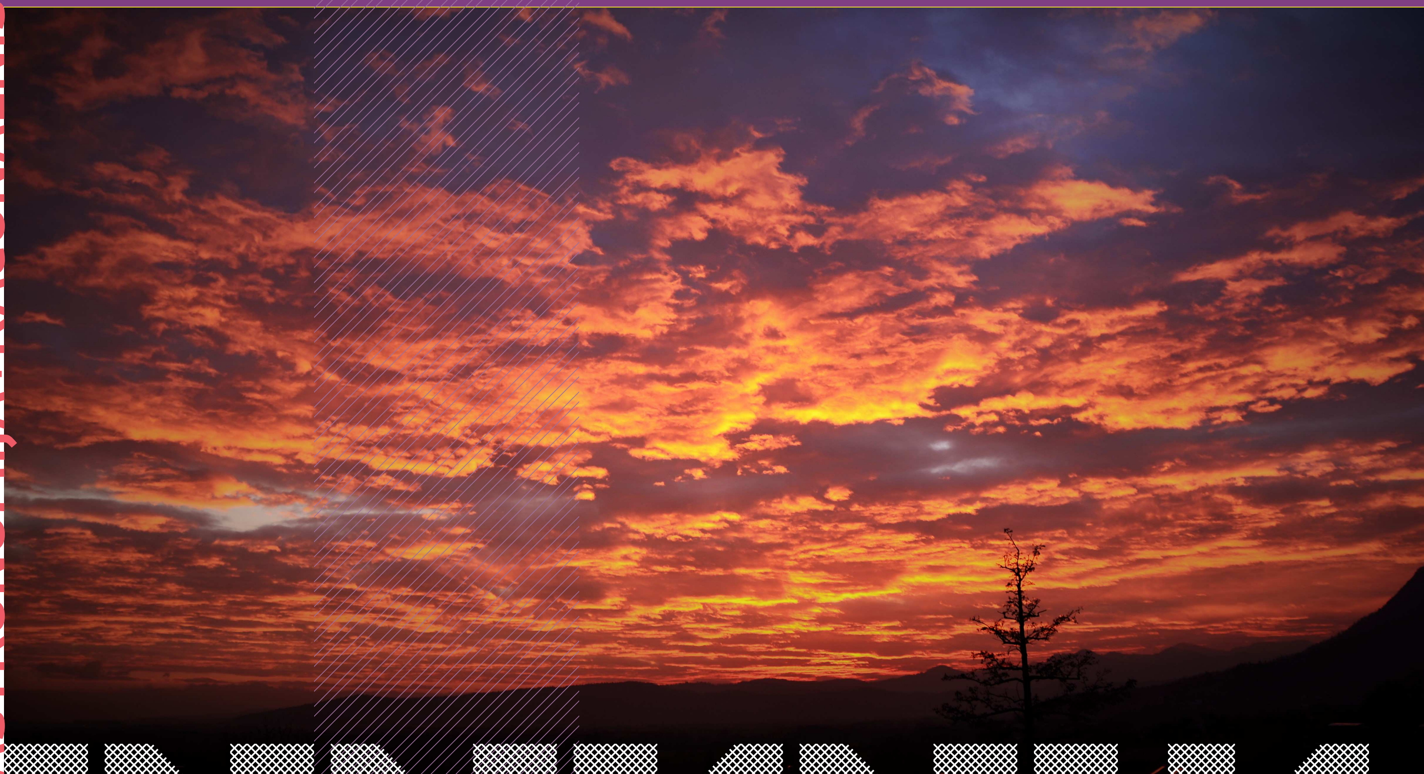
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

5

PRESEK LETNIK 43 (2015/2016) ŠTEVILKA 5



PRESEK

→ MARS 2015

→ LEVITACIJA OZIROMA LEBDENJE PO FIZIKALNO

→ PORAZDELITEV ZVEZDNIH KOPIC V GALAKSIJI

→ PROCEDURALNO GENERIRANJE TERENA S PRELOMNIM ALGORITMOM

ISSN 0351-6652

MATEMATIČNI TRENUTKI

Določanje višine varščine

Pravica pogosto ni popolnoma enaka za vse. Ko, denimo, sodnik določa višino varščine, na njegovo odločitev pogosto vplivajo dejavniki, kot sta dohodek obtoženca in njegova nacionalnost, manj pa, denimo, verjetnost, da bo obtoženec kaznivo dejanje ponovil ali da bo pobegnil. S pomočjo statističnega orodja, ki mu pravimo regresijska analiza, so znanstveniki proučili skoraj milijon primerov in tako omogočili objektivno predvidevanje obtoženčevega vedenja po izpustu na podlagi plačila varščine. Te pokazatelje so vključili tudi v algoritem, ki objektivno in učinkovito pomaga sodnikom pri odločitvi; algoritem namreč pomaga predvideti, kateri obtoženec bo verjetno pobegnil, kateri ponovno kršil zakon.

Algoritem seveda ne bo nadomestil sodnikov, lahko pa jim pomaga pri določitvi višine varščine. Med polletnim preizkusom je ena od ameriških držav tako hkrati zmanjšala število zaprtih oseb, ki čakajo na sojenje, in število kriminalnih dejanj, ki so jih storili na podlagi varščine izpuščeni zaporniki. Takšni pozitivni rezultati so znižali tudi število potrebnih zaslišanj. Trenutno sistem preizkušajo tudi v drugih državah. Podobne matematične pristope, ki slonijo na obravnavi ogromne baze podatkov, uporabljajo tudi pri drugih pravnih postopkih, npr. pri identificiranju očividcev, pri zbiranju forenzičnega materiala in pri policijski obravnavi sosesk. Pravica ni slepa in mora svoje odločitve sprejemati z odprtimi očmi.

Kogar tema bolj zanima, naj si prebere članek Shaile Dewan, ki je izšel v New York Timesu 28. junija 2015.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 5

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Na naslovnici je večerna zarja. Zarja nastane po sončnem zahodu ali pa pred njegovim vzhodom. Za zarjo so značilni odtenki rdečkaste in oranžne svetlobe. Večerna zarja je običajno znanilka lepega vremena, saj pomeni, da se za zahodnim obzorjem, od koder običajno prihaja vreme, skriva območje jasnine s čistim zrakom. Zarja je posebej izrazita, če nebo nad nami prekriva visoka plast oblakov, od katerih se rdeča svetloba zahajajočega Sonca dodatno odbija. (Foto: Tina Ogrinc)

MaRS 2015

Vesna Iršič

Letos je potekal že jubilejni deseti tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Marsovci smo se od 16. do 22. avgusta zbrali v Rakovem Škocjanu, natančneje v Centru šolskih in obšolskih dejavnosti Rak. Tabora se je udeležilo 22 dijakov in dijakinj iz vse Slovenije, za uspešno odpravo pa je poskrbelo deset članov posadke: David Gajser, Rok Gregorič, Vesna Iršič, Vid Kocijan, Anja Petković, Nejc Rosenstein, Matej Roškarič, Živa Urbančič, Jana Vidrih in Neža Žager Korenjak, v oporo pa nam je bil tudi dr. Boštjan Kuzman.

Tako kot vsa leta doslej je bila osrednja marsovska dejavnost priprava projektov. Člani posadke smo pripravili osem različnih matematičnih tem, ki so jih udeleženci raziskovali v skupinah po dva ali tri. Vsak dan smo kar nekaj ur namenili delu na svojem projektu. Da so udeleženci lahko problem uspešno rešili, so morali spoznati nekaj novih matematičnih znanj, nato pa napisati krajši članek ali sestaviti video predstavitev ter morebitno računalniško aplikacijo. Na zaključni prireditvi tabora (t. i. pristanku) pa so udeleženci tabora tudi svojim staršem in drugim obiskovalcem pokazali, kaj so na Marsu raziskovali. Letos so se dijaki pri projektih ukvarjali s heksafleksagoni, Taylorjevo vrsto, Abel-Ruffinijevim izrekom, igro Nim, Banachovim skrčitvenim načelom, problemi na okrogli biljardni mizi, urejevalno razdaljo in problemom umetnostne galerije.

SLIKA 1.
Skupinska slika vseh udeležencev in posadke MaRS 2015.

SLIKA 2.
Posadka na letošnjem MaRS-u. Od desne proti levi: Anja, Rok, Neža, Živa, Matej, Jana, Vesna, Nejc, David, Vid.

Nadebudneže vabimo, da se tudi sami spoprimejo z nekaj preprostejšimi problemi, ki so bili del marsovskih projektov. Ideje za reševanje lahko najdete pod zavihkom »projekti« na spletni strani `mars.dmfa.si`, kjer so povezave do člankov oz. video predstavitev posameznega projekta.

Problem 1. Nim je igra za dva igralca, ki si izmenjujeta poteze. Na začetku je na treh kupih zloženih nekaj kamenčkov: na prvem kupu je pet kamenčkov,

SLIKA 3.
Janina skupina pri pripravi svojega projekta.

SLIKA 4.
Vsaka projektna skupina pripravi tudi fotografijo, povezano s temo njihovega projekta. Na sliki vidimo Vidovo skupino pri igranju igre Nim.

