeljati ljudi, živali ali predmete. Pri tem imamo podane omejitve, koliko oseb, živali oz. predmetov je lahko hkrati v čolnu ter v kakšni družbi so lahko. Te vrste nalog navadno srečamo pri logiki, lahko pa se jih lotimo tudi s pomočjo teorije grafov. Ne samo, da tako nalogo rešimo na drugačen, zanimiv način, najdemo lahko tudi vse možne rešitve in se prepričamo, katera med njimi je najkrajša.

Volk, koza in zelje

Mož, ki je obiskal zelo posebno tržnico, se iz nje vrača z volkom, kozo in zeljem. Na poti domov mora prečkati reko, vendar ima za to na razpolago le majhen čoln, v katerega gre poleg njega samo še ena od stvari, ki jih je kupil na tržnici. A koze ne sme pustiti same z volkom, ker bi jo volk požrl. Prav tako ne smeta ostati sama skupaj koza in zelje, saj bi koza zelje pohrustala. Ali lahko mož vse varno spravi na drugo stran reke?

Če ste se s tako ali podobno uganko že srečali, to ni nič presenetljivega. Ljudje se namreč z njo ukvarjajo že od srednjega veka dalje. Prvič je bila zapisana že konec 9. stoletja v latinskem rokopisu *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, ki predstavlja eno najzgodnejših zbirk zabavne matematike. Od tedaj se je pojavilo veliko različic te uganke. V eni izmed njih

poleg kmeta nastopajo lisica, goska ter vreča fižola, spet v drugi panter, prašiček in ovsena kaša. Danes jo v različnih preoblekah najdemo v računalniških igricalih, pojavila pa se je tudi v priljubljeni risani seriji *Simpsonovi*, kjer Homer skuša čez reko prepeljati Maggie, kužka in strup za podgane, ki izgleda kot bonboni. V vseh različicah uganke tako nastopajo trije objekti A, B in C , pri čemer ne A in B ne B in C ne smeta ostati sama brez nadzora.

Uganko lahko rešimo z naslednjim logičnim premislekom. Najprej mora mož na drugo stran reke varno spraviti kozo, saj bo v nasprotnem primeru volk pojedel kozo oz. bo koza pojedla zelje. Ko se mož vrne, ima na izbiro, da prepelje na drugo stran bodisi volka bodisi zelje. Če prepelje na drugo stran volka in se sam vrne po zelje, bo medtem volk pojedel kozo. Če pa prepelje zelje in se vrne po volka, bo koza pohrustala zelje. To težavo lahko reši tako, da na drugo stran odpelje volka ter s seboj nazaj vzame kozo. Sedaj lahko prepelje na drugo stran še zelje in se brez bojazni vrne po kozo. Mož tako reko prečka sedemkrat v naslednjih korakih:

- prepelje kozo,
- se sam vrne nazaj,
- prepelje volka,
- nazaj grede vzame kozo,
- prepelje zelje,
- se sam vrne nazaj,
- prepelje na drugo stran še kozo.

Rešitve uganke tako ni bilo posebej težko poiskati. A radovedni ugankar se bo vprašal, ali je to edina rešitev ali nemara celo obstaja rešitev, kjer bi se mož čez reko peljal manjkrat. Odgovor na ti vprašanji lahko dobimo s pomočjo teorije grafov.

Rešitve uganke Volk, koza in zelje s pomočjo teorije grafov

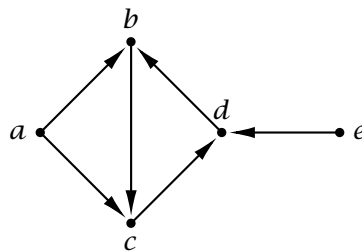
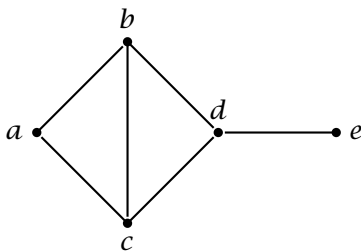
Kako pojmujeemo graf, je že bilo pojasnjeno v preteklih številkah Preseka (zanimivo predstavitev uporabe grafov lahko najdemo npr. v izdaji letnika 46). Spomnimo se, da si pod grafom predstavljamo množico vozlišč (točk) ter povezav (črt) med njimi. Označimo ga z $G = (V(G), E(G))$, kjer $V(G)$ predstavlja množico vozlišč, $E(G)$ pa množico povezav **grafa** G . Levi graf na sliki 1 predstavlja graf G , za katerega velja $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ in $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$. Povezavo ab bi lahko označili tudi z ba , saj je pomembno le to, da sta vozlišči povezani. Če sta vozlišči povezani s povezavo, rečemo da sta **sosednji**. V grafu G sta a in b soslednji, rečemo pa tudi, da je a **sosed** od b (in b sosled od a), vsi sosedi vozlišča b pa so a, c in d .

Če vsako povezavo usmerimo od enega vozlišča k drugemu, govorimo o **usmerjenem grafu**. Usmerjenemu grafu rečemo tudi **digraf**. Običajna oznaka za digraf je $D = (V(D), A(D))$, kjer je $V(D)$ množica vozlišč, $A(D)$ pa množica usmerjenih povezav digrafa D . Primer digrafa vidimo desno na sliki 1. Zanj velja $V(D) = \{a, b, c, d, e\}$, množica usmerjenih povezav pa je enaka $A(D) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, b), (e, d)\}$, kjer smo s posebnim zapisom (a, b) hoteli poudariti usmerjenost povezave med vozliščema a in b ; ta povezava je usmerjena od vozlišča a do vozlišča b . Če bi pisali (b, a) , bi to pomenilo ravno nasprotno usmerjenost.

Spoznajmo še pojem **sprehoda** v grafu oz. digrafu. Tega si lahko predstavljamo kot zaporedje vozlišč, ki nam določa, po kakšnem vrstnem redu

se po povezavah »sprehajamo« od vozlišča do vozlišča. Primera sprehodov v grafu G na sliki 1 sta $abcde$ in $abcdedc$. Ker nam v primeru digrafov puščice nakazujejo, v katero smer je možno prehoditi povezavo, govorimo o **usmerjenih sprehodih**. V digrafu D sta primera usmerjenih sprehodov $abcd$ in $abcdbc$. Opazimo, da ne obstaja usmerjeni sprehod od vozlišča a do vozlišča e , saj lahko po povezavi med d in e gremo le v smeri od e proti d , ne pa tudi obratno.

Sedaj lahko uganke Volk, koza in zelje predstavimo v jeziku teorije grafov. Graf, ki ustreza tej uganki, bomo tvorili tako, da bo vsako stanje predstavljalo eno vozlišče. Recimo, da so na začetku vsi (mož, volk, koza in zelje) na levem bregu reke. To stanje bomo predstavili z vozliščem a . Obratno, končno stanje, ko so torej vsi na desnem bregu reke, označimo z b . Premislimo, kakšna stanja so še dovoljena. Mož seveda ne sme biti sam na enem bregu reke, saj bi bili preostali na drugem bregu brez nadzora. Lahko pa je na enem bregu reke sam volk, preostali pa se nahajajo na drugem bregu reke. Pri tem stanje, ko je volk na levem bregu, ostali pa na desnem, označimo s c , obratno stanje, ko je volk sam na desnem bregu, pa z d . Podobno dobimo še stanja e, f, g, h , katerih pomen je razviden iz tabele 1 (v tej tabeli M predstavlja moža, K kozo, Z zelje in V volka). Ko smo ugotovili vsa možna stanja, v katerih je na enem bregu le en sam, smo seveda tudi opisali že vsa stanja, ko so na bregu trije. Tako nam ostanejo le še stanja, v katerih sta dva na enem, dva pa na drugem bregu. Toda to je možno le, če sta na enem bregu skupaj mož in koza, na drugem pa volk in zelje. Ti stanji v tabeli 1 najdemo pod oznakama i in j . Tako bo imel naš graf 10 vozlišč.



SLIKA 1.

Graf G (levo) in digraf D (desno)

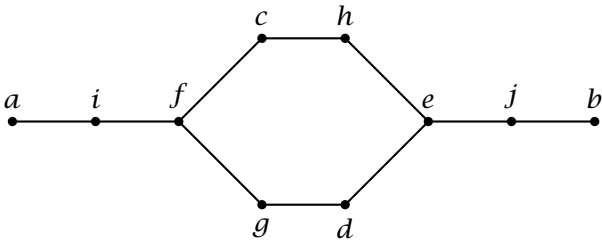


stanje	levi breg	desni breg
<i>a</i>	MKZV	
<i>b</i>		MKZV
<i>c</i>	V	MKZ
<i>d</i>	MKZ	V
<i>e</i>	K	MZV
<i>f</i>	MZV	K
<i>g</i>	Z	MKV
<i>h</i>	MKV	Z
<i>i</i>	ZV	MK
<i>j</i>	MK	ZV

TABELA 1.
Tabela stanj

Sedaj se lotimo še iskanja povezav. Dve vozlišči (stanji) bomo povezali le, če je glede na omejitve iz naloge možen prehod iz enega stanja v drugega. Tako je npr. možen prehod iz stanja *a* v stanje *i*, saj lahko mož prepelje kozo na desni breg, volk in zelje pa ostaneta na levem bregu. Seveda je možen tudi obraten prehod, torej iz stanja *i* v stanje *a*, saj se lahko mož in koza vrneta na levi breg. Zato bomo v grafu narisali povezavo med vozliščema *a* in *i*. Ne moremo pa npr. povezati vozlišč *a* in *f*, saj bi to pomenilo, da se je koza sama peljala s čolnom. To seveda ni možno, saj lahko s čolnom upravlja le mož. Vozlišča *a* tudi ne moremo povezati z vozliščem *b*, saj na čolnu ni prostora, da bi se vsi štirje prepe-ljali hkrati. Hitro lahko ugotovimo, da je vozlišče *a* mogoče povezati le z vozliščem *i*. Nato se lotimo premišljevanja, s katerim vozliščem lahko povežemo vozlišče *b*, sledi premislek glede vozlišča *c* itd. Tako sistematično pridemo do vseh povezav v grafu, ki je prikazan na sliki 2.

Da bi poiskali rešitev uganke, je torej potrebno najti sprehod med vozliščema *a* in *b*. Iz grafa hitro razberemo, da je takih sprehodov dejansko zelo ve-liko (eden je npr. sprehod *aifchedgdfchejb*). Najkrajša sprehoda pa sta le dva. To sta sprehoda *aifchejb* in *aifgdej b*. Oba sta dolžine 7 (dolžino sprehoda dobimo tako, da preštejemo število pove-zav sprehoda), kar ustreza najmanjšemu številu vo-



SLIKA 2.
Graf uganke Volk, koza in zelje

ženj, ki jih mora opraviti mož, da vse prepelje na drugo stran reke. Rešitvi, ki smo jo dobili v prej-šnjem razdelku, ustreza sprehod *aifgdej b*.

Misijonarji in ljudožerci

Trije misijonarji in trije ljudožerci morajo prečkati reko. Na razpolago imajo majhen čoln, v katerem sta lahko hkrati največ dve osebi. Če so na kateri-koli strani reke prisotni misijonarji (pri čemer je mi-šljeno, da se lahko nahajajo na samem bregu ali še v čolnu), jih mora biti več ali enako število kot ljudo-žercev. V nasprotnem primeru ljudožerci misijonarje pojedó. Kako lahko vseh šest ljudi varno prečka reko? Nalogo lahko rešimo z naslednjimi koraki.

- En ljudožerec in en misijonar prečkata reko.
- Misijonar se vrne na prvotno stran reke.
- Dva ljudožerca prečkata reko.
- Eden od njiju se vrne.
- Dva misijonarja prečkata reko.
- Vrneta se en ljudožerec in en misijonar.
- Dva misijonarja prečkata reko.
- En ljudožerec se vrne na prvotno stran reke.
- Dva ljudožerca prečkata reko.
- En ljudožerec se vrne na prvotno stran reke po zadnjega ljudožerca.
- Oba ljudožerca se pridružita vsem preostalim ose-bam na drugi strani reke.

Spet nas bo zanimalo, ali poleg te rešitve obstaja še kakšna. Ali morda obstaja rešitev, kjer bi bilo po-trebno manjše število prevozov kot 11, kolikor je po-trebnih v zgornji rešitvi?

