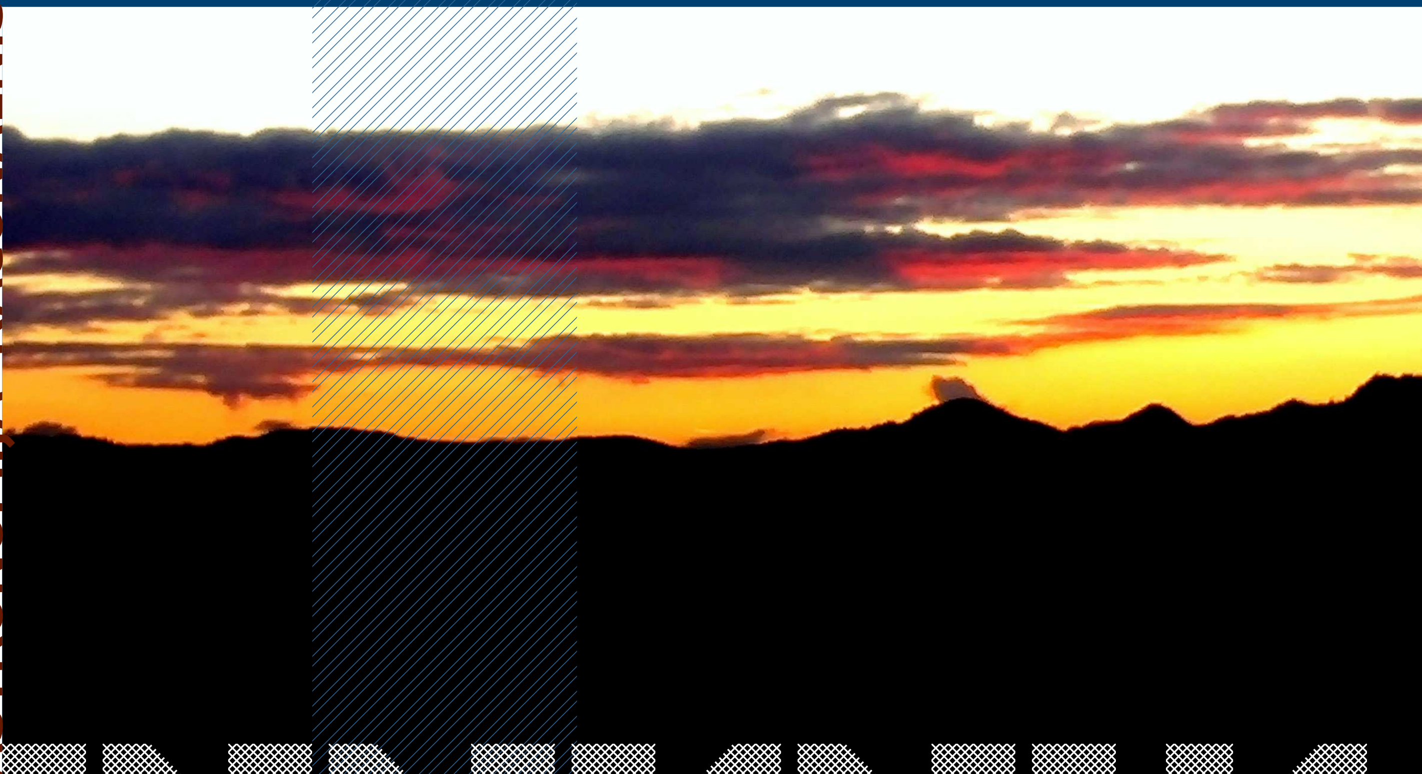
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#3

PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA 3



PRESEK

→ TRIKOTNIKA V TRIKOTNIKU

→ UGLAJENA ŠTEVILA

→ SVETLOBNI ŽVRGOLEJ

→ PLEMELJ IN METEOR

→ UČEČI SE ROBOT

ISSN 0351-6652

9 770351 665630

Oblike školjk

Mehkužci sicer ne slovijo po matematičnih spretnostih, se pa v čudovitih vzorcih na njihovih hiškah skriva obilo matematike. Skupina matematikov je s pomočjo diferencialne geometrije, ki obravnava krivulje in ploskve, ugotovila, da veliko školjk nastane na enak način – njihov plašč tvori lupino po treh enostavnih postopkih: z raztezanjem, vrtenjem in zvijanjem. Raztezanje in vrtenje, na primer, oblikujeta takšno školjko, kot je na sliki. Školjka se debeli v spiralnem vzorcu v smeri odprtine. Z zvijanjem pa nastanejo školjke v obliki spiralnih stolpov ali zapletenih rogov.

Raziskovalci so ugotovili tudi, zakaj imajo nekatere školjke bodice. Te se tvorijo med hitrejšo rastjo plašča, pravokotno na odprtino školjke, v času, ko plašč še ni popolnoma poravnan z odprtino. Zamik povzroči nestabilnost, izboklino, ki se še dodatno okrepi z rastjo školjke. Skupina je svoje ugotovitve in tudi drugačne matematične modele preverjala z meritvami rasti resničnih školjk in primerjavo zaznanih vzorcev z matematičnimi napovedmi. Še vedno je veliko odprtih vprašanj. Na primer, zakaj nekateri vzorci na hrbtih školjk postanejo fraktalni in zakaj se večina školjk zvija v smeri urnega kazalca.

Bolj natančne informacije lahko najdete v članku *How the Seashells Take Shape*, ki so ga v reviji Scientific American objavili D. E. Moulton, A. Goriely in R. Chirat aprila 2018.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

SLIKA NA NASLOVNICI: Na sončnem zahodu z naslovnice se skriva zanimiva senca. Jo najdete? Foto: Tina Ogrinc

Trikotnika v trikotniku

↓↓↓
Jurij Kovič in Aleksander Simonič

→ **Matematiko se v šolah učimo, kot da gre za vedo z ostrimi ločnicami med posameznimi področji. Na tak način spoznavamo njene pojme, metode in izreke. Toda dejanski matematični problemi, ki jih matematiki srečujemo pri svojem raziskovalnem delu, niso vselej strogo omejeni na posamezna področja matematike.**

Velikokrat je za rešitev problema z enega področja potrebno poznavanje pojmov, pristopov in tehnik z drugih, navidezno ločenih področij. Do rešitve lahko vodi tudi več različnih poti. Včasih nas zanima le dokaz, da rešitev obstaja, včasih pa želimo rešitev tudi konkretno poiskati, čeprav je slednja pot velikokrat daljša.

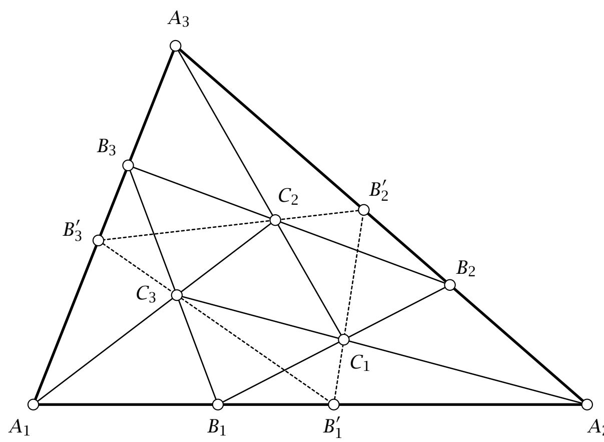
Tako se je ob reševanju nekega problema s področja konfiguracij naravno pojavil naslednji elementaren geometrijski problem.

Problem 1. Imejmo trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$ in take točke $B_1 \in A_1A_2$, $B_2 \in A_2A_3$ in $B_3 \in A_3A_1$ na njegovih stranicah, da je

$$\lambda = \frac{|A_1B_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|A_3B_3|}{|A_3A_1|} \tag{1}$$

za neko število $\lambda \in (0,1)$, glej sliko 1. Kako dobiti točke C_1, C_2 in C_3 na stranicah trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$, da bo veljalo $C_1 \in A_2C_3$, $C_2 \in A_3C_1$ in $C_3 \in A_1C_2$?

Na prvi pogled ni jasno niti to, ali take točke vedno obstajajo. Izkaže se, da je odgovor pritrdilen. Do tega spoznanja lahko pridemo tudi preko *linearnih transformacij*, kjer naravno nastopajo vektorji.



SLIKA 1.
Naloga je poiskati take točke C_1, C_2 in C_3, da bodo izpolnjeni pogoji problema 1.

Ideja je, da obstaja bijektivna preslikava med enakostraničnim in raznostraničnim trikotnikom, pri tem pa se ohranjajo presečišča in razmerja. Bralcu, ki bi ga utegnil tak pristop zanimati, ponujamo v branje članka [3, 4]. S tem res dobimo dokaz obstoja takih točk, ne pa tudi načina, kako bi jih poiskali »z golimi rokami«, recimo ravnilom in šestilom. V nadaljevanju bomo določili tako število μ, ki je rešitev kvadratne enačbe s koeficienti, odvisnimi le od razmerja λ, in za katerega velja

$$\mu = \frac{|B_1C_1|}{|B_1B_2|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_2B_3|} = \frac{|B_3C_3|}{|B_3B_1|}. \tag{2}$$

To pomeni, da točke C_1, C_2 in C_3 delijo stranice trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$ v razmerju μ. Pokazali bomo, da ga je moč konstruirati le s šestilom in neoznačenim ravnilom. Take konstrukcije spadajo med najbolj zaželene v geometriji, glej npr. knjigo [2].

Slika 1 pa razkriva še eno zanimivo lastnost. Vzemimo take točke $B_1' \in A_1A_2$, $B_2' \in A_2A_3$ in $B_3' \in A_3A_1$, da je

$$\mu = \frac{|A_1B_1'|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_2B_2'|}{|A_2A_3|} = \frac{|A_3B_3'|}{|A_3A_1|},$$

kjer je število μ definirano z izrazom (2). Potem točke C_1, C_2 in C_3 ležijo tudi na stranicah trikotnika $\triangle B_1'B_2'B_3'$, glej črtkan trikotnik na sliki 1. Da je stvar še bolj zanimiva, velja tudi

$$\lambda = \frac{|B_1'C_1|}{|B_1'B_2'|} = \frac{|B_2'C_2|}{|B_2'B_3'|} = \frac{|B_3'C_3|}{|B_3'B_1'|}. \tag{3}$$

Vidimo, da sta vlogi razmerij λ in μ zamenjani. Zato lahko upravičeno rečemo, da je trikotnik $\triangle B_1'B_2'B_3'$ *dualen* trikotniku $\triangle B_1B_2B_3$.

Rešitev problema

Definirajmo linearno neodvisna vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{A_3A_1}$. Po predpostavki problema imamo $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = -\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$ in $\overrightarrow{A_3B_3} = \lambda\vec{b}$. Vzemimo točke $C_1 \in B_1B_2$, $C_2 \in B_2B_3$, $C_3 \in B_3B_1$ na stranicah trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$ in definirajmo števila $\mu_1 = |B_1C_1| / |B_1B_2|$, $\mu_2 = |B_2C_2| / |B_2B_3|$, $\mu_3 = |B_3C_3| / |B_3B_1|$. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_1C_1} &= \mu_1\overrightarrow{B_1B_2} = \mu_1(1-2\lambda)\vec{a} - \mu_1\lambda\vec{b},\\
\overrightarrow{B_2C_2} &= \mu_2\overrightarrow{B_2B_3} = -\mu_2(1-\lambda)\vec{a} - \mu_2(1-2\lambda)\vec{b},\\
\overrightarrow{B_3C_3} &= \mu_3\overrightarrow{B_3B_1} = \mu_3\lambda\vec{a} + \mu_3(1-\lambda)\vec{b}.
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1C_2} &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2}\\
&= (1-\lambda)(1-\mu_2)\vec{a} - (\lambda(1-\mu_2)\\
&\qquad + \mu_2(1-\lambda))\vec{b},\\
\overrightarrow{A_2C_3} &= \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_3C_3}\\
&= -(1-\lambda\mu_3)\vec{a} - (1-\lambda)(1-\mu_3)\vec{b},\\
\overrightarrow{A_3C_1} &= \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\\
&= (\lambda(1-\mu_1) + \mu_1(1-\lambda))\vec{a} + (1-\lambda\mu_1)\vec{b}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1C_3} &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2C_3} = \lambda\mu_3\vec{a} - (1-\lambda)(1-\mu_3)\vec{b},\\
\overrightarrow{A_2C_1} &= \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3C_1}\\
&= -((1-\lambda)(1-\mu_1) + \lambda\mu_1)\vec{a} - \lambda\mu_1\vec{b},\\
\overrightarrow{A_3C_2} &= \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1C_2}\\
&= (1-\lambda)(1-\mu_2)\vec{a} + ((1-\lambda)(1-\mu_2)\\
&\qquad + \lambda\mu_2)\vec{b}.
\end{aligned}$$

Točke A_1, C_3 in C_2 so kolinearne natanko tedaj, ko obstaja tako število $k \neq 0$, da je $\overrightarrow{A_1C_3} = k\overrightarrow{A_1C_2}$. Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja, koeficienti pred vektorjema pa so vedno neničelni, je ta pogoj ekvivalenten enačbi

$$\frac{(1-\lambda)(1-\mu_2)}{\lambda\mu_3} = \frac{\lambda(1-\mu_2) + \mu_2(1-\lambda)}{(1-\lambda)(1-\mu_3)}.$$

Podobno izpeljemo še preostali enačbi. Če vsako enačbo pomnožimo z ustreznimi veččleniki in potem izpostavimo člene z μ_1, μ_2, μ_3, opazimo, da lahko vse enačbe zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}
&\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\mu_i\mu_{i+1} - (1-\lambda)^2\mu_i\\
&\qquad - \left(2\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)\mu_{i+1} + (1-\lambda)^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

kjer indekse $i \in \{1,2,3\}$ obravnavamo ciklično, torej $\mu_4 = \mu_1$, $\mu_5 = \mu_2$ itd. Enačba (4) je ekvivalentna pogoju kolinearnosti. Pomnožimo (4) z $(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mu_{i+2}$. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)^2\mu_i\mu_{i+1}\mu_{i+2}\\
&- \left(2\lambda^4 - 6\lambda^3 + 7\lambda^2 - 4\lambda + 1\right)(\mu_i + \mu_{i+1})\\
&- \left(2\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\mu_{i+2}\\
&+ (1-\lambda)^2\left(3\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Če v (5) zamenjamo i z $i+1$ in potem odštejemo dobljeno od (5), dobimo

$$\lambda(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mu_i = \lambda(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mu_{i+2}.$$

Ker pa za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $3x^2 - 3x + 1 > 0$, sledi $\mu_i = \mu_{i+2}$ in s tem $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Sedaj vemo, da lahko te neznanke pospravimo pod eno samo, recimo ji μ. Enačba (4) se zato poenostavi v kvadratno enačbo →

- $\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\mu^2 - \left(3\lambda^2 - 4\lambda + 2\right)\mu + (1-\lambda)^2 = 0 \quad (6)$

z rešitvama

- $\mu_\pm(\lambda) = \dfrac{3\lambda^2 - 4\lambda + 2 \pm \sqrt{\lambda\,(4 - 3\lambda(2-\lambda)^2)}}{2\,(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)}.$

Naj bo D diskriminanta te kvadratne enačbe. Bralec lahko brez težav izračuna

- $D - \lambda^2(3\lambda-2)^2 = 4(1-\lambda)\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right), \quad (7)$

  $\left(3\lambda^2 - 4\lambda + 2\right)^2 - D = 4(1-\lambda)^2\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right). \quad (8)$

Po (7) dobimo $D > \lambda^2(3\lambda-2)^2$ in s tem $D \geq 0$, $\sqrt{D} > \lambda(3\lambda-2)$ in $-\sqrt{D} < \lambda(3\lambda-2)$. Rešitvi $\mu_\pm(\lambda)$ sta zato realni in velja $\mu_+(\lambda) > 1$ in $\mu_-(\lambda) < 1$. Po (8) pa imamo še $\mu_-(\lambda) > 0$. Torej je $\mu_-(\lambda)$ edina ustrezna rešitev enačbe (6). S tem $\mu = \mu_-(\lambda)$ ustreza enačbi (2) in predstavlja rešitev problema 1.