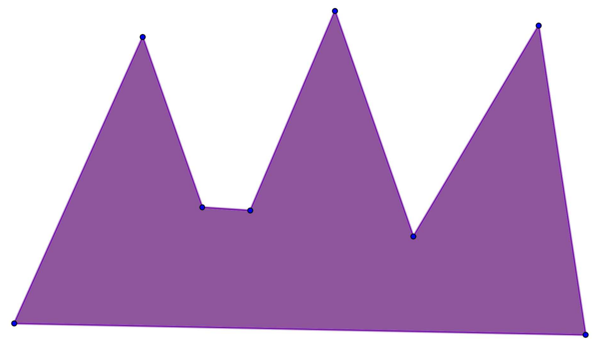
na drugem štirje, na tretjem pa trije. Igralec na potezi odstrani enega ali več kamenčkov s kupa. Zmaga igralec, ki odstrani zadnji kamenček.

Ali lahko prvi igralec zmeraj zmaga (ne glede na poteze drugega igralca)? Nasvet: odigraj nekaj iger s prijateljem!

Ko rešiš nalogo, poskusi še s kupčki velikosti (7, 5, 2) ali (17, 15, 12).

Problem 2. Na okrogli biljardni mizi se nahaja ena biljardna krogla. Kako naj jo sunemo, da se po dveh odbojih od roba mize krogla vrne na svoje izhodišče?

Problem 3. Na sliki 5 je tloris umetnostne galerije. Želimo jo zavarovati pred tatovi. Vanjo namestimo paznike tako, da bodo lahko nadzorovali vsako točko galerije. Pazniki vidijo 360° okoli sebe in neomejeno daleč, vendar ne vidijo skozi zidove in so stacionarni – stojijo na mestu, ne morejo hoditi po prostoru. Da bi bili bolj ekonomični, bi radi najeli najmanjše število paznikov, ki bo pokrilo vsako točko galerije. Koliko jih torej potrebujemo in kam naj jih postavimo?



SLIKA 5.
Tloris umetnostne galerije za problem 3.

Tipičen marsovski dan se je kot običajno začel z zajtrkom, zaspani Marsovci pa smo se dokončno prebudili šele pri jutranji telovadbi. Prepustili smo se spominom iz otroštva in odigrali nekaj iger (med dvema ognjema, kdo se boji črnega moža). Dopoldnevi prvih dni tabora so bili namenjeni različnim delavnicam. Prve tri dni nas je na MaRS-u obiskoval dr. Zlatan Magajna, ki je za dijake izvedel delavnico z naslovom Popotovanje po trikotniku. Na delavnici smo spoznali znamenite točke trikotnika in pomembne izreke elementarne geometrije. Predavatelj je predstavil tudi svoj avtorski program OK Geometry, s pomočjo katerega smo odkrivali lastnosti posameznih konstrukcij in se učili dokazovanja trditev. Več o programu najdete pod zavihkom »OK Geometry« na spletni strani `z-maga.si`. Če vam je všeč geometrija, lahko rešite tudi naslednji problem.

→

Problem 4. V štirikotniku $ABCD$ označimo razpolovišča njegovih stranic zaporedoma z $EFGH$. Pokaži, da je štirikotnik $EFGH$ paralelogram in da je njegova ploščina enaka polovici ploščine štirikotnika $ABCD$.

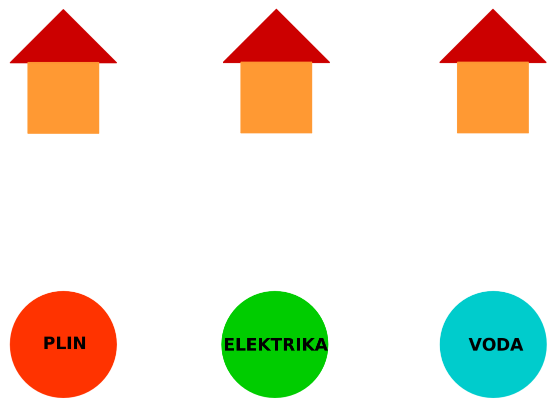
Mentorji so dijakom predstavili urejevalnik besedil LaTeX, program GeoGebra in tudi nekaj osnov retorike, ki so dijakom pomagale pri predstavitvah projektov staršem, profesorjem in prijateljem na pristanku.

MaRS je obiskalo tudi pet vabljenih predavateljev – ddr. Melita Hajdinjak, dr. Marko Jakovac, dr. Barbara Drinovec Drnovšek, dr. Anton Suhadolc in dr. Boštjan Kuzman, ki so nas popeljali v različne svetove matematike in nam popestrili večere. Izvedeli smo nekaj o komunikaciji med ljudmi in stroji, o zanimivih problemih teorije grafov, pravilnem (in napačnem) pristopu pri računanju dolžine in površine, pa tudi o pomembnih slovenskih matematikih in ključnih dogodkih v zgodovini MaRS-a. Na predavanjih smo se srečali tudi z naslednjim problemom:

Problem 5. Tri nove stanovanjske hiše je potrebno povezati z električno, plinsko in vodovodno postajo. Vse povezave potekajo na enaki globini pod zemljo in se ne smejo križati ali dotikati. Prav tako ne moremo povleči povezave skozi eno izmed hiš ali pod njo. Ali lahko ustrezno napeljemo vse povezave? Kako/zakaj ne?

SLIKA 6.
Delavnica o geometriji trikotnika pod vodstvom dr. Zlatana Magajne.

SLIKA 7.
Večerno predavanje dr. Antona Suhadolca.



SLIKA 8.
Slika k problemu 5.

Vsak dan je Živa pripravila uganko dneva, s katero smo se lahko spopadali v prostem času. Nadebudni Marsovci so letos večino ugank rešili še pred kosilom, nekatere pa celo že med zajtrkom. Tudi vi lahko poskusite razrešiti katero izmed njih.

Problem 6. Mizar ima kocko s stranicami dolžine 3 cm. Iz nje želi narediti 27 kock s stranicami dolžine 1 cm. To zlahka naredi s šestimi rezi, pri čemer odrezanih kosov po rezu ne premika. Ali lahko zmanjša število potrebnih rezov, če kose po vsakem rezu prerazporedi?

Problem 7. Šahovskemu polju (8×8) odrežemo zgornje levo in spodnje desno polje. Ali lahko preostalih 62 polj prekrijemo z 31-imi dominami?

Člani posadke smo poskrbeli, da naporno delo Marsovcev ne bi preveč izčrpalo. Nekajkrat smo se popoldne sprostili ob skupinskih družabnih igrah, nekateri pa tudi ob igranju košarke. Poleg tega smo se podali na pohod po naravoslovni učni poti Rakov Škocjan. Cilj pohoda je bil mali naravni most, ki nas je s svojo lepoto povsem očaral. Dovolj pogumni smo se spustili tudi pod njega in pomahali ostalim Marsovcem, ki so nas počakali zgoraj. Poleg tega je bil vsak dan po večernem predavanju družabni večer, ki se je ponavadi zavlekel pozno v noč. Marsovci smo se pomerili v že tradicionalni mafiji, ki jo je kasneje izrinila igra Werewolves, taroku, množičnemu grajenju železnic v igri Zug um Zug in zdravljenju epidemij v Pandemicu.

Zadnji popoldan je potekala Velika marsovska avantura, tj. orientacijski pohod z bolj ali manj matematičnimi nalogami na kontrolnih točkah. Na avanturi se nam je pridružilo tudi nekaj nekdanjih Marsovcev, tako da je na njej skupaj sodelovalo kar 10 skupin. Tudi sami se lahko spoprimete z nekaj problemi.

Problem 8. Janez in Lojzka sta zelo družabna in rada vabita prijatelje v svoj dom. Nekega večera povabita k sebi še štiri pare. Med druženjem na zabavi se med seboj pozdravljajo. Partnerja se med seboj nikoli ne pozdravita, saj sta vendar skupaj prišla. Po zabavi Lojzka vse ostale vpraša, koliko ljudi so pozdravili, in vsak ji odgovori drugače. Koliko ljudi je pozdravil Janez? Koliko jih je pozdravila Lojzka?

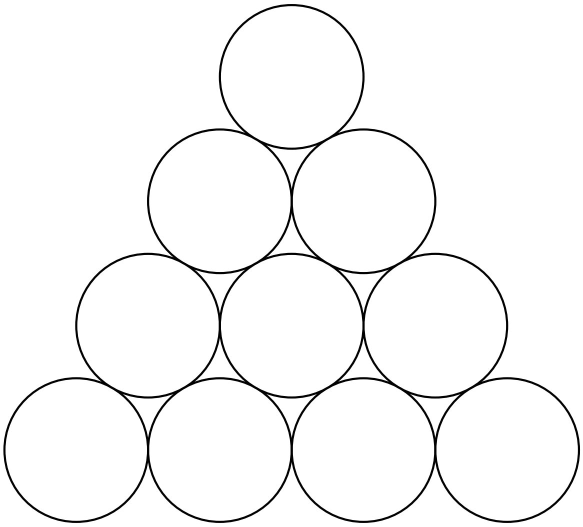
SLIKA 9.
Odpravili smo se na pohod po Rakovem Škocjanu.

SLIKA 10.
S pomočjo vrvi smo sestavili živi labirint.

Problem 9. Ali lahko štiri enake krogle postavite tako, da se vsaka dotika ostalih treh? Ali lahko pet enakih kovancev postavite tako, da se vsak dotika preostalih štirih? Kako?

Problem 10. Najmanj koliko kovancev moramo odstraniti iz sheme na sliki 11, da središča preostalih kovancev ne tvorijo nobenega enakokrakega trikotnika? Katere?

Zvečer je sledila razglasitev rezultatov z avanture. Po dolgih letih ni prišlo do delitve prvega mesta, zmago pa je slavila skupina Mi3. Za nagrado so prejeli Veliko marsovsko čokolado (ki so jo prijazno razdelili med vse udeležence tabora), ostali Marsovci pa smo jim v čast izvedli marsovski pozdrav, s katerim smo med tednom pozdravljali pomembne goste tabora.