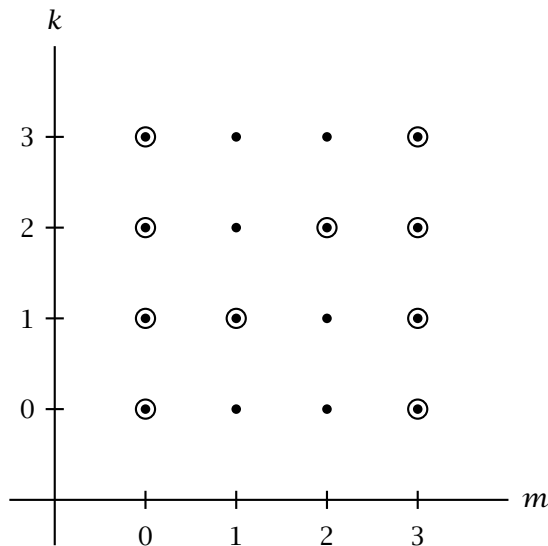
Rešitev s pomočjo grafa

Po zgledu prejšnje naloge bi lahko misijonarje označili npr. z A, B, C , ljudožerce pa z X, Y, Z ter s pomočjo teh oznak zapisali vsa možna stanja. Ker pa misijonarjev ni treba ločiti med sabo in prav tako ne ljudožerev, saj je pomembno le njihovo število na posameznem bregu (glede na besedilo naloge se pri tem štejejo tudi potniki, ki so ob bregu na privezanem čolnu), bo za zapis vseh stanj zadostoval zapis s pomočjo urejenih parov. Tako bo urejeni par (m, k) predstavljal stanje, ko se na levem bregu reke nahaja m misijonarjev in k ljudožercev. Stanj na desnem bregu reke nam ni treba posebej opisovati, saj vemo, da mora biti skupno število misijonarjev in ljudožercev v vsakem trenutku enako 3. Ker velja $0 \leq m \leq 3$ in $0 \leq k \leq 3$, obstaja 16 možnih urejenih parov (m, k) . Toda nekatere od njih je potrebno izločiti, npr. par $(1, 3)$, saj v tem primeru število ljudožercev na levem bregu presega število misijonarjev. Prav tako je treba izločiti par $(2, 1)$, saj to pomeni, da sta na desnem bregu dva ljudožerca, misijonar pa le en. Opazimo, da so torej dovoljeni le pari (m, k) , ki zadoščajo naslednjim pogojem:

- $0 \leq m \leq 3$,
- $0 \leq k \leq 3$,
- $m = k$ ali $m = 0$ ali $m = 3$.

Za boljše razumevanje si jih lahko predstavimo z diagramom na sliki 3, kjer so vsa možna stanja predstavljena s točkami, pri čemer so dovoljena stanja tudi obkrožena.

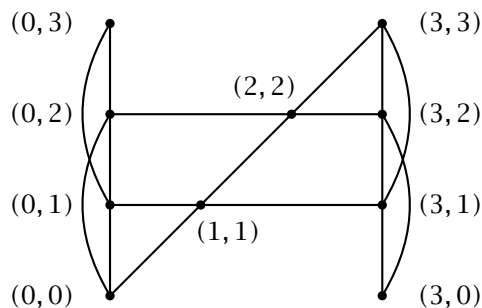
Sedaj premislimo, med katerimi dovoljenimi stanji je mogoče prehajati glede na omejitve, da se s čolnom lahko peljeta največ dve osebi. Če je prehod iz enega stanja v drugega možen, bomo v grafu, kjer vozlišča predstavljajo stanja, ustrezni vozlišči povezali. Povežemo lahko npr. vozlišči $(3, 3)$ in $(3, 2)$, saj se lahko en ljudožerec pelje iz levega na desni breg, ali pa tudi obratno. Vozlišče $(3, 3)$ lahko povežemo še z $(2, 2)$, kar bi v primeru sprehoda po tej povezavi od $(3, 3)$ do $(2, 2)$ pomenilo, da sta se en misijonar in en ljudožerec peljala z levega na desni breg. Če pa bi se po omenjeni povezavi sprehodili v smeri od $(2, 2)$ do $(3, 3)$, bi to pomenilo, da sta se ljudožerec in misijonar peljala z desnega na levi breg. Pri



SLIKA 3.

Diagram (dovoljenih) stanj

iskanju vseh vozlišč, ki so sosednja z danim vozliščem (m, k) , nam pomaga premislek, da bo prevoz čolna z levega na desni breg zmanjšal vrednosti m in k . Števili m in k se skupaj zmanjšata za največ 2, saj lahko gresta hkrati na čoln največ dva človeka. Tako so kandidati za sosednje vozlišča (m, k) vozlišča $(m - 1, k - 1)$, $(m, k - 2)$, $(m - 2, k)$, $(m - 1, k)$ in $(m, k - 1)$, pri čemer posamezna možnost ne pride v poštev, če je v urejenem paru prvo število manjše od drugega ali pa je katero od števil negativno. Tako dobimo graf, prikazan na sliki 4.



SLIKA 4.

Graf uganke Misijonarji in Ljudožerci



Cilj naloge je poiskati usmerjeni sprehod iz vozlišča $(3, 3)$ do vozlišča $(0, 0)$. Morda nam pritegne pozornost kratek usmerjeni sprehod $(3, 3)(2, 2)(1, 1)(0, 0)$. Toda tako zaporedje vozlišč nam da tri povezave (prva je povezava $(3, 3)(2, 2)$, druga $(2, 2)(1, 1)$ in tretja $(1, 1)(0, 0)$), ki vse ustrezajo vožnjam čolna z levega na desni breg, kar seveda ne more biti rešitev. V prejšnji nalogi smo se lahko po povezavah sprehajali poljubno, saj so vozlišča ustrezala tako stanjem na levem kot na desnem bregu reke. V tokratnem grafu pa vozlišča predstavljajo le stanja na levem bregu. Kako torej poiskati sprehod od vozlišča $(3, 3)$ do vozlišča $(0, 0)$, da bo upoštevana izmeničnost voženj čolna z levega na desni breg in obratno? Poiskali bomo usmerjeni sprehod, kjer bomo pazili na ustrezno usmeritev povezav. Opazimo namreč lahko naslednje: če v grafu »vertikalno« povezavo usmerimo od spodaj navzgor (taka je npr. povezava med vozliščema $(0, 0)$ in $(0, 2)$), to pomeni povečanje števila ljudožercev na levem bregu, zato taka povezava predstavlja prevoz (ljudožercev) z desnega na levi breg. Če »vodoravno« povezavo usmerimo od leve proti desni (taka je npr. povezava od $(0, 2)$ do $(2, 2)$), to ustreza povečanju števila misijonarjev na levem bregu, kar ponovno pomeni vožnjo čolna z desnega na levi breg. Po podobnem premisleku o preostalih možnih usmeritvah pridemo do ugotovitve, da prevozom z desnega na levi breg ustrezajo usmeritve:

- $\uparrow$ (od spodaj navzgor),
- $\rightarrow$ (od leve proti desni) in
- $\nearrow$ (od spodaj levo do zgoraj desno),

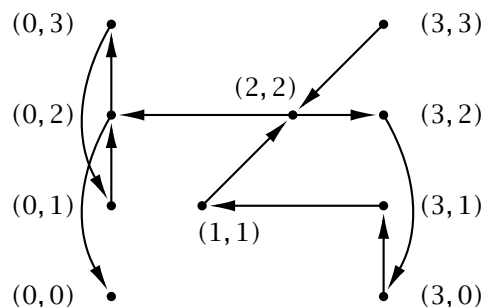
prevozom z levega na desni breg pa ustrezajo usmeritve:

- $\downarrow$ (od zgoraj navzdol),
- $\leftarrow$ (od desne proti levi) in
- $\swarrow$ (od zgoraj desno do spodaj levo).

S pomočjo tega po krajšem premisleku najdemo usmerjeni sprehod

- $(3, 3)(2, 2)(3, 2)(3, 0)(3, 1)(1, 1)(2, 2)(0, 2)(0, 3)(0, 1)(0, 2)(0, 0)$

na sliki 5, ki ustreza rešitvi, ki smo jo že navedli v razdelku Misijonarji in ljudožerci.

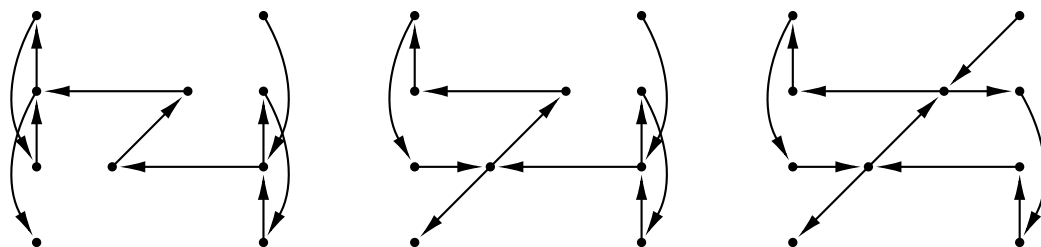


SLIKA 5.

Ena od možnih rešitev

Spet nas bo zanimalo, ali je to edina rešitev ali nemara obstaja še krajša. Do odgovora pridemo s pomočjo grafa na sliki 4, v katerem bomo za lažjo razlago vsa vozlišča grafa razporedili v tri množice:

- $L = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$,
- $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$,
- $D = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.



SLIKA 6.

Preostale rešitve uganke

Ker ni nobene povezave med vozliščem iz množice D in vozliščem iz množice L , mora iskana usmerjena pot od vozlišča $(3, 3)$ do vozlišča $(0, 0)$, ki bo predstavljala rešitev naloge, nujno vsebovati vozlišče iz množice S . Če bi se v vozlišče $(2, 2)$ premaknili iz vozlišča $(3, 3)$ ali $(3, 2)$, se moramo v naslednjem koraku premakniti v vozlišče $(3, 2)$ ali $(3, 3)$. Tako hitro vidimo, da mora iskani usmerjeni sprehod po tem, ko zapusti vozlišča iz D , nujno iti preko vozlišča $(1, 1)$, edini možni način za to pa je preko vozlišča $(3, 1)$. Edini možni način, da iz $(1, 1)$ pridemo do nekega vozlišča iz L , je, da se iz $(1, 1)$ premaknemo v $(2, 2)$ in nato v $(0, 2)$. Tako bo iskani usmerjeni sprehod zagotovo vseboval zaporedje $(3, 1)(1, 1)(2, 2)(0, 2)$. Od $(3, 3)$ do $(3, 1)$ je možno priti na dva različna načina: preko zaporedja $(3, 3)(3, 1)(3, 2)(3, 0)(3, 1)$ ali $(3, 3)(2, 2)(3, 2)(3, 0)(3, 1)$. Prav tako obstajata le dva različna načina, kako iz vozlišča $(0, 2)$ doseči vozlišče $(0, 0)$. Tako ugotovimo, da obstajajo natanko štiri različne rešitve uganke. Eno od rešitev smo že videli na sliki 5, preostale prikazuje slika 6. Vse štiri rešitve zahtevajo 11 voženj čolna.

Nalogi, ki smo si ju ogledali, najdemo tudi na spletni strani www.nauk.si/materials/418/out/index.html#state=1, kjer je še več zanimivih ugank. Morda koga zamika, da se s pomočjo teorije grafov loti še katere.

Literatura

- [1] River crossing puzzle, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/River_crossing_puzzle.
- [2] Fox, goose and bag of beans puzzle, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Fox,_goose_and_bag_of_beans_puzzle.
- [3] Prečkanje reke, dostopno na www.nauk.si/materials/418/out/index.html#state=1.
- [4] Robert Fraley, Kenneth L. Cooke in Peter Detrick, *Graphical Solution of Difficult Crossing Puzzles*, Mathematics Magazine, **39** (1966), 151–157, dostopno na https://www.jstor.org/stable/2689307?seq=1#metadata_info_tab_contents.

× × ×

Naloge na Plemljevi maturi

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Akademik prof. dr. Josip Plemelj (1873–1967), svetovno znani matematik, prvi rektor ljubljanske univerze, je obiskoval osemrazredno klasično gimnazijo v Ljubljani in na njej uspešno maturiral v šolskem letu 1893/94. Pot do njegove mature pa ni bila gladka, ker se v zadnji razred zaradi incidenta (podrobnosti so opisane v [3]) ni mogel vpisati. Kot privatist je opravljal izpite za prvo polletje osmega razreda na gimnaziji v Novem mestu, za drugo polletje pa na gimnaziji v Ljubljani, kjer je tudi maturiral.

Gimnazije so na koncu šolskega leta objavile poročilo o svojem delu. Letna poročila ljubljanske klasične gimnazije, ki jo je obiskoval Plemelj, so bila tiskana, napisana pa so bila v nemščini. V poročilih so bili objavljeni sezname profesorjev in dijakov po razredih, seznam vsebin predmetov, potrebnih učbenikov, učil, poljudnih predavanj, šolska statistika, pa tudi maturitetne naloge. Na začetku poročil je bil daljši znanstveni prispevek kakega profesorja, v poročilu za šolsko leto 1894/95 npr. o lomu svetlobe v Zemljini atmosferi z upoštevanjem spremenljivega lomnega količnika avtorja Matevža Voduska.

Kot je razvidno iz letnih poročil [1, 2] ljubljanske gimnazije, so potekali pisni maturitetni izpiti v polletnem roku od 11. do 16. junija, ustni izpiti pa so se začeli 9. julija in končali 14. julija 1894. Za ta





rok je bilo prijavljenih 41 rednih dijakov, en privatist osmega razreda in trije eksternisti. Privatist ni bil nihče drug kot Josip Plemelj, eksternisti pa so bili dijaki iz drugih šol.

Da si bomo bolje predstavljali takratno maturo, zlasti njen matematični del, navajamo teme pri pisnih izpitih: prevod iz nemščine v latinščino, prevod iz latinščine v nemščino, prevod iz grščine v nemščino, nemški prosti spis, prosti spis iz zgodovine slovenskega jezika za dijake, ki so obiskovali obvezni pouk slovenščine, in spis na temo izbrane starogrške drame. Naloge iz matematike, napisane v nemščini, pa so bile:

1. Nekdo vplača na banki 16 000 gld, nato pa 10 let prejema dekurzivno rento v višini 2 000 gld. Koliko ima po tem času še na računu in koliko časa mora čakati, da mu znesek spet naraste na prvotnih 16 000 gld? Vselej se računa z letno obrestno mero 4,5 %.

2. Pokončna piramida ima stranski rob $s = 1,4$ m in za osnovno ploskev trikotnik s stranico $a = 0,7$ m, kateri je nasproten kot $\alpha = 57^\circ 54' 44''$, preostali stranici pa sta v razmerju 4 : 3. Kako velik je polmer krogle, ki ima enako prostornino kot piramida?