Konstrukcija

Kako bi konstruirali točke C_1, C_2 in C_3 samo s šestilom in neoznačenim ravnilom, če imamo podana trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$ in $\triangle B_1B_2B_3$, tako da velja (1)? Seveda je to dovolj narediti za eno točko, recimo C_1. Enostavno lahko preverimo, da velja

- $\mu_-(\lambda)$
  $= \dfrac{p - 2r - |A_1B_1|/2 - \sqrt{(p - 3r - 3q/4)\,|A_1A_2|}}{p - 3r},$

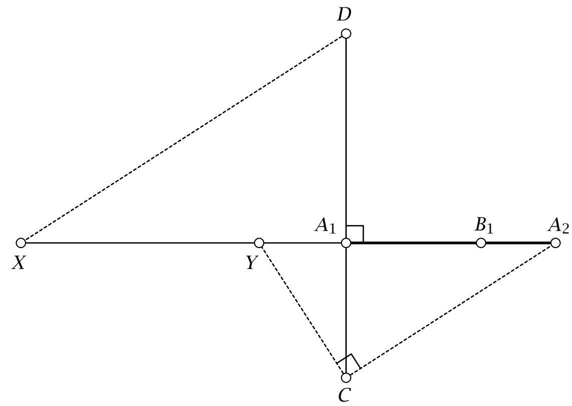
kjer smo definirali

- $p = \dfrac{|A_1A_2|^2}{|A_1B_1|},\ q = \dfrac{|A_1B_1|^2}{|A_1A_2|},\ r = |A_1A_2| - |A_1B_1|.$

Sedaj znamo točko C_1 precej enostavno konstruirati, če le imamo daljici dolžin p in q.

Ena izmed možnih konstrukcij daljic dolžin p in q je prikazana na sliki 2. Zahtevamo, da velja $|A_1C| = |A_1B_1|$ in $|A_1D| = |A_1A_2|$, pri čemer so točke C, A_1, D kolinearne in $CD \perp A_1A_2$. Točki X in Y na premici A_1A_2 določimo tako, da bo veljalo $CA_2 \parallel XD$ in $CA_2 \perp YC$. Potem je $|XA_1| = p$ in $|YA_1| = q$.

Bralca vabimo, da si v prostodostopnem orodju za dinamično geometrijo *GeoGebri* ustvari novo orodje, ki bo sprejelo točke A_1, A_2, A_3 in B_1, B_2, B_3, vrnilo pa točke C_1, C_2, C_3 preko te konstrukcije.



SLIKA 2.
Konstrukcija daljic XA_1 in YA_1 z dolžinama p in q.

Dualen trikotnik

Dokazali bomo še trditev o dualnem trikotniku $\triangle B_1'B_2'B_3'$. Zaradi enostavnosti pišimo $\mu = \mu_-(\lambda)$. Po definiciji točk B_1', B_2' in B_3' imamo $\overrightarrow{A_1B_1'} = \mu\vec{a}$, $\overrightarrow{A_2B_2'} = -\mu\vec{a} - \mu\vec{b}$ in $\overrightarrow{A_3B_3'} = \mu\vec{b}$. Izkoristimo ciklični zapis indeksa $i \in \{1,2,3\}$. Ker je $\overrightarrow{A_iB_i'} = (\mu/\lambda)\overrightarrow{A_iB_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (1/\lambda)\overrightarrow{A_iB_i}$ in $\overrightarrow{B_iB_{i+1}} = (1/\lambda - 1)\overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$, imamo

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{B_i'B_{i+1}'} &= \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}'} - \overrightarrow{A_iB_i'}\\ &= \frac{1}{\lambda}\left((1-\mu)\overrightarrow{A_iB_i} + \mu\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}\right),\\ \overrightarrow{B_i'C_i} &= \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{B_i'B_i}\\ &= \mu\overrightarrow{B_iB_{i+1}} + \overrightarrow{A_iB_i} - \overrightarrow{A_iB_i'} = \mu\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}\\ &\quad + (1-\mu)\overrightarrow{A_iB_i}.\end{aligned}$$

Od tod sledi $\lambda\overrightarrow{B_i'B_{i+1}'} = \overrightarrow{B_i'C_i}$. S tem je enakost (3) dokazana.

Naloge

1. Dokaži, da velja $\mu_-(1/2) = 2 - \varphi$, kjer je $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ zlato število. V tem primeru podaj enostavnejšo konstrukcijo točke C_1, ki bo temeljila na zlatem rezu. Več o tem zanimivem številu lahko bralec poišče v [1].

2. Ali lahko samo s šestilom in neoznačenim ravnilom podamo konstrukcijo trikotnikov s slike 1, da bo $B_i = B_i'$ za $i \in \{1, 2, 3\}$? To pomeni, da iščemo rešitve enačbe $\mu_-(\lambda) = \lambda$. Dokaži, da ima ta enačba natanko eno smiselno rešitev $\lambda = \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)/3$.

Literatura

[1] R. A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

[2] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* 2×2 *matrike*, Presek **32** (2004/2005), št. 4, 9–12.

[4] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* 2×2 *matrike (drugi del)*, Presek **32** (2004/2005), št. 5, 5–8.

× × ×

Igra s čokoladkami – Chocolate Fix

↓↓↓
Nada Razpet

→ **V bonbonierah so navadno dražji bonboni, največkrat polnjeni in obliti s čokolado. Letos sem prejela posebno bonboniero, igro, sestavljeno iz devetih plastičnih bonbonov, rekli jim bomo čokoladke. Plastičnih čokoladk seveda ne moremo pojesti, se pa z njimi lahko igramo.**

Najprej nekaj osnovnih podatkov o igri. V izvirniku se igra imenuje *Chocolate Fix* s podnaslovom *Sweet Logic Game* ([1], [2]). Njen ustvarjalec (skupaj z ekipo podjetja ThinkFun, ki se ukvarja z igrami) je Mark Engelberg. Mark je obiskoval srednjo šolo za nadarjene dijake in kasneje nadaljeval študij na univerzi. Ima dve diplomi, iz računalništva in kognitivnih znanosti. Nekaj časa je bil zaposlen pri NASI, kasneje pa se je posvetil računalniškim igricam, sodeluje pa tudi pri pripravah učnih načrtov, predvsem iz logike. Želel je ustvariti igro s čim manj pravil, ki bi bila primerna tako za igranje na računalniku kot brez njega, hkrati pa bi omogočala igranje na več nivojih. Igra je prejela več prestižnih nagrad, med njimi v ZDA zelo cenjene nagrade staršev *Parents Gold Award leta 2008, 2009 in 2010*. Obstaja več verzij te igre, mi bomo pogledali verzijo iz leta 2010.

SLIKA 1.
Deli igre Chocolate Fix. Levo zgoraj je podstavek, poleg so čokoladke. Svetlo rumene čokoladke so na sliki videti bele. Spodaj so kartonski žetoni treh barv oziroma žetoni s trikotniki, kvadrati in krogi ter knjižica z navodili, nalogami in rešitvami.

Deli igre

Igra ima črn podstavek z devetimi vdolbinami in devet čokoladk: tri roza, tri svetlo rumene (na fotografijah so videti bele, na skicah jih bomo obarvali živo rumeno) in tri rjave (glej sliko 1). Čokoladke iste barve se med seboj razlikujejo po obliki zgornje ploskve, ki je lahko kvadrat, trikotnik ali krog. V kompletu dobimo še po tri žetone roza, rumene in rjave barve ter devet sivih žetonov. Na treh sivih žetonih so narisani trikotniki, na treh kvadrati in na treh krožnice. Z žetoni si pomagamo pri reše- →

vanju težjih problemov. Priložena je tudi knjižica s 40 kartončki, povezanih s spiralo. Na sprednjih straneh kartončkov so narisane naloge, na hrbtnih straneh pa njihove rešitve. Prvih 10 nalog je namenjenih začetnikom, naslednjih 10 je srednje težkih, sledijo naloge za bolj izurjene, zadnjih 10 pa je namenjenih mojstrom.

Oznake

Podstavek označujemo s sivim kvadratom (osnovni kvadrat), ki ga razdelimo na devet skladnih kvadratkov (celice). Čokoladke označujemo po obliki zgornje ploskve, torej s krogom, kvadratom in trikotnikom. Rumeno obarvan trikotnik predstavlja rumeno čokoladko s trikotno zgornjo ploskvijo, rjavo obarvan kvadrat pa predstavlja rjavo čokoladko s kvadratno zgornjo ploskvijo itd. Kvadrat, trikotnik in krožnica, ki imajo bele stranice (notranjost ni obarvana), pomenijo, da je tam čokoladka s kvadratno (trikotno ali okroglo) zgornjo ploskvijo, ne vemo pa, katere barve je, poznamo torej samo obliko čokoladke. Celice so lahko obarvane. Barva celice določa barvo čokoladke (ne vemo pa njene oblike). V nadaljevanju bomo čokoladko opisali z barvo in obliko zgornje ploskve, na primer: okrogla rjava, rumena trikotna itd. Pri tem se seveda zavedamo, da so čokoladke trirazsežna telesa.

Pravila

Karton z nalogo je z navpičnimi in vodoravnimi črtami razdeljen na več delov. V zgornjem levem delu je navadno narisan osnovni kvadrat z devetimi celicami. V nekaterih celicah so že oznake. Za te celice vemo, katera čokoladka sodi tja (če je označena oblika in barva) oziroma katere oblike ali barve čokoladke moramo dati v določeno celico. V preostalih delih kartončka, ki so omejeni s črtami, pa so večkotniki sestavljeni iz sivih kvadratkov (celic). Tudi celice večkotnikov lahko vsebujejo prej omenjene oznake.

Posamezne večkotnike polagamo na osnovni kvadrat tako, da jih premikamo vodoravno ali navpično, ne smemo pa jih vrteti ali zrcaliti. Položaj večkotnikov na osnovnem kvadratu mora biti tak, da zahteve za obliko in barvo čokoladk v celicah večkotnika niso v nasprotju z zahtevami v celicah osnovnega kvadrata, ki jih ta večkotnik prekrije. Večkotniki se lahko pri polaganju na osnovni kvadrat med seboj prekrivajo, ne smejo pa segati čez osnovni kvadrat. Navadno z narisanimi večkotniki ne prekrijemo celotnega osnovnega kvadrata. Kaj leži v nepokritih celicah, moramo ugotoviti sami.

Cilj igre je torej razporediti devet čokoladk v podstavek tako, da bodo lege čokoladk ustrezale zahtevam celic osnovnega kvadrata in nanj položenih večkotnikov.

Vseh možnih razporeditev čokoladk je seveda veliko. Hitro jih izračunajmo. Za prvo vdolbino imamo devet možnosti (ker je devet čokoladk), za drugo osem (eno smo že uvrstili), za tretjo sedem itd., do zadnje odprtine, ko ostane le še ena možnost, torej velja:

- $M = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362\,880$

Produkt števil od 1 do 9 v matematiki zapišemo kot 9! in beremo *devet fakulteta* ali devet faktoriela.

Avtor je poskrbel, da ima vsaka naloga eno samo rešitev.

Primer 1

Kartonček z nalogo je razdeljen na tri dele (slika 2). Zgoraj levo je osnovni kvadrat, zraven in spodaj pa sta dva večkotnika, v tem primeru dva pravokotnika.

Da bo opisovanje rešitev lažje, označimo celice osnovnega kvadrata s številkami od 1 do 9, celice prvega pravokotnika s črkama A in B, celice drugega pravokotnika pa s črkami C, D in E. (slika 3).

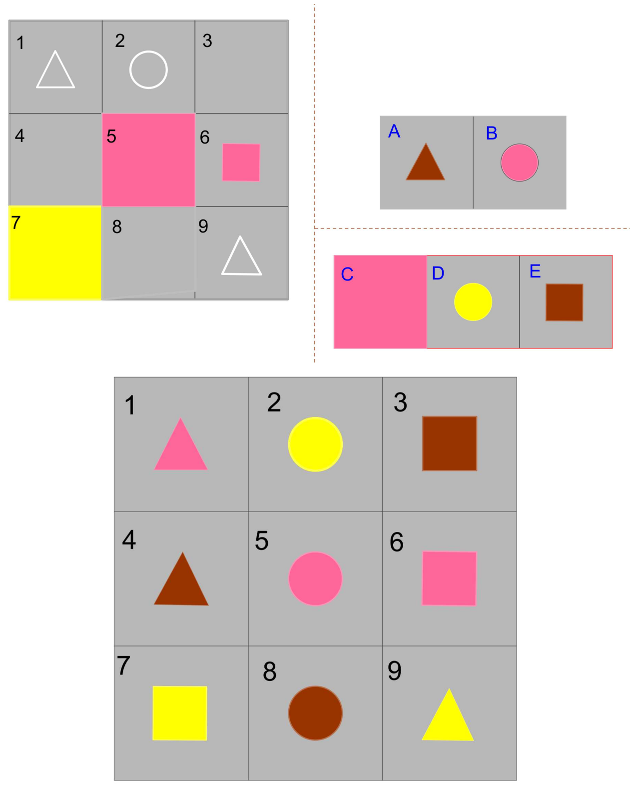
Najprej poglejmo, kaj povedo o čokoladkah oznake na osnovnem kvadratu in obeh pravokotnikih.