SLIKA 11.
Skica k problemu 10.

SLIKA 12.
Skupina marsovskih veteranov na kontrolni točki na Veliki marsovski avanturi.

Ker smo letos proslavljali 10. polet na MaRS, nas je po petkovem večernem predavanju o zgodovini MaRS-a čakalo presenečenje: Velika marsovska torta, ob kateri smo MaRS-u zapeli vse najboljše. Sledil je še piknik ob tabornem ognju, kjer ni manjkalo slastnih priboljškov. Oglasila se je tudi harmonika.

SLIKA 13.
Zadnji večer smo se pogreli in zapeli ob tabornem ognju.

Naslednje jutro je sledil pristanek, kjer so dijaki, vsi oblečeni v vijolične marsovske majice, svoje projekte predstavili družinam. Po prijetnem klepetu in prigrizku je nastopil otožni čas slovesa, ko smo si Marsovci zaželeli lep preostanek počitnic in odšli vsak v svojo smer v upanju, da se kmalu spet vidimo.

Mnenja udeležencev o letošnjem MaRS-u:

- MaRS je tabor za vse tiste, ki uživajo v reševanju matematičnih ugank in ki se preprosto želijo imeti super. (*Rok*)
- MáRS -a m (â) 1. mat. druženje takšnih in drugačnih entuziastov, navdušenih nad družabnimi igrami in poglabljanjem v matematične vode; tabor: bivanje v vesoljskih plovilih ni zaželeno. 2. vznes. najboljši možen zaključek počitnic (*Sonja*)
- Učenje + zabava + druženje + spoznavanje novih ljudi = MaRS = Noro dober in zabaven teden dni, ki prehitro mine :D (*Klara*)

Vabilo na MaRS 2016

Matematično raziskovalno srečanje MaRS 2016 bo potekalo od nedelje, 14. avgusta, do sobote, 20. avgusta 2016. Bivali bomo v CŠOD Trilobit (Javorniški Rovt). Več informacij: `mars.dmfa.si`.

× × ×

Približna konstrukcija kota 1 radian

Jens Carstensen in Alija Muminagić

Spomnimo: radian (oznaka rad) je merska enota za kot. Velikost središčnega kota (α) v radianih je enaka kvocientu dolžine krožnega loka (l) nad tem kotom in polmerom kroga (r) $\alpha = \frac{l}{r}$ (glej sliko 1).

Po definiciji je radianska mera polkroga, ki v stopinjah meri 180°, enaka kvocientu dolžine polkroga in polmera:

- $\dfrac{r\pi}{r} = \pi.$

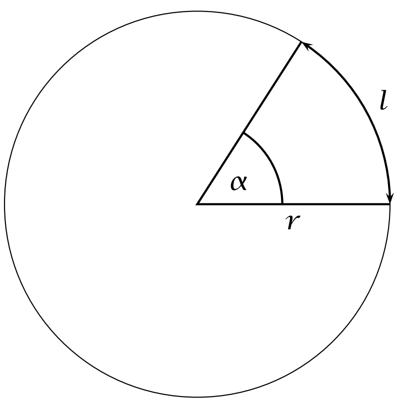
Velja torej $180° = \pi$ rad in od tu sledi

- $1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57{,}29578° = 57°17'44{,}8''$

in

- $1° = \dfrac{\pi}{180°} \text{ rad} \approx 0{,}01745 \text{ rad}.$

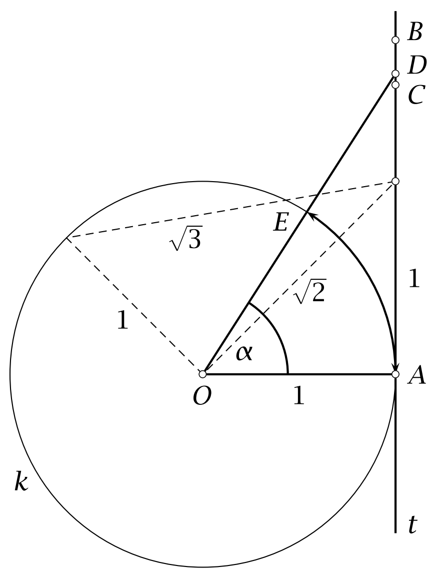
Obstaja dokaz, da točna konstrukcija kota 1 rad ni možna. A obstaja mnogo (zelo duhovitih) približnih konstrukcij, od katerih bomo v tem prispevku predstavili tri.



SLIKA 1.

1. konstrukcija

Narišimo krožnico k s polmerom 1. V točki A narišemo tangento t in na isti strani točke A izberemo točki B in C, tako da je $AC = \frac{3}{2}$ in $AB = \sqrt{3}$. Konstrukcijo daljice $\sqrt{3}$ kaže slika 2. Na koncu poiščemo na tangenti t točko D tako, da je $CD = \frac{1}{4}BC$. Premica skozi točki O in D seka krožnico v točki E. Trdimo, da je dolžina loka AE približno enaka 1 rad. Poglejmo: $AD = AC + CD = AC + \frac{1}{4}BC = AC + \frac{1}{4}(AB - AC) = \frac{3}{4}AC + \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}558012702$, pri čemer je $\tan 1 = 1{,}557407725$. Bralci sami ocenite napako.



SLIKA 2.

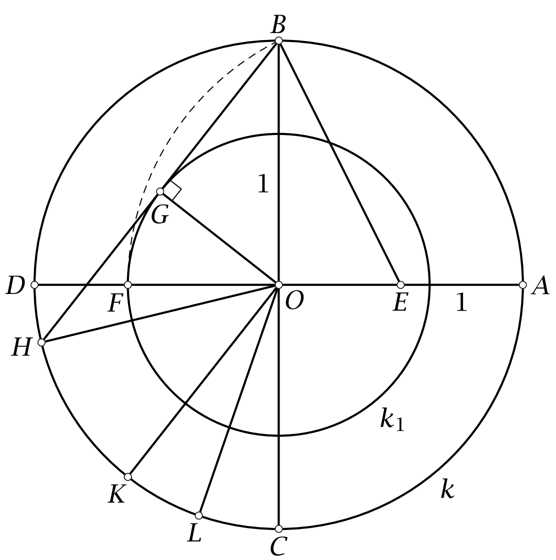
2. konstrukcija

Krožnici k s polmerom 1 vrišimo medsebojno pravokotna premera $AD \perp BC$ (glej sliko 3). Točka E razpolavlja daljico OA, točka F pa naj leži na daljici AD tako, da je $EF = EB$. Konstruiramo krožnico k_1 s središčem v O in polmerom OF ter tangento iz točke B na to krožnico. Ta tangenta se dotika krožnice k_1 v točki G in seka krožnico k v točki H, kakor kaže slika 3. Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OEB$ pove:

$$BE^2 = OE^2 + OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}.$$

Od tod sledi $BE = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Naprej velja $GO = FO = EF - EO = BE - EO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. V trikotniku $\triangle OBG$ je $\sin\angle OBG = \frac{GO}{OB} = \frac{GO}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, kar pomeni $\angle OBG = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0{,}666239$ rad ali $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx \frac{2}{3}$ rad.

Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\angle HOC = 2 \cdot \angle HBC = 2 \cdot \angle OBG \approx 2 \cdot \frac{2}{3}$ rad $= \frac{4}{3}$ rad. Premica skozi točko O, vzporedna daljici BH, seka krožnico k v točki K. Velja $\angle HOK = \frac{2}{3}$ rad ($= \angle KOC$). Simetrala kota $\angle KOC$ seka krožnico k v točki L in s slike 3 vidimo, da je $\angle HOL = \angle HOK + \angle KOL \approx \frac{2}{3}$ rad $+ \frac{1}{3}$ rad $= 1$ rad.



SLIKA 3.

V tem primeru je približna vrednost za 1 rad dana s $\frac{3}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}999359$ rad.

Spotoma dobimo za nagrado še oceno krožne konstante π: Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OBG$ da:

$$BG^2 = OB^2 - OG^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BG = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0{,}786151$$

To število je skoraj enako $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$. Torej štirikratnik daljice BG je približno enak krožni konstanti π, ki ima približno vrednost 3,141592:

$$4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{8(\sqrt{5}-1)} \approx 3{,}144605.$$

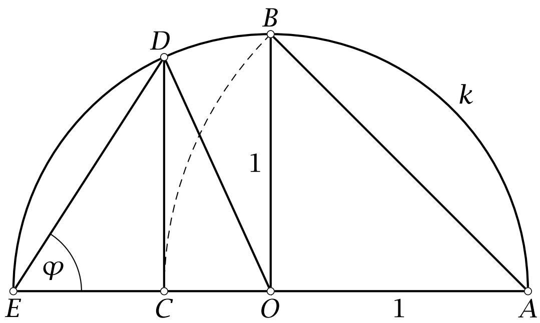
Ob izpeljavi spomnimo še na zlati rez. Zlati rez daljico d razdeli na dva neenaka dela x in $d-x$. Razmerje dolžine večjega dela in dolžine daljice je enako razmerju dolžin manjšega in večjega dela $\frac{x}{d} = \frac{d-x}{x}$. Od tod sledi $x^2 + dx - d^2 = 0$. Če je $d = 1$ je rešitev kvadratne enačbe $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Točka F razdeli daljico DO v razmerju zlatega reza. Iz $\frac{FO}{DO} = \frac{DF}{FO} \Rightarrow FO = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, kot smo zgoraj pokazali.