3. Skozi gorišče parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ poteka tetiva, ki je vzporedna tangenti skozi krajišče parametra. Poišči enačbo nosilke tetive in ploščino odseka, ki ga ta tetiva odreže od parabole.

Opombe. Matematike je bilo povprečno tri ure tedensko v vseh razredih. Uporabljali so Močnikove in Hočevarjeve učbenike.

1. Goldinar (gld) je bila stara avstrijska denarna enota. Leta 1892 so uvedli krone (K) in je veljalo 1 gld = 2 K. Dekurzivno rento se izplačuje ob koncu leta. Verjetno je v nalogi mišljeno, da je bil znesek 16 000 gld vplačan na začetku leta.

2. Pokončna tristrana piramida ima vse tri stranske robove enako dolge, tako da je pravokotna projekcija njenega vrha na osnovno ploskev v središču njej očištanega kroga.

3. Od 5. do 8. razreda so pri geometriji in algebi uporabljali Močnikova učbenika. Učbenik za geometrijo med drugim obravnava tudi zasuk koordinatnega sistema in krivulje drugega reda, zato naloge ne bi smela delati težav. *Parameter* parabole je v Močnikovem učbeniku tista njena tetiva, ki je pravokotna na os parabole in poteka skozi njeno gorišče.

Nalogo je najlažje rešiti z zasukom in vzporednim premikom koordinatnega sistema, da s tem parabolo prevedemo na kanonsko obliko.

Dijak Josip Plemelj je maturo brez težav opravil, se vpisal na dunajsko univerzo, kjer je doktoriral leta 1898 in postal zelo uspešen matematik, kot lahko preberemo v [3]. Ali bi znali rešiti vse tri matematične naloge tudi vi?

Literatura

- [1] A. Senekovič, *Jahresbericht des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Laibach veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1893/94*, Ljubljana 1894.
- [2] A. Senekovič, *Jahresbericht des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Laibach veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1894/95*, Ljubljana 1895.
- [3] I. Vidav, *Josip Plemelj: ob stoletnici rojstva*, DMFA, Ljubljana 1975.

× × ×



SLIKA 4 MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

Naloge z okroglim mestom

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ V prispevku bomo na primerih treh nalog spoznali delček srednjeveške kitajske matematike. Kitajci so v svoji večtisočletni zgodovini v matematiki dosegli lepe uspehe. Zato ne bo odveč, da jim posvetimo nekaj besed. Do nekaterih ugotovitev so prišli celo več stoletij prej kot Evropejci. Več o tem lahko preberemo npr. v [2] in [3].

Pri zapisovanju kitajskih besed v latinici bomo uporabljali mednarodno priznani sistem *pinyin*, namesto modernih poenostavljenih kitajskih pismenk pa kar tradicionalne, da bomo tako ostali bližje avtorjem iz 13. stoletja. Zaradi pravilne tonske izgovorjave uporablja pinyin, če je potrebno, še posebna znamenja nad samoglasniki, ker bi sicer enako napisana beseda lahko imela več pomenov. Glede pisave in izgovorjave nam je lahko v veliko pomoč svetovni splet.

V času vladanja dinastije Song (960–1279) (Sòng, 宋) je na Kitajskem živel matematik Li Ye (1192–1279) (Lǐ Yě, 李冶), ki se je rodil kot Li Zhi (Lǐ Zhì,

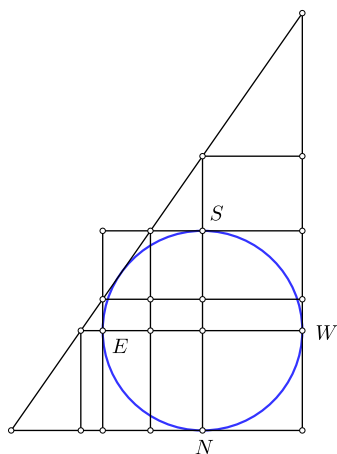
李治), a je kasneje spremenil svoje ime. Kitajcem je v tistem obdobju kljub pogostim vojnám s severnimi sosedi na znanstvenem in tehničnem področju kar dobro šlo. Omenimo samo, da so Kitajci takrat že dolgo časa poznali papir in tisk, iznašli pa so tudi mehansko uro za pogon astronomskih naprav (glej npr. [4]).

Leta 1248 je Li Ye dokončal pomembno delo z ne navadnim naslovom *Ceyuan haijing* (Cèyuán hǎijìng, 測圓海鏡), kar pomeni *Morsko ogledalo meritev kroga*. V njem rešuje nekatere geometrijske naloge z algebrskimi metodami, ki pripeljejo do polinomskih enačb. Metodo imenuje *tian yuan shu* (tiān yuán shù, 天元術), kar pomeni *metoda nebesne neznanke*.

Na začetku Lijevega dela je *diagram okroglega mesta*, *yuan cheng tu shi* (yuán chéng tú shì, 圓城圖式). Na njem so točke označene s kitajskimi pismenkami. Krog predstavlja obzidje mesta, ki ima štiri vrata v smeri glavnih strani neba: sever *bei* (běi, 北), jug *nan* (nán, 南), vzhod *dong* (dōng, 東) in zahod *xi* (xī, 西). Na sliki 1, ki je nepopoln preris originala, so vrata označena s *N, S, E, W*. Druge točke bomo označili v konkretnih primerih, ki jih bomo obravnavali. Posebnost slike je tudi v tem, da so strani neba prilagojene pogledu od severa proti jugu. Na sliki je več pravokotnih trikotnikov, ki so po kitajski tradiciji postavljeni tako, da je ena kateta vodoravna, ena pa navpična. Krogu sta očrtana kvadrat in pravokotni trikotnik tako, kot kaže slika 1. Krožci predstavljajo tiste točke, ki jih je označil Li Ye in na podlagi slike sestavil zbirko 170 nalog, pri katerih je večinoma treba iz danih podatkov izračunati velikost mesta, njegov polmer ali premer. Podatki se izražajo z nekaterimi razdaljami med označenimi točkami. Zanimivo je tudi, da Li dotikališča hipotenuze s krogom sploh ne uporablja.

Predpostaviti je treba, da mesto, ki je omenjeno v nalogah, stoji na idealni ravnini, da se v vseh smereh zunaj mesta dobro vidi in da je mogoče priti peš, kamor je pač treba.

V obravnavanih nalogah bomo delali s splošnimi podatki in šele na koncu rešili celoštevilski primer,



SLIKA 1.

Diagram okroglega mesta (pogled od severa proti jugu)



po možnosti s čim manjšimi števili. Za dolžinsko enoto bomo vzeli kar kilometer. S tem ne bomo prav nič okrnili pomena Lijeve zbirke in metod v njej. Prav tako pričujoče naloge niso popolnoma originalne, a sestavljene so po Lijevih zgledih. Rešujemo pa jih tako, kot to počnemo dandanes po naših šolah.

1. naloga. Južno od zahodnih vrat, 6 km daleč, raste visoko drevo. Neki človek gre od vzhodnih vrat 2 km proti vzhodu, ko zagleda omenjeno drevo. Kako veliko je mesto?

Rešitev. Pomagamo si s sliko 2. Krog s središčem O naj ima polmer x , vzhodna vrata so v točki E , zahodna v točki W , drevo v točki D , iz točke A pa človek opazi drevo v smeri hipotenuze pravokotnega trikotnika AWD . Hipotenuza se kroga dotika v točki B . Označimo $a = |WD|$, $b = |AE|$.

Pravokotna trikotnika AOB in ADW sta si podobna, ker se ujemata v skupnem kotu z vrhom A in v pravem kotu. Upoštevamo, da je $|BD| = a$ in da za trikotnik AWD velja Pitagorov izrek. Dobimo zvezi

$$\frac{2x + b}{a} = \frac{|AB|}{x}, (|AB| + a)^2 = a^2 + (2x + b)^2.$$

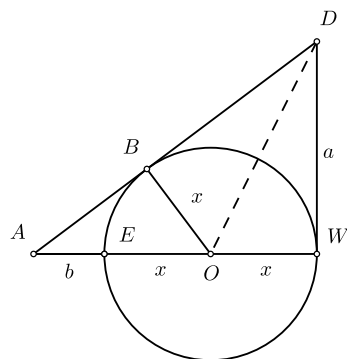
Če iz prve izrazimo $|AB|$ in vstavimo v drugo, dobimo po preurejanju in krajšanju za neznani polmer kroga enačbo

$$2x^3 + bx^2 - a^2b = 0. \quad (1)$$

Če načrtamo grafa funkcij $x \mapsto 2x^3$ in $x \mapsto a^2b - bx^2$, takoj opazimo, da ima enačba (1) samo eno pozitivno rešitev, ki je iskani polmer okroglega mesta.

V konkretnem primeru je $a = 6$, $b = 2$. Tedaj je treba rešiti enačbo $2x^3 + 2x^2 - 72 = 2(x^3 + x^2 - 36) = 0$. Rešitev kar uganemo: $x = 3$. Premer mesta je torej 6 km.

Pripomba. V vseh treh tukaj obravnavanih nalogah sta a in b racionalni števili, zato imajo polinomi na levi strani enačb (1), (2) in (3) racionalne koeficiente. Če je potrebno, odpravimo ulomke, tako da imamo na levi strani enačb polinome s celimi koeficienti. Nastane pa težava, kako poiskati ničle teh polinomov. Pri polinomih stopnje 1 in 2 to v srednjem veku ni bilo težko, vemo pa, da je bilo to težje pri polinomih tretje, četrte in višjih stopenj. Pri racionalni ničli p/q polinoma s celimi koeficienti, če taka ničla



SLIKA 2.

Razmere pri 1. nalogi

sploh obstaja, je števec p delitelj konstantnega člena in q delitelj vodilnega koeficienta polinoma. Ulomkov p/q pa ima polinom lahko zelo veliko in hitro se zgodi, da nam preverjanje vzame veliko časa, ničle pa kljub vsemu ne najdemo. V veliko pomoč nam je *Hornerjeva*, tudi *Ruffini-Hornerjeva metoda* (več o tem npr. v [1]), po kateri hitro, samo z množenjem, seštevanjem in odštevanjem, izračunamo vrednost polinoma v dani točki x_0 . Za ime metode sta zaslužna italijanski matematik Paolo Ruffini (1765–1822) in britanski matematik William George Horner (1786–1837).

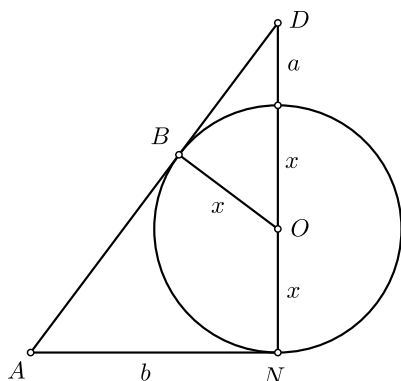
V resnici pa so tako metodo poznali Kitajci že veliko stoletij pred Hornerjem in Ruffinijem. V delu *Matematika v devetih poglavjih*, kitajsko *Shushu jiuzhang* (Shùshū jiǔzhāng, 數書九章) iz leta 1247, jo uporablja avtor Qin Jiushao (1202–1261) (Qín Jiùsháo, 秦九韶). Tudi Qin je reševal 2. nalogo, dobil pa je za iskani polmer polinomsko enačbo pete stopnje in jo za konkretni razdalji a in b tudi pravilno rešil.

Preostali rešitvi enačbe $x^3 + x^2 - 36 = 0$ najlažje dobimo ravno s Hornerjevo metodo. V našem primeru račun poteka takole:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 0 & -36 \\ & & 3 & 12 & 36 \\ x_0 = 3 & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}$$

To se pravi, da smo našli razcep $x^3 + x^2 - 36 = (x - 3)(x^2 + 4x + 12)$. Toda enačba $x^2 + 4x + 12 = 0$ ima konjugirano kompleksni rešitvi $-2(1 \pm i\sqrt{2})$, kar pomeni, da je $x = 3$ edina rešitev naloge.

2. naloga. Visoko drevo raste 2 km od južnih vrat proti jugu. Nekdo gre od severnih vrat proti vzhodu in zagleda omenjeno drevo, ko prehodi 6 km. Kako veliko je mesto?



SLIKA 3.

Razmere pri 2. nalogi

Rešitev. Označimo točke in razdalje tako, kot kaže slika 3. Pravokotna trikotnika AND in BOD sta si podobna, ker se ujemata v skupnem kotu z vrhom D in v pravem kotu. Za trikotnik BOD velja Pitagorov izrek. Dobimo zvezi

$$\frac{a + 2x}{b} = \frac{|BD|}{x}, \quad |BD|^2 = (x + a)^2 - x^2 = a(a + 2x).$$

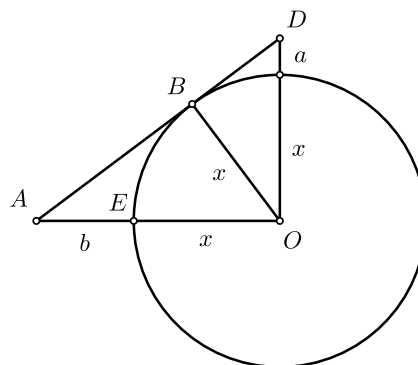
Če iz prve izrazimo $|BD|$ in vstavimo v drugo, dobimo po preurejanju in krajšanju za neznani polmer kroga enačbo

$$2x^3 + ax^2 - ab^2 = 0, \quad (2)$$

ki ima eno samo pozitivno rešitev. V našem primeru je $a = 2, b = 6$. Tedaj je treba rešiti enačbo $2x^3 + 2x^2 - 72 = 2(x^3 + x^2 - 36) = 0$. Spet dobimo rešitev $x = 3$. Premer mesta je potemtakem 6 km.