V prvi celici osnovnega kvadrata je narisan bel trikotnik, torej bo na tem mestu trikotna čokoladka, barve še ne vemo. V drugi celici bo okrogla čokoladka, barve še ne vemo, v peti celici bo roza čokoladka, oblike še ne vemo, v šesti celici je roza kvadratna čokoladka, v sedmi celici bo rumena čokoladka, oblike še ne vemo, in v deveti celici bo trikotna čokoladka, barve še ne vemo.

V prvem pravokotniku z dvema celicama sta čokoladki znani. V celici A je trikotna rjava, v celici B pa roza okrogla čokoladka.

V drugem pravokotniku bo v celici C roza čokoladka, oblike ne vemo, v celici D je rumena okrogla čokoladka in v celici E je rjava kvadratna čokoladka.

SLIKA 2.
Zgoraj: Fotografija kartončka z nalogo. Spodaj: Rešitev.



SLIKA 3.
Oznaka osnovnega kvadrata, dveh večkotnikov (pravokotnikov) in shema rešitve.

Reševanje

Pravokotnik s celicama A in B lahko položimo na osnovni kvadrat na dva načina, tako da zasede 1. in 2. ali pa 4. in 5. celico. Pete in osme celice ne more zasesti, ker bi morali pravokotnik zasukati za 90°, kar pa ni dovoljeno.

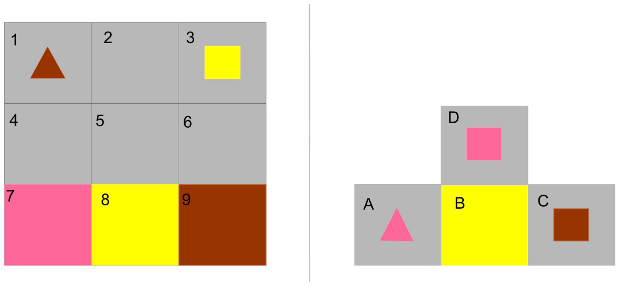
S pravokotnikom, s celicami C, D in E, prekrijemo eno celo vrstico. Katero? Prvo vrstico osnovnega kvadrata (slika 3). Zakaj? V drugi vrstici srednja celica, celica 5, zahteva roza čokoladko, srednja celica pravokotnika, to je celica D, ki bi to celico prekrila, pa zahteva rumeno okroglo čokoladko. Zahtevi si nasprotujeta. Kaj pa tretja vrstica? Sedma celica osnovnega kvadrata zahteva rumeno, prva celica pravokotnika, to je C celica, ki bi to celico prekrila, pa zahteva roza čokoladko, torej si tudi ti dve zahtevi nasprotujeta.

Pravokotnik s celicama A in B moramo torej položiti na 4. in 5. celico osnovnega kvadrata.

Kaj smo ugotovili? Čokoladke so razporejene takole: V prvi vrstici so: roza trikotna, rumena okrogla in rjava kvadratna čokoladka. V drugi vrstici so: rjava trikotna, roza okrogla in roza kvadratna čokoladka. Preostale tri čokoladke pa lahko razporedimo na en sam način, da ustrezajo zahtevani barvi v sedmi celici in obliki v deveti celici. Torej so v tretji vrstici: rumena kvadratna, rjava okrogla in rumena trikotna čokoladka. Rešitev je na sliki 3 spodaj oziroma na fotografiji na sliki 2.

Lažja naloga za samostojno reševanje

Sami rešite še problem na sliki 4. Tokrat moramo na osnovni kvadrat položiti en sam večkotnik in potem ugotoviti, kako so razporejene čokoladke. Večkotnik lahko na osnovni kvadrat položimo le na dva načina. Ugotovite, kam ga je treba položiti, in rešite nalogo.

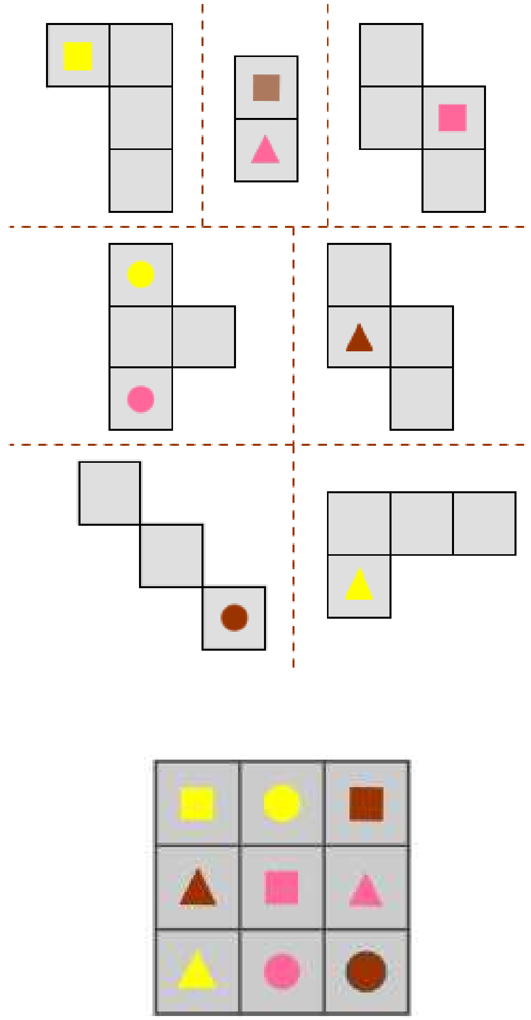


SLIKA 4.
Naloga za začetnike.

Še en težji primer

Oglejmo si še en težji primer (slika 5). V tem primeru na kartončku z nalogo ni narisan osnovni kvadrat, kar pomeni, da osnovni kvadrat nima oznak v celicah. Narisati si ga moramo sami. Imamo sedem večkotnikov. Vsota vseh celic večkotnikov je 25, osnovni kvadrat ima le devet celic. To pomeni, da se večkotniki, ki jih polagamo na osnovni kvadrat, med seboj prekrivajo. Kako? Ugotovite sami! Pomagamo vam z rešitvijo.

Igro lahko igrate tudi na spletu [3]. V nekatere šole v ZDA so jo vpeljali kot pripomoček za razvijanje logičnega načina mišljenja in za uvajanje v matematični način dokazovanja. Želimo vam veliko veselja pri igranju.



SLIKA 5.
Zgoraj: večkotniki, s katerimi je potrebno prekriti osnovni kvadrat. Spodaj: shema rešitve.

× × ×

Literatura

[1] Igra Chocolate Fix, Sweet Logic Game, Thinkfun, 2010.

[2] www.eimacs.com/blog/2011/09/mark-engelberg-game-and-puzzle-inventor/, ogled: 13. 11. 2018.

[3] www.thinkfun.com/products/chocolate-fix/, ogled: 13. 11. 2018.

Uglajena števila

Marko Razpet

Matematiki so si za naravna števila, ki imajo tako ali drugačno lastnost, izmislili celo kopico posebnih izrazov. Nekatere dobro poznamo, na primer sodo število, liho število, praštevilo, sestavljeno število, trikotniško število. Manj znana so morda uglajena ali trapezna števila, ki si jih bomo nekoliko natančneje ogledali v nadaljevanju.

Nekatera naravna števila lahko zapišemo kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil na en sam način, nekatera pa na dva ali celo več načinov. Taka števila so poimenovali *uglajena števila*, v angleščini *polite numbers*. Angleški pridevnik *polite* pomeni *vljuden, lepo vzgojen, uglajen, kultiviran, eleganten*. Število zapisov naravnega števila N z vsoto zaporednih naravnih števil je njegova *uglajenost*, angleško *politeness*. Označimo jo z $\mathrm{ugl}(N)$.

Primeri:

- $3 = 1 + 2,\ 5 = 2 + 3,\ 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4;$
- $69 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 34 + 35$
  $= 22 + 23 + 24.$

Števila $3, 5, 9, 69$ so zato uglajena. Velja: $\mathrm{ugl}(3) = \mathrm{ugl}(5) = 1, \mathrm{ugl}(9) = 2, \mathrm{ugl}(69) = 3$. Zanimivo je, da števil $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, to je potenc 2^n z nenegativnimi celimi eksponenti n, ne moremo zapisati kot vsoto zaporednih naravnih števil na noben način. Števila 2^n so neuglajena in $\mathrm{ugl}(2^n) = 0$.

Vsa liha števila razen 1 so uglajena, ker velja $2n + 1 = n + (n + 1)$. Videli bomo, da so vsa naravna števila, razen potenc števila 2, uglajena števila. Potemtakem bi marsikdo menil, da uglajena števila niso zanimiva. Vendarle pa je le pomembno, kako sploh ugotovimo, ali je dano naravno število N uglajeno, koliko je $\mathrm{ugl}(N)$ in kako ga lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil.

Da bi bilo N uglajeno število, morata obstajati celi števili $m \geq 0$ in $d > 1$, za kateri velja

- $(m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + d) = N.$

Na levi strani imamo d členov aritmetičnega zaporedja, katerega prvi člen je $m + 1$, zadnji pa $m + d$. Vsota teh členov je, kot je dobro znano,

- $\frac{1}{2}d((m + 1) + (m + d)) = \frac{1}{2}d(2m + d + 1).$

Pogoj uglajenosti števila N je torej enačba

- $d(2m + d + 1) = 2N.$

Iz nje se takoj vidi, da potenca $N = 2^n$ ne more biti uglajeno število. V enačbi $d(2m + d + 1) = 2^{n+1}$ namreč d ne more biti niti sodo niti liho število. Če bi bil d sod, bi dobili na levi strani produkt sodega in lihega števila, kar ne more biti potenca števila 2. Če pa je d lih, pa prav tako ne.

Če število $2N$ ni potenca števila 2, ga očitno lahko vsaj na en način izrazimo kot produkt sodega in lihega števila, recimo $2N = PQ$, pri čemer je $1 < P < Q$. Ker v relaciji $d(2m + d + 1) = 2N = PQ$ velja $d < 2m+d+1$, izberemo kar $d = P$ in $2m+d+1 = Q$. S tem imamo $m = (Q - P - 1)/2$. Če je $d = P$ sodo (liho) število, je Q liho (sodo) število. Števili P in Q sta različnih parnosti, zato je število $Q - P - 1$ sodo in posledično m naravno število.

Primeri: Naj bo $N = 2018$. Imamo $2N = 4036 = 4 \cdot 1009$. To je edini razcep števila 4036 na sodi in lihi faktor. Če izberemo $P = 4$ in $Q = 1009$, dobimo $d = Q = 4$ in $m = (Q-P-1)/2 = (1009-4-1)/2 = 502$. Res je $2018 = 503+504+505+506$ in $\mathrm{ugl}(2018) = 1$.

Uglajenost števila je lahko tudi zelo velika. Da ne bomo pretiravali, vzemimo število $N = 90$. V tem primeru je $2N = 180 = 4 \cdot 3^2 \cdot 5$. To število ima 5 razcepov na sodi in lihi faktor z ustreznimi $d = P$ in Q ter $m = (Q - P - 1)/2$:

- $2N = 180 = 4 \cdot 45; d = 4, m = 20;$
  $2N = 180 = 12 \cdot 15; d = 12, m = 1;$
  $2N = 180 = 9 \cdot 20; d = 9, m = 5;$
  $2N = 180 = 3 \cdot 60; d = 3, m = 28;$
  $2N = 180 = 5 \cdot 36; d = 5, m = 15.$

Zato je $\mathrm{ugl}(90) = 5$, zapisi v obliki vsot zaporednih naravnih števil pa so:

- $90 = 21 + 22 + 23 + 24$
  $= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$
  $= 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$
  $= 29 + 30 + 31 = 16 + 17 + 18 + 19 + 20.$

Zanima nas, kako bi najhitreje izračunali $\mathrm{ugl}(N)$. Dovolj je prešteti vse lihe delitelje števila $2N = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$. Z vsakim od njih dobimo enega od faktorjev P, Q v razcepu $2N = PQ$. Preostali je z njim natančno določen. Lihi delitelji števila $2N$ so oblike $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$, kjer so $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ nenegativna cela števila in $0 \le \gamma_1 \le \beta_1, 0 \le \gamma_2 \le \beta_2, \dots, 0 \le \gamma_r \le \beta_r$. Število vseh lihih deliteljev števila $2N$ je zato po osnovnem izreku kombinatorike enako produktu $(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1)$. Izločiti pa moramo primer $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_r = 0$, ki nam da delitelj 1 in s tem $d = 1$, ki pa za izračun uglajenosti števila ne pride v poštev. Tako smo našli formulo

- $\mathrm{ugl}(N) = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1) - 1.$

Primeri. $\mathrm{ugl}(100) = \mathrm{ugl}(2^2 \cdot 5^2) = (2 + 1) - 1 = 2, \mathrm{ugl}(1000) = \mathrm{ugl}(2^3 \cdot 5^3) = (3 + 1) - 1 = 3, \mathrm{ugl}(1350) = \mathrm{ugl}(2 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = (3 + 1)(2 + 1) - 1 = 11, \mathrm{ugl}(3^{100}) = (100 + 1) - 1 = 100.$

Iz zadnjega primera vidimo, da je uglajenost lahko poljubno velika, saj je na primer $\mathrm{ugl}(p^k) = k$ za poljubno liho praštevilo p in poljubno naravno število k. Za različni lihi praštevili p in q imata potenci p^k in q^k isto uglajenost, v številu d členov v vsoti pa se lahko razločujeta, kot spoznamo v nalogi na koncu prispevka.

Na sliki 1 je nekaj začetnih točk $(n, \mathrm{ugl}(n))$ v koordinatnem sistemu.