3. konstrukcija

EA je premer polkroga k s polmerom 1, $OB \perp EA$ in točka C leži na EA tako, da je $AC = AB$. Jasno je, da je $AC = \sqrt{2}$ (glej sliko 4). Pravokotnica narisana v točki C seka krožni lok k v točki D. Tako je $OD = 1$ in $OC = AC - AO = \sqrt{2} - 1$. Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OCD$ pove $CD^2 = OD^2 - OC^2 = 1^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Nadalje velja $CE = AE - AC = 2 - \sqrt{2}$. V trikotniku $\triangle DEC$ po Pitagori $DE^2 = CD^2 + CE^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right) - \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ in končno v trikotniku $\triangle DEC$ velja $\sin^2\varphi = \frac{CD^2}{DE^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Od tu sledi $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}9989$ rad.

Ta konstrukcija je elegantna in ima majhno napako (poiščite jo sami).



SLIKA 4.

Literatura

[1] J. Dickson in N. Lord, *Approximate constructions of 1 radian*, The mathematical gazette, **98**, 542, 2014.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *Konstruktion of 1 radian*, Matematik Magasinet **25**, 649.

[3] J. Carstensen in A. Muminagić, *Konstruktion of 1 radian, 2*, Matematik Magasinet **78**, 2868.

× × ×

Naloga iz Bakhšalijskega rokopisa

Marko Razpet

Bakhšalijski rokopis

Leta 1881 je kmet pri vasi Bakhšali med kamni razvalin našel večje število popisanih listov iz brezovega lubja. Precej jih je že uničil ali poškodoval zob časa, malo pa še nespretni najditelj, ki pa je bil vsaj toliko priseben, da je vse skupaj predal oblastem. Bakhšali je dandanes v Pakistanu, večje bližnje mesto je Pešavar. V času najdbe je bil Pakistan del Indije, ki je bila pod angleško kolonialno upravo. Listi so prišli v roke učenjakov, ki so hitro ugotovili, da imajo opravka z matematično vsebino. Jezikoslovci in matematiki so liste uredili, fotografirali, prebrali in prepisali ter jih začeli proučevati. Vseh kolikor toliko celih listov je 70; poimenovali so jih *Bakhšalijski rokopis*. Posamezni listi so velikosti približno $14{,}5 \times 9$ cm, hranijo jih v knjižnici v angleškem Oxfordu. Bakhšalijski rokopis matematiki in jezikoslovci še vedno proučujejo, o čemer pričajo objavljeni članki in knjige.

Bakhšalijski rokopis je napisan v starem indijskem jeziku *sanskrtu*, ki ni popolnoma klasičen, ker se v njem čuti nekaj lokalnih posebnosti. Pisava pa tudi ni *devanagari*, ki se običajno uporablja za pisanje v sanskrtu in v nekaterih današnjih indijskih jezikih. V Bakhšalijskem rokopisu je uporabljena pisava *šarada*, ki je nastala v severozahodnem delu Indije v 8. ali v 9. stoletju in se je še dolgo potem uporabljala. Števke v rokopisu niso take kot naše, jih pa je 10, vključno z ničlo. Kar se matematike tiče, rokopis uporablja malo simbolov, poleg števk le še vodoravne in navpične črte ter nekaj kratic.

Glede časa nastanka Bakhšalijskega rokopisa si znanstveniki niso enotni. Nekateri ga postavljajo v 7. ali v 8. stoletje, nekateri še v kasnejša stoletja, nekateri, zlasti Indijci, pa kar v 4. stoletje. Tudi ni jasno, ali je rokopis originalen ali pa je morda prepis še starejšega rokopisa. Kakorkoli že je, rokopis je eden najstarejših ohranjenih, ki so ga našli na indijski podcelini. Tudi o avtorstvu ni veliko znanega; vemo pa, da je bil pisec brahman, predstavnik vodilne hindujske kaste, ki je skrbela za ohranitev in širitev hindujske kulturne tradicije. Brahman se je na enem od listov predstavil kot *princ računarjev, sin Čhadžaka*.

Za nas je bolj zanimiva sama vsebina Bakhšalijskega rokopisa. Z nam znanimi pojmi bi vsebino rokopisa lahko razdelili na linearne probleme, diofantske enačbe, aritmetična zaporedja, kvadratne enačbe, ploščine in prostornine ter probleme v zvezi z zlatom in denarjem.

Naloga

Bakhšalijski rokopis navaja zanimive naloge, ki vodijo do linearnih enačb. Te imajo eno samo ali pa tudi več rešitev. Oglejmo si primer. Uporabljali bomo besedo *dinar*, v sanskrtu *dīnāra*, ki je bila znana tudi Indijcem kot denarna enota ali določena količina zlata.

> Oseba A ima sedem žrebcev, oseba B devet kobil, oseba C pa deset kamel. Vsak da po eno žival ostalima dvema, tako da so potem vsi enako bogati. Najdi vrednost vsake živali posebej in vrednosti vseh živali skupaj za vsakega lastnika posebej.

Rešitev

Vsak žrebec naj stane x_1, vsaka kobila x_2 in vsaka kamela x_3 dinarjev. Pri tem so x_1, x_2 in x_3 naravna števila. Po predaji živali je oseba A imela pet žrebcev, eno kobilo in eno kamelo, vse skupaj v vrednosti $5x_1 + x_2 + x_3$ dinarjev. Oseba B je imela sedem kobil, enega žrebca in eno kamelo, kar je bilo vredno $x_1 + 7x_2 + x_3$ dinarjev, oseba C pa je na koncu imela osem kamel, enega žrebca in eno kobilo v skupni vrednosti $x_1 + x_2 + 8x_3$ dinarjev.

Ker vemo, da so bili potem vsi enako bogati, denimo, da je bilo premoženje v teh živalih za vsako omenjeno osebo vredno c dinarjev, velja sistem diofantskih enačb:

- $5x_1 + x_2 + x_3 = c,$
  $x_1 + 7x_2 + x_3 = c,$
  $x_1 + x_2 + 8x_3 = c.$

Z odštevanjem prve in druge, prve in tretje ter druge in tretje enačbe tega sistema, krajšanjem in preurejanjem dobimo nove enačbe:

- $2x_1 = 3x_2,\ 4x_2 = 7x_3,\ 6x_2 = 7x_3.$

Leva stran nove prve enačbe je deljiva s številom 2, ki je tuje 3, zato mora x_2 biti deljivo z 2. To pomeni, da lahko zapišemo $x_2 = 2\ell$, kjer je ℓ celo število. Zato je $x_1 = 3\ell$. Nato dobimo iz nove druge enačbe $7x_3 = 12\ell$, kar pa pomeni, da je ℓ deljiv s 7 in ga lahko zapišemo kot $\ell = 7m$, kjer je m naravno število. Tako imamo $x_1 = 21m$, $x_2 = 14m$ in $x_3 = 12m$. Ker je $6x_2 - 7x_3 = 6 \cdot 14m - 7 \cdot 12m = 0$, je izpolnjena tudi nova tretja enačba. Vsaka oseba ima torej živalsko premoženje v vrednosti $c = 131m$ dinarjev. Žrebci so po $21m$ dinarjev, kobile po $14m$ dinarjev in kamele po $12m$ dinarjev. Pri tem je m naravno število. Rešitev je torej nešteto. Rokopis navaja samo eno: $x_1 = 42$, $x_2 = 28$, $x_3 = 24$, $c = 262$. Dobimo jo iz našega rezultata za $m = 2$.

Opomba

Podobne naloge so, kar je presenetljivo, sestavni del z Nobelovo nagrado nagrajene Nashove teorije o vrednosti izdelkov v zaprti ekonomiji. John Forbes Nash mlajši (1928–2015) je bil ameriški matematik in ekonomist. Poleg Nobelove nagrade za ekonomijo leta 1994 (skupaj z Reinhardom Seltenom in Johnom Harsanyijem) je leta 2015 Nash prejel tudi Abelovo nagrado (skupaj z Louisom Nirenbergom), ki se od leta 2003 podeljuje za pomembne rezultate v matematiki.

Literatura

[1] August Frederich Rudolf Hoernle, *On the Bakhshali Manuscript*, Bibliolife, Charleston; faksimile knjižice, ki je izšla na Dunaju 1887 pri založbi Alfred Hölder.

[2] Svami Satya Prakash Sarasvati, Dr. Usha Jyotishmati (ur.), *The Bakhshali Manuscript, an Ancient Treatise of Indian Arithmetic*, Dr. Ratna Kumari Svadhyaya Sansthana (izd.), Allahabad, 1979.

× × ×

Levitacija oziroma lebdenje po fizikalno

Luka Cmok, Vid Seražin, Miloš Borovšak in Irena Drevenšek Olenik

Levitacijo oz. lebdenje ljudje večinoma povezujejo z magijo, hipnozo, ezoteričnimi stanji in podobnimi temami [1]. V pričujočem sestavku pa bomo pokazali, da je levitacija lahko tudi povsem razložljiv fizikalni pojav, ki ga je mogoče realizirati na več načinov [2].