3. naloga. Visoko drevo raste $3/4$ km južno od južnih vrat. Neka oseba gre od vzhodnih vrat proti vzhodu in zagleda omenjeno drevo, ko prehodi 2 km. Kako veliko je mesto?

Rešitev. Označimo točke in razdalje tako, kot kaže slika 4. Za pravokotna trikotnika BOD in AOB zapišemo Pitagorov izrek, za pravokotni trikotnik AOD



SLIKA 4.

Razmere pri 3. nalogi

pa višinski izrek

$$\begin{aligned} & (a + x)^2 = x^2 + |BD|^2, \quad (b + x)^2 = x^2 + |AB|^2, \\ & |AB| \cdot |BD| = x^2. \end{aligned}$$

Iz vseh treh enačb izločimo $|BD|$ in $|AB|$. Dobimo relacijo

$$x^4 = (a^2 + 2ax)(b^2 + 2bx).$$

Po preureditvi je pred nami enačba

$$x^4 - 4abx^2 - 2ab(a + b)x - a^2b^2 = 0, \quad (3)$$

ki ima eno samo pozitivno rešitev. V našem primeru je $a = 3/4, b = 2$. Tedaj je treba rešiti enačbo $4x^4 - 24x^2 - 33x - 9 = 0$. Spet dobimo rešitev $x = 3$. Premer mesta je 6 km.

Literatura

- [1] Z. Bohte, *Numerično reševanje enačb*, Knjižnica Sigma, Ljubljana, Mladinska knjiga 1964.
- [2] U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press 1973.
- [3] J.-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Berlin in drugje, Springer 2006.
- [4] M. Saje, *Zgodovina Kitajske*, Ljubljana, Slovenska matica 2015.

× × ×

Smučarski poleti v Planici

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Poleti v Planici privabijo mnoge gledalce. Tekmovanje je vedno privlačno, a tam nas prevzamejo tudi poleti sami. Najboljši tekmovalci so v zraku tudi do osem sekund in pri skoku presmučajo ter z veliko hitrostjo preletijo višinsko razliko blizu 200 metrov. Motor je pri tem težja, ki dela s povprečno močjo malo manj kot sedmimi kilovati. Z večjo močjo dela težja le še pri prosto padajočem padalcu, če se omejimo na športne dejavnosti brez vodenja strojev.

Planiška letalnica je ena večjih v svetu. Pred tekmovalcem v Planici je vsako leto v zraku pričakovanje svetovnega rekorda v dolžini poletov. Ali poznamo kake fizikalne omejitve pri dolžini poletov? Edina omejitev je, kot vse kaže, le velikost skakalnice. Pomembna ovira bi bil še neenakomeren veter, a izkušnje kažejo, da so tekmovanja izvedljiva tudi pri precej nemirnem ozračju. Izurjenost dobro treniranih skakalcev zagotavlja izjemno varnost, ki je ne premore alpsko smučanje, posebno ne tekme v smuku. Padci pri skokih in poletih so izjemno redki, sploh pa zadnje čase ni padcev, kjer bi se tekmovallec resneje poškodoval. So pa tekmovalci izpostavljeni hudim obremenitvam nog pri doskoku v dno skakalnice, kjer poškodbe kolenskih vezi niso tako zelo redke.

Oglejmo si fizikalno plat smučarskih poletov. Tu fizika v podrobnostih ni prav preprosta, saj deluje na skakalca poleg teže tudi sila zraka. Te ne moremo preprosto in zanesljivo zajeti z nekaj enačbami, saj

je tekmovalčeva geometrija skupaj z vso opremo zelo zapletena. Poleg tega se pri odskoku zelo hitro spreminja, tekmovalec se mora najprej krepko odriniti, potem na hitro poskrbeti za optimalno lego smuči in telesa pri jadranju skozi zrak. Tudi pri pristanku se lega telesa v kratkem času spremeni.

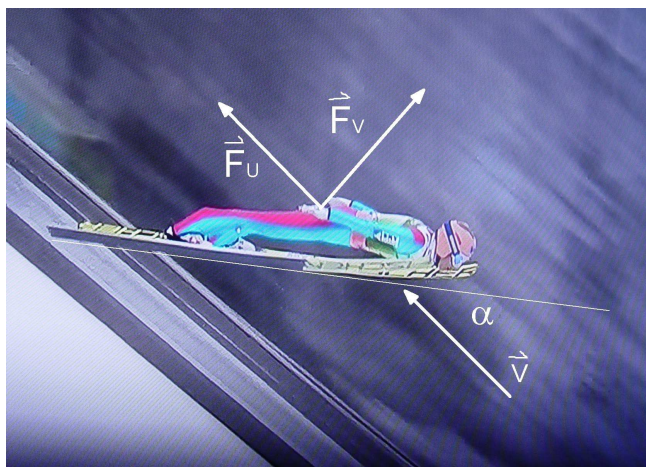
Če nimamo v mislih zahtevne raziskovalne naloge, ki bi morala čim natančneje opisati smučarja pri poletu, lahko poskusimo s preprostim modelom. Najprej moramo opredeliti sile na smučarja v zraku. S težo pač ni težav: deluje navzdol z velikostjo mg , kjer je m masa smučarja z opremo vred, g pa težni pospešek. Sila zraka pa je neprimerno bolj zapletena. Odvisna je od lege smučarja glede na zračni tok, ki ga le-ta pri letu občuti. Lego bomo opredelili le z enim parametrom, in sicer kotom α med ravnino, ki jo tvorita smučki, in smerjo toka zraka. Ta smer je nasprotna smeri leta skakalca skozi zrak, kot to vidimo z roba skakalnice. Silo zraka na skakalca razdelimo na dve komponenti, in sicer na silo upora F_U , ki je vzporedna s hitrostjo zračnega toka, in na silo dinamičnega vzgona F_V , ki je na hitrost toka pravokotna (glej sliko 1). V vetrovnikih so ti dve sili merili in ju predstavili z naslednjima enačbama:

$$\blacksquare F_U = \frac{1}{2} \rho v^2 S_U$$

in

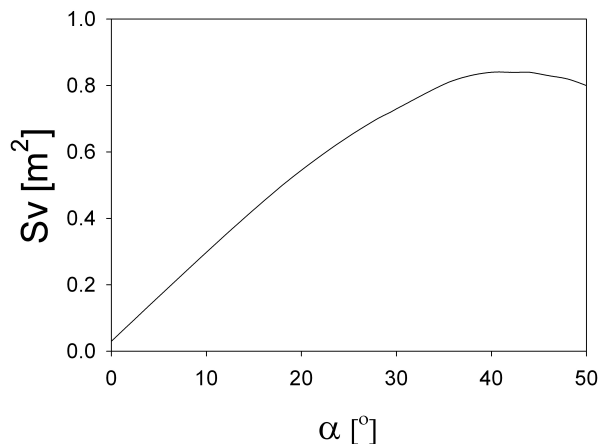
$$\blacksquare F_V = \frac{1}{2} \rho v^2 S_V.$$

Gre torej za kvadratni zakon glede na velikost hitrosti zraka v , efektivna preseka S_U in S_V pa sta zapleteni funkciji lege telesa glede na zračni tok. Pri samo enem parametru α in neki standardni legi skakalca, ki je več ali manj enaka pri vseh, je odvisnost efektivnih presekov prikazana na slikah 2 in 3.



SLIKA 1.

Komponenti sile zraka na skakalca med poletom. $\vec{F}_U$ je sila upora, $\vec{F}_V$ pa sila dinamičnega vzgona. Zrak se glede na skakalca giblje s hitrostjo $\vec{v}$. Kot med ravnino smuči in hitrostjo $\vec{v}$ je označen z α .



SLIKA 3.

Efektivni presek sile dinamičnega vzgona v odvisnosti od kota α

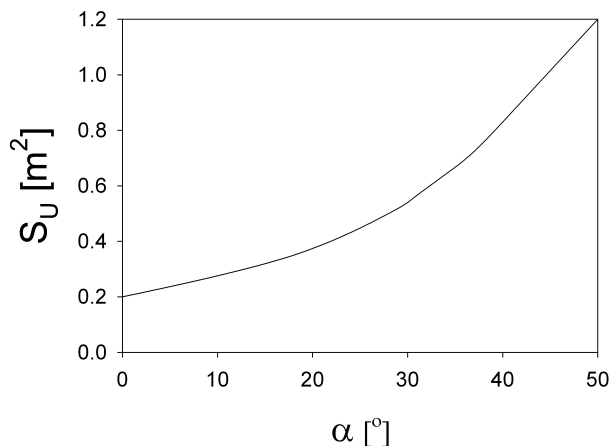
pa navpična navzgor, zapišemo Newtonov zakon za skakalca takole:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_V \sin \varphi - F_U \cos \varphi, \\ ma_y &= -mg + F_V \cos \varphi + F_U \sin \varphi, \end{aligned}$$

kjer je kot φ trenutni kot med tirov skakalca in osjo x , a_x in a_y sta pospeška v ustreznih smereh. Ta kot je sicer blizu velikosti kota α , a je pomembno upoštevati naklon smuči glede na vodoravnico φ_s , ki je različen od nič. Pri letalnicah, kot je to planiška, večina tekmovalcev jadra nekoliko strmoglavno (glej sliko 4).

Z Newtonovim zakonom in začetnim vektorjem hitrosti, ki je vzporeden z odskočno mizo, ta pa je za 10° nagnjena glede na vodoravnico in velikostjo 28 ms^{-1} , dobimo za tri naklonske kote 25° , 5° in -15° tire, ki so predstavljeni na sliki 5. Maso skakalca z opremo vred smo postavili na 60 kg.

Do tirov smo prišli s pospeški iz Newtonovega zakona, kjer smo s programom za vsako desetinko sekunde izračunavali prirastke hitrosti v vodoravni in navpični smeri, iz tako dobljenega vektorja hitrosti $\vec{v}$ pa smo sproti določevali kot α in premike skakalca vzdolž poti. Vidimo, da je pri kotu 5° polet najdaljši. Z izbiro naklonskega kota φ_s lahko smučar močno



SLIKA 2.

Efektivni presek sile upora v odvisnosti od kota α

Kako dobro smo s tem zajeli silo zraka na skakalca, preverimo tako, da izračunamo skakalčev tir in ga primerjamo s tirov, ki ga skakalec res opiše. V koordinatnem sistemu, kjer je os x vodoravna, os y



A black and white portrait of a middle-aged man with short, light-colored hair, wearing round-rimmed glasses and a mustache. He is dressed in a dark suit jacket, a white collared shirt, and a patterned tie. The background is a plain, light-colored wall. The photo is mounted on a dark album page.

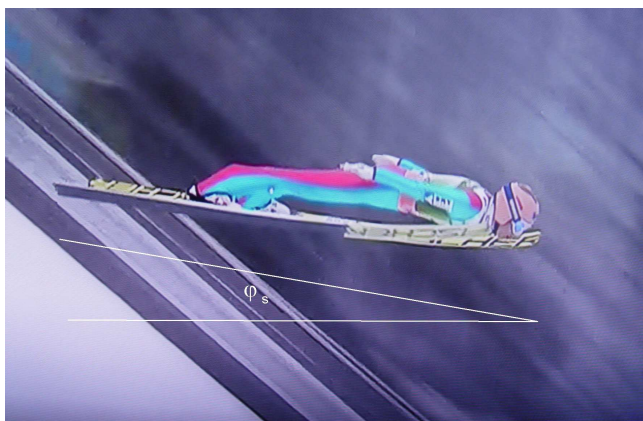
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. maja 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



15

nadaljevanje
s strani

SLIKA 4.

Naklon skakalca φ_s glede na vodoravnico

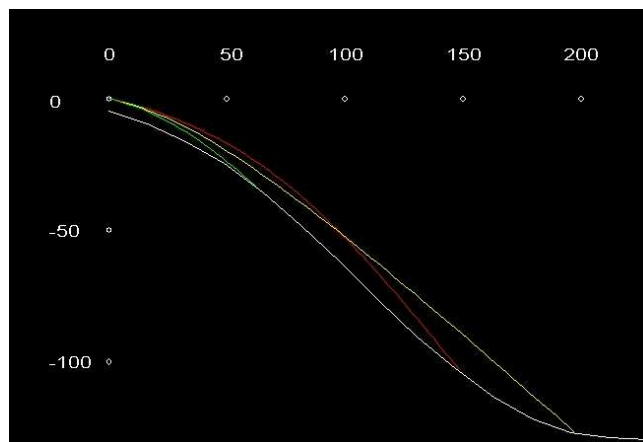
vpliva na svoj dosežek. Seveda je zelo pomemben tudi odskok, kjer so razmere zelo zapletene in jih pri našem računu nismo upoštevali. Privzeli smo, da se po odskoku smučar takoj postavi v lego s konstantnim naklonom smuči in telesa.