Matematika Joachim Lambek (1922–2014) in Leo Moser (1921-1970) sta celo našla funkcijo, s katero izračunamo n-to uglajeno število:

- $f(n) = n + 1 + \lfloor \log_2(n + 1 + \log_2(n + 1)) \rfloor.$

Pri tem pomeni $\lfloor u \rfloor$ celi del realnega števila u, to je največje celo število, ki ne presega u.

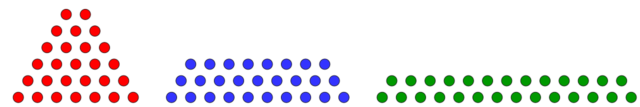
Med uglajena števila spadajo vsa trikotniška števila

- $T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1),$

razen $T_1 = 1$. Ustrezajo $m = 0$ in $d = n$. Očitno je vsako uglajeno število N razlika dveh trikotniških:

- $N = T_{m+d} - T_m.$

Pri tem vzamemo $T_0 = 0$. Podobno kot lahko trikotniška števila figurativno predstavimo s točkami, zloženimi v trikotnik, lahko uglajena števila predstavimo s točkami, zloženimi v trapez. Zato nekateri (na primer [1]) uglajena števila imenujejo kar *trapezna števila*. Slika 2 predstavlja uglajeno število 27 na 3 načine, ker ima uglajenost enako 3.

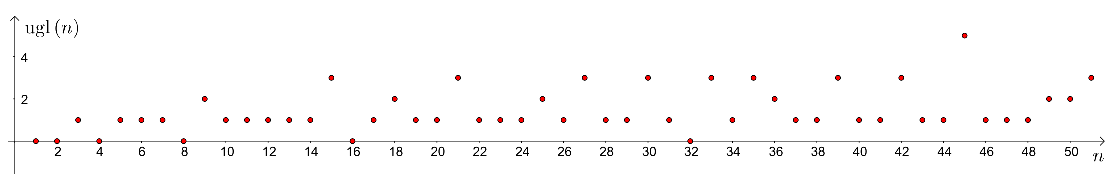


SLIKA 2.

Naloga. Naj bo p liho praštevilo, k pa naravno število. Dokaži, da je p^k vsota dveh zaporednih naravnih števil. Če pa je $k > 2$, je p^k tudi vsota $2p$ zaporednih naravnih števil, od $(p^{k-1} - 2p + 1)/2$ do $(p^{k-1} + 2p - 1)/2$.

Literatura

[1] C. Gamer, D. W. Roeder, J. J. Watkins, *Trapezoidal numbers*, Mathematics Magazine **58** (1985), št. 2, str. 108–110.



SLIKA 1.

×××

Svetlobni žvrgolej

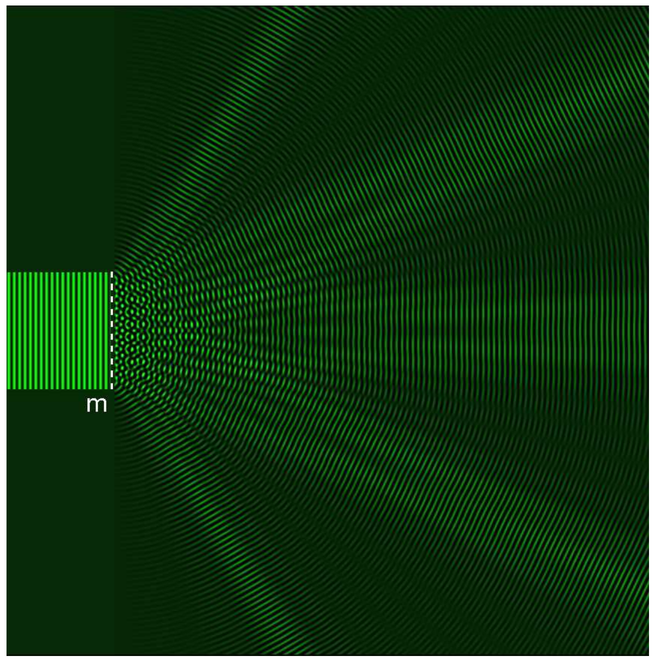
ANDREJ LIKAR

Ptiči pogosto pojejo z drsečimi toni, ki zvezno prehajajo z ene višine na drugo. Takrat pravimo, da žvrgolijo. Tako slišimo tudi pojočo žago, pa glissando klarineta v uvodnem taktu Rapsodije v modrem Georgea Gershwina, pa sireno, ki opozarja na nevarnost … Tudi netopir za nas neslišno krikne svoj značilni žvrgolej v prostor in potem prisluhne odmevu.

Tole smo morali povedati takoj na začetku, da pojasnimo nenavadni naslov. V prispevku bomo govorili o svetlobnem sunku, ki mu lahko rečemo žvrgolej, saj se mu valovna dolžina, s tem pa tudi njegova barva s časom zvezno spreminja. Kako pridemo do takega sunka in zakaj je zanimiv, bomo tu na kratko pojasnili.

Spomnimo se uklonske mrežice. Svetlobni curek z dano valovno dolžino se na številnih ozkih režah uklanja in tvori na nasprotni strani mrežice značilno interferenčno sliko, glej sliko 1.

Posamezni delni valovi iz ozkih rež se na določenem mestu zberejo in tam interferirajo. V posebej izbrani smeri se ta valovanja ojačijo, tem bolj čim več jih je. V drugih smereh pa se skoraj izničijo. Iz različnih rež imajo valovi do izbrane oddaljene točke različne poti. Če je razlika poti mnogokratnik valovne dolžine, je ojačenje največje. Pri mnogih režah je smer ojačitve zelo ostra, več ko je rež, ožji je pas smeri, kjer je ojačenje znatno. To s pridom uporabljamo pri določitvi valovne dolžine vpadle svetlobe.



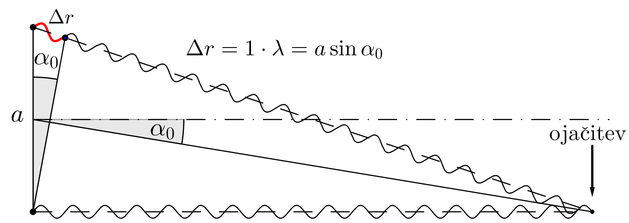
SLIKA 1.
Uklon vpadnega curka svetlobe na optični mrežici. Zaradi nazornosti ima mrežica na sliki le 9 rež. Svetle in temne proge nakazujejo valovanje. Na večji oddaljenosti lepo vidimo glavne močno ojačene pasove, šibke stranske pasove in področja popolne oslabitve

Vsaki valovni dolžini pri mrežici z velikim številom rež tako pripada svoja smer ojačenja. Svetlobo z dvema bližnjima valovnima dolžinama mrežica torej usmeri v sicer bližnja, a vseeno toliko različna kota, da ju pri posebno zasnovanih spektroskopih zlahka opazimo.

Pogoj za ojačitev na veliki razdalji od mrežice glede na valovno dolžino je torej (glej sliko 2)

- $a \sin \alpha_0 = n\lambda$.

Tu je a razdalja med sosednjima režama, kot α_0 pa podaja smer ojačenja. Z n smo označili cela števila $0, 1, 2 \ldots$, ki jim pravimo interferenčni redi. Tu nas bo zanimal le primer, ko je $n = 1$.



SLIKA 2.
Pogoj za ojačitev delnih valovanj iz dveh sosednjih rež. Pogoj velja pri veliki oddaljenosti točke, kjer opazujemo interferenco, od mrežice

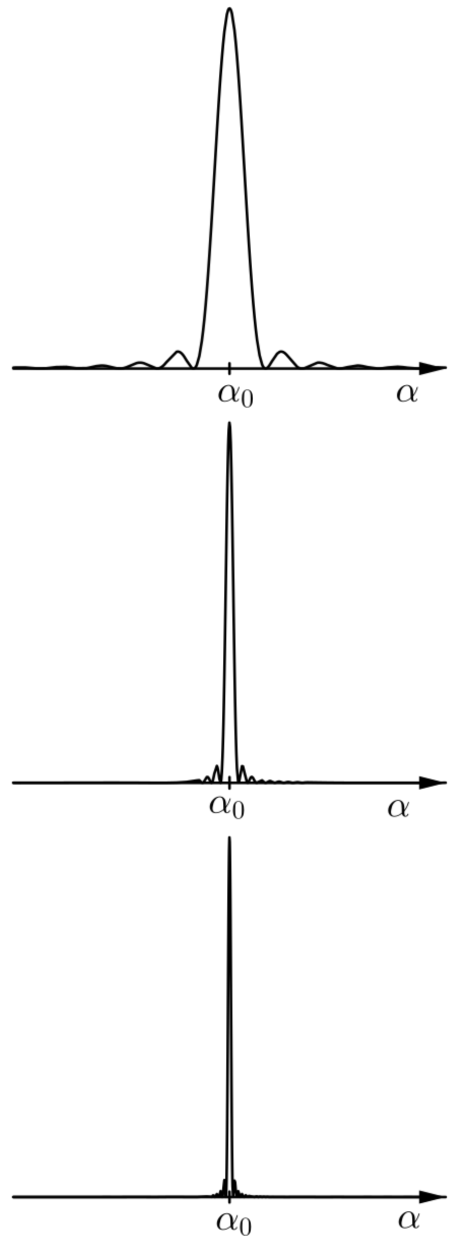
V kako ozkem pasu $\Delta\alpha$ kotov okrog α_0 bomo našli dovolj svetlobe, je odvisno od števila delnih valov, ki na zaslonu interferirajo. Na sliki 3 si lahko ogledamo, kako se ta pas oža, ko število valov oziroma rež narašča.

Nekateri laserji oddajajo zelo kratke svetlobne bliske, ki trajajo le nekaj 10 fs (fs je femtosekunda, to je 10^{-15}s). Dolžina takega sunka znaša vsega 3 mikrometre ali kakšnih 7 valovnih dolžin, denimo, zelene svetlobe, glej sliko 4. Električno poljsko jakost svetlobe v sunku dobro opišemo z naslednjo enačbo:

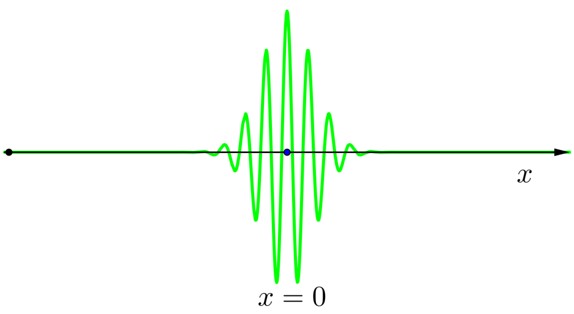
- $E(x,t) = E_0 e^{-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}} \cos \dfrac{2\pi(x-ct)}{\lambda}$.

Amplituda vala se na določenem mestu s časom spreminja od nič pa do največje vrednosti, potem pa spet zamre. Pravimo, da je sunek amplitudno moduliran nosilni val z valovno dolžino λ. Kako se razmere spremenijo, če na mrežico posvetimo s takim sunkom?

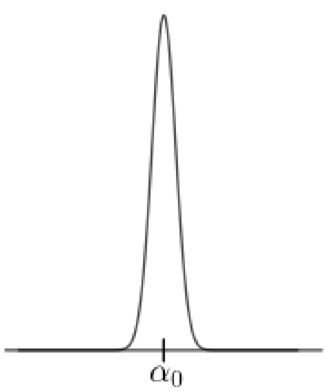
Delni valovi iz vseh rež sedaj ne morejo interferirati v poljubni točki zaslona, ker so iz nekaterih rež pač prepozni. Le v smeri naprej imajo vsi enako pot, v drugih smereh pa ne. Ojačevalna smer zato ni več ostra, glej sliko 5.



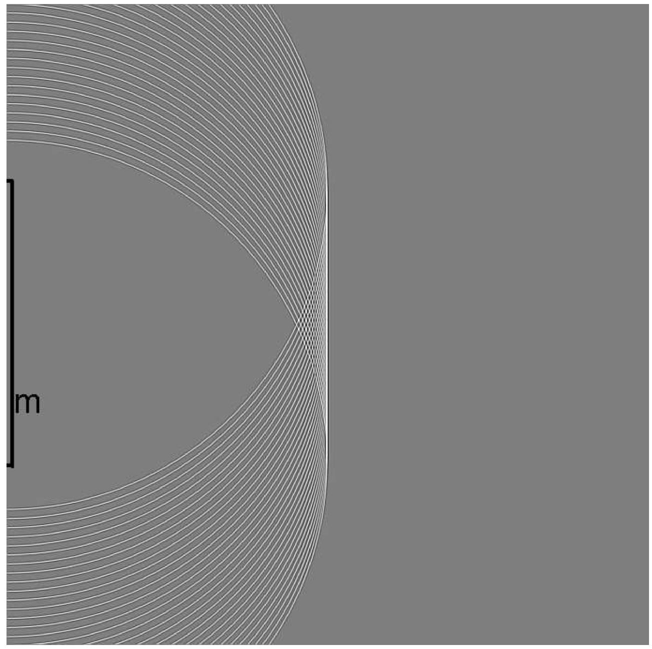
SLIKA 3.
Izostritev ojačevalne smeri okrog α_0 pri interferenci iz desetih, štiridesetih in stotih rež. Krivulje so normirane na enako višino.



SLIKA 4.
Zelo kratek sunek zelene svetlobe



SLIKA 5.
Ojačevalne smeri pri prehodu zelo kratkega sunka skozi mrežico



SLIKA 6.
Rafali zelo kratkih sunkov pri prehodu skozi mrežico (m)

V primeru, da bi bil sunek podoben svetlobnemu poku, torej krajši od valovne dolžine nosilnega vala, bi na določenem mestu na zaslonu dobili le rafal svetlobnih sunkov, ki med seboj sploh ne bi interferirali, glej sliko 6.

Kratek svetlobni sunek se pri prehodu skozi mrežico razgradi po smeri. To je podobno kot pri curku bele svetlobe. Na dovolj oddaljenem zaslonu vidimo mavrične barve, ker je bela svetloba mešanica svetlob z različnimi valovnimi dolžinami, torej z osnovnimi, mavričnimi barvami. Tudi kratek svetlobni sunek je neke vrste mešanica valovanj z različnimi valovnimi dolžinami. In res, razpršeni sunek na mrežici z velikim številom rež ima v različnih smereh drugačno valovno dolžino nosilnega vala. V smeri, podani s kotom α_0 ostane nosilni val enak, bolj uklonjeni sunek ima rdeči nosilni val, manj pa modrega. Poleg tega je sunek po prehodu razširjen, ker prispevajo različno oddaljene reže svoje delne valove z zamudo.