Kot je v fiziki navada, se moramo pri vpeljavi novega pojma najprej dogovoriti za njegovo definicijo. Pri levitaciji je definicijska zgodba naslednja: Na vsa telesa na površju Zemlje deluje teža. Teža je sila, ki poskuša telesa potegniti v središče Zemlje. Zaradi teže predmeti, ki jih vržemo v zrak ali pa spustimo z rok, čez nekaj časa padejo na tla. Če želimo, da telo miruje v izbrani legi kot, denimo, knjiga, ki stoji na knjižni polici, ali pa lestenec, ki visi s stropa, mora nanj poleg teže delovati še neka druga sila, ki deluje v nasprotni smeri sile teže in je enako velika kot sila teže. Takšni sili sta sila police, ki knjigo tišči od spodaj navzgor, in sila vrvice, ki lestenec vleče proti stropu. V obeh primerih sta telesi (knjiga oz. lestenec) v stiku z drugim objektom (polica oz. vrvica), ki povzroča silo (slika 1). Kadar pa telo miruje v zemeljskem težnostnem polju, čeprav ni postavljeno na nobeno podlago ali obešeno oz. fizično vpeto na ogrodje, govorimo o levitaciji. Tudi pri levitaciji je, podobno kot v vseh drugih situacijah mirovanja, sila teže telesa uravnotežena z neko drugo nasprotno enako silo. Razlika je le v tem, da pri levitaciji te nasprotne sile ne posreduje kontakt s podlago ali ogrodjem.

SLIKA 1.

Levitacija na osnovi vzgona

Preprosti primer levitacije je vzgon. Pojavi se vedno, ko neko telo potopimo v tekočino. Če žogo, napolnjeno z zrakom, potopimo pod vodno gladino in nato spustimo, ne pade na dno, ampak splava navzgor na površje vode. Sila, ki žogo poriva na površje, je sila vzgona. Dokler je žoga potopljena, je vzgon večji od teže in žogo potiska navzgor, če je žoga napolnjena s snovjo, ki ima manjšo gostoto kot voda, kar za zrak seveda velja.

Tudi v vsakdanjem življenju smo ves čas potopljeni v morje tekočine. Ta tekočina je zrak. Če žogo ali njeno manj masivno različico – balon – napolnimo s snovjo, ki ima manjšo gostoto kot zrak, ju zaradi vzgona vleče navzgor proti gladini zračnega morja, se pravi proti vrhu zemeljske atmosfere. Do tovrstnega pojava pride pri balonu, napolnjenim s helijem. Helijev balon sila vzgona vleče navzgor, sila

SLIKA 2.

SLIKA 3.

teže pa navzdol. Ker je prva sila večja od druge, balon, če ga spustimo iz rok, odnese navzgor. Če pa težo balona povečamo, tako da nanj obesimo nekaj lističev papirja, lahko dosežemo, da sta obe sili nasprotno enaki. Balon lebdi oz. levitira na izbranem mestu (slika 2). Opisani pojav obteževanja izkoriščajo balonarji pri vzletu in pristanku potovalnih balonov. V potovalnih balonih namesto helija uporabljamo vroči zrak, ki ima ravno tako manjšo gostoto od hladnejšega zraka v zračnem »morju«, po katerem se giblje balon.

Levitacija na osnovi zračnega upora

Če balon napolnimo z zrakom, ki ima enako ali pa le malo višjo temperaturo, kot je temperatura okoliškega zraka, in ga nato spustimo, balon pade proti tlom. Razmere pa se močno spremenijo, kadar piha veter. Veter lahko balon odnese s seboj v smeri vetra daleč stran od začetne lege. Če je veter usmerjen navzgor, balon ne bo več padal, ampak se bo začel dvigati. To dviganje povzroča zračni upor. Upor se pojavlja v vseh tekočinah, ki se gibljejo glede na neko telo in ga občutimo, ko npr. drvimo s kolesom po ravni cesti ali pa stojimo v deročem potoku. Upor deluje tudi na žogico, ki jo postavimo v curek zraka, ki piha navpično navzgor iz fena za lase. Ko žogico postavimo na ustje fena, se žogica najprej nekaj časa dviga, potem pa se njena lega ustali in začne lebdeti. To se zgodi v položaju, v katerem je sila zračnega upora nasprotno enaka sili teže. Sila zračnega upora je odvisna od hitrosti gibanja zraka. Hitrost zraka, ki prihaja iz fena, je največja tik ob ustju, z oddaljevanjem od ustja pa se curek izpihanega zraka širi in zato hitrost pojema. Zaradi tega žogica pri svojem gibanju slej ko prej pride v območje hitrosti, v katerem je upor enako velik kot teža; tam se njen položaj ustali. Zanimivo je, da žogica lahko lebdi, tudi če curek zraka usmerimo postrani glede na navpičnico (slika 3). Lebdenje preneha šele pri dokaj velikem

SLIKA 4.

SLIKA 5.

nagibnem kotu. Dodatna sila, ki vpliva na lebdenje v takih situacijah, izvira iz podtlaka, ki nastane na območjih z večjo hitrostjo zraka. Navedeni podtlak ustvari neke vrste past iz hitrega zraka, v katero se ujame žogica.

Tako pri zračnem uporu kot pri vzgonu v resnici ne gre za pravo brezkontaktno interakcijo. Balon oz. žogica morata namreč v obeh primerih biti v stiku z okoliškim zrakom. Če tega stika ne bi bilo, levitacija ne bi bila možna. Če bi npr. iz sobe, v kateri lebdi helijev balon, izčrpali zrak, bi sila vzgona prenehala delovati in balon bi padel na tla. Podobno tudi fen, če v sobi ne bi bilo zraka, ne bi mogel povzročati zračnega toka in zato tudi ne bi bilo sile zračnega upora.

Levitacija na osnovi odbojne sile med dvema magnetoma

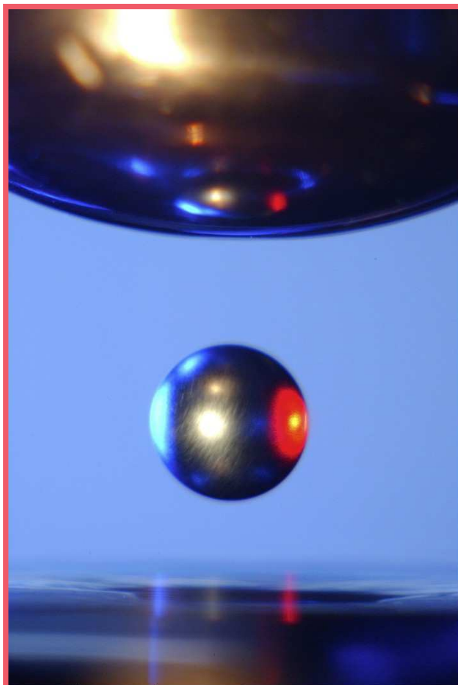
V naravi obstajajo snovi, ki so same po sebi magnetne ali pa jih lahko namagnetimo mi. Tovrstne snovi uporabljamo za kompase ter za ploščice, s katerimi pritrdimo razglednice na hladilnik in druge železne dele pohištva. Vsak magnet ima dva pola, ki ju imenujemo južni in severni pol. Istovrstna pola se odbijata, nasprotna pa privlačita. Če magnet prelomimo na polovico, ne dobimo ločenih polov, ampak dobimo dva manjša magneta, ki imata spet vsak svoj južni in severni pol. Če en magnet postavimo na podlago, tako da je, denimo, njegov severni pol obrnjen navzgor, nad njim pa postavimo drugi magnet, katerega severni pol obrnemo navzdol, pričakujemo, da bomo s pomočjo odbojne sile med magnetoma lahko dosegli lebdenje zgornjega magneta. Žal pa vsa stvar ni tako preprosta, ker je opisana lega zgornjega magneta nestabilna. To pomeni, da se zgornji magnet, takoj ko njegovo gibanje sprostimo, vedno zasuče vstran od navpičnice ter se slej kot prej postavi v lego, v kateri se magneta privlačita, namesto da bi se odbijala. Stabilizacijo lahko dosežemo, če zgornji magnet, preden ga sprostimo, spravimo v hitro vrtenje okoli navpične osi [3]. V ta namen ga vgradimo v notranjost vrtavke. Zaradi vrtenja ima magnet vrtilno količino oz. spin. Zaradi spina postane lega zgornjega magneta z navzdol obrnjenim severnim polom stabilna in pojavi se levitacija (slika 4). Le-ta vztraja toliko časa, dokler se vrtenje ne upočasni in ne zmore več vzdrževati stabilnosti.