Kako lahko skakalec vpliva na svoj rezultat? Prav gotovo si s trdim treningom in z množico skokov pridobi potrebno spretnost, da se v pravem trenutku odrine in hitro postavi v najprimernejšo lego. Kako pa na dolžino skoka vpliva njegova masa? Račun pokaže, da za vsak kilogram povišane mase tekmovallec izgubi en meter pri dolžini skoka. Tekmovalci se zato trudijo zmanjšati telesno maso, kar pri mladencih ni zdravo. Da se hujšanje ne bi sprevrglo v bolezen, so predpisali najmanjšo celotno maso skakalca z opremo vred, ki mora ustrezati enačbi

$$\frac{m}{\text{kg}} \geq 21 \frac{h^2}{\text{m}^2}.$$

kjer je h telesna višina. Pri 1,7 m visokem tekmovalcu to znese okrog 60 kg.

V Newtonovem zakonu nastopa razmerje med efektivnima presekom S_U in S_V ter maso m . Efektivna preseka sta v grobem sorazmerna s kvadratom tekmovalčeve telesne višine h^2 . Pri enako grajenih tekmovalcih se prednost majhne mase torej izgubi, ker so pač lažji na račun manjše višine. A tekmovalci niso povsem enako grajeni in to nekaterim daje majhno prednost že pred tekmovanjem. S krojem in



SLIKA 5.

Tiri pri treh skokih, kjer je naklonski kot φ_s 25° (zelena krivulja), 5° (rumena krivulja) in -15° (rdeča krivulja). Krivulja v beli barvi je profil skakalnice HS 215, krogi pa označujejo vrednosti koordinat v metrih. Tir pri najdaljšem poletu se dobro ujema s tirom, ki so ga zabeležili pri skakalcu Simonu Ammannu, ko je poletel 233 m daleč. Profil skakalnice HS 215 najdemo na spletu.

s tkanino skakalnega dresa lahko to prednost še povečajo. Zato morajo tekmovalci tudi pri dresih slediti določenim pravilom, da se ta prednost čim bolj zmanjša. Ker so tekmovalci večinoma mladeniči, katerih telo se iz leta v leto znatno spremeni, nas ne preseneča zaton nekdanjih vrhunskih tekmovalcev.

Na dolžino skoka močno vpliva začetna hitrost. Vsak meter na sekundo višja začetna hitrost pomeni 10 m daljši skok. Prevelika začetna hitrost in nenaden vzgonski veter po skakalnici navzgor lahko pripelje do bolečega in nevarnega pristanka v dno skakalnice kljub zaviranju pred doskokom. Nadzor nad začetno hitrostjo je zato poglobljena skrb pri vodenju poletov.

× × ×

www.obzornik.si
www.dmfa.si

Naloge 26. sanktpeterburške astronomske olimpijade

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ Tudi letošnja sanktpeterburška astronomska olimpijada (SAO) je postregla z izvirnimi in težkimi nalogami odprtega tipa. Tekmovanja se udeležujejo najboljši učenci in učenke ter dijaki in dijakinje državnega tekmovanja iz znanja astronomije, so pa naloge zanimive za vse, ki se navdušujejo nad astronomijo.

Naloge SAO so v treh sklopih. Izbirni del tekmovanja je kot nekakšna domača naloga, ki jo tekmovalci pripravijo samostojno oz. s kakršnokoli pomočjo. Najbolje ocenjeni tekmovalci se nato uvrstijo v teoretični in praktični del tekmovanja, kjer pa niso dovoljena računalna in zbirke enačb ter konstant, kar SAO dela še posebej zahtevno.

Izbirni krog SAO 2019

7. in 8. razred osnovnih šol

1. Za opazovalca na Zemlji imata dva planeta enako kotno velikost na nebu. Katera planeta sta lahko to?
2. Astronom v Moskvi opazuje Merkur v vzhodni elongaciji. Kateri od njegovih kolegov, iz Jekaterinburga ali Kaliningrada, lahko v istem dnevu tudi vidi planet v vzhodni elongaciji?
3. Opazovalec, ki se nahaja v kenjskem mestu Nakuru, je teleskop usmeril natanko v zenit, da bi opa-

zoval kraterje na Luni. Izračunaj, v kolikšnem času Luna pobegne iz vidnega polja teleskopa, ki nima sledenja, če je njena ploskva na začetku točno v sredini polja. Zorno polje teleskopa je 2 stopinji. Oцени Lunino meno, če je bilo opazovanje ob 18. uri po lokalnem času.

4. Za povezavo z robotskim vozilom na Marsu uporabljajo radijsko zvezo. Prihaja pa do zamika med ukazi z Zemlje in reakcijami vozila. Preuči razloge za to. Oцени, kako dolgi so lahko ti zamiki zaradi različnih razlogov. Zaradi poenostavitve naloge lahko privzameš, da orbita Marsa leži v ravnini ekliptike.

5. V jedru galaksije M60-UCD1 je črna luknja z maso približno 20 milijonov mas Sonca, kar je 15 % vse mase te galaksije. Polovica mase vse galaksije se nahaja v osrednjem območju s premerom 160 svetlobnih let. Koliko mase na kubični parsek je v povprečju v tem območju?

9. razred osnovnih šol

1. Za kolikokrat se lahko razlikujeta navidezna premera ploskvic Merkurja in Marsa za opazovalca na Zemlji? Predpostavi, da sta orbiti planetov krožnici.
2. V reflektorskem teleskopu Newtonovega tipa (premer primarnega zrcala je 116 cm, njegova goriščna razdalja pa 1 m) opazuješ polno Luno z najmanjšo uporabno povečavo. Nato cev teleskopa pokriješ s pokrovom, v katerem je okrogla luknja s polmerom 1,5 cm, središče katere je na sredini med sredino in robom pokrova. Opiši, kako se je v teleskopu spremenila slika Lune.





3. Astronomi predpostavljajo, da se je planetarna meglica okoli objekta (zvezde) Sakurai pojavila in začela širiti pred 8300 leti. Danes je premer vidnega dela planetarne meglice 44 kotnih sekund. Oцени povprečno hitrost širjenja meglice, če je objekt od Sonca oddaljen 5 kiloparsekov.

4. Satelit kroži okoli Zemlje v smeri njenega vrtenja po krožni orbiti s polmerom 38 400 km. Nekega dne je satelit letel nad krajem z zemljepisno širino 20 stopinj severno in zemljepisno dolžino 15 stopinj vzhodno. Izračunaj zemljepisno dolžino kraja na isti zemljepisni širini, nad katerim bo letel satelit čez en obhod orbite.

5. Učenec Miki iz kraja Serpuhov je slikal »selfie«, pri čemer je držal roko vodoravno in pametni telefon navpično. Na posnetek je ujel Luno, ki se je dotikala vrha posnetka. Miki je fotografijo še isti hip poslal prijateljici Snežani v kraju Lisičij nos s podpisom: »Luna danes ne bo več vzšla.« Snežana je hotela narediti prav tako fotografijo. Koliko časa za Miki-jem bo lahko posnela prav tako fotografijo? Kolikšen kot mora biti med Snežanino roko in vodoravnico, če ima enak telefon kot Miki in ga prav tako drži navpično? Geografske koordinate Serpuhova: 55 stopinj severno, 37,5 stopinje vzhodno. Geografske koordinate Lisičjega nosa: 60 stopinj severno, 30 stopinj vzhodno.

Srednje šole

1. Koliko prej ali pozneje po svetovnem času zahaja Sonce v Jekaterinburgu ($\varphi_E = 56^\circ 50'$, $\lambda_E = 60^\circ 35'$) kot v Sankt Peterburgu ($\varphi_E = 59^\circ 57'$, $\lambda_E = 30^\circ 20'$) na dan 27. julija? Zanemari atmosfersko refrakcijo, navidezno velikost Sonca in časovno enačbo.

2. Izsev neke zvezde je $6,4 \times 10^3$ izseva Sonca, njena efektivna temperatura pa je 4460 K. Zamisli si, da se ta zvezda nahaja na mestu Sonca. Med orbitama katerih planetov bi se nahajalo površje (fotosfera) te zvezde?

3. Zaradi absorpcije svetlobe v Zemljinem ozračju se magnituda nebesnega telesa v zenitu zmanjša za 0,2. Izračunaj, kolikšno je zmanjšanje navideznega sija pri zenitni oddaljenosti 60° .

4. Satelita se gibljeta po krožnih orbitah nad ekvatorjem Zemlje in vsakih 10 ur en satelit leti nad drugim. Izračunaj obhodno dobo teh dveh satelitov, če je razmerje polmerov njunih orbit 1:4.

5. Med radarskim opazovanjem nekega zunanjega asteroida, ki se giblje po krožni orbiti v ravnini ekliptike, so astronomi ugotovili, da je čas potovanja signala do asteroida v opoziciji ζ -krat krajši od časa, ko je asteroid v (časovno) najbližji kvadraturi. Nariši graf odvisnosti časovnega intervala med opozicijo in kvadraturo od parametra ζ .

Teoretični del SAO 2019

7. in 8. razred osnovnih šol

1. naloga Sredi novembra je radiant nekega meteorskega roja najvišje na nebu tik pred zoro. Radiant katerega meteorskega roja je to – Leonidov ali Eta-Akvaridov? Odgovor utemelji.

2. naloga Vladar majhnega, a ponosnega kraljestva, ki mu ureditev sodobnega koledarja ni bila všeč, je s 1. januarjem 2019 razglasil svoj koledar, v katerem leto traja natanko 360 dni. Katerega leta po našem koledarju se bo naslednjič naš 1. januar ujel s 1. januarjem po koledarju tega kraljestva?

3. naloga Dva astronoma, eden iz Sankt Peterburga, drugi pa iz nekega drugega observatorija, opazujeta zvezdo Vega. Višina zgornje kulminacije Vege (največja višina zvezde nad obzorjem) se med opazovališčema razlikuje za 3 stopinje, pri čemer astronom na observatoriju vidi zgornjo kulminacijo Vege južno od zenita. Znano je, da je Vega za opazovalca na observatoriju v zgornji kulminaciji 1 uro in 58 minut prej kot v Sankt Peterburgu. Izračunaj zemljepisne koordinate observatorija in oceni razdaljo med observatorijem in Sankt Peterburgom.

4. naloga V času meritev oddaljenosti asteroida Diomed z radijskim signalom, se Jupiter nahaja v vzhodni kvadraturi. Koliko časa traja ena meritev oddaljenosti asteroida z radijskim signalom? Znano je, da se Diomed okoli Sonca giblje po enaki orbiti kot Jupiter in da je na orbiti za $1/6$ obhodnega časa pred Jupitrom.

5. naloga 27. julija 2018 se je zgodil redek astro-nomski pojav: velika opozicija Marsa je bila sočasno s popolnim (centralnim) Luninim mrkom. V sredini popolne faze Luninega mrka je bil Mars na nebu za 2 magnitudi svetlejši od Lune. Oцени, za kolikokrat je bila takrat ena kvadratna kotna sekunda vidne plo-skvice Marsa svetlejša od ene kvadratne sekunde Lu-nine ploskvice. Vemo, da razlika ene magnitude po-meni, da je eno nebesno telo približno 2,5-krat sve-tlejšje od drugega. Polmer Marsa je polovico polmera Zemlje. Polmer Marsove orbite je 1,5 astronomske enote.

9. razred osnovnih šol

1. naloga Elon Musk sanja o tem, da bi bil internet dostopen vsem. V ta namen načrtuje, da bi v orbito okoli Zemlje izstrelil množico satelitov, ki bi bili vsi na enaki višini nad površjem Zemlje. Izračunaj ob-hodno dobo satelitov in njihovo najmanjše število, s katerim bi s signali pokrili vso Zemljo. Predpostavi, da je na tleh komunikacija s satelitom mogoča, če je satelit najmanj 40 stopinj nad obzorjem.

2. naloga Raziskovalec je leta 2018 na severnem polu Zemlje opazoval vzhod Sonca in ugotovil, da se je zgornji rob ploskvice Sonca pokazal prav na dolo-čeni točki obzorja. Se bo leta 2019 zgornji rob Sonca pokazal na isti točki obzorja ali ne? Če ne, kolikšen bo kot med smerjo proti točki iz leta 2018? V katero stran od točke iz leta 2018 bo v tem primeru točka pojavljanja roba Sonca leta 2019? Vplive ozračja za-nemari.

3. naloga Agatoklov Sončev mrk, eden najzname-nitejših opisanih antičnih mrkov, je bil 15. avgusta 310 pred našim štetjem. Kot popolni je bil viden nad morsko ožino Dardanele (40 stopinj severne zemlje-pisne širine, 30 stopinj vzhodne zemljepisne dolži-ne). Znano je, da so ta mrk videli tudi učenjaki v Aleksandriji (30 stopinj severne zemljepisne širine, 30 stopinj vzhodne zemljepisne dolžine), ki so opa-zili, da se je Lunina senca gibala pravokotno na nebe-sni poldnevnik. Oцени največjo fazo tega Sončevega mrka v Aleksandriji.

4. naloga Oцени, kolikšen delež vseh zvezd, ki ka-darkoli pridejo nad obzorje v Sankt Peterburgu, pri-de v zgornjo kulminacijo severno od zenita.

5. naloga Neka zvezda ima navidezno magnitudo +7, njeno lastno gibanje na nebu pa ni enako nič. Ko-likšna bo njena navidezna magnituda, ko bo njeno la-stno gibanje na nebu štirikrat manjše? Predpostavi, da se hitrost zvezde, s katero se giblje po vesolju, ne spreminja.

Srednje šole

1. naloga Satelit se okoli Zemlje giblje po krožni or-biti na višini 200 km in gre čez zenit opazovališča. Izračunaj, koliko časa je kotna hitrost satelita, kot jo izmeri opazovalec v opazovališču, večja od polovice največje kotne hitrosti satelita.

