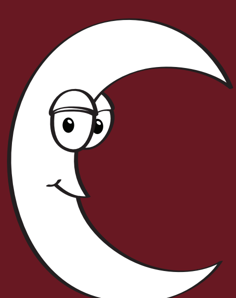
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#2

PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA **2**

PRESEK



→ BARVANJE GRAFOV IN NJEGOVA UPORABA

→ ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA IN DIFERENCIALNI PRENOS

→ LUNINI MRKI

→ PROBLEM DVEH JAJC

ISSN 0351-6652

9 770351 665623

Kako obdržati streho na hiši

Žal še vedno ni mogoče popolnoma preprečiti škode, ki jo na hišah povzročijo močni vetrovi, deževja in nevihte. Nova ideja, ki je zasnovana s pomočjo matematike, pa lahko škodo, ki jo povzroči veter, precej omeji. Pred pričakovanimi močnimi vetrovi je potrebno na streho namestiti premišljeno zasnovano ponjavo in jo zasidrati v tla. Med neurjem določen del vetra ponjavo preide, preostali del vetra pa ponjavo porine proti strehi in uravnoteži sile, ki streho potiskajo navzgor. Z naraščajočo močjo vetra ponjava še močneje tišči streho navzdol. Zasnova ponjav temelji na diferencialnih enačbah, vektorski analizi in trigonometriji. Med preizkušanjem prototipov ponjav med hurikani, ko je veter pihal tudi do 180 km/h, so hiše, pokrite s ponjavo, ostale nepoškodovane, nezaščitene hiše pa so izgubile vsaj del strehe.

Doslej uveljavljeni načini zaščite s fiksnimi vrvmi in trakovi so nepremični in se ne morejo prilagoditi naraščajočim hitrostim vetra. Med nevihtami pogosto odpovedo, ko močni vetrovi, podobno kot pri letalskih krilih, povzročijo dviganje strehe. Ponjave pa so delno prepišne in tako odvzamejo del moči vetra. Trakovi, ki so privezani na ponjavo, se med tem zategnejo, prerazporedijo pritisk po celotni strehi in zmanjšajo vzgon. Poleg učinkovitosti ponjave odlikuje tudi sorazmerno nizka cena in enostavna namestitev, ki ne traja več kot dve ali tri ure.

Radovednejši bralci si lahko preberete članek *Elastic model for a wind-protection membrane*, ki sta ga leta 2017 objavila Martin J. Körber in Stefan Siegmund v reviji *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*.

SLIKA.
Škoda, ki jo je povzročil hurikan Harvey.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Kaj je na fotografiji? Luna okoli prvega krajca? V katerem delu dneva Luna vzhaja, če je prvi krajec? Je na fotografiji delni Lunin mrk? Zakaj je potem osvetljeni del Lune rdeč? Foto: Andrej Guštin

Barvanje grafov in njegova uporaba

Tjaša Paj Erker

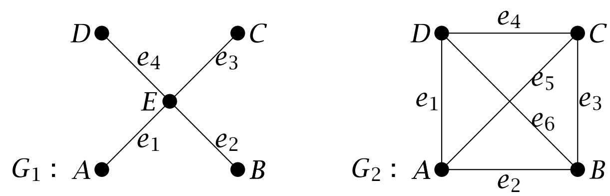
Poglejmo, s kakšnimi težavami se srečujejo organizatorji popoldanskih športnih dejavnosti, ki bi radi, da bi bila športna dvorana na voljo čimveč uporabnikom različnih športov. Pri tem bi radi ustregli tudi individualnim željam posameznikov, ki bi se hkrati radi redno udeleževali dveh ali več športov, pa ne na isti dan. Poleg tega bi morali upoštevati še dogovor z lokalnim klubom, da bo telovadnica prosta ob sredah in med vikendom.

Rešitev zgornjega problema lahko matematično enostavno prikažemo z barvanjem grafov. Preden se tega lotimo, si oglejmo osnovne pojme iz teorije grafov, ki jih pri tem potrebujemo.

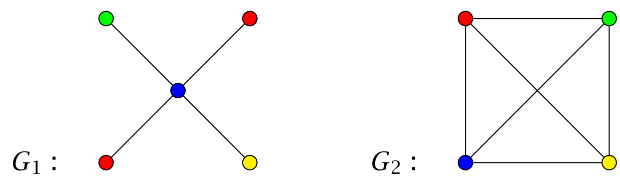
Graf je množica **vozlišč** in množica **povezav** med njimi. Označujemo ga z $G = (V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč in $E(G)$ množica povezav med njimi. Na sliki 1 je tako $V(G_1) = \{A, B, C, D, E\}$ in $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ter $V(G_2) = \{A, B, C, D\}$ in $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Barvanje vozlišč grafa G je dodelitev neke barve vsakemu vozlišču v grafu. Zanimivo je predvsem **pravilno barvanje vozlišč**. To je barvanje, ki vsakemu paru sosednjih vozlišč dodeli različni barvi. Pravilno k-barvanje je barvanje grafa, za katerega porabimo k barv. Na sliki 2 je primer pravilnega 4-barvanja grafov G_1 in G_2.

Seveda lahko graf G z n vozlišči vedno pravilno pobarvamo z n barvami, zato nas bolj zanima najmanjše možno število barv, ki jih moramo uporabiti,



SLIKA 1.
Primera grafov G_1 in G_2



SLIKA 2.
Pravilno 4-barvanje grafov G_1 in G_2

da graf s temi barvami pravilno pobarvamo. Število povezav iz vozlišča v imenujemo **stopnja vozlišča**. Največjo stopnjo vozlišča grafa G označimo z $\Delta(G)$. V zgornjih dveh primerih je $\Delta(G_1) = 4$ in $\Delta(G_2) = 3$. Izkaže se, da lahko vsak graf pobarvamo z $\Delta(G) + 1$ barvami. Hitro pa vidimo, da lahko graf G_1 pravilno pobarvamo celo z dvema barvama, medtem ko grafa G_2 ne moremo pravilno pobarvati z manj kot štirimi barvami. Najmanjše število, za katerega obstaja pravilno k-barvanje vozlišč, imenujemo **kromatično število grafa** in ga označimo z $\chi(G)$. Tako je $\chi(G_1) = 2$ in $\chi(G_2) = 4$.

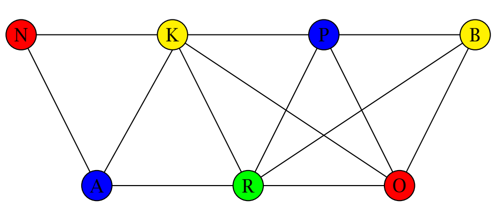
Sedaj lahko na primeru predstavimo problem iz uvoda in ga rešimo s pomočjo barvanja grafov.

Primer 1. *Tabela 1 nam prikazuje, kdo se je prijavil na posamezno športno dejavnost. Ker mora biti telovadnica v sredo in čez vikend prosta, bi vse dejavnosti radi razporedili v štiri dni. Ali jih je mogoče razporediti tako, da bi se vsi lahko udeležili vseh želenih športov in se hkrati nihče ne bi udeležil dveh različnih športov istega dne?*

košarka	Darko, Darja, Aljaž, Bor, Tia, Klara, Žan
nogomet	Aljaž, Darko, Tine, Gal, Rok
plezanje	Darja, Gregor, Bor
rokomet	Meta, Darja, Tia, Maša, Iza, Klara, Jan
odbojka	Bor, Darja, Žan, Ajda, Gregor, Iza
aerobika	Meta, Maša, Tia, Tine, Aljaž, Jan
badbinton	Iza, Ajda, Gregor

TABELA 1.
Tabela prijav na posamezno dejavnost

Rešitev. Problem predstavimo s pomočjo grafa na sliki 3. Vozlišča naj predstavljajo športne dejavnosti. V primeru, da se želi ista oseba udeležiti dveh športnih dejavnosti, vozlišči povežemo. Npr., vozlišči, ki predstavljata nogomet in košarko, povežemo, ker se Darko in Aljaž želita udeležiti obeh dejavnosti. Tako dobimo graf. Sedaj nastali graf pobarvamo s čim manj barvami in pri tem pazimo, da poljubni sosednji vozlišči pobarvamo z različnima barvama. Barve predstavljajo dneve v tednu.



SLIKA 3.
Graf, ki predstavlja Primer 1.

Zanima nas, z najmanj koliko barvami lahko pravilno pobarvamo vsa vozlišča. Ker so vozlišča P, O in R povezana v trikotnik, bomo za njihovo barvanje potrebovali tri različne barve, npr. modro, rdečo in zeleno. Poleg tega sta z vsemi temi vozlišči povezani vozlišči B in K. Ker ti dve nista sosednji, ju lahko pobarvamo z enako barvo, npr. z rumeno. Ostaneta nam še vozlišči N in A, za kateri pa lahko ponovno uporabimo rdečo in modro barvo. Dobimo graf na sliki 3.

Graf smo pobarvali s štirimi barvami in hkrati ugotovili, da ga ni mogoče pobarvati z manj barvami. Torej je $\chi(G) = 4$. To pomeni, da lahko vse dejavnosti razporedimo v štiri dni, kot prikazuje spodnja tabela:

prvi dan	nogomet, odbojka
drugi dan	košarka, badbinton
tretji dan	plezanje, aerobika
četrti dan	rokomet

TABELA 2.
Razporeditev dejavnosti po dnevih

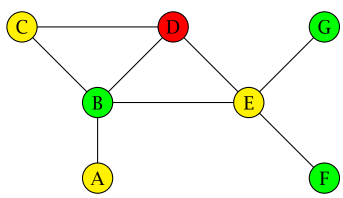
Na številnih področjih lahko najdemo podobne naloge. Tako lahko s pomočjo barvanja vozlišč rešimo npr. problem radijski oddajnikov. Frekvence radijskih oddajnikov se namreč lahko med sabo motijo, če so preblizu skupaj. Problem, ki se nam pojavi je, kako razdeliti frekvence množici oddajnikov, da se medsebojno ne bodo motile. Najmanj koliko frekvenc je za to potrebno?

Primer 2. *V tabeli 3 so razdalje med posameznimi kraji, označenimi s črkami $A-G$. Koliko frekvenc je potrebno, če krajema, ki sta oddaljena manj kot 500 km, ne moremo dodeliti iste frekvence?*

Rešitev. Problem predstavimo z grafom. Pri tem so vozlišča kraji. Če sta kraja oddaljena manj kot 500 km, ju povežemo in dobimo povezave. Graf lahko pravilno pobarvamo s tremi barvami (kot na sliki 4), pri čemer barve predstavljajo frekvence. Torej potrebujemo le tri frekvence.

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	450	550	700	600	850	900
B	450	-	490	300	250	600	750
C	550	480	-	120	530	820	910
D	620	360	200	-	360	630	750
E	710	280	600	190	-	380	450
F	860	660	900	650	340	-	540
G	820	760	900	730	460	560	-

TABELA 3.
Šest načinov, šest zmnožkov



SLIKA 4.
Graf, ki predstavlja Primer 2.

Zelo znan problem je tudi problem barvanja zemljevidov. Pri tem problemu nas zanima, koliko barv potrebujemo, da zemljevid pobarvamo tako, da nobeni dve sosednji državi (ali regiji) ne bosta imeli enake barve.

Primer 3. Z najmanj koliko barvami lahko pobarvamo zemljevid držav v Južni Ameriki tako, da nobeni dve sosednji državi ne bosta imeli enake barve?

Rešitev. Problem predstavimo z grafom, kjer so vozlišča države. Če imata dve državi skupno mejo, ustrezni vozlišči povežemo. Zemljevid lahko pobarvamo s štirimi barvami.

Grafe z majhnim številom vozlišč lahko pobarvamo zelo hitro. Kaj pa, kadar moramo pobarvati zahtevnejši graf? Kadar je število vozlišč večje, seveda ni tako enostavno poiskati vrednosti $\chi(G)$. Obstajajo sicer algoritmi za poljubno velike grafe, ki pa se izkažejo za zelo zamudne že pri malo večjem problemu.

SLIKA 5.
Države Južne Amerike

Literatura

[1] D. Brown Smithers, *Graph Theory for the Secondary School Classroom*, Electronic Theses and Dissertations, Paper 1015, 2005.

[2] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Third Edition, New York, 1985.

[3] J. Žerovnik, *Osnove teorije grafov in diskretne optimizacije*, druga izdaja, Univerza v Mariboru, 2005.

[4] Dostopno na `www.pinterest.com/pin/546272629772915227/`, ogled: 14. 9. 2018.

× × ×

Trikrat pakiramo

Ivan Lisac

Ste se že kdaj prepirali, kako zložiti prtljago v prtljažnik? Tokrat bomo poskusili rešiti nekaj nalog povezanih s pakiranjem.

Pakiranje kvadrov v kvader

Prevoznik Andrej prevaža tovor. Tovornjak ima prostor za tovor, ki meri 630 cm v dolžino, 170 cm v širino in 200 cm v višino. Tokrat prevaža škatle enake oblike, ki merijo 55 cm v dolžino, 45 cm v širino in 35 cm v višino. Kako naj Andrej naloži škatle v tovornjak tako, da bo šlo vanj čimveč škatel, pri čemer se omejimo samo na taka nalaganja, kjer so škatle zložene druga ob/na drugi tako, da vse enakoimenske dimenzije škatel gledajo v isto smer? Pri tem imajo prostor za tovor in škatle obliko kvadra.