Levitacija na osnovi magnetne sile na diamagnetno snov

Vemo, da magneti privlačijo nekatere kovine, kot je, denimo, železo. Železna sponka za papir, ki jo približamo magnetu, se »prilepi« na magnet. Za železo in nekatere druge snovi, ki se v bližini magnetov obnašajo podobno kot železo, pravimo, da so feromagnetne. Na številne materiale, kot so, denimo, aluminij,

18 nadaljevanje na strani →

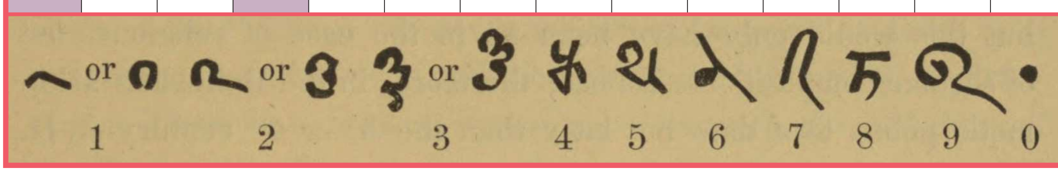
Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ
POKOJNA AMERIŠKA ROKOVSKA PEVKA (JANIS)
UPRAVNI ALI SODNI POSTOPEK, RAZPRAVA
NAŠ PREVAJALEC STAROGRŠKIH DEL (ANTON)
VELIKA AZIJSKA ISLAMSKA DRŽAVA
SLABA PUŠKA (ŠALJIVO)
PETER ŽONTA
FRANC. MESTO, ZNANO PO 24-URNI DIRKI
BOTO, ČERNE, HREN, MOŠKON, SRŠEN
SLADEK IZLOČEK RASTLIN
IZPUŠČAJ NA SLUZNICI
SREDIŠČE PRLEKIJE

VELIKI SLOVENSKI MATEMATIK
OPREMLJANJE Z OROŽJEM
ŠAMPION
SREDIŠČE AMAZONIJE
KOLIČINA Z ENOTO FARAD
MESTO NA CIPRU Z LETALIŠČEM
HRVAŠKI PISATELJ KOVAČIĆ
SLIKAR ŠUBIC
STARA PREDIVNICA
BERILO
ZVOK DOLOČENE VIŠINE V GLASBI
DRUGA NAJVEČJA SATURNOVA LUNA
ENAKA SOGLASNIKA
OCVRTI KROMPIR. LISTIČI
REBRASTA TKANINA
IGRA S KARTAMI
OBDELANA KMETIJSKA POVRŠINA
MESTO V ŠPANIJI (MOŠKO IME)
LUKA NA SEVERU ČILA
ETNIČNA SKUPINA
PRIPADNIK NAJVEČ. GERMAN. NARODA
DRAŽENJE
OBRAVNAVAL JO JE EINSTEIN V SVOJI TEORIJI

AM. SOCIOLOG (GEORGE)
BIKOBOREC NA KONJU, KI DRAŽI BIKA S SULICO
PRIPRAVA S KLINI ZA VZPENJANJE
PRAKANTON V ŠVICI
DEL DIRKE
AMERIŠKI REŽISER BROWNING
GR. REKA, EVROTAS
POKRAJINA OB EMSU V NEMČIJI
IME VEČ PASEM PSOV (NEMŠKI, ŠKOTSKI)
MADŽ. MESTO OB TISI
ALŽIRSKI ROKOVSKI GLASBENIK (RACHID)
ŽITNA BOLEZEN
JEZIKOVNA POMENSKA ENOTA
PREVAJALEC SV. PISMA V LATINŠČINO
KMET (SLABŠAL.)
VELIK KOS MATERIALA
SPOJINA S KISIKOM
OJDIPOVA MATI
OGRAJENA BANTUJSKA NASELBINA
RUSKI DRAMATIK (ANTON; *ČEŠNJEV VRT*)
POLOŽAJ PRI ŠAHU, KO ZA KRALJA NI REŠITVE
ZELIŠČE Z MLEČNIM SOKOM
FILOZOF MARX
GORSKE REŠEVALNE SANI
JEZERO V FRANC. IMENIH
REŽISER HOWARD
VRHOVNI POGLAVAR IZMAELITOV
KORAČNICA
ROKOMETNI KLUB IZ ŠPANSKEGA LEONA
ŽUPNIJA
51 Z RIM. ŠTEVILKAMI
MADŽARSKI NOBELOVEC KERTESZ
HRVAŠKI OTOK
BOJAZLJIVEC, STRAHOPETEC
FRANCOSKI OTOK V JZ. DELU TIHEGA OCEANA
CEVKA ZA ODVAJANJE IZCEDKA
PEVEC PESTNER
SREDNJI
NAJVIŠJA GORA AFRIKE
ELEKTRONSKA POŠTA
EDDIE MURPHY



POKOJNI IGRALEC SHARIF

SREDIŠČE ZGORNJESAVSKE DOLINE

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

MORSKA ŠKOLJKA, KI VRTA V KAMEN, ZAVRTAČ

ABECEDA

SEVEROZAHOD

KRČEVITA JEZA ALI JOK

DROBIŽ V SKANDIN. DRŽAVAH, ERE

NEKDANJA POOBLAŠČ. INVESTICIJSKA DRUŽBA

RIMSKA LJUBLJANA

TUBERKULOZA

ZEMELJSKI OREŠEK

OZVEZDJE V OBLIKI ČRKE W V RIMSKI CESTI

NEMŠKI NEVROLOG (DEGENER. BOLEZEN MOŽGANOV)

3

MEDICINSKA FAKULTETA

MOHSOVA LASTNOST MINERALOV

DEL TENIŠKE IGRE

DRAMATURGINJA, REŽISERKA IN PEVKA MILČINSKI

MATEMATIČNI ZNAK

MESTO V SRBIJI

VOZILO ZA PO SNEGU

PAS PRI KIMONU

NAMERNO VZBUJANJE STRAHU

8

JAP. FIZIK (LEO)

DALJINSKO VODENI LETALNIK

LATINSKI PREDLOG

NAPAD NA ZNANO OSEBNOST

DREVESNA SNOV

NAVADNO ŠTIRIKOLESNO MOTORNO VOZILO

SKUPEK CELIC ŽIVIH BITIJ

400 km DOLG PRITOK DONAVE V ROMUNIJI

VATROSLAV LISINSKI

MAJHEN DIRKALNIK

Z NJO SE KAJ ZAŠIJE

ODPRTA TELESNA POŠKODBA

PRAŠIČ

NAŠ PEVSKI TRIO

UPRAVNIK SHRAMBE ZA NATUR. DAJATVE TLAČANOV

PRILEŽE SE PO NAPORU

KDOR NESTRPNO KAJ ČAKA

VELIKO DIŠEČE AVSTRAL. LISTNATO DREVO

REDOVNICA

ZAJEDAV. ŽUŽELKA, KI SESA SOKOVE

DOBA, UMETNOST

LATINSKI IZRAZ ZA UMETNOST

SLOG

NATANČNO OMEJENO TRAJANJE

10

STAROGR. ELEGIK IZ ŠPARTE

NAŠ LITERAT (JOŽE)

15

PREKMURSKI JANEZ

REKA V ROMUNIJI

7

OVITEK

NAŠ MATEMATIK (ALOJZIJ)

ITAL. TENORIST PRED 100 LETI (ENRICO)

5

DEBELI ? LEŽI PRI ANKARANU

OZNAKA UKRAJINE

STARA MATI, BABICA

NOBELIJ

NAŠ PATER ZELIŠČAR (SIMON)

ANDREJ JEMEC

GLAVNO MESTO ZAMBIJE

STRUNSKO GLASBILO

VRSTA VRBE

INTERNET, MEDMREŽJE

LUNINO ŠTEVILO

IZR. LUKA OB RDEČEM MORJU

KRAJ PRI NOVIGRADU V ISTRI

RUSKI PISATELJ (FJODOR)

ARABSKI KNEZ

16

DVOJICA

ČRKA IZ PREKRIŽANIH ČRT

OZNAKA IOWE

REKA V JZ. ETIOPIJI

ASTAT

OZNAKA ILLINOISA

6

NA JAVNIH ŠOLAH JE PRAVILOMA NI

17

PREKRIVALEC Z LOŠČEM

STAREJŠI

GEODETSKE MERSKE TOČKE NA TERENU

KALCIJ

NAGRADNI RAZPIS

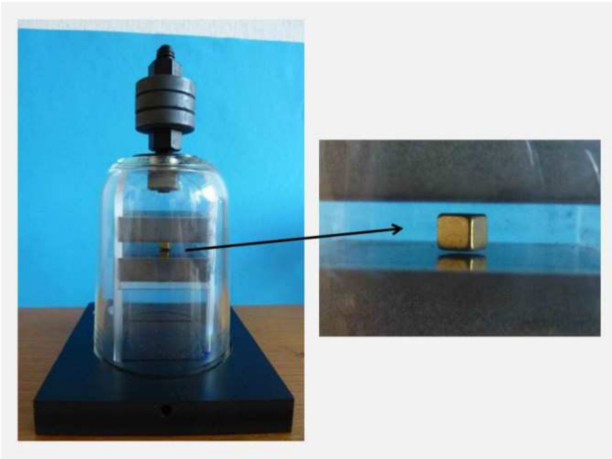
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. maja 2016**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

nadaljevanje s strani 15



SLIKA 6.

SLIKA 7.

plastika in papir, pa magneti na videz nimajo učinka. Vendar to ni res. Magneti vplivajo tudi na druge snovi, a dosti šibkeje kot na feromagnetne materiale. Nekatere snovi, kot je aluminij, magneti šibko privlačijo. Take snovi so paramagnetne. Nekatere snovi pa magneti odbijajo, namesto da bi jih privlačili. Take snovi so diamagnetne. Med diamagnetne snovi spadajo voda, les in številne druge organske snovi.

Snov z izjemno močno izraženimi diamagnetnimi lastnostmi je pirolitični grafit [4]. To je umetno pridobljena vrsta grafita, ki se med drugim uporablja tudi za moderatorje v jedrskih reaktorjih. Če ploščico iz tovrstnega grafita postavimo nad površino močnih magnetov, ploščica lebdi nad magnetno podlago (slika 5). Odbojna magnetna sila ploščico odriva navzgor, teža pa jo vleče navzdol. Ploščica se ustali na tisti višini od podlage, na kateri sta si omenjeni sili nasprotno enaki. Podobna vrsta lebdenja se pojavi tudi, če majhen magnet v obliki kocke postavimo nad podlago iz grafita ali pa v režo med dvema grafitnima ploščama (slika 6). Tokrat mirujeta plošči in se magnet odbija od njiju.