2. naloga Charles Messier, znameniti lovec na ko-mete, je ob koncu 18. stoletja deloval v Parizu. Na podlagi opazovanj z različnimi teleskopi, katerih la-stnosti so bile v povprečju enake opazovanju pri ide-alnih pogojih z refraktorjem s premerom objektiva 6 centimetrov, je sestavil katalog megličastih nebe-snih teles. V Messierovem katalogu je mesto našlo 28 spiralnih galaksij. Oцени celotno število spiralnih galaksij, v katerih lahko s sodobnimi optičnimi tele-skopi vsaj načeloma razločimo posamezne zvezde, če seveda odmislimo eruptivne spremenljivke.

3. naloga Ameriški Vanguard-1 je bil četrti umetni satelit v orbiti okoli Zemlje. Bil je v obliki alumini-jaste krogle premera 16 cm in s šestimi dolgimi tan-kimi antenami. Satelit so v orbito izstrelili 17. marca 1958. Njegova obhodna doba je bila 134 minut, ek-scentričnost orbite $e = 0,184$, nagib (inklinacija) or-bite $i = 34,2^\circ$. Kdaj je lažje opaziti satelit iz Sankt Peterburga: ko je v apogeju ali ko je v perigeju? Pred-postavi, da je albedo aluminija 1.

4. naloga Znano je, da je izsevano številčno gostoto fotonov n v neposredni bližini idealnega črnega te-lesa mogoče oceniti z izrazom $n \approx 20 T^3$, kjer je temperatura T v Kelvinih, n pa v cm^{-3} . Oцени število fotonov, ki so v tem trenutku v Galaksiji.

5. naloga Vesoljska sonda je utirjena v geostacio-narno orbito okoli Zemlje. Specifični sunek sile nje-nih motorjev je 4500 m/s. Masa sonde brez goriva je ena tona, masa goriva pa je 6,4 tone. Ali lahko ta vesoljska sonda zapusti Osončje? Če ne, zakaj? Če da, kako?



→ Praktični del SAO 2019

7. in 8. razred osnovnih šol

Na šestih fotografijah (slika 1) (A do G) so iz različnih krajev tekom leta posneti položaji Sonca ob istem srednjem Sončevem času. Za vsako fotografijo posebej zapiši, iz katere poloble Zemlje in v katerem delu dneva (zjutraj, sredi dneva, zvečer) je bilo fotografirano Sonce. Katera fotografija je bila posneta najdlje od ekvatorja? Vse zaključke pojasni.

Predpostavi, da je srednji Sončev čas tisti, ki ga kaže navadna ura, pravi Sončev čas pa je tisti, ki ga kaže sončna ura.

V minutah izražena razlika med srednjim in prvim Sončevim časom (t. i. časovna enačba) v odvisnosti od dni v letu (od 1. januarja) je prikazana na grafu slike 1.

9. razred osnovnih šol

Zaporedje posnetkov Zemlje (slika 2) je naredila vesoljska sonda, ki se je gibala okoli Lune po krožni orbiti. Oцени višino sonde nad površjem Lune, če veš, da je med zaporednima posnetkoma minilo 8 sekund. Predpostavi, da je masa Lune 81-krat manjša od mase Zemlje, polmer Lune pa 4-krat manjši od Zemljinega.

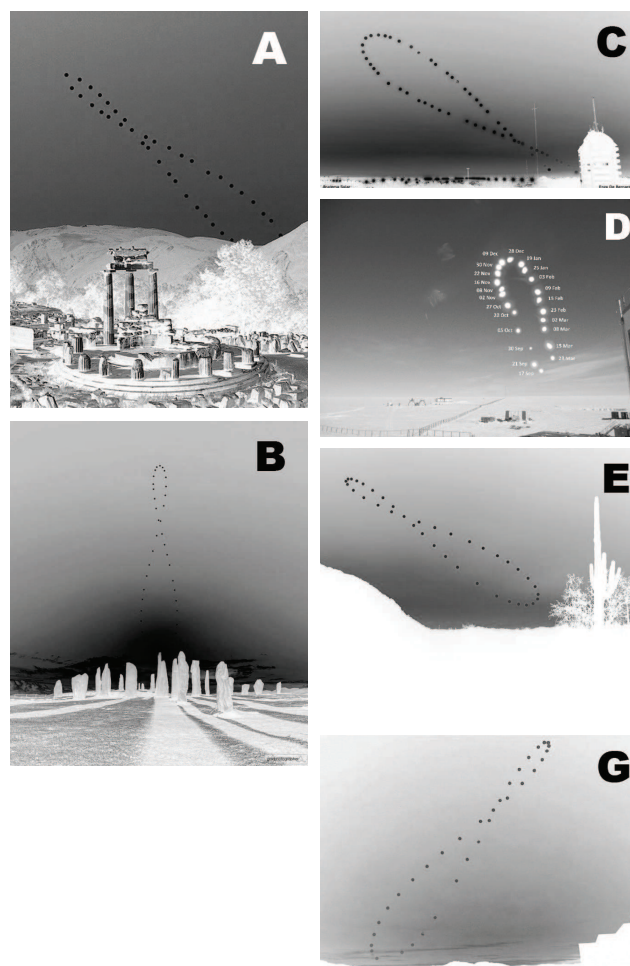
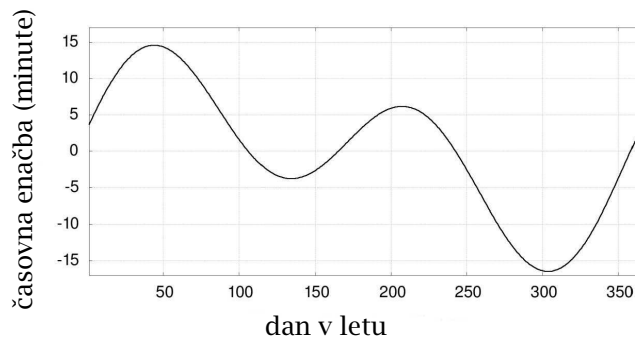
Srednje šole

Asteroid YORP se neenakomerno vrti okoli svoje osi. Na grafu (slika 3) je prikazana časovna odvisnost popravka faznega kota v stopinjah. Na abscisi je čas v dnevih (0 je 27. julij 2001), na ordinati je popravek faznega kota v stopinjah. Oznake na grafu so leta, v katerih so bile narejene meritve.

Popravek je potrebno dodati časovni odvisnosti faznega kota za enakomerno vrtenje, da bi se rezultati ujemali z opazovanji. Določi matematično obliko odvisnosti opazovanega faznega kota od časa in določi parametre te odvisnosti. Predlagaj možne razloge za tako neenakomernost.

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

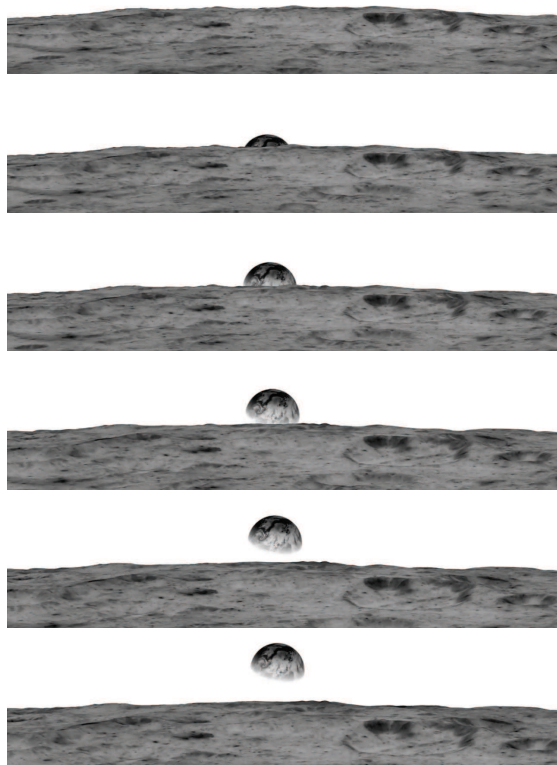


Slika 1.

Vodnikovo leto

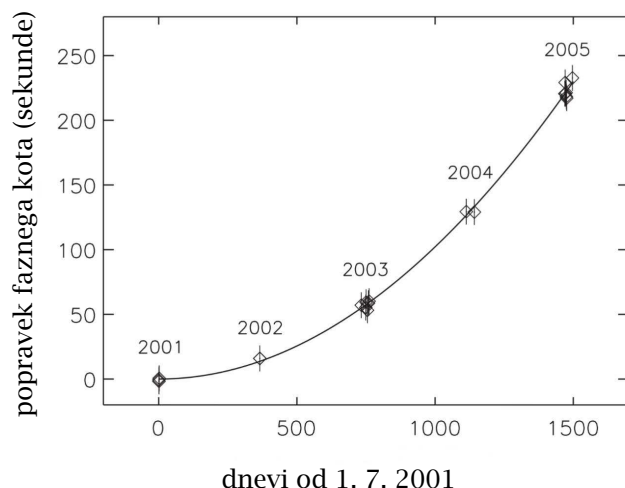
↓↓↓

MARIJAN PROSEN



→ Leto 2019 je Vodnikovo leto. Spominjamo se dvestote obletnice smrti pesnika, jezikoslovca in novinarja Valentina Vodnika. Bil je kar najbolj zaslužen za uvedbo slovenščine v šolo v času Ilirskih provinc. Je avtor prve slovenske pesniške zbirke. Mediji in slovenski znanstveniki različnih profilov so se v tem letu na široko razpisali o delu in delovanju Valentina Vodnika, kaj vse da je bil in koliko različnih stvari da je opravljal in tudi uspešno opravil v svojem življenju. Še celo v astronomiji je zapustil sledi – napisal je prvi slovenski astro-nomski poljudni članek (nekakšno poročilo) o opa-zovanju Venere z daljnogledom.

SLIKA 2.



SLIKA 3.

Kdaj so naši predniki začeli svoja astronomska opazovanja zapisovati v slovenščini?

Poglejmo nekoliko v zgodovino naše astronomije. Perlah, Strauss, Kobav, Hallerstein, J. K. Schoettl niso pisali slovensko ampak latinsko. Potem je nemščina polagoma izrivala latinščino. Vega je že pisal v nemščini. Slovenščina pa je čakala na svojo priložnost.

Prvo slovensko napisano poročilo o astronoms-kem opazovanju je napisal Valentin Vodnik in ga ob-javil v *Lublanskih Novicah*, ki jih je urejeval. Poročal je o opazovanju Venere v družbi strokovnjakov kot tudi v družbi navadnih Ljubljčanov. Opazoval jo je s teleskopom, ki je bil izdelan v Londonu. Imeno-val ga je *svesdno gledalo* (najbrž je bil reflektor), a se to ime za teleskop pri nas ni udomačilo. Predlagam, da v celoti preberete spodaj priložen Vodnikov spis.





SLIKA 1.

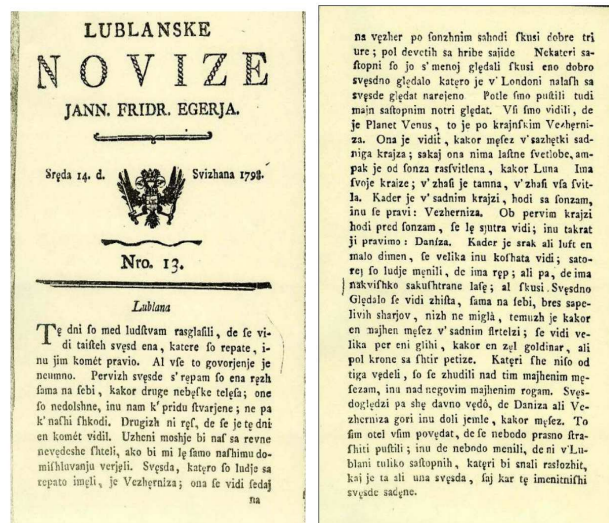
Valentin Vodnik (1758–1819), slovenski duhovnik – frančiškan, razsvetljenec, pesnik, pisatelj, prevajalec, jezikoslovec, učitelj, novinar, urednik, celo opazovalec in komentator astronomskega opazovanja.

Vodnik je Venero imenoval Vesherniza ali Venus. V članku preberemo tudi ime Daniza za Venero. *Lublanske Novice* (jan. 1797–dec. 1800) so izhajale ob sredah in sobotah, da bi v njih Ljubljancane navduševal tudi za astronomska raziskovanja.

Šele po 45-ih letih je višnjegorski župnik Janez Cigler (1792–1869), sicer pisec prve slovenske povesti *Sreča v nesreči* (1836), napisal drugi slovenski poljudni spis iz astronomije, in to o Luni. Izšel je leta 1843, v prvem letu izhajanja Bleiweisovih *Novic*.

Po Vodnikovem članku so torej minila kar dobra štiri desetletja do drugega slovenskega astronomskega spisa. Vmes so pri nas izhajali le nemški astronomski teksti v časopisih *Carniola* in *Illyrisches Blatt*, občasno tudi s kakšno astronomsko notico.

Naj zaključim, da je po vsej verjetnosti ta Vodnikov članek zares prvi poljudni slovenski članek, da pa je kapucin, oče Hipolit Novomeški (pravo ime Adam Gaiger; 1667–1722) že leta 1711 v svojem trijezičnem slovarju *Dictionarium trilingue* v dveh delih (latinsko-nemško-slovenski in nemško-slovensko-latinski) prvič zapisal nekaj pomembnejših sloven-



SLIKA 2.