Obstaja šest načinov takega pakiranja: prvo škatlo z merami d, s in v lahko namreč postavimo v vogal tovornega prostora z merami D, S in V tako, da je mera d vzporedna meri D, mera s vzporedna meri S, in mera v vzporedna meri V. Nadaljnje možnosti dobimo, če prvo škatlo obrnemo in s tem njene mere glede na ta vrstni red permutiramo. Možnosti so:

d, s, v	d, v, s	s, d, v
s, v, d	v, d, s	v, s, d

TABELA 1.
Šest načinov postavitve prve škatle

Kateri način je najboljši? Pri prvem načinu gre dolžina škatle d kar $\lfloor D : d \rfloor$-krat[1] v dolžino prostora D, širina škatle s gre $\lfloor S : s \rfloor$-krat v širino prostora S in višina škatle v gre $\lfloor V : v \rfloor$-krat v višino prostora V. Zmnožek teh treh dobljenih (navzdol zaokroženih) količnikov pa nam pove, koliko škatel gre na ta način v tovornjak. Pri vrtenju prve škatle in menjavi mer dobimo še druge take količnike in druge zmnožke.

Za dani primer sestavimo sedaj tabelico 2: v gornjo vrstico naštejmo mere tovornega prostora, v levi stolpec pa mere prvo postavljene škatle. Na križišču stolpca in vrstice pa naj bo količnik ustrezne mere prostora in ustrezne mere škatle.

	630	170	200
55	11	3	3
45	14	3	4
35	18	4	5

TABELA 2.
Tabelica količnikov mer

Količnike iz te tabelice jemljemo v zmnožek po vrsticah in stolpcih tako, da količniki niso iz iste vrstice niti iz istega stolpca. Tako dobimo šest zmnožkov v tabeli 3.

d, s, v	d, v, s	s, d, v
$11 \cdot 3 \cdot 5$	$11 \cdot 4 \cdot 4$	$14 \cdot 3 \cdot 5$
165	176	210
s, v, d	v, d, s	v, s, d
$14 \cdot 4 \cdot 3$	$18 \cdot 3 \cdot 4$	$18 \cdot 3 \cdot 3$
168	216	162

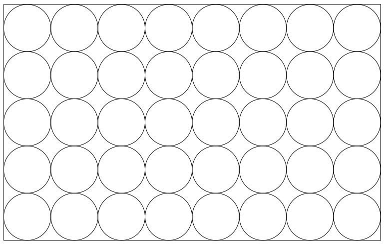
TABELA 3.
Šest načinov, šest zmnožkov

V danem primeru je torej najboljši peti način z 216 naloženimi škatlami. Dodajmo še to: pri vseh teh načinih ostane še nekaj praznega prostora, ki je morda še uporaben za doložitev kake škatle. Kako izkoristiti morebitni tak ostanek, tu ne bomo premišljali.

Pakiranje krogov v pravokotnik

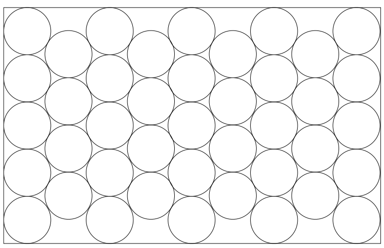
Tokrat ima prevoznik Andrej tovor plinskih jeklenk oblike krožnega valja. Naložil je že 40 jeklenk v osem vrst po pet v vrsto in tako zapolnil razpoložljivi prostor (slika 1 - tloris). Ima še eno jeklenko, ki bi jo rad dodal na tovornjak.

[1] $\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$



SLIKA 1.
$8 \cdot 5 = 40$

Vendar kako? Po nekaj minutah se domisli. V prvi vrsti pusti pet jeklenk. Iz druge vrste eno umakne in ostale štiri porine nekoliko gor in levo v vmesni prostor. Podobno naredi še z vrstami od tretje do osme ter začuda pridobi prostor za deveto vrsto in skupaj 41 jeklenk (slika 2)!



SLIKA 2.
$8 \odot 5 = 41$

Tak način pridobivanja prostora poglejmo podrobno. Andrej je sprva postavil 40 jeklenk na *štirikotniški* način: vsaka notranja jeklenka se dotika štirih sosednjih. Zatem je poskusil povečati število sosed notranjih jeklenk in izkoristiti obstoječe vrzeli. Lihe vrste so ohranile po pet jeklenk, sodim je bila po ena odvzeta, soda vrsta pa je bila pomaknjena v medprostore prejšnje vrste. To je *šestkotniški* način. Večina notranjih jeklenk ima po šest sosed, vrzeli med tremi sosednjimi jeklenkami pa so se nekoliko zmanjšale: prej je tipična vrzel merila $(4-\pi)r^2 \doteq 0,858r^2$ (na sliki 1 jih je 28), potem pa le še $(\sqrt{3} - \pi : 2)r^2 \doteq 0,161r^2$ (na sliki 2 jih je 56).

Uvedimo sedaj novo operacijo $\odot$ takole: zmnožek $v \cdot s$ je število krogov v štirikotniškem načinu nalaganja krogov v v vrst po s v vrsto, zmnožek $v \odot s$ pa naj bo število krogov v šestkotniškem načinu pri *enakem* prostoru kot pri prvem načinu. Zaradi lažje analize privzemimo še, da prvi način zapolni pravokotni prostor v celoti do vseh stranic pravokotnika.

Koliko pa je $v \odot s$? Najprej opazimo, da imajo v vsaki vrsti središča krogov enako koordinato: v prvi vrsti je to kar polmer kroga, v drugi vrsti je to polmer kroga in še premer kroga, pomnožen s $\sqrt{3} : 2$, v tretji vrsti je to polmer kroga in še dva premera kroga, pomnožena s $\sqrt{3} : 2$ itd. Denimo, da imamo v šestkotniškem načinu skupno v' vrstic, v_1 vrstic po s krogov in v_2 vrstic po $s-1$ krogov. Krogi naj imajo enotski premer. Potem mora veljati:

- $v \odot s = v_1 s + v_2(s-1), \quad v_1 + v_2 = v'$,
- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(v'-1) + \frac{1}{2} \leq v.$

Ta sistem enačb in neenačb ima rešitev

- $v' = \lfloor 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(v-1) \rfloor$,
- $v_1 = \lfloor \frac{v'+1}{2} \rfloor, \ v_2 = \lfloor \frac{v'}{2} \rfloor.$

Definirajmo še: $v \odot 1 = 1 \odot v = v$.

Videli smo že, da je $8 \odot 5 = 41$. Bralec lahko preveri, da je $5 \odot 8 = 38$ (operacija $\odot$ torej ni komutativna). Zanima pa nas, kdaj je dobro jeklenke nalagati šestkotniško, kdaj pa ne. V tabeli 4 imamo prikazano razliko $v \odot s - v \cdot s$. Negativna števila kažejo prednost pri štirikotniškem načinu nalaganja, pozitivna kažejo prednost pri šestkotniškem načinu nalaganja. Tabela je usklajena s slikama 1 in 2, koordinatni vrstici sta zato izjemoma spodaj in levo.

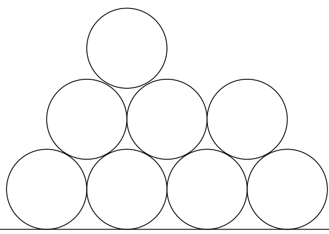
Iz tabele razberemo, da pri majhnih merah prostora bolje deluje prvi način, pri večjih merah pa bolje šestkotniški način. Primer $8 \odot 5$ je prvi, kjer pride do prevlade šestkotniškega načina. Še to: pokazali smo primer, kjer je šestkotniški način boljši, ni pa rečeno, da je *naj*boljši tudi v splošnem.

Pakiranje krogov vzdolž premice

Tokrat morajo gozdarji za d enako debelih okroglih debel pripraviti na tleh skladovnico. V njej bo v prvi vrsti k debel, v vsaki nadaljnji pa eno manj oziroma kolikor jih pač ostane v zadnji vrsti. Vsako deblo je bodisi na tleh bodisi med dvema spodnjima debloma. Skladovnica naj sprejme vseh d debel, vendar naj bo čim ožja, lahko pa je visoka. Primer skladovnice z $d = 8$ debli in $k = 4$ debli v prvi vrsti je na sliki 3.

9	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	5	4
8	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	4	3
7	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	3	2
6	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	2	1
5	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	1	0
4	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	0	−1
3	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	−1	−2
2	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	−2	−3
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s/v	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABELA 4.
$v \odot s - v \cdot s$



SLIKA 3.
$8 = 4 + 3 + 1$

Naš cilj bo za dani d izračunati ustrezni k, da bo mogoče skladovnico pravilno začeti s prvo vrsto s k debli. Najprej opazimo tole: če se d debel postavi v skladovnico tako, da je v zadnji vrsti eno samo deblo, je število debel d enako

- $d = k + (k-1) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2}.$

V takih primerih je d enak *trikotniškemu številu* T_k. Zaporedje trikotniških števil smo verjetno že srečali, gre pa takole:

- $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots.$

Vidimo, da T_k debel napolni skladovnico s prvo vrsto s k debli. Za splošni d pa iščemo tak k, da bo

- $T_{k-1} < d \leq T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}.$

Število k mora biti najmanjša naravna rešitev kvadratne neenačbe $k^2 + k - 2d \geq 0$, katere diskriminanta je $D = 1 + 8d$, pozitivna realna rešitev $(\sqrt{D} - 1) : 2$, naravna rešitev pa navzgor zaokrožena:[2]

- $k = \lceil(\sqrt{8d+1} - 1) : 2\rceil = \lceil\sqrt{2d + 1:4} - 1:2\rceil.$

Primer za $d = 30$: $D = 241$, $\sqrt{D} = 15{,}524\ldots$, $k = 8$ in $30 = 8 + 7 + 6 + 5 + 4$.

Naloge

1. Poišči čim večje število škatel za podane mere v spodnji tabelici:

	550	150	180
60			
55			
40			

2. Na šahovnico je mogoče postaviti 64 krogov s premerom, enakim robu enega polja. Koliko takih krogov dobimo s šestkotniško postavitvijo?

3. Gozdarji so posekali 50 debel. V kakšno skladovnico naj jih naložijo?

Rešitve

1. Tabelica je taka:

	550	150	180
60	9	2	3
55	10	2	3
40	13	3	4

   Največje število škatel je $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$.

2. Izračunamo $8 \odot 8 = 68$.

3. Za $d = 50$ izračunamo $D = 401$, $\sqrt{D} = 20{,}024$ in $k = 10$ ter $50 = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 1$.

× × ×

[2] $\lceil x\rceil = min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$.

Nalogi

Marko Razpet

$\rightarrow$

1. naloga. Poišči funkcijo f, ki za vsak realen x zadošča funkcijski enačbi

$$x(x+1)f(x) + f(1-x) = x(x^3-1). \qquad (1)$$

Rešitev 1. naloge. V dano enačbo

$$x(x+1)f(x) + f(1-x) = x(x^3-1) \qquad (2)$$

vstavimo $1-x$ namesto x in dobimo najprej

$$(1-x)(2-x)f(1-x)+f(x) = (1-x)((1-x)^3-1)$$

in po preureditvi

$$f(x) + (x-1)(x-2)f(1-x) = x(x-1)(x^2-3x+3). \qquad (3)$$

Sedaj enačbi (??) in (??) obravnavamo kot sistem dveh enačb z neznankama $f(x)$ in $f(1-x)$. Sistem npr. rešimo tako, da iz (??) izrazimo

$$f(1-x) = x(x^3-1) - x(x+1)f(x)$$

in to vstavimo v (??). Po preureditvi dobimo

$$f(x)(x^4-2x^3-x^2+2x-1) = x(x-1)(x^4-2x^3-x^2+2x-1).$$

Nazadnje je pred nami rezultat: $f(x) = x(x-1)$.

2. naloga. Na sliki 1 je enakostranični trikotnik s stranico x, ki je razdeljen na dva skladna raznostranična trikotnika, enakokraki trapez in enakokraki trikotnik z znanimi podatki. Izračunaj stranico x.

Rešitev 2. naloge. Višina enakostraničnega trikotnika je $v = x\sqrt{3}/2$, višina enakokrakega trikotnika pa po Pitagorovem izreku $v_1 = \sqrt{7-(1/2)^2} = \sqrt{27/4} = 3\sqrt{3}/2$. Višino v_2 enakokrakega trapeza prav tako dobimo s Pitagorovim izrekom, če prej od desnega zgornjega oglišča do spodnje stranice potegnemo levemu kraku vzporedno daljico. Tako dobimo enakokraki trikotnik s krakoma dolžine 2 in osnovnico dolžine $x-1$. Potem je $v_2 = \sqrt{4-(x-1)^2/4}$. Ker je $v = v_1 + v_2$, imamo enačbo za x:

$$x\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/2 + \sqrt{4-(x-1)^2/4}.$$

Pomnožimo jo z 2 in preuredimo:

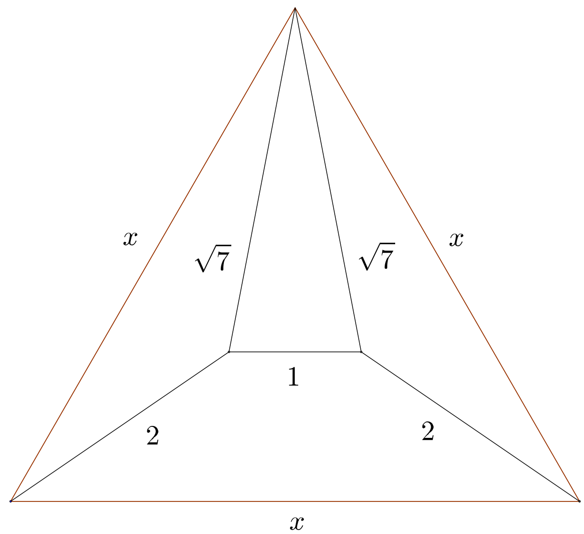
$$(x-3)\sqrt{3} = \sqrt{16-(x-1)^2}.$$

Kvadriramo in dobljeno enačbo uredimo v kvadratno enačbo

$$x^2 - 5x + 3 = 0,$$

ki ima pozitivno rešitev

$$x = (5+\sqrt{13})/2.$$



SLIKA 1.
Enakostranični trikotnik s podatki

×××

Elektromagnetna indukcija in diferencialni prenos

Andrej Likar

James Clerk Maxwell je veliko ime v fiziki. V 19. stoletju (okrog leta 1870) je postavil trdne temelje elektromagnetizma z znamenitimi, po njem imenovanimi Maxwellovimi enačbami, ki veljajo še danes. Pri tem se je oprl na poskuse, ki jih je z veliko zagnanostjo in natančnostjo izvajal Michael Faraday, in se zanašal na nove matematične poti, ki so jih utirali tedanji matematiki.