Levitacija na osnovi magnetne sile na superprevodno snov

Superprevodniki so snovi, po katerih lahko teče električni tok, tudi ko niso priključeni na električno napetost. Superprevodniki so hkrati tudi idealni diamagnetni materiali, saj magnetno polje sploh ne more prodreti v njihovo notranjost (superprevodniki tipa I) ali pa lahko v njo prodre le delno (superprevodniki tipa II) [5]. Materiali, ki jih poznamo pod imenom visokotemperaturni superprevodniki, so keramični materiali na osnovi bakrovega oksida (kuprati) z dodatkom itrija in barija (YBCO) ali sorodnih elementov (stroncij, bizmut). Da tak keramični material postane superprevoden, ga moramo najprej ohladiti na temperaturo pod določeno vrednostjo. Dovolj nizko temperaturo dosežemo, če disk iz tovrstne keramike potopimo v tekoči dušik, ki ima (pri vrenju) temperaturo $-196\ ^\circ$C. Če disk med ohlajanjem postavimo na podlago iz magnetov, ob prehodu iz navadnega prevodnega v superprevodno stanje v njegovi površinski plasti nastanejo električni tokovi, ki praktično povsod, razen v nekaj ozkih linijah, izničijo magnetno polje v njegovi notranjosti (YBCO je superprevodnik tipa II). Zaradi teh tokov ohlajeni disk, potem ko ga vzamemo iz tekočega dušika in postavimo nazaj nad magnetno podlago, lebdi nad podlago na isti višini, kot jo je imel v času ohlajanja (slika 7). Tudi tokrat silo teže kompenzira magnetna sila. Če disk porinemo proti robu magnetne podlage, kjer je magnetno polje drugačno kot v osrednjem delu, se disk pri robu obrne in se poskuša vrniti v prejšnjo lego. Svojo lego poskuša disk obdržati tudi, če podlago dvignemo iz mize in jo zavrtimo za 180°. Potem disk lebdi pod namesto nad podlago. Lebdenje traja toliko časa, dokler se disk ne segreje na temperaturo, pri kateri preide iz superprevodnega nazaj v navadno prevodno stanje. Takrat se magnetna sila močno zmanjša in disk pade na podlago.

Zaključek

Če sestavimo skupaj zelo veliko število magnetov, je možno doseči lebdenje tudi za večja telesa. Največji objekti te vrste, ki jih lahko srečamo v vsakdanjem življenju, so superhitri vlaki, ki jih uporabljajo na Kitajskem (Maglev Transrapid) in Japonskem (SCMaglev) [6]. Ker pri lebdenju ni trenja s podlago, lahko lebdeči vlaki dosegajo zelo velike hitrosti (nad 500 km/h). S takim vlakom bi za pot iz Prekmurja do slovenske obale potrebovali manj kot 30 minut. Žal pa, vsaj za enkrat, Slovenske železnice superhitrih vlakov še ne načrtujejo, zato kar zaprite oči in pomislite na letečo preprogo iz pravljic. Hm, kaj smo že rekli na začetku članka? Da ljudje lebdenje vse prepogosto povezujemo z nadnaravnimi silami.

Literatura

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Levitation_(paranormal)`, ogled 7. 6. 2015.

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Levitation`, ogled 7. 6. 2015.

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Levitron`, ogled 7. 6. 2015.

[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Diamagnetism`, ogled 7. 6. 2015.

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Superconductivity`, ogled 7. 6. 2015.

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Maglev`, ogled 7. 6. 2015.

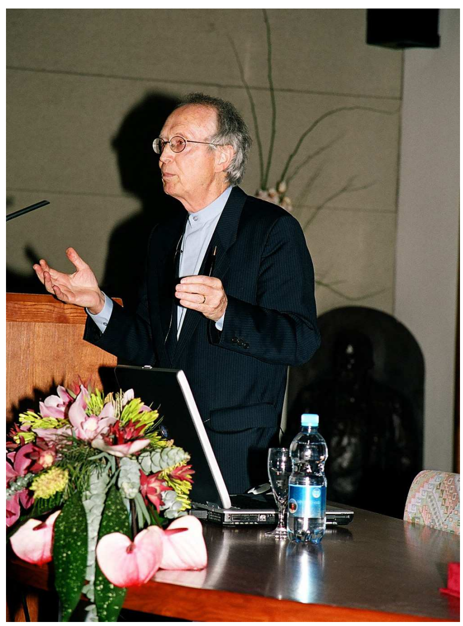
× × ×

Janez Strnad

Aleš Mohorič

Novembra se je poslovil najplodovitejši sodelavec naše revije, kolega fizik, zaslužni profesor *Univerze v Ljubljani*, dr. Janez Strnad. Njegov članek je izšel še v predzadnji številki revije.

Profesorja sem spoznal, ko sem prestopil prag univerze. Brucom nam je predaval *Fiziko*, osrednji predmet našega študija. S svojim resnim in zavzetim pristopom, pripravljenostjo odgovoriti na vsa vprašanja, poštenostjo ter odličnostjo ocenjevanja, je pustil pečat generacijam fizikov. Na predavanjih smo lahko slutili, da ve mnogo več, kot pove. Izvrstno je poznal tako učno snov, kot težave, ki spremljajo njeno razumevanje. To plat svoje razgledanosti je pokazal v predavanjih *Razvoj fizike* in v pisanju po-



SLIKA 1.
Foto: Marjan Smerke

ljudnih in strokovnih člankov za večino slovenskih časopisov ter naravoslovno usmerjenih revij. V tej vlogi sem ga kot urednik dveh takih revij spoznaval prav do zadnjih dni.

Janez Strnad je bil rojen 1934 v Ljubljani. Po osnovni šoli in nižji gimnaziji v Slovenj Gradcu ter višji gimnaziji v Mariboru se je vpisal na *Fakulteto za naravoslovje in tehnologijo*. Po študiju tehniške fizike je postal asistent na današnjem *Oddelku za fiziko*. Kasneje je študiral na inštitutu za teoretično fiziko univerze v Heidelbergu.

Raziskovalno se je ukvarjal z difuzijo nevtronov, posebno teorijo relativnosti in jedrsko fiziko. Zanimalo ga je tudi poučevanje fizike, posebno teorije relativnosti in kvantne fizike. Fiziko se je ves čas trudil približati tudi širši javnosti.

V angleščini in nemščini je profesor Strnad objavil preko sto raziskovalnih in strokovnih člankov ter šestdeset referatov, s katerimi je večinoma sodeloval na mednarodnih srečanjih. Objavil je tudi več kot štiristo strokovnih in poljudnoznanstvenih člankov v slovenščini, predvsem v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, *Preseku* in *Proteusu*. V časopisih in revijah je objavil več kot sto štirideset prispevkov.

Napisal je štiridelni univerzitetni učbenik za fiziko in učbenik ter del učbenika za srednjo šolo.

Knjižici *Merim platno, trak na vatle* in *Prapok prasnov požene v dir* mlajšim bralcem približata merjenje razdalj in razvoj Vesolja. Knjiga *Iz take so snovi kot sanje* obravnava zgradbo snovi, *Zgodbe iz fizike* pa to, kako fiziki prihajajo do novih spoznanj. Knjiga *Fiziki, trinajst portretov* je nastala po nizu radijskih oddaj o življenju pomembnejših fizikov. Precej knjig in knjižic je profesor Strnad objavil pri *Društvu matematikov, fizikov in astronomov*. *V Presekovi knjižnici* so izšle knjižice *Začetki sodobne fizike*, *Relativnost za začetnike*, *Začetki kvantne fizike*, *Jožef Stefan, ob stopetdesetletnici rojstva* in *Do Newtonovih zakonov*.

V *Knjižnici sigma* so izšle *Svet nihanj in valovanj*, *Mala zgodovina vesolja*, *O poučevanju fizike*, *Sto let fizike*, *Mala zgodovina Dopplerjevega pojava*, *Kvantna fizika*, *Relativnost*, *Posebna teorija relativnosti*, *Mala kvantna fizika* in *Vozi me, avto, v daljave*. V *Podiplomskem seminarju iz fizike* ali v *Izbranih poglavjih iz fizike* so izšle knjižice *Fazna, skupinska in signalna hitrost*, *Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti*, *Kvantna fizika za začetnike*, *Na pot v kvantno elektrodinamiko*, *Na pot k Schwarzschildu* in *Homogeno gravitacijsko polje. Med posebno in splošno teorijo relativnosti*.

SLIKA 2.

Profesor Strnad je sodeloval je še pri izdaji izpitnih vprašanj in zbirk nalog ter uredil in prevedel več knjig. Bil je glavni in odgovorni urednik in urednik za fiziko *Obzornika za matematiko in fiziko*. Sodeloval je tudi v uredniškem odboru *Proteusa*. Sodeloval je pri *Slovarju slovenskega knjižnega jezika* in pri *Enciklopediji Slovenije*.

Za svoje delo je profesor Strnad dvakrat prejel nagrado *Sklada Borisa Kidriča*, *plaketo Pavla Grošlja* in *Levstikovo nagrado*. Dobil je tudi več priznanj *Društva matematikov, fizikov in astronomov*.

Pri urednikovanju mi je bil profesor Strnad v veliko pomoč. Tako z nasveti za dobro delo kot s članki, ki jih je imel vedno na zalogi. Pisati je znal za širšo javnost kot tudi za zelo zahtevne bralce.

Na Preseku pušča profesor Strnad neizbrisljiv pečat. V naši reviji je objavil skoraj dvesto prispevkov; pred štirimi desetletji je bil tudi naš glavni urednik.