Trenutno še vedno prvi slovenski poljudni astronomski članek – prva in druga stran Vodnikovega spisa, ki je izšel v sredo, 14. 2. 1798 v Lublanskih novicah in nima nobenega posebnega naslova. V arhivu NUK v Ljubljani ga najdemo pod naslovom *O repatici*.

slih astronomskih izrazov in jih strokovno obravnaval, ni pa napisal prvega slovenskega astronomskega članka. Ta je prišel na vrsto šele leta 1798, torej z Vodnikom.

V slovenščini napisani članki iz astronomije so se številnejše pojavili šele po letu 1848. Vsi so bili poljudni. Strokovni in znanstveni slovenski članki iz astronomije so nastali dosti pozneje (po drugi svetovni vojni). Danes je slovenščina glede astronomskega izrazoslovja in obravnavanja najrazličnejših astronomskih vsebin na strokovnem in znanstvenem nivoju povsem enakopravna ali enakovredna svetovnim jezikom, v določenih primerih pa je še celo izrazno natančnejša kot marsikateri od slovenščine svetovno bolj znan jezik.

Literatura

- [1] V. Vodnik, *O repatici*, Lublanske novice, 2 1798, 13.

× × ×

Generiranje naključnih števil

↓↓↓

BLAŽ STOJANOVIČ

→ Leta 1946 so v Los Alamosu fiziki, ki so v tem času izdelovali jedrsko bombo, prvič pognali simulacije z metodo Monte Carlo [1]. Dandanes algoritma ne uporabljajo le fiziki, temveč se ta na široko uporablja tudi v financah, biologiji in računalniški grafiki. Organizacija IEEE je Metropolisov algoritem, različico metode Monte Carlo, uvrstila med deset najpomembnejših algoritmov dvajsetega stoletja. Ključnega pomena tako za Monte Carlo algoritem kot še za mnoge druge pa je generiranje naključnih števil. Toda kljub veliki potrebi po dobrih generatorjih naključnih števil smo nanje čakali kar nekaj časa. Še leta 1988, 42 let po iznajdbi Monte Carlo metode, je bil objavljen članek z naslovom *Generatorji naključnih števil: dobre je težko najti* (*Random generators: good ones are hard to find* [2]).

Pred iznajdbo računalnikov je bilo iskanje naključnih števil zelo mučno. Sir Francis Galton, znan angleški polihistor, je leta 1890 v slavno revijo *Nature* napisal, da ne obstaja boljše naprave za naključno izbiranje števil kot igralne kocke [3]. Da bi postopek vsaj malce pospešili, so na začetku dvajsetega stoletja, ko je potreba po takšnih številih narasla, nastale dolge tabele polne naključnih števil. Prvo je leta 1927 objavil Leonard Tippett, vsebovala pa je 41600 števk. Tippett je števila naključno izbral iz cenzenskih registrov.

Prvi računalnik, ki je lahko generiral prava naključna števila, je bil *Ferranti Mark 1*, ki je 20 bitna naključna števila ustvarjal s pomočjo električnega šuma. Tudi danes lahko prava naključna števila dobimo z meritvijo fizikalnih sistemov, za katere pri-

čakujemo, da so naključni. Pridobivamo jih npr. z merjenjem atmosferskega in termičnega šuma ali pa z meritvijo kakšnih kvantnih pojavov. Za veliko uporabo pravzaprav ni ključnega pomena, da so števila zares naključna, zadostuje da so *statistično* naključna, kar pomeni, da zaporedja takih števil ne vsebujejo nobenih vzorcev ali regularnosti in jih za praktične potrebe ne moremo ločiti od zares naključnih. Ta, t. i. *pseudonaključna* števila, lahko brez večjih težav generiramo z računalniki, kar je mnogo hitreje kot pridobivanje zares naključnih števil.

Princip delovanja generatorjev pseudonaključnih števil

Princip delovanja generatorja pseudonaključnih števil je preprost. Začnemo z začetnim številom s_0 , ki ga imenujemo seme (ang. *seed*), iz tega s pomočjo prehodne funkcije f izračunamo novo število. Tako generiramo zaporedje števil z zaporednim apliciranjem funkcije f kot $s_1 = f(s_0)$, $s_2 = f(s_1)$ oz. v splošnem

$$\blacksquare s_i = f(s_{i-1}). \quad (1)$$

Najpogosteje je seme s_0 določeno kar z računalnikovo uro, da je tudi samo do neke mere naključno, lahko pa ga seveda nastavimo tudi sami. Zaporedje števil, ki ga tako pridobimo po enačbi (1), se po določenem številu korakov začne ponavljati. To število korakov imenujemo *perioda* generatorja in jo označimo s p . Perioda generatorja naključnih števil je pomembna lastnost in želimo si, da bi bila perioda našega generatorja čim večja. Kadarkoli uporabljamo generatorje pseudonaključnih števil pa se moramo zavedati, da števila niso zares naključna, saj novo število iz starega dobimo po nekem determinističnem, vnaprej predpisanem postopku. Znan je citat slavnega matematika in fizika Johna von Neumanna [4], ki je opozarjal na takšno »zlaboro« generatorjev naključnih števil:





Kdor se spogleduje z uporabo aritmetičnih postopkov za generiranje naključnih števk, je v grehu. Kajti, kot je bilo večkrat poudarjeno, naključna števila sama po sebi ne obstajajo – obstajajo le metode, ki ustvarjajo naključna števila, in dosleden aritmetični postopek gotovo ni ena izmed njih.

Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin. For, as has been pointed out several times, there is no such thing as a random number – there are only methods to produce random numbers, and a strict arithmetic procedure of course is not such a method.

Citat ne pomeni, da je bil von Neumann proti uporabi psevdonaključnih števil, temveč je želel le opozoriti na pravilno uporabo.

Generiranje z rezanjem robnih števk

Prav John von Neumann je leta 1949 predlagal *metodo srednjega kvadrata*, ki spada v širšo skupino generatorjev, ki generirajo števila s pomočjo rezanja. Algoritem je zelo preprost: začnemo z n mestnim semenom, ki ga kvadriramo, in dobimo neko kvečjemu $2n$ mestno število, ki mu spredaj napišemo dovolj ničel, da je dolgo točno $2n$. To število obrežemo z leve in z desne, tako da spet dobimo n mestno število. Kot zgled si pogledjmo prvi korak metode kvadriranja, če je seme 13:

- $s_0 = 13$
 $s_0^2 = 0169$
 $s_1 = \emptyset 169 = 16$

Največja težava metod, ki uporabljajo rezanje števk, je, da se hitro ujamejo v kratke cikle ali pa naletijo na ničlo, in tako vračajo le še nič. Pogledjmo nadaljevanje zgornjega zaporedja:

- $16 \rightarrow 25 \rightarrow 62 \rightarrow 84 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots$

V 50-ih letih je Metropolis pokazal, da za 20-bitna števila metoda s kvadriranjem lahko zaide v trinajst

različnih ciklov, najdaljši izmed njih pa je dolg 143 števil [5]. Malce boljša je metoda z množenjem, kjer se naključno število pomnoži z drugim naključnim številom, a ima tudi ta enake hibe kot metoda srednjega kvadrata.

V programskem jeziku Python lahko metodo srednjega kvadrata implementiramo v eni sami vrstici. Naš generator bo vračal štirimestna števila, brez težav pa ga lahko bralec spremeni, da bo vračal števila s poljubno mesti.

```
def generate(s):
    return int(str(s*s).zfill(8)[2:6])
```

Število s , podano kot parameter, najprej kvadriramo, potem ga spremenimo v niz s funkcijo `str`. Če ima niz manj kot osem elementov, ga dopolnimo z ničlami s pomočjo metode `zfill` in potem vzamemo števke od vključno drugega do vključno petega mesta, pri čemer začnemo šteti mesta z 0.

Oglejmo si delovanje generatorja s sliko naključnih točk v ravnini. Če hočemo generirati dvodimenzionalne točke, potrebujemo dve semeni. Standardno je, da generator psevdonaključnih števil vrača vrednosti na intervalu od 0 do 1, zato vrednosti ki jih dobimo po kvadriranju, delimo z največjim številom, ki ga lahko generator vrne. Funkcija `zaporedje_stevil` vrne zaporedje N psevdonaključnih števil s semenom s . Pokličemo jo dvakrat in tako dobimo x in y koordinate točk.

```
m = 9999
def zaporedje_stevil(N, s):
    rand = []
    for i in range(N):
        s = generate(s)
        rand.append(s/m)
    return rand
```

```
x = zaporedje_stevil(1000, 5412)
y = zaporedje_stevil(1000, 1143)
```

Ustvarjene točke so narisane na sliki 1 levo. Jasno je vidna pomanjkljivost generatorja, prej ali slej se ujame v cikel in vrednosti se začnejo ponavljati. Za zgoraj izbrana semena se to zgodi veliko prej kot v tisoč iteracijah in posledično je različnih točk na sliki precej malo.

Linearni kongruentni generatorji

Prvo pravo izboljšavo je predlagal Lehmer, ko je predlagal *linearne kongruentne generatorje*. Generatorji take vrste so še danes zelo priljubljeni: v programskem jeziku C jo uporablja funkcija `rand`, še vedno se uporablja tudi v programskem jeziku Java.¹ Generator deluje tako, da poleg semena izberemo še tri števila:

- m , modulus; $m > 0$
- a , multiplikator; $m > a \geq 0$
- c , inkrement; c

Nova števila dobimo s prehodno funkcijo

- $f(s_i) = (a \cdot s_i + c) \bmod m$,

kjer $\bmod m$ označuje ostanek pri celoštevilskem deljenju z m . Pri izbiri naših čarobnih števil m , a in c moramo biti pazljivi, če želimo, da je naš generator čim boljši. Tipično sta c in m tuji, a pa je izbran tako, da za vsak $x \in \mathbb{N}$ velja, da $a \cdot x$ ni deljiv z m . Jasno je, da dolžina cikla nikoli ne bo presegla števila m , saj so ostanki pri deljenju z m med 0 in $m - 1$. Izkaže pa se, da jo lahko maksimiziramo, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

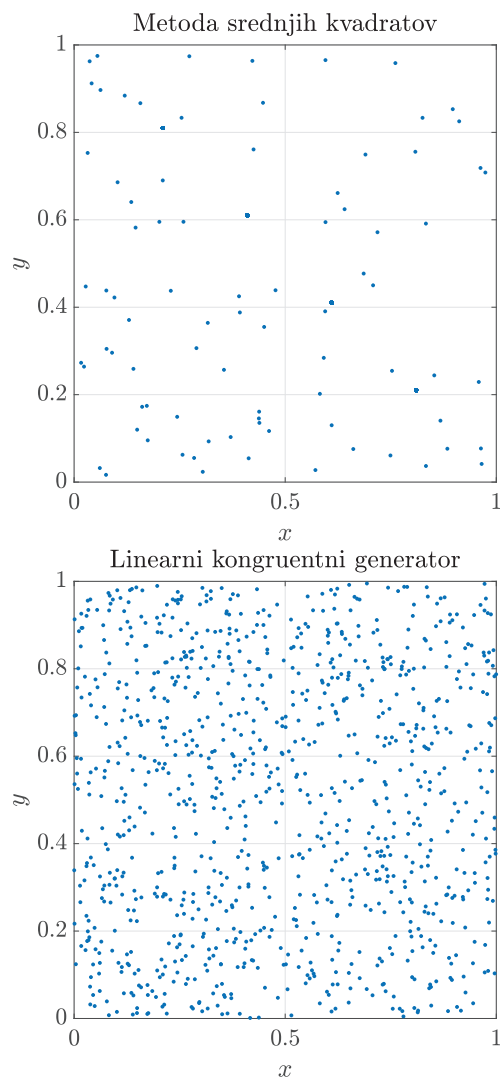
- c in m sta tuji,
- $a - 1$ je večkratnik vseh praštevil, ki so delitelji m ,
- $a - 1$ je večkratnik 4, kadar je m večkratnik 4.

Bralci, ki jih zanima dokaz, ga lahko najdejo v Knuth-ovi slavni knjigi [5]. Implementacija je še bolj preprosta kot pri metodi srednjih kvadratov:

```
def generate(m, a, c, s):
    return (a*s + c) % m
```

Seveda je treba pametno izbrati čarobna števila. Modulus je ponavadi potenca 2, ker lahko računalnik ostanke pri deljenju s potencami 2 izračuna hitreje, zato izberemo $m = 2^{32}$. Ostali števili sta izbrani ustrezno po zgornjem predpisu, da je perioda generatorja $m - 1$, npr. $c = 1013904223$ in $a = 1664525$.

Na sliki 1 vidimo, da je opisana metoda veliko močnejša kot metoda srednjih kvadratov.

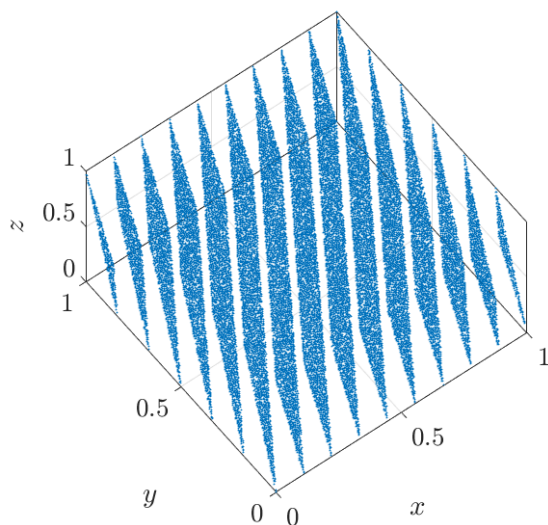


SLIKA 1.