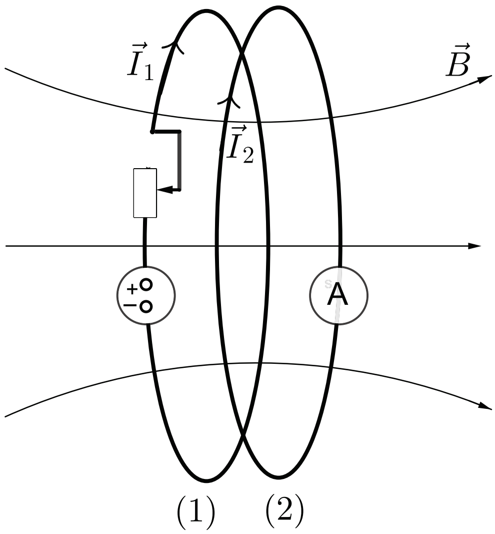
Svoj izjemni talent je James kazal že v rani mladosti. Pozorno je opazoval pojave in naprave okrog sebe. Ob neki priložnosti je povprašal očeta, kako deluje ključavnica. Oče se ni spuščal v podrobnosti in je delovanje razložil v grobih potezah. Tudi sam verjetno ni poznal vseh podrobnosti. A James z razlago ni bil zadovoljen in je zaprepadenemu očetu takole odgovoril: »Da, oče, a, povej mi natančno, kako ključavnica deluje!«

V študijskih letih se je odlikoval s svojim globokim razumevanjem fizikalnih pojavov. Njegov tutor pri eksperimentalnem delu je ob neki prilžnosti izjavil, da na kakršnokoli fizikalno vprašanje James ne more odgovoriti napačno. Prevladuje mnenje, da bi prišel do posebne teorije relativnosti dosti pred Einsteinom, če bi mu bilo dano živeti dlje časa.

Pri študiju elektromagnetnih pojavov si je na začetku pomagal z mehaničnimi analogijami. Ker je zelo dobro poznal mehaniko, električni pojavi pa so bili tudi zanj povsem novo fizikalno področje, se je novim pojavom približal tako, da je poiskal mehanične sklope, ki so se odzivali na podoben ali celo enak način kot električni. Vsem znana je analogija med električnim in vodnim krogom. Vodni tok po cevi je analogen električnemu toku, črpalka bateriji in majhna turbina električnemu uporniku. Tlak vode v cevi je analogen električni napetosti. Za dobršen nabor pojavov je ta analogija povsem ustrezna. Potovanje nabojev v krogu dostikrat primerjamo tudi s smučanjem na urejenem smučišču z vlečnico. Vlečnica potegne smučarja na vrh smučišča (naboj v bateriji potuje iz nižjega potenciala proti višjemu in tako nasprotuje električni sili), potem pa se smučar zabava s spuščanjem po klancu navzdol do vlečnice (naboj potuje po krogu iz uporovne žice do drugega pola baterije). Seveda pa se vsaka analogija slej ko prej konča in postane neustrezna, nerodna in končno tudi nepotrebna. A je pri razlagah dostikrat izjemno uspešna, saj ponazori nekaj novega na način, ki smo ga vajeni.

Nekatere Maxwellove analogije so zapletene in jih pri pouku fizike ne obravnavamo. Druge pa so genialno domiselne in dovolj preproste, da jih je vredno omeniti. Ena takih je analogija med indukcijo v dveh električnih krogih in diferencialnim prenosnikom moči. O tej bo tekla beseda v tem prispevku.

Najprej se spomnimo osnovnega poskusa, s katerim uvedemo elektromagnetno indukcijo. Na sliki 1 sta dve enaki kovinski zanki blizu skupaj. V prvi imamo vključen napetostni vir in drsni upornik, s katerim spreminjamo tok v zanki. V drugi zanki merimo inducirani tok I_2 z občutljivim ampermetrom z danim notranjim uporom R. S spreminjanjem upora v prvem krogu se tam spreminja tudi električni tok I_1, z njim pa magnetno polje, ki ga ta tok povzroča.



SLIKA 1.
Kovinski zanki s skupnim magnetnim pretokom Φ. V levo zanko (1) je vključena baterija z drsnim uporom, da lahko nastavljamo tok I_1 po njej. V desni zanki (2) spremenljiv magnetni pretok inducira tok I_2, ki ga merimo z ampermetrom (A).

Spreminjajoče se magnetno polje pa v drugem krogu zaradi inducirane napetosti požene tok I_2, ki skuša zmanjšati magnetno polje; ta nastane zaradi toka v prvem krogu (Lenzovo pravilo). Ker sta kroga enaka in zelo blizu skupaj, je magnetni pretok Φ skozi obe zanki enak. Inducirana napetost v drugem krogu je torej, kot vemo,

$$U_i = \frac{d\Phi}{dt},$$

torej enaka hitrosti spreminjanja magnetnega pretoka. Magnetni pretok skozi zanki pa je posledica obeh tokov v zankah, torej

$$\Phi = L(I_1 + I_2).$$

Z L smo označili induktivnost zank. Inducirana napetost požene tok I_2, ki je po Ohmovem zakonu

$$I_2 = -\frac{U_i}{R}.$$

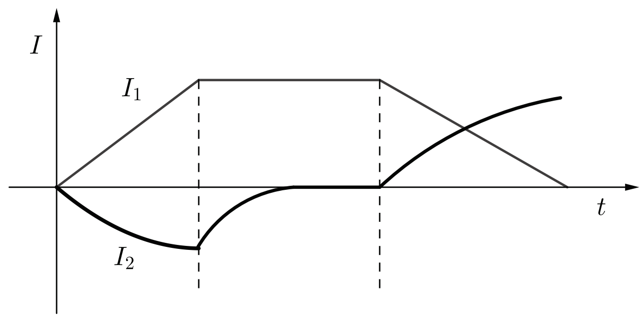
S kombiniranjem zgornjih enačb dobimo zvezo

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{R}{L}I_2 - \frac{dI_1}{dt}.$$

Če je upor R dovolj majhen in induktivnost L dovolj velika, lahko prvi člen desne strani zanemarimo in dobimo v tem približku zvezo

$$\frac{dI_2}{dt} \approx -\frac{dI_1}{dt}.$$

Hitrosti spreminjanja tokov sta torej po velikosti enaki, a nasprotni. Naraščjoči tok v prvi zanki povzroči naraščajoči tok tudi v drugi zanki, le v nasprotni smeri. Pri superprevodni drugi zanki bi se tokova povsem izničila in ne bi imeli nobenega magnetnega pretoka skozi zanki. Ko se tok I_1 skozi prvo zanko ustali, tok I_2 skozi drugo zanko zaradi upora hitro usahne. Ko nato tok I_1 začnemo zmanjševati, pa se v drugem krogu pojavi tok, ki teče v isto smer kot I_1. Tok I_2 v tem primeru skuša obdržati magnetni pretok na prejšnji ravni (spet po Lenzovem pravilu) in tako pri tem pomaga toku I_1 (glej sliko 2).



SLIKA 2.
Spreminjanje induciranega toka I_2 v odvisnosti od toka I_1

Taka povezanost tokov v zanki je nenavadna, saj česa podobnega v vsakdanjem življenju ne najdemo. Ali je mogoče to povezanost kako ponazoriti z mehanično napravo? Maxwell je tako napravo našel. V Cavendishevem laboratoriju v Cambridgu imajo na ogled model, ki ga je zasnoval Maxwell. Skico modela najdemo na sliki 3, kot so jo objavili v ponatisu originalnega Maxwellovega dela *A Treatise on Electricity & Magnetism*. V tem delu originalno ni nikakršnega mehaničnega modela, ki bi ponazarjal obravnavano snov. To potrjuje, da je Maxwell mehanične prispodobe povsem opustil, potreboval jih je le med snovanjem svoje teorije elektromagnetnega polja.

Preprostost in ustreznost mehaničnega modela je izdajatelja prepričala v tolikšni meri, da ga je predstavil v ponatisu. Gre za kolesi (na sliki P in Q), povezani z diferencialom, kot ga poznamo iz avtomobilskega pogona. Vmesni zobnik je vpet na vztrajnik (R), ki mu lahko spreminjamo vztrajnostni moment J. Ko v dani smeri (denimo v smeri urinega kazalca) pospešeno vrtimo kolo P, se kolo Q pospešeno vrti v nasprotni smeri. Kolo Q rahlo zaviramo. Ko pospešek kolesa P pojenja in se vrti enakomerno, se kolo Q zaradi zaviranja ustavlja in končno povsem ustavi. Ko začnemo kolo P zavirati, se kolo Q začne pospešeno vrteti v isto smer kot kolo P. Če povežemo kotno hitrost ω_P kolesa P s tokom I_1, kotno hitrost ω_Q kolesa Q s tokom I_2, imamo analogijo s povezanima električnima krogoma. Da je analogija popolna, se prepričamo, ko analiziramo gibanje delov tega modela.

Slika 4 ponazarja razmere v diferencialu. Levi zobnik (p) se vrti s kotno hitrostjo ω_p, desni (q) pa s kotno hitrostjo ω_q. Zobnik na vztrajniku (R) se je zato prisiljen kotaliti po zobnikih p in q s kotno hitrostjo

$$\omega_R = \frac{\omega_p + \omega_q}{2}.$$

Obodna hitrost zobnika r na stiku z zobnikom p je namreč enaka

$$v_{R_p} = \omega_p \varrho_p + \omega_3 \varrho_r,$$

kjer je z ω_3 označena kotna hitrost zobnika r okrog lastne geometrijske osi, ϱ_p je povprečni polmer zobnikov p ali q, ϱ_r pa povprečni polmer zobnika r. Obodna hitrost zobnika r na stiku z zobnikom q pa je

$$v_{R_q} = \omega_p \varrho_p + \omega_3 \varrho_r.$$

Ker je obodna hitrost v geometrijski osi zobnika r

$$v_{R_0} = \omega_R \varrho_p,$$

kar mora biti enako geometrijski sredini njegovih obodnih hitrosti, je ω_R res polovična vsota kotnih hitrosti ω_p in ω_q.

Sili F_p in F_q na stiku zobnikov p in q poskrbita za kroženje vztrajnika (R). Newtonov zakon za vrtenje povezuje navor, krožni pospešek in vztrajnostni moment vztrajnika takole:

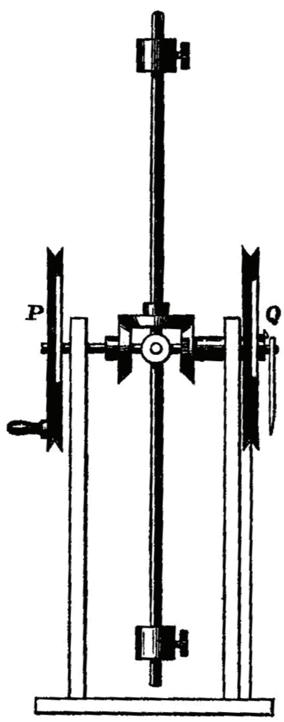
$$J\frac{d\omega_r}{dt} = F_p \varrho_p + F_q \varrho_p.$$

Vztrajnostne momente koles (P) in (Q) ter vztrajnostni moment vztrajnika okrog njegove geometrijske osi zanemarimo v primeri z vztrajnostnim momentom (J) vztrajnika okrog geometrijske osi koles. To pomeni, da je navor sile F_q na kolo (Q) enak zaviralnemu navoru M_e na to kolo in sta sili F_p in F_q enaki, ker morata biti vsota njunih navorov glede na geometrijsko os vztrajnika enaka nič. Torej imamo še pogoja

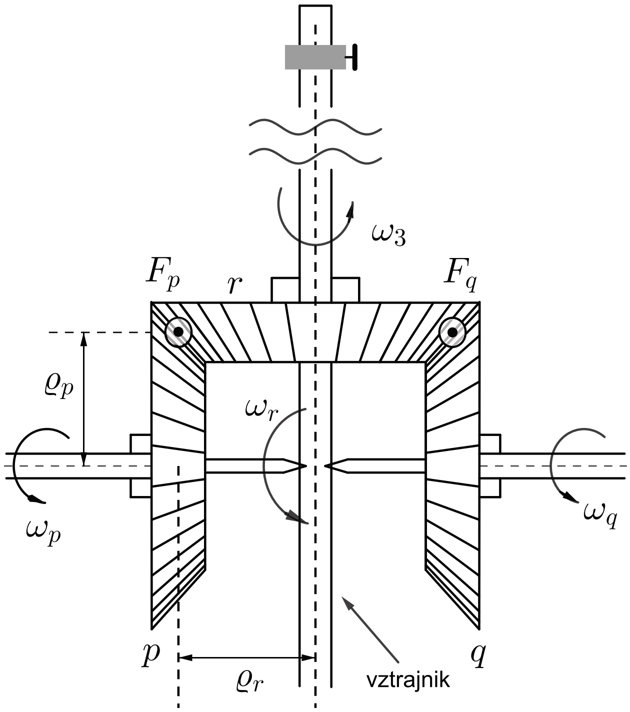
$$F_p = F_g,$$
$$F_q \varrho_p = M_e.$$

Zadnje tri enačbe pripeljejo do zveze:

$$\frac{d\omega_q}{dt} = \frac{4M_e}{J_R} - \frac{d\omega_p}{dt}.$$



SLIKA 3.
Maxwellov mehanični model, ki ponazarja indukcijo v električnih krogih. Slika je povzeta iz Maxwellove knjige *Treatise on Electricity and Magnetism*, ponatisnjene leta 1954.