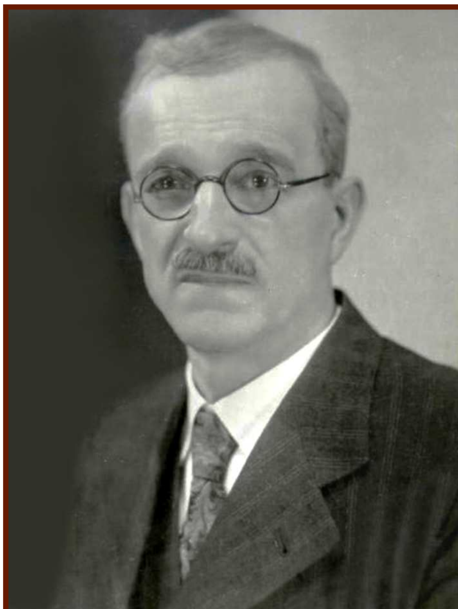
Namesto zaslona postavimo blizu prve mrežice še eno, ki uklonjene svetlobne sunke ponovno ukloni. Opazujmo le uklonjene sunke v prvotni smeri, glej sliko 7.

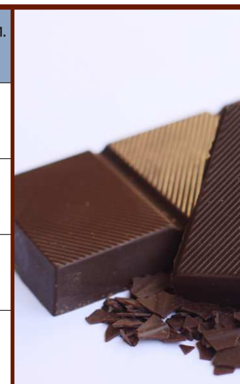
V curku $c2$ je sunek z rdečim nosilnim valom, recimo mu rdeči sunek, zakasnjen glede na modrega, saj mora prepotovati do izbrane točke v $c2$ daljšo pot. Celotni sunek je močno podaljšan glede na vpadnega, poleg tega pa je pravi svetlobni žvrgolej, saj se začne z modrim nosilnim valom, potem pa ta zvezno preide v rdečega, glej sliko 8.

18 nadaljevanje na strani →

↓↓↓

Nagradna križanka





AVOR MARKO BOKALIČ

PRVI GA JE OSVOJIL AMUNDSEN LETA 1911

NAPRAVA ZA OPAZOVANJE PERIODIČ. NIHANJA

HINKO NUČIČ

MADŽAR. MESTO SEV. OD BLATNEGA JEZERA

MITIČNO BIVALIŠČE UMRLIH

ČLOVEKOVA NARAVA

ITALIJAN. JEDRSKI FIZIK, NOBELOVEC LETA 1938

GLAVNO MESTO AM. DRŽAVE KALIFORNIJE

ASTRONOM KEPLER

PROPADLA VRHNIŠKA TOVARNA

ZADNJI ŠUMEVEC IN PRVI SIČNIK

KREMEN

PREČNA RAZSEŽNOST

VDOLBINA V STENI

STVAR, IZ KATERE KAJ PRIHAJA ALI SE DOBIVA

PRITOK BALHAŠKEGA JEZERA V KAZAHSTANU

SAMOSTALNIŠKI PRILASTEK, PRISTAVEK

ZBIRKA DRUŽBENIH IN VERSKIH PRAVIL V ČASU RUSKEGA CARJA IVANA GROZNEGA

KALCIJ

ZNIŽANI TON D

STARA MATI, BABICA, NONA

SKUPEK IZDELKOV, KI SPADAJO SKUPAJ

VRHNJA DOMENA TURČIJE

LUKNJICA V KOŽI

BRIT. ASTR. OBSERVATORIJ

7

PREGLEDNICE LEG PLANETOV IN ZVEZD

DMFA

ANGLO-AMERIŠKA PLOŠČINSKA MERA

INDIJSKI FIZIK S PODROČJA SPEKTROSKOPIJE

SOGLASNIKA V ČENČI

LESENA NAOKNICA

HLADEN PACIFIŠKI MOR. TOK

ZGOR. DOM AM. PARLAMENTA

SKUPINA BARVIL

KRŠČANSKI ZAKRAMENT

DROBCENE MORSKE RIBICE

IGRALEC TOVORNIK

ZELENICA V PUŠČAVI

PRVO NARAVNO ŠTEVILO

SKRAJNI KONEC KOPNEGA

ČLOVEKU POD. OPICA

NIZOZEMSKO IME REKE RUR

AMERIŠKI PSIHOLOG (ARNOLD)

PISATELJ LAINŠČEK

4

IGLOKOŽEC Z ZELO VITKIMI IN GIBČNIMI KRAKI

8

LASTNOST GRUP Z ENAKIMI STRUKTURAMI

EMMANUEL MACRON

BESEDA POTRDITVE V MOLITVI

HUDOBEC IZ FAUSTA

AVSTRIJSKO-AMERIŠKI BIOKEMIK, NOBELOVEC (CARL FERDINAND)

LESENA POSODA, KI IMA UŠESA

SKANDIN. DROBIŽ, ERE

SISTEM SPOZNANJ

GRMIČASTA ZIMZELENA RASTLINA, ŽANJEVEC

TANKA, PROŽNA PALICA

REKA, KI TEČE SKOZI VILNO

NADARJENOST

ŠKOTSKI PEDAGOG, ZAGOVORNIK SVOBODNE VZGOJE (ALEXANDER)

VELIKANSKI KIP ALI ZGRADBA

6

PISATELJICA PEROCI

TREBUŠASTA PLETENKA ZA VINO IT. IZVORA

KELVIN

KRAŠKA BREZNA

UTEMELJITELJ AZIJ. RELIGIJE

KANTON V ŠVICI

GRŠKA BOGINJA PREPIRA

3

ALUMINIJ

ODMEV (PO GRŠKI MUZI)

GLASBENI ZNAKI

PAS PRI KIMONU

HEBREJSKA ČRKA ZA OZNAKO KARDINALNOSTI NESKONČNIH MNOŽIC

KITAJSKO BRENKALO

IGRALKA MIRANDA

OGNJENIK

NAŠ NOGOMETNI TRENER (MATJAŽ)

GL. MESTO JORDANIJE

ZGODOVINSKO OBDOBJE

GOJEN KRAP, POVSEM PREKRIT Z LUSKAMI

Z NJIMI SO MIŠICE PRITRJENE NA KOSTI

DO, ?, MI

LETOVIŠČE PRI OPATIJI

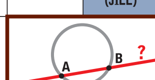
PODREDNI VEZNIK

PRENOS NA PAPIR S TISKARSKO TEHNIKO

POKOJNA ANGLEŠKA IGRALKA (JILL)

? GRUP, ? GRAFOV, ? IGER, ? ŠTEVIL

NAJVEČJI PRITOK REKE RONE



NAJDALJŠI VZPOREDNIK NA ZEMLJI

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
HRVAŠKI PEVEC RADOLFI
OKUSNA GOSTLJATA JED KOT DODATEK
PROGRAMSKA MISEL, VODILO
VEZNIK
DRŽAVA V SREDNJI AMERIKI
KRIŽNI ZGIB ZA PRENOS VRTENJA
OSMINA KOORDINATNEGA SISTEMA V PROSTORU

NAŠ ASTRONOM (FRAN)
DUŠLJIV PLIN, SPOJINA DUŠIKA IN VODIKA
ENOTA ZA MOČ
ZGORNJI DEL OBRAZA
PODZEMNA ŽIVAL
IGRA NA SREČO
GRMIČASTO JAGODIČJE
JUNAK STAROGRŠKEGA EPA
VELIKI PREROK IZ STARE ZAVEZE
DOBA, EPOHA
NAJMANJŠI PTIČ PEVEC
ALŽIRSKA LUKA
NESLIŠEN ZVOK VIS. FREKVENC
ZAPOREDNI ČRKI
TAROK XXI
NEKDANJI GENERALNI SEKRETAR OZN
TEPEC
POZNAVALEC ROMSKE KULTURE
MILILITER
VZKLILO ŽITO KOT SUROVINA ZA PIVO
ČASOPISNI MALI OGLAS
PRIOSTRENA KONICA
SLEHERNI
PESNIK FRITZ
POLJSKO MORSKO LETOVIŠČE PRI GDANSKU
ŽIVČNA NAPETOST PRED NASTOPOM

NESTVARNOST
PREVZETNEŽ, OHOLEŽ
ALPSKI PEVEC
DUH, KI VPLIVA NA USODO
JAPONSKA LUKA NA SEVERU HONŠUJA
5
JUDOVSKA NEMŠČINA
RUS. FIZIK, OPOREČNIK (ANDREJ)
STRELEC DEBEVEC
SOSEDNJI ČRKI
UKRAJINSKI VELETOK
GLASBENI INTERMEZZO
ŽAN KOŠIR
ZAPORNIŠKI PAZNIK
ČISTILO S KREMENČEVIM PESKOM
2
KRAJ NA POBOČJU ČAVNA PRI AJDOVŠČINI
GOZD
ENOCELIČAR, KI SPREMINJA OBLIKO
KOS POHIŠTVE
NEIMENOVANA REČ, ONE
FR. FIZIK (PIERRE)
VOJAŠKI OKLEPNIK S TOPOVSKO CEVJO
ZASTEKLJENA GREDA
SOKRATOV TOŽNIK
PRITRDILNICA
ZIMSKA PADAVINA
AVSTRALSKI PTIČ TEKAČ
DARILO
SVETLOBA, KI JO DAJE SVETILO
IGRALKA KRAJNC
LAHKOTNO TEKANJE
NORVEŠKI PISEC NESBØ
1
KOSITER
MESTO OB LOARI V SREDNJI FRANCIJI
MATEMATIK MARUŠIČ

NAGRADNI RAZPIS

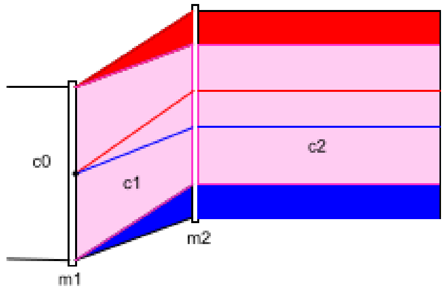
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

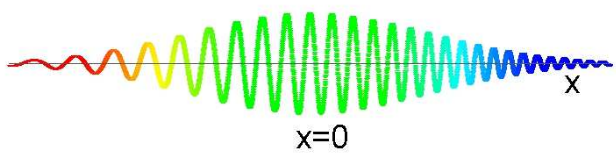
ter ga oddajte do **1. februarja 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

15 nadaljevanje s strani



SLIKA 7.
Druga mrežica ($m2$) uklonjene curke obrne v prvotno smer. Prikazana sta le skrajna curka z rdečim in modrim nosilnim valom in izbrana žarka teh curkov.



SLIKA 8.
Svetlobni žvrgolej po prehodu sunka skozi drugo mrežico. Zaradi preglednosti je naš žvrgolej zelo kratek. Od sunka na sliki 4 bi moral biti daljši kar stotisočkrat in temu ustrezno nižji

Zakaj je svetlobni žvrgolej pomemben? Zelo kratkih sunkov ni mogoče močno ojačevati, ker imajo pri velikih močeh zelo velike električne poljske jakosti, ki poškodujejo kristal ojačevalnika. V ojačevalniku gre namreč sunek skozi kristal, kjer se, podobno kot pri laserju, spotoma ojačuje. Časovno zelo kratek sunek (kot na sliki 4) zato do stotisočkrat podaljšajo v relativno dolgotrajen žvrgolej, ojačijo ga do poljskih jakosti, ki kristalu ne škodijo, potem pa žvrgolej ponovno stisnejo. Tako pridejo do zelo kratkih in izjemno močnih sunkov, ki jih potrebujejo pri raziskavah snovi. Za ta prijem sta Donna Strickland in Gerard Mourou prejela vsak četrtino Nobelove nagrade za fiziko za leto 2018.

×××

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

			6		5		8
4							3
1			2	6			
		6					
	5	2			7		
6		3		5			
3	4					2	
		8					4

REŠITEV BARVNI SUDOKU

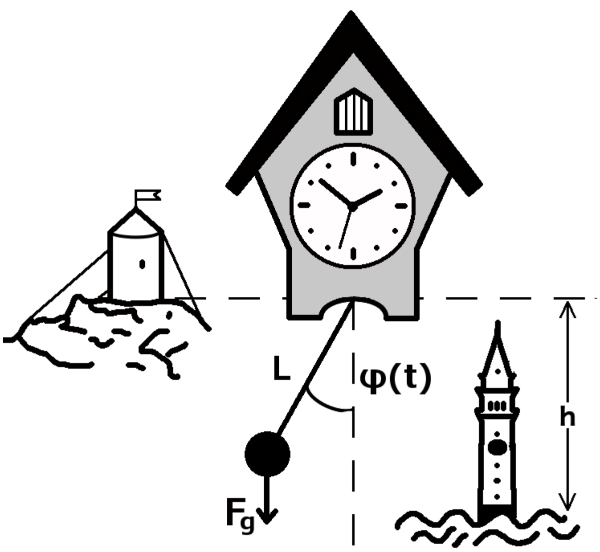
7	3	1	6	2	5	4	8
4	2	5	8	1	6	7	3
1	7	4	2	6	8	3	5
5	8	6	3	4	2	1	7
8	5	2	4	3	7	6	1
6	1	3	7	5	4	8	2
3	4	7	5	8	1	2	6
2	6	8	1	7	3	5	4

×××

Zakaj planinec Andrej vedno zamuja?

Miha Mihovilovič

Andrej Šifrer v Gorski roži prepeva, da v gorskih vaseh čas »bije« drugače. Čeprav vemo, da v planinah čas teče povsem enako kot v dolini, pa je v pesmi vseeno nekaj fizikalne resnice.



SLIKA 1.
Ura s težnim nihalom kaže na Triglavu drugačen čas kot v Piranu. Zaradi manjšega težnostnega pospeška nihalo na gori niha počasneje, zato ura tam zamuja za tisto na obali. Navpična črtkana črta nakazuje ravnovesno lego nihala.