Tisoč točk ustvarjenih z metodo srednjih kvadratov in linearnim kongruentnim generatorjem

Kljub temu, da linearni kongruentni generatorji nimajo veliko očitnih težav, je ena izmed njih lepo vidna, ko generiramo točke v več dimenzijah. Generirane točke namreč ležijo v enakomerno razmaknjenih ravninah, le-teh pa je največ $(d! \cdot m)^{\frac{1}{d}}$, kjer je d število dimenzij. Če so m , a in c izbrani dovolj slabo, lahko ta pojav tudi vidimo. Tak primer je generator RANDU ($m = 2^{31}$, $a = 65539$ in $c = 0$), ki velja za enega izmed najslabših vseh časov.

¹verzija 11


SLIKA 2.

$2 \cdot 10^4$ točk v treh dimenzijah generiranih z RANDU, čarobna števila so zelo slabo izbrana.

Mersenne Twister

Leta 1997 sta Makoto Matsumoto in Takuji Nishimura iznašla generator psevdonaključnih števil, ki je danes daleč najbolj razširjen in splošno uporabljan. Imenovala sta ga Mersenne Twister, kar v slovenščino približno lahko prevedemo kot Mersennov zvižalec. Uporablja Mersennova praštevila, imenovana po francoskem matematiku Marinu Mersennu. Poleg tega Mersenne Twister v svojem imenu tudi skriva začetnici črk avtorjev. Mersenne Twister je standarden psevdonaključni generator v programskih jezikih Python, R, Matlab, PHP, Lisp, na voljo pa je tudi v C++. Ustvarjen je bil z namenom, da odpravi slabosti psevdonaključnih generatorjev, ki so bili v rabi v tistem času. To metodi tudi uspe, saj ima različica, ki je najpogostejše uporabljena periodo $2^{19937} - 1$ in opravi tudi najtežje statistične teste. Poleg tega metoda izkoristi tudi binarno strukturo računalnika, kar jo naredi zelo hitro.

Izračun π z Monte Carlo

Poglejmo si, kako bi s pomočjo naključnih števil dobili približek števila π . Kot smo omenili že prej,

naključni generatorji števil vračajo števila v intervalu $[0,1)$, zato se je problema najlažje lotiti tako, da naključno izbiramo točke na enotskem kvadratu $[0,1) \times [0,1)$ in štejemo, koliko jih pade v notranjost kroga s središčem v izhodišču. Tu moramo biti malce pazljivi, saj se v enotskem kvadratu namreč nahaja le četrtnina kroga, kar se lepo vidi na sliki 3. Razmerje med številom vseh generiranih točk in tistih, ki so se znašle v notranjosti kroga, nam nekaj pove o razmerju ploščin kvadrata in četrtnine kroga. Vemo namreč, da za ploščino četrtnine kroga $S_{krog/4}$ in ploščino kvadrata $S_{kvadrat}$ velja

$$\frac{S_{krog/4}}{S_{kvadrat}} = \frac{\pi}{4},$$

če sta seveda stranica kvadrata in polmer kroga enaka. Verjetnost, da se bo naključno izbrana točka nahajala v krogu, je enaka ravno razmerju obeh ploščin. Od tod sledi, da je razmerje števila točk, ki se nahajajo v krogu N_{krog} , in števila vseh točk N približek za razmerje ploščin

$$\frac{N_{krog/4}}{N} \approx \frac{S_{krog/4}}{S_{kvadrat}} = \frac{\pi}{4}.$$

Približek za π imamo tako na dlani:

$$4 \frac{N_{krog/4}}{N} \approx \pi.$$

Zgornji postopek je primer metode Monte Carlo in pomembna lastnost postopka je, da napaka našega približka pada kot $\frac{1}{\sqrt{N}}$ z naraščajočim številom točk N .

Oglejmo si, kako lahko takšen približek napravimo v Pythonu. V knjižnici `numpy` imamo na voljo `random.rand`, ki uporablja Mersenne Twister. Približek za π dobimo že v nekaj vrsticah.

```
import numpy as np
```

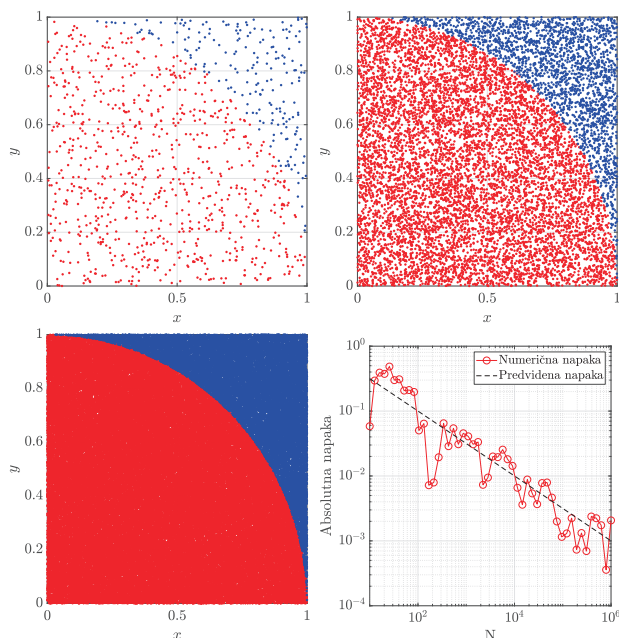
```
N = 10**4
```

```
tocke = np.random.rand(2, N) # naredimo naključne točke
```

```
r2 = np.sqrt(np.square(tocke[0]) + np.square(tocke[1])) # kvadrat razdalje
```

```
k = r2[np.where(r2 <= 1)] # izberemo točke v krogu
```

```
print(4*len(k)/N) # izračunamo približek
```



SLIKA 3.

(a) $N = 10^3$, $\pi \approx 3,18240$, (b) $N = 10^4$, $\pi \approx 3,14818$
 (c) $N = 10^5$, $\pi \approx 3,14029$, (d) Odvisnost napake od števila točk.
 Izračun števila π z metodo Monte Carlo.

Na sliki 3 vidimo generirana števila pri različnih N , pa tudi napako našega približka v odvisnosti od N .

Vendar pa računanje približka π še zdaleč ni vse, kar bi lahko o generiranju naključnih števil povedali, kajti nobena izmed naštetih metod ni dobra za kriptografsko uporabo. Kriptografsko varni generatorji psevdonaključnih števil so zanimivi tako iz matematičnega kot praktičnega pogleda. Poleg tega smo izpustili tudi razpravo o tem, kako se generatorje psevdonaključnih števil zares vrednoti; statistični testi, ki se uporabljajo v te namene, so lahko iztočnica za nadaljnje branje.

Zgodba o naključnih številih ni zanimiva le za matematike, je tudi pomemben nauk za vse, ki računalnike uporabljajo in hočejo iz njih iztisniti kar je le mogoče. Opozarja na to, da je včasih vredno pogledati pod pokrov, in se vprašati, kako stvari delujejo, ali obstaja boljši način. Donald Knuth je v svoji knjigi Umetnost računalniškega programiranja (Art of Computer Programming [5]) zapisal:

Danes uporabljamo veliko generatorjev naključnih števil, za katere pa žal ne moremo reči, da so dobri. Premalokrat ljudje namreč nismo pripravljeni na uporabo novih metod dela, posebej, če se nam zdi, da stare delujejo. Tako je tudi v tem primeru – stare, ne več zadosti dobre metode programerji prevzemajo drug od drugega, uporabniki pa ne vedo ničesar o tem, da so pravzaprav že pomanjkljive.

Many random number generators in use today are not very good. There is a tendency for people to avoid learning anything about such subroutines; quite often we find that some old method that is comparatively unsatisfactory has blindly been passed down from one programmer to another, and today's users have no understanding of its limitations.

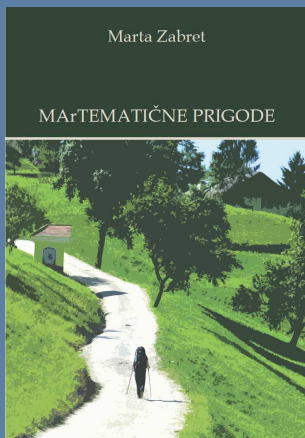
Generatorji naključnih števil in njihova uporaba so se od takrat močno izboljšali, vendar zgornja trditev morda danes velja za kakšno drugo metodo, ki jo uporabljamo vsak dan.

Literatura

- [1] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller in E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, The journal of chemical physics, **21** 1953, 1087–1092.
- [2] S. K. Park in K. W. Miller, *Random number generators: good ones are hard to find*, Communications of the ACM, **31** 1988, 1192–1202.
- [3] F. Galton, *Dice for statistical experiments*, 1890.
- [4] J. von Neumann, *Various techniques used in connection with random digits*, John von Neumann, Collected Works, **5** 1963, 768–770.
- [5] D. E. Knuth, *Art of computer programming, volume 2: Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley Professional, 2014.

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MARTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Dodatne informacije lahko dobite v uradništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



**REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE**
PRESEK 46/4

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz četrte
številke Preseka je **Afri-
ško pleme**. Izmed pra-
vilnih rešitev so bili iz-
žrebani JURE KARO iz
Orehove vasi, MARKO
KUBALE iz Rogaške Sla-
tine in SUZANA AVŠIČ iz
Mirna, ki so razpisane
nagrade prejeli po pošti.

x x x

Zakaj se sneg bolj oprijema na mostovih?

↓↓↓

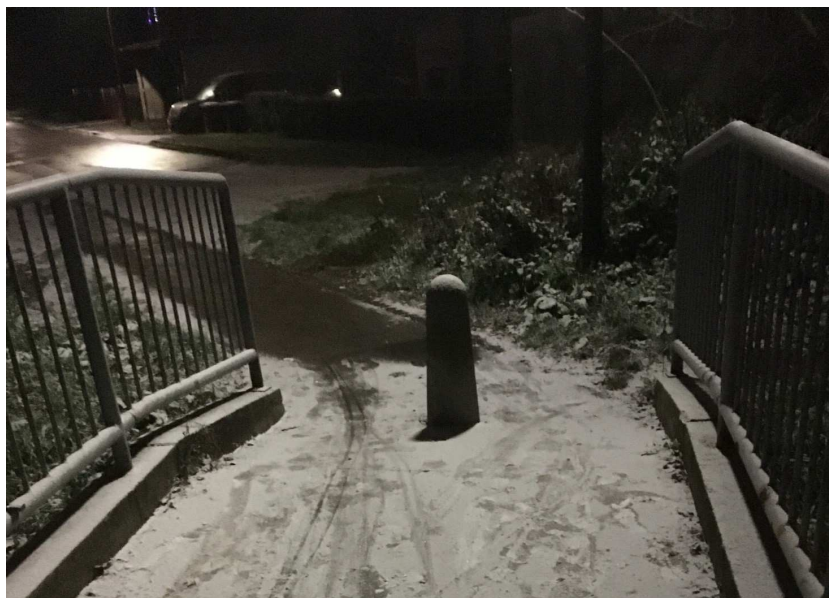
KRISTINA PAHOR

→ Na začetku zime, ko zapade prvi sneg, lahko opazimo, da se prvi sneg veliko lažje oprime na mostovih in nadvozih kot kje drugje. Včasih se celo zgodi, da je sneg le tam, drugod pa ga sploh ni. Zakaj je tako?

Sneži, ko je ozračje hladno. Ko začne snežiti, je oprijemanje snega na še nezasnežene površine odvisno od dogajanja v prejšnjih dneh. Če je bila temperatura zraka in tal prej nad lediščem, se morajo tla med sneženjem najprej ohladiti vsaj do ledišča. Ohlaja jih vdor hladnega zraka, ki spremlja prihod snežnih padavin. Hitrost spreminjanja temperature tal je odvisna od količine zapadlega snega, njegove temperature, temperature ozračja in toplotne prevodnosti ter toplotne kapacitete tal.

Primerjajmo sedaj hitrost ohlajanja tal in mostov. Tla se ohlajajo le skozi zgornjo ploskev. Mostovi imajo za razliko izpostavljeno večjo površino. Poleg tega so mostovi navadno grajeni iz betona in železa, ki sta materiala z relativno majhno specifično toplotno. Taki materiali tudi dosti bolje prevajajo toploto kot porozne snovi, npr. prst. Zato se temperatura podlage na mostu dosti lažje in hitreje prilagaja temperaturi ozračja. Površina mosta oziroma cel most se lahko hitro ohladita, kar botruje oprijemanju snega.

Pozimi moramo zato paziti, ko peljemo čez mostove, da primerno prilagodimo hitrost. Tudi na sprehodih moramo biti previdni, saj je na mostu lahko poledica tudi, če je drugod ni.



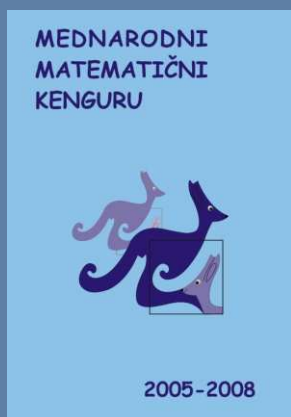
SLIKA 1.

× × ×

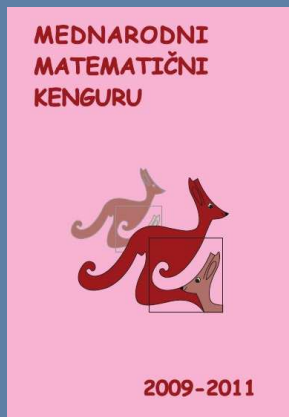
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!