SLIKA 4.
Skica diferenciala pri izpeljavi povezave med kotnima hitrostma ω_p in ω_q

Če za zaviralni navor M_e postavimo

- $M_e = -k\omega_q$,

se enačbi pri mehaničnem modelu in električnih krogih povsem ujemata. Analogija je torej popolna. Drugačno zaviranje kolesa Q to popolnost le neznatno pokvari.

Mehanični model je do te mere preprost, da ga lahko izdelamo sami. Prenosni zobniki pri modelu ne prenašajo velikih sil in s tem moči, zato so lahko plastični ali celo izdelani iz lesa. Na sliki 5 je tak model, ki smo ga izdelali v domači delavnici. Kolesi P in Q sta kvadratni, da bolje sledimo njunemu vrtenju. Kljub majhnosti in znatnemu trenju v zobnikih deluje dobro. Namesto izvedbe osi, okrog katere se vrti vztrajnik, smo vključili še en zobnik na nasprotni strani zobnika (r). Pri tem pa je potrebno poskrbeti, da se zobnika na vztrajniku lahko vrtita v nasprotnih smereh. Kolo Q zaviramo z lahnim pritiskom prsta nanj.

Diferencial, ki smo ga tu obravnavali, je sestavni del vsakega avtomobila. Pri našem modelu smo poganjali kolo P, pri avtomobilskem diferencialu pa motor poganja vztrajnik, ki nato moč prenese na kolesi P in Q. S tem je navor motorja na obe kolesi skoraj enak, čeprav se kolesi vrtita z nekoliko različnima kotnima hitrostma ω_P in ω_Q. Tak pogon omogoča gladko izpeljavo ovinkov, kjer se notranje kolo glede na ovinek vrti nekoliko počasneje kot zunanje.

SLIKA 5.
Model, izdelan v domači delavnici. Vtrajnik je dolg 22 cm.

× × ×

38. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja

↓↓↓
BARBARA ROVŠEK

→ Osnovnošolci so v šolskem letu 2017/2018 že 38-ič tekmovali v znanju fizike. Največ, 6771, se jih je udeležilo šolskega tekmovanja, 1492 področnega, samo 278 državnega tekmovanja in le 13 Bistroumov. Osvojili so 2582 bronastih, 1063 srebrnih in 96 zlatih Stefanovih priznanj ter šest nagrad (od tega štiri prve in dve drugi) in sedem pohval.

Državno tekmovanje je bilo v soboto 14. aprila 2018 na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter Osnovni šoli Frana Erjavca v Novi Gorici.

SLIKA 1.
Tekmovalka na državnem tekmovanju v Ljubljani v vodo v merilnem valju potaplja »sestavljeno telo« in meri rezultanto teže telesa in sile vzgona. (foto: Jan Šuntajs)

Z letošnjim letom smo pri DMFA Slovenije spremenili pravila pri podeljevanju nagrad. Nagrade smo prvič podelili na 22. tekmovanju (v šolskem letu 2001/2002), ko smo podelili po tri nagrade v vsakem razredu. Že pri naslednjem, 23. tekmovanju, smo število nagrad povečali in tako je ostalo do lanskega leta. Največkrat smo podelili sedem ali osem nagrad v vsakem razredu, najmanj pa pet in največ (daleč največ in izjemoma) 23 – na 25. tekmovanju v 8. razredu. Podeljevali smo eno ali več prvih, eno ali več drugih in eno ali več tretjih nagrad, pri čemer skupno število nagrajencev ni bilo formalno omejeno.

Z letošnjim tekmovanjem se vračamo za začetke, kar se nagrad tiče. Podeljujemo nagrade za prva tri mesta. Letos smo tako podelili po dve 1. nagradi v vsakem razredu, ker si tekmovalci na vrhu mesto delijo, in po eno 3. nagrado za 3. mesto. Dodatno lahko podelimo še pohvale, tako da skupno število nagrajenih in pohvaljenih v posameznem razredu ne presega števila sedem. Vsem nagrajencem, pohvaljencem in vsem, ki so osvojili zlata Stefanova priznanja, čestitamo.

Zanimivo je, da nihče od lanskih nagrajencev v 8. razredu letos ni osvojil niti zlatega priznanja, razen seveda prvouvrščenega lani in letos, Matije Likarja z OŠ bratov Polančičev Maribor, za kar njemu in njegovemu mentorju Mladenu Tancerju še posebej čestitamo.

V 8. razredu so naloge najbolje reševali:

8. RAZRED

1. nagrada

- MIHA BRVAR, OŠ Trnovo, Ljubljana, mentorica Nataša Klun;
- JAKOB GRMEK, OŠ Col, mentor Mitja Govedič.

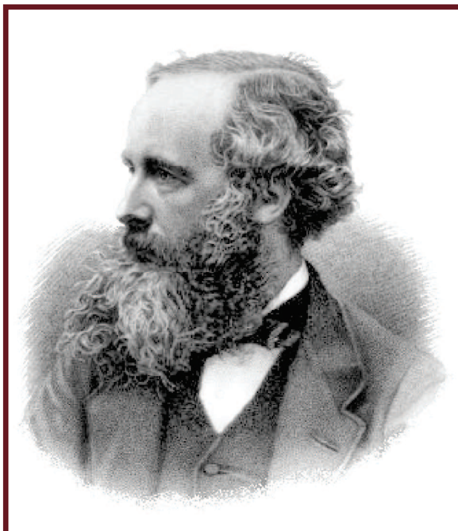
3. nagrada

- DOMEN KOZMUS, OŠ Lesično, mentorica Milena Grobelšek.

Pohvala

- ŽAN AMBROŽIČ, OŠ prof. dr. Josipa Plemlja, Bled, mentorica Helena Vojvoda;

Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ
NAJVIŠJI VOJAŠKI ČIN
STROKOVNJAK ZA GOSPODARSTVO
NIZOZ. SLIKARJA (ADRIAEN IN ISAAK VAN)
PEVKA SIRK
ZELENJADNICA JEDILNI OSLEZ
GREGOR URBAS
JAPONSKI SMUČARSKI SKAKALEC (DAIKI)
ALPSKI NAPEV ZA JODLANJE
MESTO OB ISTOIMEN. JEZERU V KAZAHSTANU

ZEMLJESLOVJE
1
IZVRŠITELJ SODNIH ODLOČB
PRAVNIŠKI POKLIC
SLAVILNA PESEM
VNETLJIVA TEKOČINA, TOLUEN
NEVTRAL ZA MNOŽENJE
VRHNJA DOMENA AVSTRIJE
ZNIŽANI TON E
ENAKA SOGLASNIKA
OBOK (LJUDSKO)
NAŠ KARDINAL (FRANC)
NOG. VRATAR OBLAK
VRSTA ŽITA
RAČUNAL. TOMOGRAFIJA

dMFA
ITALIJAN. DIRIGENT (CLAUDIO)
GLEDALIŠKI REŽISER ŽIVADINOV
NEKDANJI ROKOMETNI VRATAR PUŠNIK
DRŽAVA V ZAHODNI AFRIKI
AZIJSKI VELETOK
RAZPREDENOST, RAZRAŠČENOST
TOK ZA PUŠČICE
2
VRSTA TROBILA
ČAS, PO KATEREM NI VEČ DOVOLJEN IZHOD

JUDOIST GOMBOC
STRONCIJ
PASMA PSOV
REVOLUCIONARNA FRANCOSKA PESEM IN PLES
MOČEN KRAŠKI IZVIR
ROD DVOŽIVK
NEWYORŠKO OKROŽJE NA CELINI
NEKD. TELEVIZIJEC (ALEKS)
SVETOVNI NAZOR
ENAKA SAMOGLASNIKA
MIKAVNOST
NEMŠKI FIZIK (GEORG SIMON)
AMERIŠKI IGRALEC (ALEC)
3
VRHNJE OBLAČILO MUSLIMANK
MEDOVITA POLJŠČINA
BARABIJA
NAŠ PISATELJ (ALEŠ)
NEKDANJI TURŠKI VELIKAŠ
IME RUSJANOVIH LETAL
ODŽAGANI DEL DEBLA PRI VRHU
LIKOVNI UMETNIK
GRŠKI MATEMATIK IN FIZIK
NARAVNA ČASOVNA ENOTA
BELOKRVNOST
OBLIKA ZAPISA ŠTEVILA
BRAZILSKI PLES
PORTORIŠ. IGRALKA (RITA)
UMETNO KODRANJE LAS
HRVAŠKI LJUDSKI PLES
DEL KAMIONA
7
CITROENOV OLDTIMER
VRHNJA DOMENA LITVE
RAZVEDRILNA ALI ŠPORTNA DEJAVNOST PO DOLOČENIH PRAVILIH
PIVO ST. SLOVANOV
PRVOTNI (KELTSKI) BRITANEC
DEBEL, PLASTNAT PAPIR
ŽENSKO IME
STIČIŠČE ZUNANJIH STEN OBJEKTA
IVAN BRATKO
TRGANJE SADEŽEV
JADRANSKA KOŠARKARSKA LIGA
4
SOPRANISTKA ČERNE
FLORA
ENOTA ZA MOČ
PESEK ZA BETONIRANJE ALI NASIPANJE
NEKDANJI PREDSEDNIK ZDA (FRANKLIN)
NATRIJ
ŠTUDENT, KI OPUSTI ŠTUDIJ
ENAKA ŠUMEVCA
GOSPODINJSKA PRIPRAVA
EVROPSKA SKUPINA NARODOV
SVEČENIK, VRAČ
PUŠČAVSKA POKRAJINA V ČILU
GRŠKI BOG SMRTI
CEVAST ORGAN ZA PRETOK KRVI

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

USKLAJEVALKA DELA

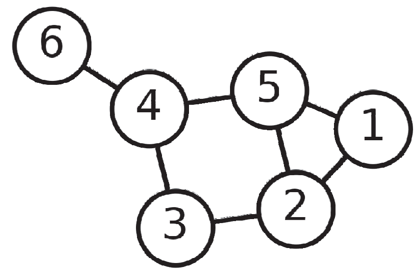
IZKORISTLJIVI DEL ENERGIJE

NATAŠA URBANČIČ

NITAST IZRASTEK NA KOŽI

LETOVIŠČE NA ITAL. RIVIERI

VNAPREJ PLAČAN ZNESEK, KI ZAVEZUJE K NAKUPU



AMERIŠKA TEKAČICA ČEZ OVIRE HARRISON

PRIOČESNO LEČJE OPTIČNE NAPRAVE

PREMICA, OKOLI KATERE SE TELO VRTI

AVS. TISK. AGENCIJA

TV VODITELJICA (DARJA)

DOMAČA OBLIKA IMENA TEREZIJA

KOLIČINA NAREJENEGA, IZLOŽEK

ORODJE ZA VEČANJE LUKENJ V LESU

KNJIŽNI IZRAZ ZA JAREM

PREVRETA TEKOČINA OD PRANJA

AVSTRIJ. RADIOTELEVIZIJA

ŠAHOVSKI KLUB

OČE AJANTA VELIKEGA V ILIADI

PROSTITUTKA, CIPA

DROG, KI POVEZUJE BAT Z ROČICO

NASELJE PRI ZADRU

NAŠA NEKDANJA DRŽAVA

5

ZGODNJE OBDOBJE ŽIVLJENJA

STARA GRČIJA

SPREMLJEVALEC MIKLAVŽA

GRŠKI BOG VOJNE

DROBNA ŽIVAL, KI LEZE

ISLAMSKI VERSKI GLAVAR

PROSTOR ZA SERVIRANJE HRANE

ANGLEŠKA ZAČETNICA PROGRAMIRANJA LOVELACE

HIŠICA NA VRTU

NEMŠKI PISATELJ (WILHELM)

ŽEPNI NOŽ

BELOKRANJSKA PREDIVNICA

LIST PAPIRJA

JAPONSKA MISELNA IGRA

POSAMEZNI GLAS SKLADBE

OSEBNI PRAZNIK

MNOŽINSKI OSEBNI ZAIMEK

OČE V MEŠČAN. OKOLJU, TATA

NERESNICA

DIVJE VESELJAČENJE

MESTO NA MORAVSKEM

6

STAROGRŠKI KIPAR

UREJEVALEC VRTOV

DELOVNA OBVEZA

FANT NA DESKI S KOLESCI

SRBSKI KOŠARKAR DIVAC

KRAJ POD ČRN. KALOM

VOJAŠKA ENOTA

PRIMORSKA REKA

BRITANSKI EKONOMIST (JAMES)

dMFA

POLOPICA Z VELIKIMI OČMI

ODPRT VAGON

PRITOK DRAVE V AVSTRIJI

LASTNOST JEDI

MESTO OB ISTOIMENSKEM JEZERU V ITALIJI

dMFA

SESTAVNI ELEMENT

PESNIK IN PISATELJ SVETINA

8

AZIJSKA DRŽAVA

SKRAJNI KONEC KOPNEGA

HINDUJSKA ZDRAVILSKA METODA

VELETRGOVEC Z BANANAMI (IZET)

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. decembra 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

- Samo Krejan, OŠ Danile Kumar, Ljubljana, mentorica Darja Oven;
- Tian Strmšek, OŠ Rače, mentorica Romana Šabeder.