Zamislimo si dve enaki staromodni uri s kukavico, ki za enakomeren tek urnih mehanizmov uporablja-ta težni nihali. Vsako od nihal sestoji iz lahkega vzvoda, na katerega je na eni strani pritrjena utež, druga stran pa je vrtljivo vpeta v urni mehanizem. Ko nihalo zmaknemo iz ravnovesne lege, to zaniha. V približku matematičnega nihala in ob predpostavki, da nihalo ni dušeno, lahko njegovo gibanje opišemo s sinusno funkcijo:

$$\varphi(t) = A_0 \sin(\omega t)\,,$$

kjer $\varphi(t)$ predstavlja trenutni odmik nihala ob času t, A_0 pa je amplituda oziroma začetni odmik. Kotna frekvenca ω pove, kako hitro nihalo niha okrog spodnje ravnovesne lege in jo izračunamo po obrazcu:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{L}}\,. \tag{1}$$

Kotna frekvenca ω je v neposredni zvezi s frekvenco nihanja ν in je odvisna od dolžine nihala L ter težnostnega pospeška g. Ker je težni pospešek v gorah, g, drugačen od težnega pospeška na morski gladini, $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, bo ura v gorah kazala drugačen čas. Da bi ocenili, kako velika je ta razlika, naravnamo uri na isti čas, nato pa eno odnesemo v Piran, drugo pa obesimo v Aljažev stolp na Triglavu (glej sliko 1).

Silo teže, s katero Zemlja privlači nihalo z maso m, ki visi na višini h nad zemeljskim površjem, izračunamo po Newtonovem zakonu o težnosti:

$$F_g = mg = G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,,$$

pri čemer sta M in R masa in polmer Zemlje, G pa je splošna gravitacijska konstanta. V naslednjem koraku težnostni pospešek na Triglavu izrazimo s težnostnim pospeškom ob morski gladini in dobimo izraz, ki pove, kako težnostni pospešek pada z nadmorsko višino:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

Zvezo sedaj vstavimo v izraz (1) in določimo razmerje frekvenc obeh nihal, ki je:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = 1 + \frac{h}{R}.$$

Če predpostavimo, da nihalo v uri v Piranu niha s sekundnim taktom, ter upoštevamo, da je $h = 2{,}864\,\mathrm{km}$ in $R = 6400\,\mathrm{km}$, ugotovimo, da je na Triglavu leto, v primerjavi s Piranom, kjer je $t_0 = 8760$ h, daljše za

$$\Delta t = t - t_0 = t_0 \left(\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right) = t_0 \frac{h}{R} = 3{,}9\,\mathrm{h},$$

kar je vse prej kot zanemarljiv popravek. Ker planinec Andrej ne želi več zamujati, se je odločil, da uro na Gori popravi. Kaj naj stori, da bo kljub manjšemu težnostnemu pospešku ostal v koraku s časom? Kako velika mora sprememba biti?

SLIKA 2.

www.dmfa.si

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

■	3\	19\	■	■	■	■	■
\11			■	■	■	17\	8\
\5			16\	■	23\13		
■	\13			9\18			
■	■	\20				■	■
■	■	■	\15			■	■

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

■	3\	19\	■	■	■	■	■
\11	2	9	■	■	■	17\	8\
\5	1	4	16\	■	23\13	8	5
■	\13	6	7	9\18	6	9	3
■	■	\20	9	3	8	■	■
■	■	■	\15	6	9	■	■

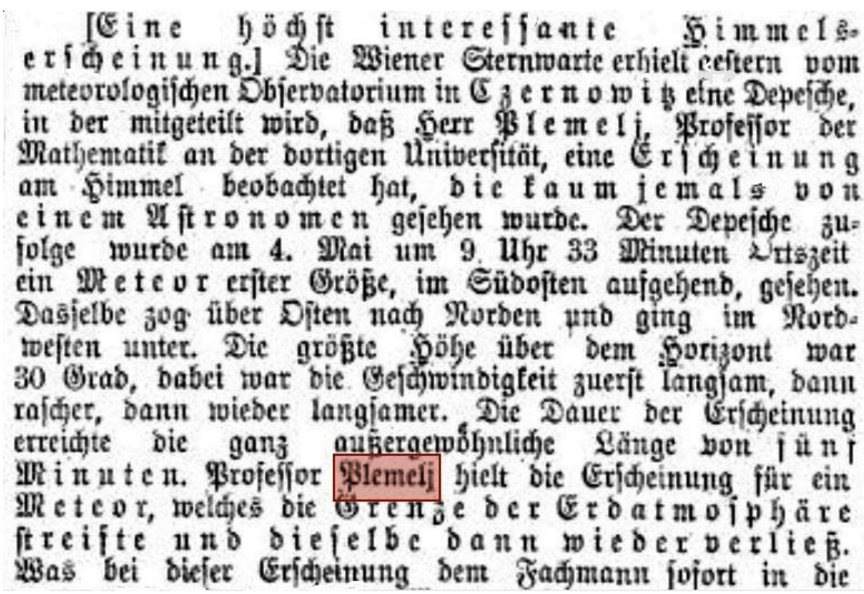
Plemelj in meteor

Marko Razpet

Prof. Josip Plemelj (1873–1967) je študiral na filozofski fakulteti dunajske univerze v letih 1894–1898. Kot glavni predmet študija je izbral matematiko, čeprav je najprej želel študirati astronomijo. Prof. Gustav Escherich (1849–1935), ki je takoj odkril Plemljevo nadarjenost za matematiko, ga je preusmeril v študij matematike in ga navdušil za univerzitetno kariero.

Plemelj je svoje dunajske študije končal z doktoratom pod Escherichovim mentorstvom. Po doktoratu se je izpopolnjeval na univerzah v Berlinu in Göttingenu, pridno študiral matematiko, objavljal članke in napredoval v univerzitetnih nazivih. Leta 1902 je bil imenovan za zasebnega docenta matematike univerze na Dunaju, leta 1907 za izrednega profesorja matematike univerze v Černovicah, leta 1908 pa za rednega profesorja matematike prav tam. Njegovo uspešno delo v Černovicah je prekinila prva svetovna vojna. Po vojni je leta 1919 postal prvi rektor nove univerze v Ljubljani, kjer je še dolga leta predaval matematiko.

Mesto Černovice, nemško Czernowitz, so bile v Avstro-Ogrski na njenem skrajnem vzhodu, v Bukovini. Med obema vojnama so bile pod romunsko oblastjo. Dandanes so v Ukrajini, v njenem jugozahodnem kotu. Ležijo približno na isti zemljepisni širini kot Dunaj. Univerzo so dobile leta 1875. Prof. Plemelj se astronomiji pravzaprav nikoli ni popolnoma odrekel. Imel je tudi zelo dober vid. Kot



[Eine höchst interessante Himmelserscheinung.] Die Wiener Sternwarte erhielt gestern vom meteorologischen Observatorium in Czernowitz eine Depesche, in der mitgeteilt wird, daß Herr Plemelj, Professor der Mathematik an der dortigen Universität, eine Erscheinung am Himmel beobachtet hat, die kaum jemals von einem Astronomen gesehen wurde. Der Depesche zufolge wurde am 4. Mai um 9 Uhr 33 Minuten Ortszeit ein Meteor erster Größe, im Südosten aufgehend, gesehen. Dasselbe zog über Osten nach Norden und ging im Nordwesten unter. Die größte Höhe über dem Horizont war 30 Grad, dabei war die Geschwindigkeit zuerst langsam, dann rascher, dann wieder langsamer. Die Dauer der Erscheinung erreichte die ganz außergewöhnliche Länge von fünf Minuten. Professor Plemelj hielt die Erscheinung für ein Meteor, welches die Grenze der Erdatmosphäre streifte und dieselbe dann wieder verließ. Was bei dieser Erscheinung dem Fachmann sofort in die

SLIKA 1.
Neue Freie Presse, 7. maja 1910: Plemelj in meteor.

piše v [2], je Venero lahko opazoval celo pri belem dnevu. Verjetno je kot študent na Dunaju za seminarsko nalogo pri astronomiji na podlagi izmerjenih podatkov, kot lahko preberemo v [1], izračunal tirnico kometa 1847 I. Morda ga je za astronomijo navdušil tudi njegov gimnazijski profesor Vincenc Borštner (1843–1917), ki je v Celovcu še pred prihodom na klasično gimnazijo v Ljubljani objavljal prirodoslovne članke, tudi take z astronomsko vsebino.

Leta 1910 je prof. Plemelj presenetil dunajsko zvezdarno z brzojavko, kaj je videl v Černovicah. Objavljena je bila skoraj z istimi besedami v dunajskih časopisih Neue Freie Presse in Neues Wiener Journal 7. maja 1910. Prevod se glasi:

> Izredno zanimiv nebesni pojav. Dunajska zvezdarna je včeraj prejela z meteorološkega observatorija v Černovicah brzojavko, ki sporoča, da je gospod Plemelj, profesor matematike na tamkajšnji univerzi, opazoval pojav na nebu, ki ga je komaj kdaj videl kak astronom. Sledeč brzojavki je bil 4. maja ob 9. uri 33 minut po lokalnem času viden meteor prve velikosti, ki je vzšel na jugovzhodu, se pomikal prek vzhoda proti severu in zašel na severozahodu. Največja višina nad horizontom je bila 30 stopinj, pri čemer je bila hitrost najprej majhna, potem večja, nazadnje spet manjša. Trajanje pojava je doseglo prav nenavadno dolžino 5 minut. Profesor Plemelj ima pojav za meteor, ki je oplazil mejo Zemljine atmosfere in jo potem zapustil. Kar pri tem pojavu strokovnjaku takoj pade v oči, je dejstvo, da je meteor vzšel in zašel.

Ker lahko razumemo kratek del tira običajno pojavljajočega se meteorja kot ravno črto, sledi, da tak meteor bodisi samo vzide ali samo zaide, nikoli pa ne oboje hkrati. Poleg tega imamo opraviti z nenavadno dolgo vidnostjo 5 minut, medtem ko sicer tovrstni pojavi trajajo le nekaj sekund. Sedaj pa že lahko rečemo toliko, da je tir tega meteorja kriva črta in leži relativno zelo daleč od površja Zemlje. To ukrivljenost vsekakor povzroča privlačnost Zemlje. Če je meteor Zemljino atmosfero oplazil, se mu je prvotna hitrost, ki je 42 km/s ali več, zmanjšala, je pa čisto možno, da to zmanjšanje hitrosti ni seglo do 30 km/s, in je potem meteor Zemljino atmosfero zapustil in se od Zemlje oddaljil. Meteor se je potem obnašal kot trabant naše Zemlje, ki pa ni krenil po eliptičnem tiru, ampak po paraboličnem ali hiperboličnem glede na Zemljo. Ne da se v sedanjem trenutku pregledati vseh možnosti, ker je tak primer prvi, ki je bil opazovan s strokovne plati. Najpomembnejša bi bila zato opazovanja z drugih, v glavnem od Černovic severovzhodno ležečih krajev, ki bi dovolili določiti najvažnejši element, višino v km nad površjem Zemlje.

Časopis Salzburger Volksblatt, neodvisni dnevnik za mesto in deželo Salzburg, je bil dne 6. maja 1910 krajši:

> Nebesni pojav. Černovice, 6. maj. Zanimiv pojav je opazoval četrtega dne tega meseca univerzitetni profesor Plemelj, ki je tistega dne ob 9. uri 33 minut zvečer videl padati svetleč meteor, ki je opisal polkrožni lok 180 stopinj. Doslej je bilo razširjeno mnenje, da se meteorji spuščajo po premočrtnem tiru skozi prostor.

Meteor (iz grške besede μετέωρος – na nebu se nahajajoč) ali utrinek je kratkotrajna svetla sled, ki nastane ob vstopu meteoroida v ozračje. Hitrost meteoroidov pri vstopu v ozračje je do 72 km/s. Če je bila razlaga v časopisih pravilna, naj presodijo astronomi.

Nekoč je pri mnogih ljudstvih veljalo, da si je treba, videč utrinek, nekaj lepega zaželeti, kar pa se ne sme nikomur povedati, sicer se želja ne bo izpolnila. Pač pa so se ljudje zelo bali kometov, ki naj bi napovedovali vojne in katastrofe.

Literatura

[1] S. Južnič, M. Prosen, *Josip Plemelj in komet*, Jutro, Ljubljana 2006.

[2] I. Vidav, *J. Plemelj: ob stoletnici rojstva*, DMFA, Ljubljana 1975.

[3] Österreichische Nationalbibliothek, dostopno na: `http://anno.onb.ac.at/`, ogled: 28. 11. 2018.

× × ×

12. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike

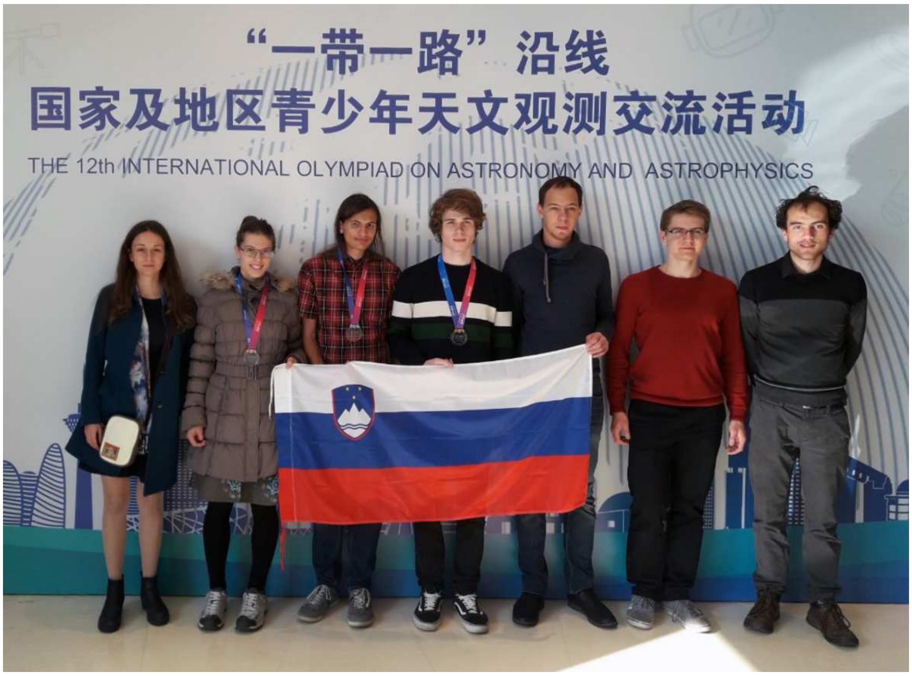
Dunja Fabjan

→ 12. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, na kateri že šesto leto nastopajo slovenski dijaki, je potekala od 3. do 11. novembra 2018 v Pekingu.