V 9. razredu so nagrade in pohvale prejeli:

9. RAZRED

1. nagrada

- Matija Likar, OŠ bratov Polančičev Maribor, mentor Mladen Tancer;
- Juš Kocutar, OŠ Toneta Čufarja Maribor, mentor Marko Pongračič.

3. nagrada

- Anže Hočevar, OŠ Louisa Adamiča, Grosuplje, mentorica Margareta Obrovnik Hlačar.

Pohvala

- Rok Hladin, OŠ Šmarje pri Jelšah, mentorica Martina Petauer;
- Aljaž Sovič, OŠ Gorica, Velenje, mentor Zvonko Kramaršek;
- Blaž Čerenak, OŠ Griže, mentor Ivan Pišek;
- Katja Andolšek, OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica, mentorica Andreja Zdravič Bauer.

SLIKA 2. Osmošolci, nagrajeni na 38. tekmovanju v znanju fizike za Stefanova priznanja, na prireditvi Bistroumi 2018, ki je potekala v soboto 12. maja 2018 v Unionski dvorani Grand Hotela Union v Ljubljani, skupaj s podeljevalcema nagrad, prodekanom za sodelovanje z javnimi ustanovami Blažem Zmazkom in predsednico tekmovalne komisije Barbaro Rovšek. (foto: Jana Jocif)

SLIKA 3. Nagrajeni devetošolci (foto: Jana Jocif)

× × ×

Lunini mrki

Andrej Guštin

→ Letošnji popolni Lunin mrk je v javnosti vzbudil veliko pozornosti z glavnim poudarkom na rekordnem trajanju tega nebesnega pojava. Resnici na ljubo pa je bil ta mrk za javnost zanimiv predvsem zaradi tega, ker je bil viden v večernih urah in sredi poletja. Podoben mrk, ki bi nastopil v drugi polovici noči in sredi zime, bi pritegnil mnogo manj opazovalcev. Toda Lunini mrki so več kot le atrakcija.

SLIKA 1.
Montaža različnih faz Luninega mrka, ki je bil iz naših krajev viden 28. septembra 2015. (Foto: Andrej in Liza Guštin)

Pogostost Luninih mrkov

Od leta 2000 pr. n. št. do leta 3000 je bilo oziroma bo 7718 delnih in popolnih Luninih mrkov, še približno toliko pa je polsenčnih. V določenem letu so lahko do trije delni in popolni mrki. Polsenčni Lunini mrk pogosto ostanejo neopaženi, saj ploskvica Lune pri tem le neznatno »potemni«, česar s prostim očesom skoraj ni mogoče opaziti.

Obarvanost Lune med mrkom

Marsikoga preseneti dejstvo, da je tudi ob popolnem mrku Lunina ploskvica osvetljena. Še več. Obarvana je lahko v različnih barvah, od rumenkaste do temno rdeče. Večina mrkov pa je rdečkastih. Tudi svetlost Lunine ploskvice se od mrka do mrka razlikuje, spreminja se lahko tudi med samim mrkom. Senca tudi ni enakomerno svetla, temveč je na robu svetlejša kot v sredini, pogosto pa je v sredini bolj rdeča, ob robu pa oranžno-rumena. Vsem mrkom pa je skupna odsotnost modre svetlobe. Vsa ta dejstva kažejo, da Zemljina senca ni povsem temna. Razlog za to je prehod svetlobe Sonca skozi Zemljino ozračje.

Prvi učinek ozračja poznamo iz vsakdanjega življenja – modro nebo. Na molekulah v zraku pride do t. i. Rayleighovega sipana svetlobe Sonca, ki je najintenzivnejše za krajše valovne dolžine, torej za modro svetlobo. Ta pojav je kriv, da je nebo podnevi modro.

Druga posledica sipanja svetlobe v ozračju je ta, da so nebesna telesa videti bolj rdeča, kot so v resnici. Atmosferska pordečitev je tem bolj opazna, čim nižje je nebesno telo nad obzorjem. Razlog je mogoče enostavno razumeti. Ko je nebesno telo v zenitu, je pot njegove svetlobe skozi ozračje najkrajša in je sipanja manj kot v primeru, ko je nebesno telo →

nizko nad obzorjem. Nižje kot je nebesno telo nad obzorjem, daljša je pot njegove svetlobe skozi ozračje, kar pomeni, da je sipanja več. To je razlog, da je Sonce med vzhajanjem in zahajanjem videti oranžno-rdeče, saj mu je ozračje odvzelo veliko modre svetlobe.

Letošnji večerni Lunin mrk je spodbudil ljudi, da so začeli Luno opazovati že kak dan pred dogodkom. Marsikdo je opazil, da je tudi Luna nizko nad obzorjem rdečkasta, in je menil, da je mrk že nastopil. Na naslovnici je potrditev tega. Fotografija je bila sicer posneta v času delne faze Luninega mrka, a lepo je videti, da je svetli del Lunine ploskvice rdečkast. Ta obarvanost je posledica pordečitve Lune nizko nad obzorjem in ne rdeče svetlobe v Zemljini senci. Atmosferskih vzrokov za spreminjanje barve nebesnih teles je še več, npr. količina prašnatih delcev v ozračju, zračna vlaga.

Ozračje pa ima še en pomemben učinek na svetlobo nebesnih teles. Pri prehodu svetlobe skozi ozračje pride do loma svetlobe. Posledica tega je navidezna sprememba lege nebesnih teles. Višina nebesnih teles je zaradi tega večja, kot če ozračja ne bi bilo. V zenitu (pravokotni vpad svetlobe) loma ni, nižje, kot je nebesno telo nad obzorjem, bolj je ta učinek zaznaven. Na obzorju je lomni kot večji od pol stopinje. Pomislimo. Navidezni premer Sonca je približno pol stopinje. To pomeni, da, ko vidimo Sonce tik nad obzorjem, je to v resnici že vse pod obzorjem.

Sipanje in lom svetlobe v ozračju sta tudi glavna vzroka, ki dajeta barvo Luninim mrkom. V resnici je temeljita obravnava tega pojava zelo zapletena, zato bomo morali malo poenostaviti. Za svetlobo, ki pride v Zemljino senco, je pomemben predvsem tisti del svetlobe Sonca, ki gre nizko nad površjem Zemlje, torej svetloba, ki jo vidimo ob zahajanju Sonca. Ta je zaradi sipanja pordečena. Zato gre zaradi loma v ozračju v Zemljino senco predvsem svetloba daljših valovnih dolžin. Kolikšen delež posameznega spektralnega območja svetlobe pride v senco, je posledično odvisno od pogojev v ozračju na območjih, kjer takrat Sonce zahaja – oblačnost, prisotnost prašnatih delcev (pomembno obarvanost prispevajo tudi veliki izbruhi vulkanov) … Vse to so razlogi, da se Lunini mrki po obarvanosti in svetlosti med seboj lahko zelo razlikujejo.

Ocena barve – Danjonova lestvica

Enostavna vaja, ki jo lahko izvedemo med popolnim Luninim mrkom, je ocena obarvanosti in svetlosti Lunine ploskvice. Za to je v rabi Danjonova petstopenjska lestvica (po francoskem astronomu André-Louisu Danjonu, 1890–1967). Lestvica je sicer opisna in deloma subjektivna, a dovolj natančna, da lahko mrke med seboj ločimo in ocene primerjamo z drugimi opazovalci. Vrednost po Danjonu:

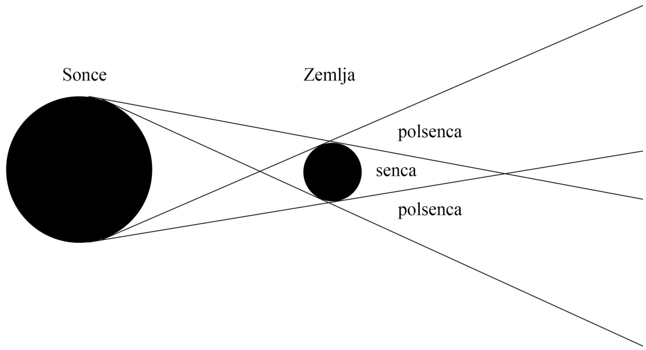
- 0 – zelo temen mrk. Lune skoraj ni videti, še posebej ob sredini mrka.
- 1 – temen mrk. Ploskvica Lune je sivkasta ali rjavkasta. Podrobnosti na njej so težko razločljive.
- 2 – temno rdeč mrk. Lunina ploskvica je rjaste barve. Sredina sence je znatno temnejša od njenega roba – rob Lune, ki je bližje sredini sence, je mnogo temnejši od roba Lune, ki je bližje robu sence.
- 3 – svetel mrk. Luna je obarvana opečnato-rdeče. Rob sence je rumenkast.
- 4 – zelo svetel mrk. Luna je obarvana bakreno-rdeče do oranžno. Rob sence je modrikast.

Lahka geometrijska naloga z Luninim mrkom

Brez večjih ovir lahko predpostavimo, da je Zemlja krogla. Ker je obsijana s Soncem, na nasprotni strani meče senco. Senca je stožčasta, ker Sončevi žarki niso vzporedni, saj je Sonce sorazmerno blizu Zemlje in je veliko. Z Zemlje Sončevo ploskvico vidimo pod kotom približno 1/2 stopinje. Obliko sence in polsence najlažje razumemo z enostavno sliko. Velikosti in oddaljenosti na sliki seveda niso v pravem razmerju, zato tudi dolžina sence in širina polsence niso.

Če bi bil v vesolju velik zaslon, ki bi stal za Zemljo pravokotno na zveznico med Soncem in Zemljo, bi na njem videli senco kot temnejši krog, okoli nje pa svetlejši kolobar – polsenco. V vesolju takega zaslona ni, občasno pa manjši zaslon, to je Luna, prečka polsenco in senco Zemlje. To je Lunin mrk, ki ga lahko izkoristimo za meritev premera Zemljine sence na oddaljenosti Luna-Zemlja.

Med delno fazo Luninega mrka, ko je del Lunine ploskvice v Zemljini senci, del pa v polsenci, je že s prostim očesom lepo vidno, da je lok sence manj



SLIKA 2.

SLIKA 3.
Foto: Andrej Guštin

ukrivljen, kot je rob Lune. Že iz tega lahko sklepamo, da je polmer Zemljine sence večji od polmera Lune. V določenem trenutku delne faze Luninega mrka pa lahko z osnovnim znanjem geometrije izmerimo oziroma izračunamo polmer Zemljine sence v polmerih Lune. To je takrat, ko je tetiva sence enaka premeru Lune.

Meritev lahko izvedemo med mrkom, lahko pa potek mrka fotografiramo oziroma posnamemo zaporedje fotografij in med njimi poiščemo tisto, ki zadošča zgornjemu pogoju.

Naloga

S fotografijo delne faze letošnjega Luninega mrka (slika 2) določi razmerje med polmerom Lune in Zemljine sence, kjer se je nahajala Luna. Oceni mersko napako.

Izrazi polmer sence v kilometrih. Za to moraš poznati polmer Lune.

Nadaljevanje naloge je težje.

Če poznamo polmera Zemlje in Lune ter oddaljenost Lune ob mrku, potem lahko iz ocene, ki jo dobimo v prvem delu naloge, določimo tudi astronomsko enoto. Poskusi!

Kdo je prvi poskusil na podoben način izraziti razmerja velikosti in oddaljenosti Sonca in Lune?

Kakšna je bila njegova »napačna« predpostavka o obliki Zemljine sence?

Prihodnji Lunini mrki

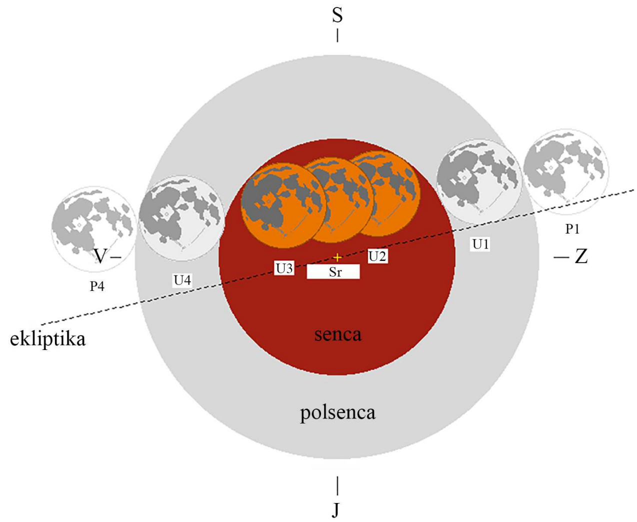
Tabela 1 prikazuje vse Lunine mrke v prihodnjih štirih letih. Očitno je, da so Lunini mrki pogostejši nebesni pojav, kot se nam zdi. Res pa je, da je večina mrkov polsenčnih; ti niso nikakršna atrakcija in minejo neopaženi. Več podatkov o mrkih najdete na spletni strani `www.mreclipse.com`, kjer smo tudi dobili grafične prikaze mrkov.

Podrobneje si bomo ogledali potek Luninih mrkov v prihodnjem letu. Na obeh slikah so označene smeri neba in začetki posameznih faz mrka po srednjeevropskem času, za drugi mrk pa v poletnem času (zaokrožene na minuto natančno):

- P1 – začetek vstopanja Lune v Zemljino polsenco (začetek polsenčne faze mrka)
- U1 – začetek vstopanja Lune v Zemljino polsenco (začetek delne faze mrka)
- U2 – začetek popolne faze mrka
- Sr – sredina mrka
- U3 – konec popolne faze mrka
- U4 – konec delne faze mrka
- P4 – izstop Lune iz Zemljine polsence (konec vseh faz mrka)

leto	datum	čas sredine mrka (UT)	vrsta	čas trajanja senčne faze/ popolne faze	območje vidnosti
2019	21. 1.	5.13.27	popolni	3 h 17 min/ 1 h 2 min	Tihi ocean, Amerika, Evropa, Afrika
2019	16. 7.	21.31.55	delni	2 h 58 min	Južna Amerika, Evropa, Afrika, Azija, Avstralija
2020	10. 1.	19.11.11	polsenčni	-	Evropa, Afrika, Azija, Avstralija
2020	5. 6.	19.26.14	polsenčni	-	Evropa, Afrika, Azija, Avstralija
2020	5. 7.	04.31.12	polsenčni	-	Amerika, jugozahodna Evropa, Afrika
2020	30. 11.	09.44.01	polsenčni	-	Azija, Avstralija, Tihi ocean, Amerika
2021	26. 5.	11.19.53	popolni	3 h 7 min/ 0 h 15 min	v. Azija, Avstralija, Tihi ocean, Amerika
2021	19. 11.	09.04.06	delni	3 h 28 min	Amerika, severna Evropa, v. Azija, Avstralija, Tihi ocean
2022	16. 5.	04.13.42	popolni	3 h 27 min/ 1 h 25 min	Amerika, Evropa, Afrika
2022	8. 11.	11.00.22	popolni	3 h 40 min/ 1 h 25 min	Azija, Avstralija, Tihi ocean, Amerika

TABELA 1.



SLIKA 4.

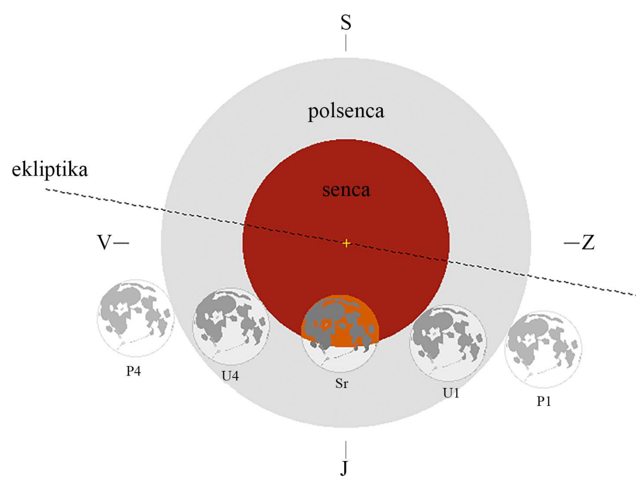
P1 – 3.37; U1 – 4.34; U2 – 5.41; U3 – 6.43; U4 – 7.51; P4 – 8.48

21. januar 2019 – popolni Lunin mrk

Na ta dan Luna v Sloveniji zahaja okoli 8.30, zato so vidne vse faze mrka razen izstopa Lune iz Zemljine polsence (slika 4).

16./17. julij 2019 – delni Lunin mrk

V Sloveniji so vidne vse faze mrka (slika 5).



SLIKA 5.

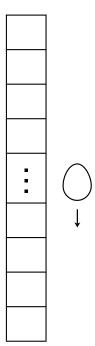
P1 – 20.44; U1 – 22.02; U4 – 1.00 (17. 7.); P4 – 2.18 (17. 7.)

Problem dveh jajc

Jure Slak

Problem dveh jajc je zanimiv miselni problem, ki po urbani legendi slovi kot eno izmed vprašanj iz intervjuja za službo pri velikih računalniških podjetjih, kot sta npr. Microsoft ali Google. To vprašanje se na intervjujih najverjetneje ne pojavlja več, saj je zaradi svoje rešitve pritegnilo preveč pozornosti in s spraševanjem ne bi dosegli tega, čemur je bilo prvotno namenjeno. Oglejmo si ta problem pobliže tudi mi.

Imamo stavbo s 100 nadstropji in dve jajci. Jajci sta enaki. Če ju spustimo iz nadstropja h ali kateregakoli nižjega nadstropja, se jajci ne razbijeta, če pa ju spustimo iz nadstropja $h + 1$ ali višjega, pa se razbijeta. Z najmanj koliko spusti jajc lahko z gotovostjo najdemo nadstropje h?



SLIKA 1.
Ilustracija problema dveh jajc.

Ilustracija problema je prikazana na sliki 1. Možne vrednosti za h so cela števila od 0 do 100. Vrednost 0 pomeni, da se jajce razbije že pri spustu iz prvega nadstropja, vrednost 100 pa, da tudi pri spustu iz stotega nadstropja še vedno ne bomo imeli izgovora za omleto.

Velikokrat pri reševanju problemov pomaga, če rešimo enostavnejšo različico problema. V našem primeru poenostavimo problem dveh jajc v problem enega jajca: zopet moramo najti tisto kritično nadstropje, pri katerem se jajce ravno še ne razbije.

Najenostavneje je, da testiramo nadstropja po vrsti: jajce spustimo iz prvega nadstropja; če se ne razbije, ga spustimo iz drugega in tako nadaljujemo, dokler se jajce ne razbije. Tako vemo, da je ravno nadstropje pod slednjim tisto, ki ga iščemo.

Toda, ali je to najboljši postopek? V najslabšem primeru bomo naleteli na zelo trdo jajce in bomo potrebovali kar 100 korakov, da lahko z gotovostjo trdimo, da se jajce nikoli ne razbije.

Poskusimo utemeljiti, da je predstavljeni postopek res najboljši. Ker imamo na voljo samo eno jajce, je našega poskušanja konec, čim se razbije. Če se naš postopek iskanja nadstropja h začne tako, da jajce spustimo iz drugega ali višjega nadstropja in se jajce razbije, ne moremo več ugotoviti, na katerem izmed nižjih nadstropij bi se jajce prvič razbilo. Sledi torej, da moramo spuščanje začeti v prvem nadstropju. Ko smo zagotovili, da je prvo nadstropje varno, pa imamo zopet enak problem, le da nam preostane še 99 nadstropij. Z enakim argumentom se prepričamo, da moramo nujno testirati drugo nadstropje in tako do vrha.

Problem enega jajca smo v celoti rešili: odgovor je 100, v najslabšem primeru moramo preveriti vsa nadstropja. To je bila ena skrajnost, druga pa je, da imamo na voljo neomejeno število jajc. V tem primeru je najboljša rešitev klasična in znana: poskusimo najprej vreči jajce iz petdesetega nadstropja; če se razbije, vemo, da je iskano nadstropje med prvimi petdesetimi, če pa ne, pa med zgornjimi petdesetimi. Preostanek nadstropij zopet razpolovimo, izberemo ugodnejšo polovico in ponavljamo. Razpolavljanje nadaljujemo, dokler z gotovostjo ne poznamo h. Ta postopek imenujemo *dvojiško iskanje* ali *bisekcija*.

Koliko spustov bomo potrebovali v najslabšem primeru? Oglejmo si primer za $h = 49$. Zaporedje testiranj bi bilo naslednje:

- $50, 25, 37, 43, 46, 48, 49.$

Ko se jajce tudi v 49. nadstropju ne bi razbilo, bi vedeli, da je to iskano nadstropje. Izkaže se, da je sedem testiranj tudi največ, kar jih lahko potrebujemo pri takem postopku. Če se odločamo med n možnostmi in število vsakič razpolovimo, nas torej zanima, kolikokrat moramo n možnosti razpoloviti, da bomo imeli manj kot eno preostalo možnost. Drugače povedano, iščemo najmanjši $k \in \mathbb{N}$, da velja

- $\frac{n}{2^k} \leq 1.$

Če enačbo preuredimo in logaritmiramo, dobimo

- $$n \leq 2^k,$$ $$\log_2 n \leq k.$$

Najmanjši naravni k, da zgornja neenačba velja, je $\lceil \log_2 n \rceil$. Oznaka $\lceil x \rceil$ označuje zaokroževanje navzgor.

V našem primeru imamo 101 možnost in potrebujemo največ

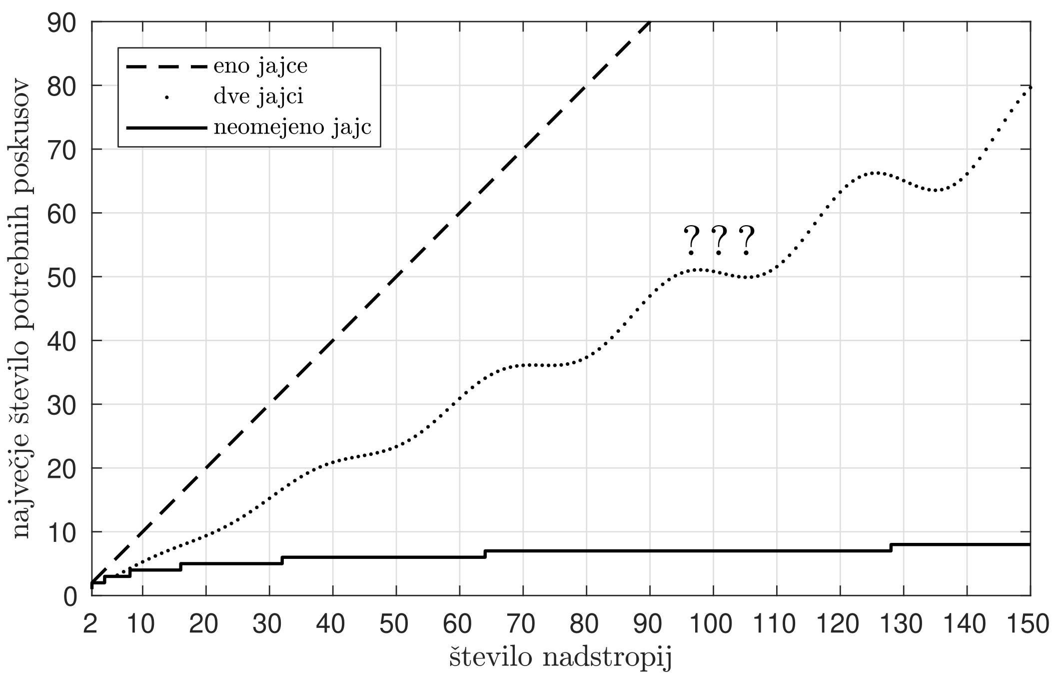
- $\lceil \log_2(7) \rceil = \lceil 6{,}6582\ldots \rceil = 7$

korakov.

Vprašajmo se še, koliko jajc potrebujemo v najslabšem primeru. Odgovor je podoben kot zgoraj: če se nam jajce vsakič razbije, se premaknemo nižje in vsakič potrebujemo novo jajce. Ne potrebujemo neomejenega števila jajc, temveč le sedem.

Pri reševanju problema dveh jajc smo rešili problem enega jajca in problem sedmih, osmih, devetih, ... jajc. Vemo le, da bo odgovor za problem dveh jajc nekje med 100 in sedem poskusov.

Kaj pa če imamo več ali manj kot 100 nadstropij? Slika 2 prikazuje, koliko poskusov potrebujemo za problem enega ali neomejeno število jajc.



SLIKA 2.
Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru za problem enega in neomejeno mnogo jajc pri različnem številu nadstropij. Rešitev za problem dveh jajc leži nekje vmes.

Glede problema dveh jajc vemo, da bomo gotovo potrebovali več ali enako poskusov kot z enim jajcem (drugo jajce lahko namreč ignoriramo in uporabimo enako rešitev kot pri enem jajcu) ter več ali enako poskusov kot pri neomejenem številu jajc. To ugibanje je predstavljeno na grafu s pikčasto krivuljo. Rešitev seveda ne bo taka; za 110 nadstropij seveda potrebujemo kvečjemu več poskusov kot za 100, torej mora biti rešitev naraščajoča funkcija števila nadstropij. Vijuge ponazarjajo, da nič ne vemo o *redu naraščanja* rešitve: ali bo linearen, kot pri enem jajcu (le morda z manjšim naklonom) ali pa bo logaritemski, kot rešitev za neomejeno jajc, ali pa nekje vmes?

Lotimo se sedaj problema dveh jajc. Najprej poskusimo različico dvojiškega iskanja. Prvo jajce vržemo s 50. nadstropja, podobno kot pri bisekciji. Če se ne razbije, nadaljujemo s 75. nadstropjem in tako naprej. Toda če se jajce pri 50. nadstropju razbije, imamo le še eno jajce, česar ni mogoče narediti bolje kot s 49 poskusi. Ali je to res najbolje, kar lahko naredimo?