Na njej je sodelovalo skupno 45 ekip iz 39 različnih držav, kar je dvakrat več kot pred osmimi leti, ko so tekmovanje ravno tako gostili v Pekingu. Letošnjo olimpijsko ekipo so sestavljali Marko Čmrlec (Gimnazija Bežigrad), Gregor Humar (Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik), Andraž Jelinčič (Gimnazija Bežigrad), Klemen Keršič (SŠ Slovenska Bistrica) in Ema Mlinar (Gimnazija Vič).

Slovenski tekmovalci so se s sovrstniki preizkusili v teoretičnem znanju, opazovalnem delu in analizi podatkov. Tudi tokrat se je slovenska ekipa odlično odrezala: **Marko Čmrlec** je osvojil srebrno medaljo, **Ema Mlinar** in **Klemen Keršič** bronasti medalji, **Andraž Jelinčič** pa pohvalo.

Na Kitajskem sta dijake spremljala mentorja Krištof Skok in Urška Andrenšek (študenta na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani). Pri državni selekciji in pripravah ekipe so sodelovali mentorji Andrej Guštin (DMFA Slovenije), prof. Andreja Gomboc in mag. Katja Bricman (Fakulteta za naravoslovje, Univerza v Novi Gorici) ter dr. Dunja Fabjan (Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani). Priprava in državna selekcija potekata pod okriljem DMFA Slovenije.



SLIKA 1.
Tekmovalci in mentorji po uspešni olimpijadi na Kitajskem: Urška Andrenšek (mentorica), Ema Mlinar (Gimnazija Vič, bronasta medalja), Marko Čmrlec (Gimnazija Bežigrad, srebrna medalja), Klemen Keršič (SŠ Slovenska Bistrica, bronasta medalja), Gregor Humar (Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik), Andraž Jelinčič (Gimnazija Bežigrad, priznanje), Krištof Skok (mentor).

Praktične naloge 12. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike 2018

Andrej Guštin

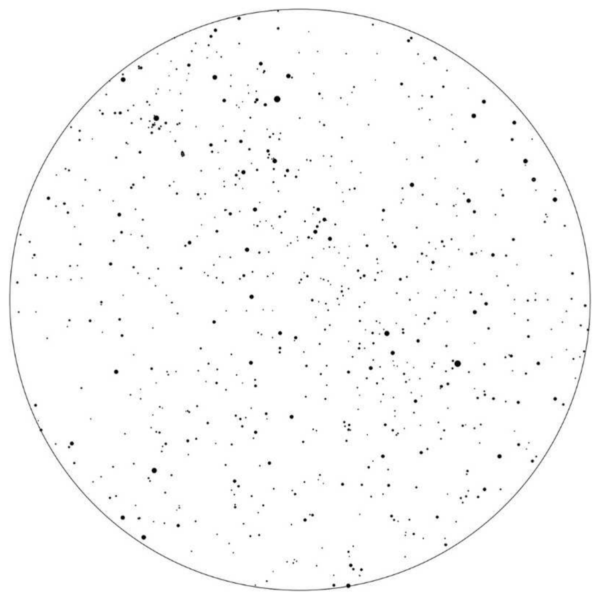
01

Na sliki 1 je zvezdna karta za Yanqing, Peking ob 20:30 danes zvečer (UTC+8) z mejno magnitudo = 5^m (m = magnituda). Štiri zvezde (pribl. $1^m - 3^m$) in en planet (svetlejši od 2^m) manjkajo na karti. Na karti je razdalja od središča sorazmerna z zenitno razdaljo.

- Na karti nariši križ (X) na položaj vsake manjkajoče zvezde in jo označi s »T« ter označi s križem (X) položaj manjkajočega planeta in ga označi s »P«.
- Označi orientacijo zvezdne karte z »N«, »E«, »S«, »W« na robu zvezdne karte.
- Na karti prečka nebesni ekvator mnogo ozvezdij. Napiši imena poljubnih pet izmed teh ozvezdij (IAU oznake).
- Z uporabo zvezdne karte oceni višino Aldebarana (α Tau), zaokroženo na najbližjo stopinjo.

02

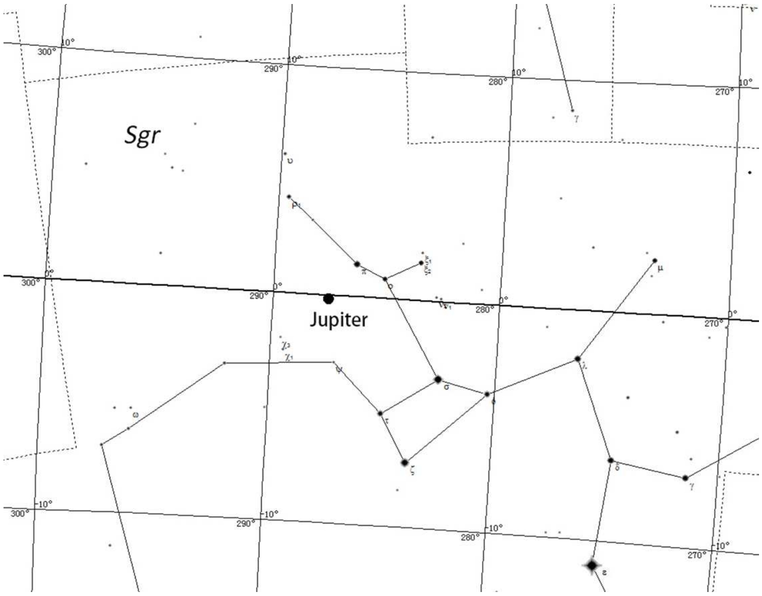
Na sliki 2 je zvezdna karta nedavne opozicije Jupitra. Koordinatna mreža na sliki je ekliptična mreža. Oceni datum te opozicije, zaokrožen na najbližji dan.



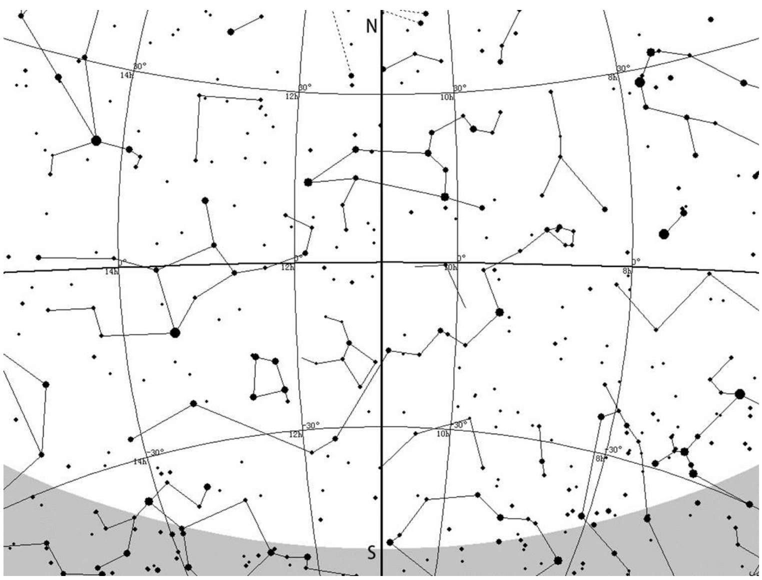
SLIKA 1.

03

Na sliki 3 je zvezdna karta dela neba 21. marca 2018. Geografska širina in dolžina kraja opazovanja sta 120°E, 40°N (UTC+8). Koordinatna mreža na sliki je ekvatorialna mreža. Odebeljena navpična črta na sredini predstavlja meridian. Oceni srednji Sončev čas, zaokrožen na manj kot 0,5 h.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

Učeči se robot

Andrej Likar

→ Roboti danes opravljajo številna dela precej hitreje in natančneje kot še tako izurjen človek. Posebej programirani računalniki celo premagajo svetovne prvake v šahu ali goju. Temu se lahko čudimo, a njihova spretnost leži v programih, po katerih se roboti ali računalniki odzivajo. Programi so sicer bolj ali manj zapleteni, vedno pa so prilagojeni na dane okoliščine in se ne spreminjajo. Računalnik preveri na miljone možnih potez pri šahu, in se končno odloči za najprimernejšo glede na dobro premišljen kriterij. Človek tega seveda ne zmore, pri potezah se odloča intuitivno, pač glede na omejeno presojo nasprotnika in pozicije ter na prejšnje izkušnje. Pravimo, da človek razmišlja in občuti, robot ali računalnik pa le natančno izvršujeta vnaprej napisane ukaze.

Naši ukazi, po katerih se nehote ravnamo, niso vnaprej predpisani, pridobili smo jih skozi življenje, z igro in delom. Morda bi si zaželeli imeti robota, ki bi nam bil podoben, ki bi govoril, se prilagajal na nove okoliščine in bi nam bil pri roki kot kak pameten in zvest pomočnik. Kako do njega?

Kako naj programiramo robota, da se bo učil, kot se učimo ljudje od ranega otroštva dalje? Otroci ne rešujejo nalog preko vnaprej napisanih specifičnih programov, razvijajo se na povsem drugačen način. Preiskujejo svojo okolico in s premikanjem svojega telesa in igranjem s predmeti ugotavljajo zakonitosti sveta. Prav tako se preizkušajo v govoru. Potrebne podatke si preskrbijo sami, se prilagajajo novim okoliščinam in prenašajo pridobljene izkušnje na druga področja. Robotu, ki naj bi se tako učil, bi morali na začetku vpisati nekakšen program, ki bi ga usmerjal v otroško igro. Da bi lahko napisali tak program, moramo poznati osnovno načelo otroške igre. Do tega načela ni prav lahko priti, strokovnjaki na tem področju še vedno vneto raziskujejo otrokov miselni razvoj, saj marsikaj o njem ni povsem dognano.

Eno od možnih načel, ki obeta lastno učenje robotov, bomo povzeli iz članka *Samoučeči roboti*, objavljenega v letošnji marčevi številki revije Scientific American (marec 2018, avtorica Diana Kwon). Načelo je preprosto in temelji na spoznanju, da si naši možgani vseskozi prizadevajo napovedovati poteke vsemogočih dogajanj in se pri tem učiti ob razliki med izidi dogodkov in našimi predvidevanji. Pa povzemimo lep primer, ki ga najdemo v članku. Denimo, da prvič srečamo ljubko mačko. Ker imamo doma prav tako ljubko in krotko mačko, ki se rada pusti crkljati, jo skušamo pobožati. A ko sežemo po njej, nas mačka opraska. Svoje znanje o mačkah moramo torej spremeniti – nekatere ljubke mačke niso prijazne in opraskajo! Sedaj spet preizkusimo mačko, in sicer ji ponudimo kak slasten zalogaj in pri tem upamo, da bo potem prijaznejša. In res, ko zagleda zalogaj, se pusti pobožati. Sedaj vemo, da se splača ponuditi kak zalogaj mački, ki je sicer ljubka, a je še ne poznamo.

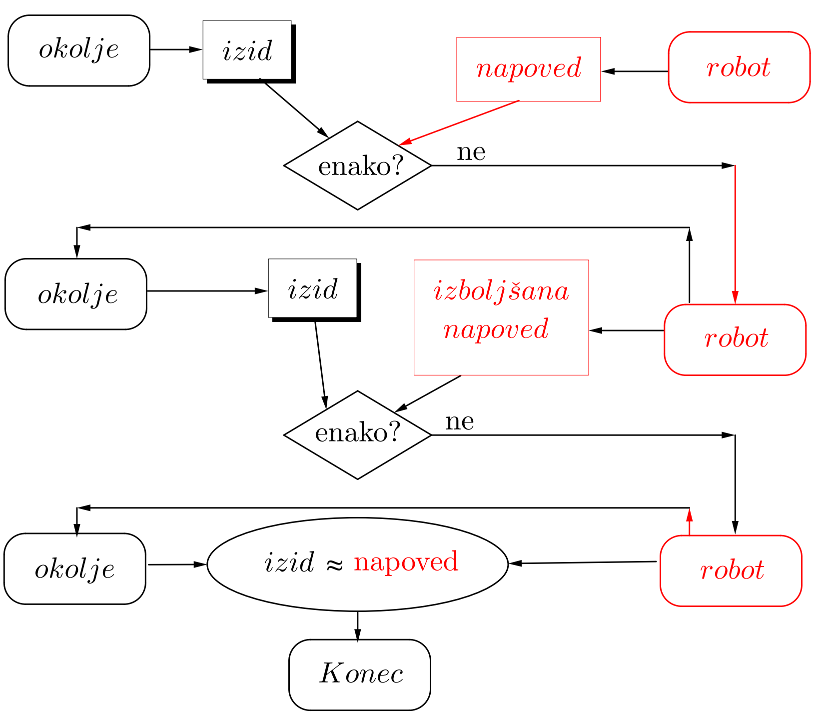
Osnovni program, ki bi omogočil lastno učenje robota, bi moral robotu vcepiti radovednost in možnost, da si spreminja svoj notranji miselni svet, brž ko opazi razliko med pričakovanim in resničnim izidom kakega dogodka. Da je taka pot smiselna, dokazujejo številni poskusi z malčki. Ti so, na primer, posebej radovedni, ko opazijo nekaj, kar še zdaleč ni v skladu z njihovimi pričakovanji. Naredili so poskus tako, da so malčkom pokazali predmet, ki se je navidez premikal skozi trdno steno. To jih je močno pritegnilo in začeli so podrobneje proučevati pojav, ker so bila njihova pričakovanja v ostrem neskladju z dogajanjem. Želja po uskladitvi svojega notranjega miselnega sveta z zunanjim lahko pojasni marsikatero uganko v zvezi z otrokovim miselnim razvojem.