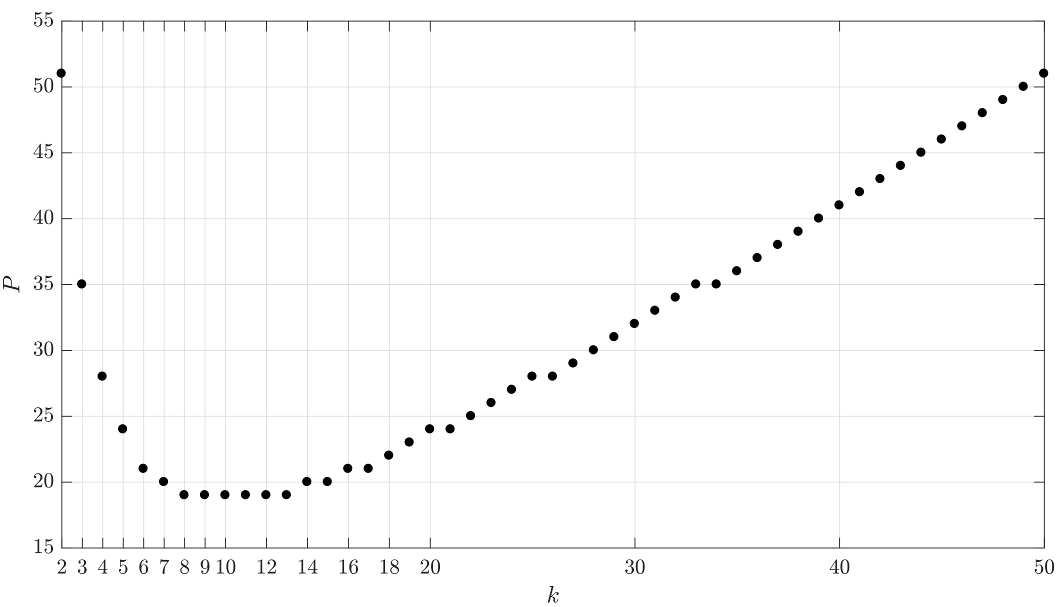
Na tem mestu naj povemo, da je mogoče problem rešiti precej bolje. Kaj če bi namesto tega, da s prvim jajcem razpolovimo prostor iskanja in ga pri tem morda žrtvujemo, prostor razdelili drugače? S prvim jajcem lahko testiramo vsako drugo nadstropje, npr. soda nadstropja. Ko se pri nekem nadstropju zalomi, z drugim jajcem ugotovimo, ali je iskano nadstropje trenutno ali spodnje. Kaj pa če namesto po dve nadstropji, skačemo po tri nadstropja? Potem bi s prvim jajcem na tri nadstropja natančno ugotovili, kje se nahaja nadstropje h. S preostalim jajcem nato ugotovimo, katero izmed teh treh nadstropij je h, tako da zopet poskušamo od spodaj navzgor. V tem primeru potrebujemo v najslabšem primeru $33 + 2 = 35$ poskusov. To je najboljši rezultat doslej, a pot naprej že vidimo. Kaj če s prvim jajcem skačemo po štiri, po pet, po šest nadstropij? Kaj je najbolje?

Namesto da preizkušamo različne možnosti, izračunajmo optimalno rešitev. Če imamo n nadstropij in s prvim jajcem skačemo po k, bomo uporabili največ $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ poskusov s prvim jajcem in največ $k-1$ poskusov z drugim jajcem. Najslabše možno skupno število poskusov označimo s P in torej enako

$$P = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + k.$$

Izbrati želimo tak k, da bo P čim manjši. Izračunajmo kar za vse možne k, rezultati tega izračuna so prikazani na sliki 3.

Razberemo lahko, da je optimalno število metov 19, dosežemo jih pri $k = 8, 9, 10, 11, 12$ in 13. Rezultat je pričakovan, želimo namreč čim manjšo vsoto dveh števil $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ in k, pri čemer je njun produkt kon-



SLIKA 3.
Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru v odvisnosti od velikosti skoka po nadstropjih k.

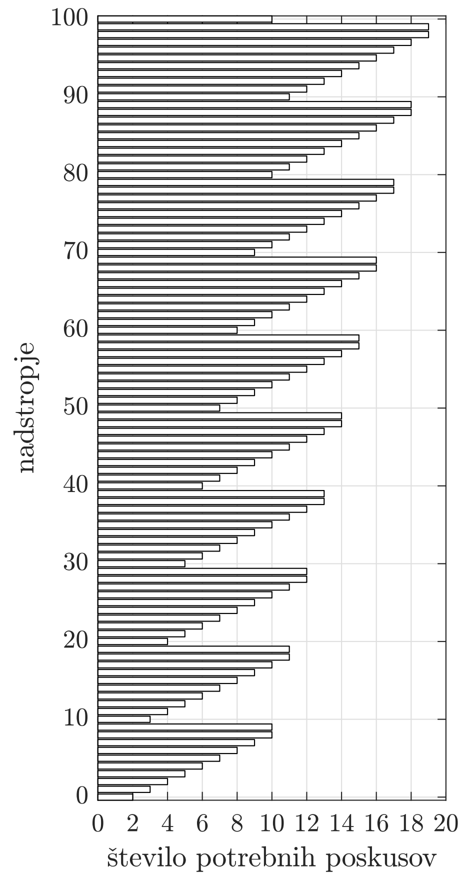
stanten. To je enako znanemu geometrijskemu problemu, kjer želimo čim manjši obseg pravokotnika z dano ploščino a – odgovor je seveda kvadrat s stranico $\sqrt{a}$.

Uporabljeno strategijo imenujemo tudi »strategija velik korak, majhen korak«. Pogosto jo uporabljamo pri reševanju problemov (problem diskretnega logaritma).

Toda 19 metov ni najboljša rešitev. Za n nadstropij potrebujemo približno $2\sqrt{n}$ metov, kar sicer izboljša tudi red rešitve, ampak rešitev ni optimalna. Če s prvim jajcem delamo različno velike korake, lahko pridemo do boljšega rezultata. To lahko vidimo, če razmislimo, koliko metov potrebujemo za vse možne vrednosti h. Če bi se jajce razbilo npr. v devetem nadstropju, bi to odkrili po desetih metih: najprej bi prvo jajce spustili iz desetega nadstropja, nato pa bi z preostalim jajcem preizkusili ostalih devet spodnjih nadstropij. Če pa bi bili jajci taki, da bi se razbili v 99. nadstropju, bi porabili deset metov s prvim jajcem in devet z drugim jajcem. Pri prvem primeru smo po enem metu morali rešiti še manjši problem velikosti devet, pri drugem primeru pa smo po desetih korakih prav tako morali rešiti problem velikosti devet. Število poskusov za vsako nadstropje je prikazano na sliki 4.

Glede na število poskusov so nadstropja jasno razdeljena v skupine po deset. Znotraj vsake skupine je najslabše, če moramo preverjati do devetega nadstropja znotraj skupine, glede na to, ali se v devetem nadstropju razbije ali ne. Vemo, ali je iskano nadstropje to ali pa eno višje (ki smo ga že preverili). Vendar, če gledamo skupine kot celote, opazimo: za spodnje skupine porabimo manj poskusov, kot za zgornje. Gotovo bi bilo bolje, če bi v vsaki skupini za najslabši primer porabili približno enako poskusov. Učeno rečemo, da uporabimo princip *minimiziranja maksimalnega obžalovanja*, kar je znan princip v teoriji odločitev in teoriji iger. Pogosto mu rečemo kar *minimaks*. Pravi, da se moramo odločiti tako, da bo naj najslabši primer čim manj slab. Uporabljamo ga tudi pri pisanju umetnih inteligenc za igranje iger, tudi v znanem alfa-beta algoritmu, s katerim lahko napišemo umetno inteligenco za igre tri v vrsto, šah ali go.

Najdimo rešitev problema dveh jajc, s tem da težimo k temu, da bo najslabši primer čim manjši. Zmanjšati želimo najslabši primer v zgornji skupini,



SLIKA 4.
Število potrebnih poskusov pri problemu dveh jajc pri strategiji, ko s prvim jajcem skačemo po deset nadstropij naenkrat.

na ta račun pa se bo povečal tisti v spodnji. Recimo, da s prvim jajcem začnemo testiranje v nadstropju ℓ. Če se jajce razbije, moramo preveriti še $\ell - 1$ nadstropij, skupaj smo porabili torej ℓ poskusov. Če se jajce ne razbije, se s prvim jajcem premaknemo v višje nadstropje. Toda katero? Premakniti se je smiselno v tisto nadstropje, če se jajce razbije, bomo v najslabšem primeru zopet imeli ℓ poskusov. Ker smo sedaj en met že porabili, se pomaknemo za $\ell - 1$ nadstropij navzgor. V najslabšem primeru za testiranje vsakega nadstropja do sedaj zopet porabimo ℓ korakov. Res, če se pri prvem metu jajce ne razbije, ga vržemo iz nadstropja $\ell + (\ell - 1)$. Če se sedaj razbije, vemo, da je kritično nadstropje h nekje med $\ell + 1$ in $2\ell - 1$. Preizkusiti moramo v najslabšem primeru $\ell - 2$ nadstropij, torej imamo skupaj ℓ poskusov, enako kot v prvi skupini. Če pa se prvo jajce tudi v drugem poskusu ne razbije, se premaknemo še višje. Ker smo sedaj porabili že dva poskusa, se premaknemo za toliko nadstropij, da bomo v najslabšem primeru zopet potrebovali ℓ poskusov, torej za $\ell - 2$ nadstropij. S strategijo nadaljujemo in se premikamo za $\ell - 3$, $\ell - 4$, … nadstropij, dokler se ne premaknemo le za eno. Edino preostalo vprašanje je, pri katerem ℓ začeti. Če bi začeli na $\ell = 10$ kot prej, ne bi niti prišli do 100. nadstropja. Pa zopet izračunajmo rešitev: zanima nas najmanjši ℓ, da bomo prišli do vrha stolpnice, torej, da bo veljalo

- $\ell + (\ell - 1) + (\ell - 2) + (\ell - 3) + \cdots + 3 + 2 + 1 \geq 100.$

Vsota na levi strani neenačbe predstavlja vsoto prvih ℓ naravnih števil, za katero poznamo direktno formulo, sešteje se v $\frac{\ell(\ell+1)}{2}$. Če preklopimo še na splošno število nadstropij n, dobimo neenačbo

- $\dfrac{\ell(\ell + 1)}{2} \geq n.$

To je kvadratna neenačba, ki jo enostavno rešimo in dobimo

- $\ell \geq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8n + 1} - 1\right).$

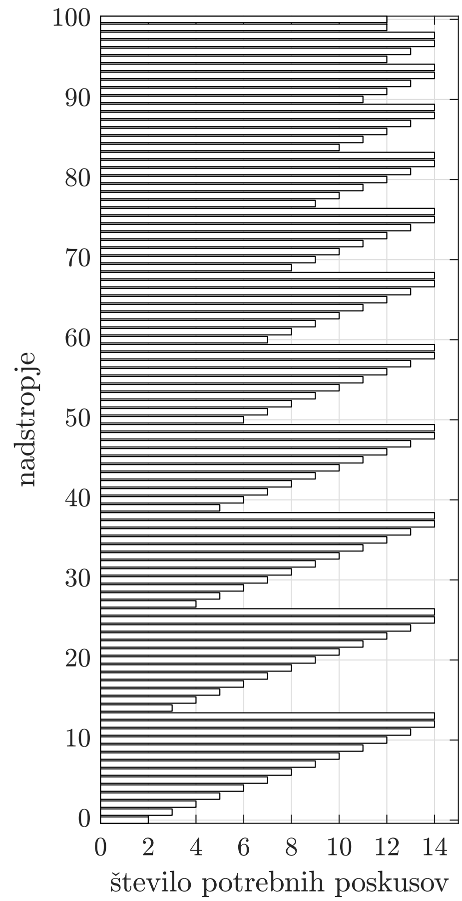
Ker je ℓ naravno število, moramo rezultat zaokrožiti navzgor, v primeru $n = 100$ dobimo

- $\ell = \left\lceil \dfrac{1}{2}(\sqrt{801} - 1) \right\rceil = \left\lceil \dfrac{28{,}302 - 1}{2} \right\rceil = \lceil 13{,}651 \rceil = 14.$

V tem primeru so nadstropja, s katerih mečemo prvo jajce, enaka:

- 14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100.

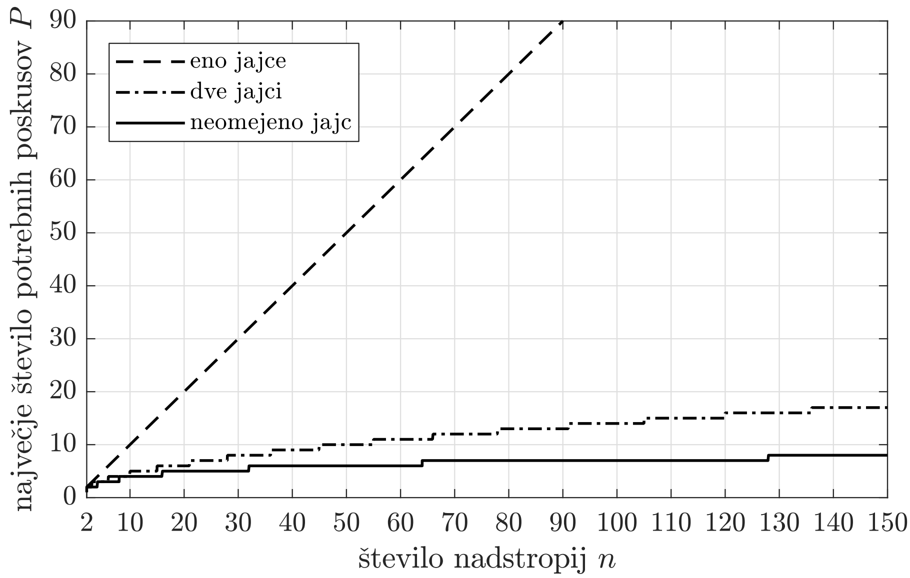
Ko se pri nekem nadstropju prvo jajce razbije, drugo jajce mečemo od prejšnjega testiranega nadstropja navzgor, dokler se ne razbije. Zadnje testirano nadstropje v zgornjem zaporedju je 100, kar je zato, ker ima stolpnica le 100 nadstropij; če bi jih imela več, bi bilo naslednje nadstropje 102. Bolj enakomerno razporejenost najslabših primerov lahko vidimo tudi na grafu na sliki 5, ki je podoben tistemu na sliki 4, le da so skupine bolj enakomerne.



SLIKA 5.
Število potrebnih poskusov pri problemu dveh jajc pri strategiji, ko s prvim jajcem skačemo po deset nadstropij naenkrat.

Je mogoče le s 13-imi meti? Odgovor je ne. Če bi ciljali na 13 metov, bi morali prvo jajce spustiti s 13. nadstropja, sicer bi lahko za spodnja nadstropja porabili več kot 13 metov v najslabšem primeru. Zato moramo naslednjega spustiti iz $13 + 12 = 25$. nadstropja in tako naprej, s čimer ne pridemo do vrha stolpnice. Odgovor na problem dveh jajc je torej, da potrebujemo 14 metov. Poglejmo si še, koliko metov potrebujemo za stolpnico z n nadstropji. Slika 6 zamenja našo krivuljo s pravilno formulo, da je število metov P enako

- $P = \left\lceil \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8n + 1} - 1\right) \right\rceil.$



SLIKA 6.
Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru za problem enega, dveh in neomejeno mnogo jajc pri različnem številu nadstropij.

Po pričakovanjih leži krivulja za dve jajci med problemom z enim in neomejenim številom jajc. Vidimo tudi, da si z dvema jajcema lahko pomagamo precej bolj kot z enim samim. Problem ima namreč korensko rast z n, kar je precej bolje od linearne.

Smo s tem zaključili nalogo in rešili problem? Matematično gledano ja, odgovor je 14. Pa vendar, je mogoče še bolje? Izkaže se, da je mogoče še bolje. Če uporabimo metanje prvega jajca z nadstropij

- $13, 25, 36, 46, 55, 64, 72, 79, 85, 90, 94, 97, 99, 100$

bomo še vedno imeli v najslabšem primeru 14 metov, v povprečnem pa 10,31, z razliko od povprečja 10,35 pri naši strategiji. Bralcu je prepuščena pot do te strategije.

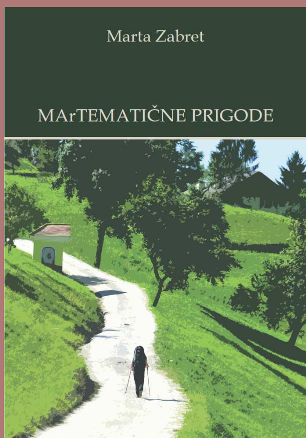
Kaj če imamo tri jajca ali pa štiri in 1000 nadstropij? Denimo, da imamo e jajc in n nadstropij, trenutno pa jajce spuščamo iz nadstropja ℓ. Zgodi se lahko eno izmed dvojega: jajce se razbije in ostane nam $e-1$ jajc in $\ell-1$ spodnjih nadstropij. Če pa se ne razbije, nam ostane $n-\ell$ nadstropij in e jajc. Oba problema sta manjša in ju lahko rešimo rekurzivno. Sedaj to preizkusimo za vse ℓ in vzamemo tistega, ki ima najmanjši maksimum obeh opcij, saj iščemo čim manj slab primer. Implementacija tega problema je zopet prepuščena v zabavo in izziv bralcu, spodaj pa je podana tabela pravilnih vrednosti za različne n in e.

	e									
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	6	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	7	4	3	3	3	3	3	3	3	3
8	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4
9	9	4	4	4	4	4	4	4	4	4
10	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4
15	15	5	5	4	4	4	4	4	4	4
20	20	6	5	5	5	5	5	5	5	5
25	25	7	5	5	5	5	5	5	5	5
30	30	8	6	5	5	5	5	5	5	5
35	35	8	6	6	6	6	6	6	6	6
40	40	9	6	6	6	6	6	6	6	6
45	45	9	7	6	6	6	6	6	6	6
50	50	10	7	6	6	6	6	6	6	6
100	100	14	9	8	7	7	7	7	7	7
200	200	20	11	9	8	8	8	8	8	8
300	300	24	13	10	9	9	9	9	9	9
400	400	28	14	11	10	9	9	9	9	9
500	500	32	15	11	10	10	9	9	9	9
1000	1000	45	19	13	11	11	11	10	10	10

SLIKA 7.
Rezultat problema e jajc za n nadstropij

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode.* Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

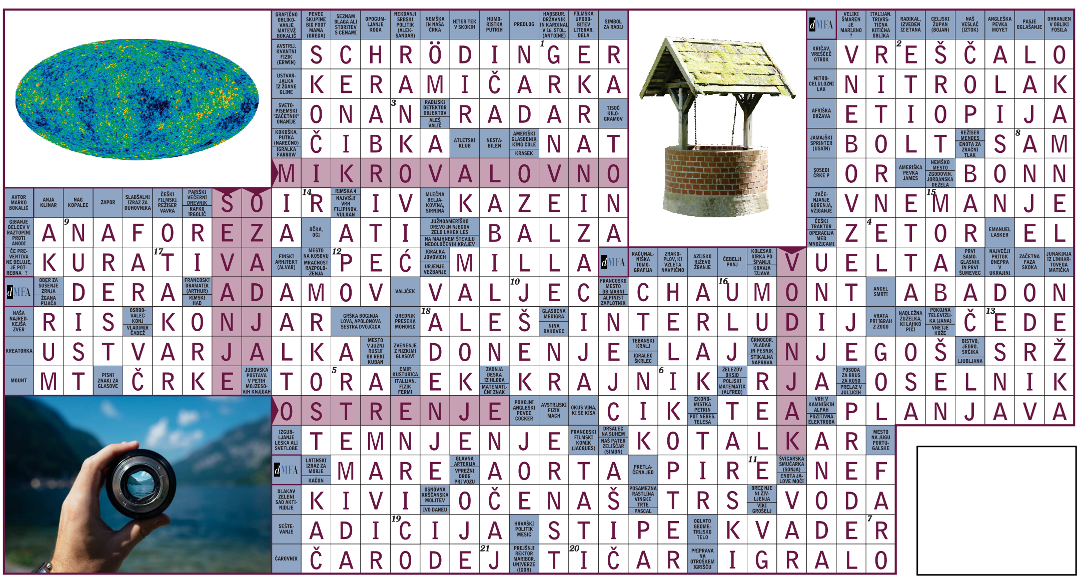
Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 46/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Generiranje permutacij.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Katarina Ančimer Aljaž iz Kranja, Ožbej Verhnjak iz Dravograda in Marko Kubale iz Rogaške Slatine, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Nekaj o krasni poletni šoli v Plemljevi vili na Bledu

Vid Kavčič

Kot že nekaj let je tudi letos potekala štiridnevna poletna šola v Plemljevi vili na Bledu za najuspešnejše devetošolce na področjih matematike, fizike in astronomije. Povabljeni smo bili vsi tisti devetošolci, ki smo na tekmovanjih iz matematike, fizike, astronomije ali razvedrilne matematike dosegli nagrado ali pohvalo.

Edinstveno doživetje smo pričeli v nedeljo, 10. 6. 2018, ko smo se popoldne zbrali v Plemljevi vili. No, na kupu smo bili vendar najboljši matematiki, fiziki in astronomi, rojeni leta 2003, zato gotovo ni čudno, da smo poletno šolo začeli z malo nerodno tišino ali mogoče tihimi, kratkimi in skopimi odgovori. Zato so bile spoznavne dejavnosti, s katerimi smo šolo začeli, nujne in dobrodošle.

Zvečer je sledilo krajše predavanje dr. Boštjana Kuzmana. Računali smo, koliko zbirateljskih nalepk povprečno moramo kupiti, da napolnimo album s 100 različnimi nalepkami. Navdihujoče, super za začetek. Z nekaterimi smo se že isti večer malo bolj zbližali in kar velik del ne samo večera preživeli ob raznih razpravah o šoli, matematiki, fiziki, astronomiji ... Te so mi od vsega najbolj ostale v spominu.

Naslednji dan, v ponedeljek zjutraj, smo se po zajtrku po skupinah zabavali ob iskanju strategij pri raznih kombinatoričnih igrah, ki sta jih za nas pripravili Nežka Rugelj in Katarina Vidmar. Ti sta nas od nedelje pa do srede spremljali na skoraj vsakem koraku. Popoldne je bilo obarvano s fiziko; najprej smo z dr. Barbaro Rovšek računali navore in se pogovarjali ter omenili pisano paleto primerov vzvodov v človeškem telesu. A prav gotovo ni bila tako pisana, kot je bila pisana mavrica, o kateri nam je predavanje pripravil dr. Jure Bajc. V ponedeljkovem popoldnevu smo tudi zaplavali v Blejskem jezeru, ki je bilo ravno prav sveže. Zvečer smo z zanimanjem poslušali predavanje dr. Uroša Kuzmana z naslovom Skoraj očitno. Večer je bil spet poln pogovorov in za druženja.

V torek smo se v dopoldnevu odpravili na drugo stran Blejskega jezera. Pred kopanjem smo odigrali tudi odbojko na mivki in naivno bi bilo misliti, da ni bilo napeto! Na plaži smo po kopanju v nameri, da nam ne bi bilo dolgčas, reševali zanimive matematične probleme. V tistem popoldnevu smo bili deležni astronomskega predavanja dr. Davida Kraljića o življenju zvezd, z Boštjanom Kuzmanom pa smo se pogovarjali o grafih in drevesih ter lep čas porabili za raziskovanje le-teh.

Zvečer smo imeli še kviz; to pa je bila zabava. Malo napetosti, živčnosti, seveda sodelovanja ... Na koncu pa je zmagovalna – naša – ekipa prejela nagrado: čokoladne bananice, ki smo jih prijazno delili z drugimi skupinami. Sledil je vnovič zanimiv družabni večer.

V sredinem dopoldnevu smo nadaljevali raziskovanje o drevesih. Po treh dneh je bilo vzdušje veliko manj tiho kot na začetku. Po kosilu smo počasi zapustili rojstni kraj matematika, fizika in astronoma Josipa Plemlja.

Seveda pa ne gre pozabiti omeniti nadvse odlične prehrane. Zajtrk smo si v vili pripravljali sami, na kosilo in večerjo pa smo hodili v bližnjo restavracijo. Hrana je bila, še enkrat, vrhunska!

Teh nekaj dni gotovo ne bi mogel preživeti bolje. Na kup so spravili takšne ljudi, kot sem jaz; takšne, ki jih ta grozna matematika, ki uničuje življenja, zanima, in so pripravljeni svoj prosti čas posvetiti pogovorom o lepotah matematike, fizike in astronomije. Take, ki jim matematika, fizika ali astronomija življenje popestri. Z nekaterimi udeleženci poletne šole sem tudi navezal stike. Krasna izkušnja – z gotovostjo lahko trdim, da mi bo ta poletna šola kot prijeten spomin večkrat polepšala dan.

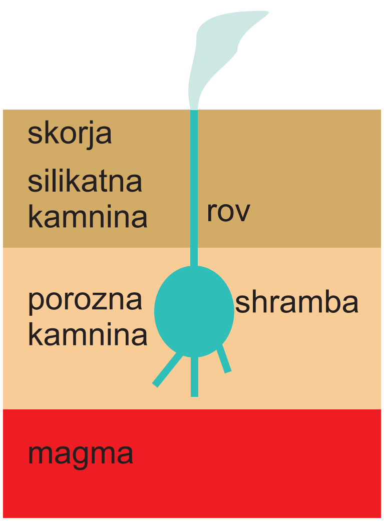
× × ×

Gejzir

Aleš Mohorič

Gejzir je termalni vir vroče vode in pare. Zanj je značilno, da ne bruha vode neprekinjeno ampak v časovnih intervalih, ki so lahko redni ali naključni, odvisno od sestave tal.

Gejzirji se nahajajo na območjih povečane vulkanske aktivnosti, kot je npr. Islandija, kjer vroča magma Zemljine sredice sega blizu površja. Skorja mora imeti plast kamnine, ki prenese visok tlak, ter sistem rovov in votlin, v katerih se nabira in pretaka voda. V podzemne rove in votline pronica ohlajena površinska voda. Voda se na globini do par kilometrov segreva v vroči kamnini. Zaradi visokega hidrostatičnega tlaka na veliki globini se voda lahko pregreje visoko nad vrelišče vode na površju. Zaradi stalnega gretja, voda v podzemni shrambi začenja vreti in tlak v shrambi se povečuje. To je možno zato, ker so stene rova, ki vodi do shrambe, neprepustno zatesnjene s kremenovo sigo, gejziritom. Ko je tlak v shrambi dovolj velik, potisne vodo skozi rov na površje. Na poti proti površju se tlak vode zmanjša, voda zavre in para izbruhne skupaj z vodo iz rova. Ob tem se tlak v shrambi zmanjša in curek pare in vode presahne. Zgodba se nato ponovi, ko tlak v shrambi spet dovolj naraste. Model gejzirja lahko naredite tudi sami [1].



SLIKA 1.

Literatura

[1] S. Lasič, *Geyser model with real-time data collection*, European journal of physics, 2006, 27, 995–1005.

SLIKA 2.
Islandski gejzir Strokkur bruha dokaj redno in je med bolj znanimi svetovnimi gejzirji. Foto: Tina Pavlin

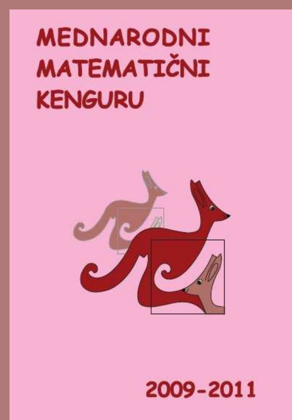
NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Matematični kenguru

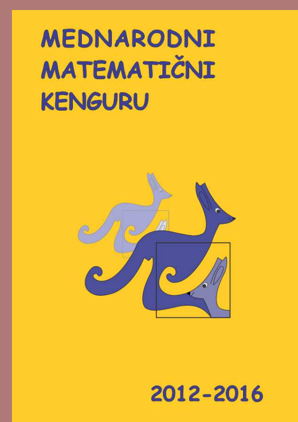
Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!