Morda niti ni potrebno omenjati, da bi moral imeti robot, ki bi bil zmožen lastnega učenja, svoje telo, da bi moral imeti možnost smiselno posegati v zunanji svet, da bi moral videti in slišati in biti sposoben oblikovati zvok. Moral bi nam biti torej precej podoben, vsaj kar se tiče teh lastnosti. Današnji roboti so vse preveč nerodni in krhki in imajo precej slabo razvita čutila. Seveda pa je največja ovira do učečega se robota nepoznavanje delovanja možganov. Modeliranje misli je še v povojih, kar je spričo zapletenosti tega organa povsem razumljivo. Da bi vzgojili robota s človeškim načinom razmišljanja, bi se morali z njim zelo dolgo časa ukvarjati, pravzaprav bi ga morali vzgajati kot otroka in ga pozneje vključiti v družbo kot sebi enakega.

Osnovno načelo otrokovega miselnega razvoja, ki smo ga omenili tu, po mnenju nekaterih psihologov nudi nov vpogled v razvojne posebnosti nekaterih otrok. Na primer, nekateri avtistični otroci naj bi bili preveč občutljivi na razlike med napovedmi in dejanskimi izidi pri kakem dogajanju. To morda pojasni njihovo vztrajno ponavljanje prizorov, katerih izidi so za nas zelo dobro napovedljivi.

Izkazalo se je, da laboratorijski poskusni roboti, ki so jim vprogramirali radovednost, izkazujejo tudi osnovno socialno obnašanje, torej družabne stike. V želji po izravnavi zunanjega in svojega notranjega sveta nehote in neprogramirano začnó pomagati drug drugemu. Pri otrocih je tako sodelovanje izrazito. To je razumljivo, saj velik del otrokovega preizkušanja okolja zasede napovedovanje odzivov drugih ljudi, otrok ali starejših.

Ta zapis smo začeli z ugotovitvijo, da nas roboti za določena dela že močno prekašajo. Samoučeči roboti so danes še v zgodnjem razvoju, namenjeni so predvsem proučevanju zgradbe in razvoja človeških možganov. V ne tako oddaljeni prihodnosti pa utegnejo postati zelo uporabni stroji, pravi roboti iz znanstvenofantastičnih zgodb. Možnost samoučenja in sklepanja pa lahko robotu ob napačni *vzgoji* utrdi značajske poteze, ki nam ne bi bile posebno všeč.



SLIKA 1.
Ko robot opazi razliko med napovedanim in pravim izidom kakega pojava, popravi svoj notranji miselni svet tako, da se pri naslednjem poskusu razlika zmanjša. Po nekaj poskusih se razlika zmanjša pod tolerančno mejo, robot je svoj notranji svet uskladil z zunanjim.

× × ×

Priprave na srednješolske računalniške olimpijade

Jure Slak

Za srednjnešolce obstajajo tri mednarodne olimpijade v računalništvu in informatiki: Mednarodna olimpijada v računalništvu in informatiki (IOI), Srednjeevropska olimpijada v računalništvu in informatiki (CEOI) in Balkanska olimpijada v računalništvu in informatiki (BOI).

Slovenija na teh tekmovanjih ni najbolj uspešna, kajti doslej je na svetovni olimpijadi dosegla le 24 bronastih medalj in štiri srebrne, pa še od teh štirih sta dve iz daljnega leta 1995, kar jo postavlja na 59. mesto od 106 držav. Za primerjavo lahko vzamemo sosednje države, npr. Hrvaško, ki ima 11 zlatih, 39 srebrnih in 35 bronastih medalj, in našo širšo regijo, kjer so Poljska, Romunija, Bolgarija in Slovaška na svetovni lestvici 4., 6., 7. in 8.[1] Posebej je zaskrbljujoče, da je Slovenija v devetdesetih letih prejšnjega stoletja veljala za vzor na tem področju.

Z letošnjim letom je ACM Slovenije v sodelovanju z uspešnimi tekmovalci iz preteklih let začel organizirati celoletne priprave na olimpijade. Namen priprav je, da preobrnemo trend slabih rezultatov in v prihodnjih treh letih povečamo število dijakov, ki bodo sposobni doseči vidnejše rezultate v svetovnem merilu, saj bo to imelo dvojni rezultat: najprej se bo povečalo zanimanje za računalništvo in informatiko med mladimi in tudi gospodarstvo bo prišlo do kakovostnejšega kadra.

Priprave na olimpijade iz računalništva potekajo v okviru projekta *NAPOJ – Načrtovanje poučevanja Algoritmov in Programiranja ter Organizacija skupnosti*, ki ga vodi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko v sodelovanju z drugimi partnerji, vključno z Ministrstvom za izobraževanje, znanost in šport. Projekt je bil izbran na razpisu podjetja Google CS4HS (Computer Science for High School).

Aktivno izobraževanje in priprave na olimpijade potekajo skozi celo leto, podobno, kot to poteka v Sloveniji pri matematični ali fizikalni olimpijadi, ali pa kot to poteka v drugih državah (Poljska, Hrvaška) pri olimpijadah iz računalništva in informatike. Več o pripravah in snovi je na voljo na uradni strani[2]. Srečujemo se na dva tedna na Fakulteti za računalništvo in informatiko v Ljubljani, kjer se vsakič obravnava del snovi iz »učnega načrta« za svetovno računalniško olimpijado[3], po navadi motiviran s kakšno nalogo iz preteklih tekmovanj. Vsakemu srečanju sledi tudi domača naloga, kjer morajo tekmovalci naučeno znanje in programerske spretnosti izkazati na treh različno težkih nalogah. Priprave so brezplačne in se jih lahko udeleži kdorkoli.

Odziv dijakov in srednjih šol je bil pozitiven: trenutno priprave obiskuje 34 dijakov iz 14 različnih

[1] statistika na voljo na `stats.ioinformatics.org/countries/?sort=medals_desc`.

[2] `moodle.lusy.fri.uni-lj.si/course/view.php?id=60`

[3] `people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/ioi-syllabus.pdf`

srednjih šol iz vse Slovenije. Predznanje je precej različno, nekaj dijakov je starih tekmovalcev z olimpijad, nekaj jih je še začetnikov. Tu pa se odpre še en problem: za razliko od npr. matematičnega kenguruja in nadaljnjih tekmovanj, ki se jih dijaki udeležujejo množično, je pri tovrstnih programerskih tekmovanjih potrebna določena tehnična podkovanost in predznanje programiranja, ki ga večina ne pridobi v času osnovne ali srednje šole. Kjub sistemskim problemom pa dijaki izkazujejo interes in motivacijo za učenje in delo. Že sama udeležba na olimpijadi je za marsikoga lepa nagrada, medalja pa ima še večji pomen: odpira namreč vrata za vpis na dobre svetovne univerze ali prakse pri tehnoloških podjetjih.

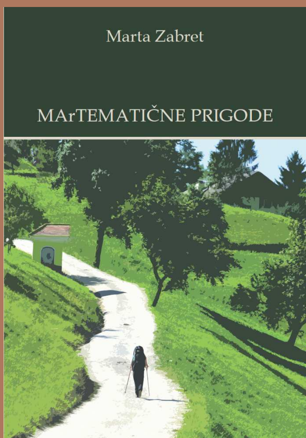
Za kakršnekoli informacije glede priprav lahko pišete organizatorju na naslov `jure.slak@ijs.si`, razpored prihodnjih srečanj pa je prikazan v tabeli 1. Srečanj se lahko udeleži vsak zainteresiran poslušalec, tudi če želi samo dobiti občutek, kako priprave izgledajo.

datum	predavatelj	snov
17. 12. ob 16:00	Janez Brank	Dinamično programiranje, koncept optimalne podstrukture in stanja, osnovni primeri, določanje časovne in prostorske zahtevnosti, 0/1 nahrbtnik.
7. 1. ob 16:00	Vid Kocijan	Osnovni algoritmi na grafih, pregled v širino, pregled v globino, štetje komponent.
21. 1. ob 16:00	Janez Brank	Dinamično programiranje, najdaljše skupno podzaporedje, urejevalna razdalja, najdaljše naraščajoče podzaporedje.
11. 2. ob 16:00	Filip Koprivec	Najkrajše poti, Dijkstrov, Floyd-Warshallov algoritem.
4. 3. ob 16:00	Filip Koprivec	Podatkovna struktura Union-Find, minimalno vpeto drevo, algoritma Kruskala in Prima.
9. 3.	ZOTKS	tekmovanje FIT
18. 3. ob 16:00	Tomaž Hočevar	Napredne podatkovne strukture: binarno iskalno drevo, trie, druge razširjene podatkovne strukture, še posebej drevo segmentov.
23. 3.	ACM + IJS	tekmovanje RTK
15. 4. ob 16:00	Vid Kocijan	Topološko urejanje, močno povezane komponente, mostovi in prerezna vozlišča.
6. 5. ob 16:00	Jure Slak	Geometrija: ploščine, vektorski produkt, konveksna ovojnica, kompresija koordinat, presečišča, pometanje.
20. 5. ob 16:00	Janez Brank	Napredno dinamično programiranje, dinamično programiranje z mitmaskami.
3. 6. ob 16:00	še nedoločeno	Izbrane naloge s starih tekmovanj

TABELA 1.
Razpored prihodnjih srečanj in tekmovanj iz računalništva.

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

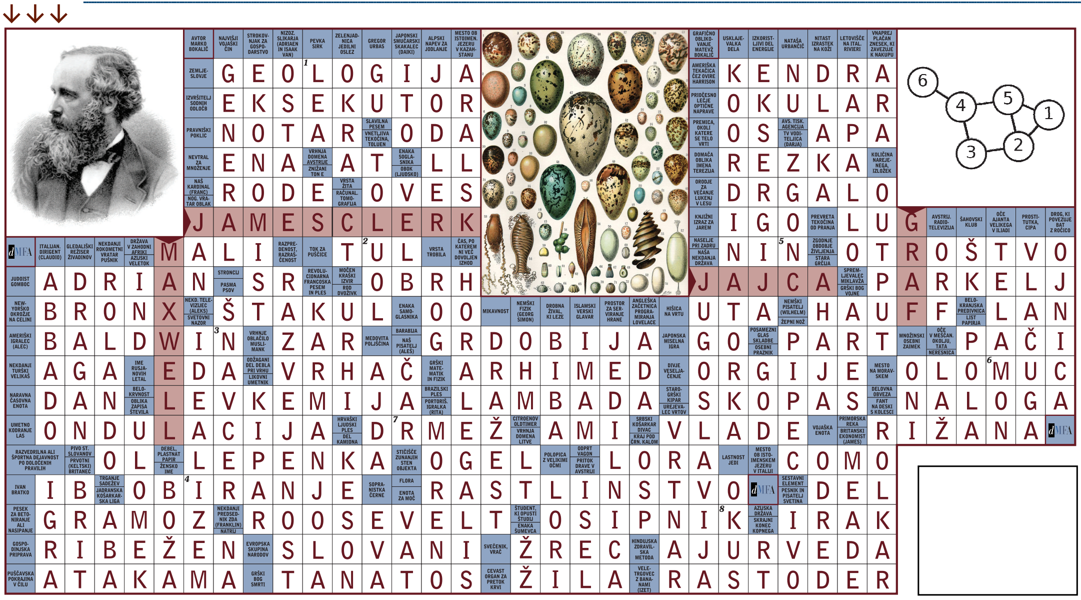
Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 46/2

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke Preseka je **Lunin mrk.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Alen Đudarić iz Celja, Neža Kermelj Kuzman iz Ljubljane in Ana Hriberšek iz Mislinje, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

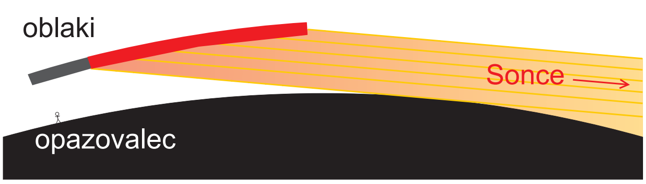
× × ×

Senca zahoda

Aleš Mohorič

Kak večer nam zahajajoče Sonce priredi še posebej barvit spektakel na nebu in obsije oblake z odtenki oranžne in rdeče, kakor kaže slika na naslovnici. Kako se to zgodi?

Na hitro razmere pojasnimo s skico na sliki 1. Nebo nad opazovalcem proti zahodu pokriva plast oblakov. Plast se zaključi blizu obzorja, tako da jo lahko od spodaj obsijejo sončni žarki. Žarki prihajajo od Sonca, ki je že zašlo. Sončna svetloba se obarva rdeče, ker svetloba potuje skozi debelo plast atmosfere, dosti debelejšo kot ob poldnevu, ko žarki vpadajo skoraj navpično. O barvitem zahodu lahko več preberete v opisu naslovnice v [1].



SLIKA 1.

V primeru, da žarkom pot zapre gora, hrib ali drug oblak, nastane za oviro senca in del oblakov ostane temen. To pojasni skica na sliki 2.

SLIKA 2.

Nekaj več o lastnostih sence lahko preberete v starem Preseku [2]. Zdaj lažje prepoznamo lastnosti fotografije na naslovnici. Z nekaj domišljije prepoznamo tudi senco, ki jo meče na oblake hrib z oblačno kapo, ki je sredi fotografije. Senca je posebej označena na sliki 3.

SLIKA 3.

Senca ima obliko razprte pahljače. To ni posledica oblike hriba ali oblaka, ampak perspektive. Senco bližje vrha fotografije opazujemo na manjši razdalji, kot senco blizu hriba. O perspektivi je več napisanega v [3].

Literatura

[1] naslovnica, Presek 43 (2015/2016) 5.

[2] A. Mohorič, *Senca*, Presek **40** (2012/2013) 1, str. 31.

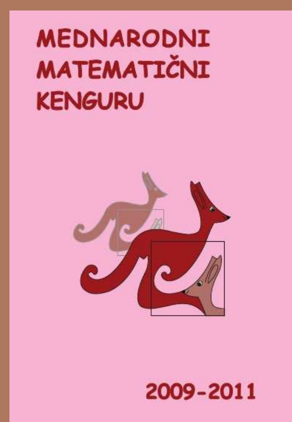
[3] A. Mohorič, *Perspektiva*, Presek **40** (2012/2013) 3, 30–31.

Matematični kenguru

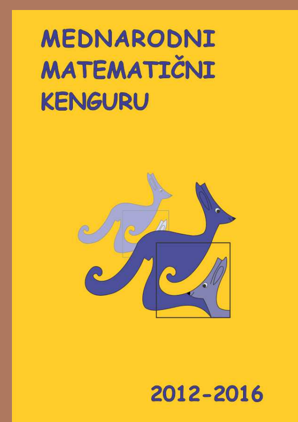
Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!