Profesor Strnad v mojem spominu ostaja prijatelj; pogrešal ga bom, pogrešal kot izjemno delovnega, a skromnega kolega, ki ti je vedno pripravljen priskočiti na pomoč.

× × ×

Ocena oddaljenosti Sonca od središča Galaksije

Dunja Fabjan

Pričujoča naloga je bila del izbirnega postopka za uvrstitev srednješolcev v slovensko ekipo na mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike 2014. Reševanje naloge zahteva znanje sferne trigonometrije, ki ste jo spoznali v prejšnji številki Preseka, zato lahko služi tudi kot dobra vaja za njeno uporabo v astronomiji.

V pomoč objavljamo še pristop Krištofa Skoka, našega najuspešnejšega astronomskega olimpijca, k reševanju prvega dela te naloge. Drugi del naloge in ocene napak pa prepuščamo vašemu samostojnemu delu.

Naloga

Iz priloženih podatkov za kroglaste kopice in iz fotografije Rimske ceste oceni razdaljo Sonca od središča Galaksije ob predpostavki, da so te zvezdne kopice sferično razporejene okrog središča naše Galaksije. Določi tudi velikost (polmer) Galaksije.

SLIKA 1.
Rimska cesta 360 stopinj (Foto: NOAO)

V tabeli so navedena imena kopic, njihove ekvatorialne koordinate (rektascenzija in deklinacija) ter oddaljenost kopic od Sonca (v kiloparsekih).

1. Ob zgornji predpostavki za porazdelitev kopic bi bilo Sonce v središču Galaksije v primeru, če bi kopice (kot jih vidimo z Zemlje) bile enakomerno porazdeljene po nebu. Da to ni res, lahko zlahka ugotoviš iz porazdelitve kopic po rektascenziji in porazdelitve po deklinaciji. Nariši oba grafa ter iz obeh porazdelitev oceni, v kateri smeri (na katerih koordinatah) se nahaja središče Galaksije.

2. Iz priloženega posnetka Galaksije določi potek galaktične ravnine, npr. iz primernih svetlih zvezd v tej ravnini. Za take objekte poišči podatek o ekvatorialnih koordinatah in navedi, katere objekte si uporabil. Iz take ocene lahko pridobiš naklon (inklinacijo) galaktične ravnine glede na nebesni ekvator in pretvoriš ekvatorialne koordinate galaktičnih kopic v galaktične koordinate le-teh.

3. Za določanje središča Galaksije (in oddaljenosti Sonca od njega) si pomagaj s projekcijo oddaljenosti posamične zvezne kopice na ravnino Galaksije. Razmisli, kako boš prišel do razdalje Sonca od središča Galaksije in velikosti (polmera) Galaksije.

Zgoraj opisani postopek predstavlja glavno navodilo za izvedbo naloge. Končni rezultat se lahko razlikuje od splošno znanega. Lahko si pomagaš z literaturo, ne smeš pa uporabiti znanih galaktičnih koordinat kroglastih kopic.

Določanje koordinat središča Galaksije in naklona galaktične ravnine

Krištof Skok

Predpostavimo, da so kopice po haloju Galaksije razporejene enakomerno in da je to območje krogelne oblike. Polmer haloja je enak polmeru Galaksije. Če bi bilo Sonce v središču te krogle, bi bila porazdeljenost kopic po nebu enakomerna. Ker pa se ne nahajamo v središču, so kopice po nebu posejane neenakomerno, najgosteje pa so pri pogledu v smeri proti središču Galaksije. Če naredimo razporeditev kopic glede na rektascenzijo (sliki 2 zgoraj in 2 spodaj), vidimo, da ima največ kopic rektascenzijo okoli 18,2 h. To privzemimo kot rektascenzijo središča Galaksije.

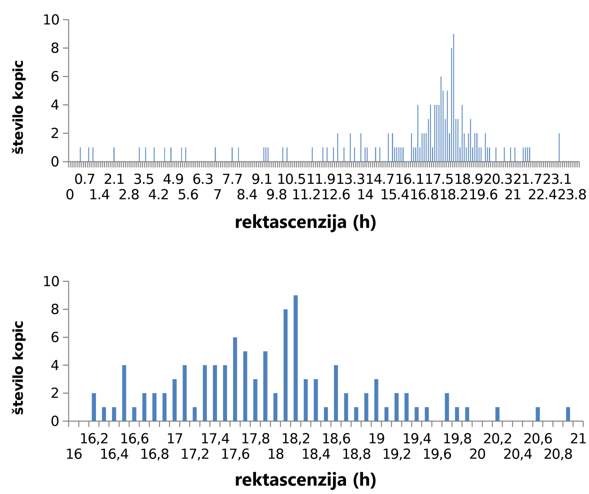
Podobno postopamo za deklinacijo. Oglejmo si histograma 3 zgoraj in 3 spodaj. Največ kopic ima deklinacijo okoli -26°, zato to vrednost prevzemimo kot deklinacijo središča Galaksije.

Rektascenzija središča Galaksije (RaS): 18,2 h.

Deklinacija središča Galaksije (DecS): $-26°$.

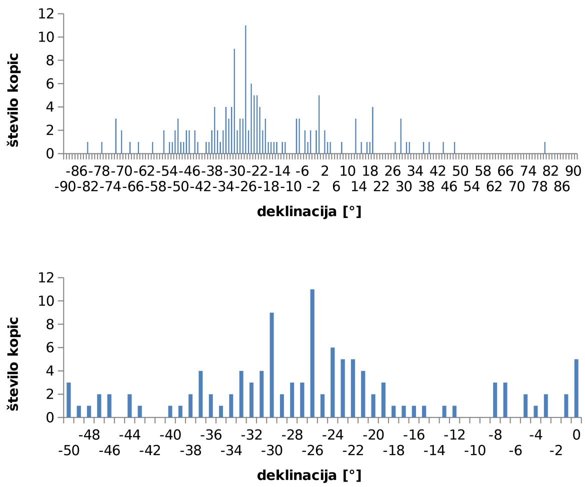
Za določanje nagnjenosti galaktičnega ekvatorja (inklinacija) glede na nebesni ekvator E uporabimo fotografijo Rimske ceste (slika 1). Na fotografiji poiščemo znane zvezde in druge objekte, ki ležijo na galaktičnem ekvatorju. Ker so te zvezde na sredini Rimske ceste, torej v galaktični ravnini oz. na galaktičnem ekvatorju, so njihove galaktične širine b enake 0. Zvezde in objekti, ki so uporabljeni v našem primeru, so: M38, HIP 20234, NGC 663, 57 Cyg, HIP 92946, M16, HIP 82729, HIP 71683, HIP 60718 in meglica Rozeta (NGC 2237) z znanimi ekvatorialnimi koordinatami. Poleg tega smo v prvem delu naloge poiskali še koordinati središča Galaksije, RaS in DecS.

Oglejmo si odsek nebesne krogle, na katerem imamo nebesni ekvator, severni nebesni pol NCP, galak-

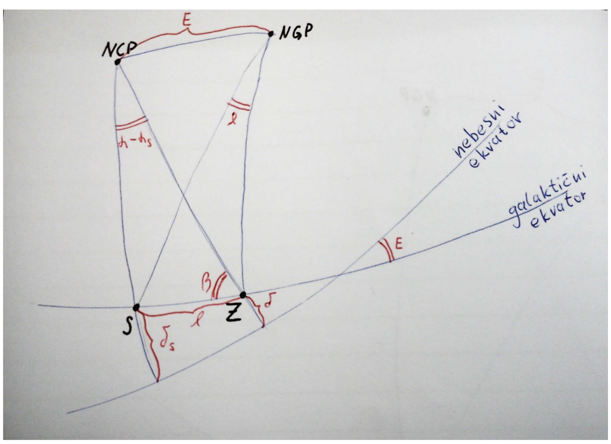


SLIKA 2.
Zgoraj: histogram števila kopic glede na njihovo rektascenzijo. Spodaj: histogram števila kopic glede na njihovo rektascenzijo okoli največje zgostitve.

tični ekvator in severni galaktični pol NGP (slika 4). Iskana inklinacija galaktične ravnine je E. Pola obeh sistemov sta presečišči nebesne sfere in normal osnovnih ravnin, zato je lok med njima dolžine E. Glede na to, da je točka S izhodišče galaktičnega koordinatnega sistema in sta tam obe galaktični koordinati nič, je dolžina loka SZ kar enaka galaktični dolžini zvezde l.



SLIKA 3.
Zgoraj: histogram števila kopic glede na njihovo deklinacijo. Spodaj: histogram števila kopic glede na njihovo deklinacijo okoli največje zgostitve.



SLIKA 4.

Oglejmo si sferni trikotnik z oglišči NCP, S in Z. Poznamo dolžine lokov:

- $NCPZ = 90° - \delta$,
- $NCPS = 90° - \delta_S$

in

- $SZ = l$.

Kot ob NCP je $\alpha - \alpha_S = \Delta\alpha$. Za ta trikotnik zapišimo kosinusni izrek:

- $$\begin{aligned}\cos(l) &= \cos(90° - \delta) \cdot \cos(90° - \delta_S) + \\ &+ \sin(90° - \delta) \cdot \sin(90° - \delta_S) \cdot \cos(\Delta\alpha) = \\ &= \sin(\delta) \cdot \sin(\delta_S) + \\ &+ \cos(\delta) \cdot \cos(\delta_S) \cdot \cos(\Delta\alpha).\end{aligned}$$

Od tod lahko dobimo

- $\sin(l) = \sqrt{1 - (\cos(l))^2}$.

$\sin(l)$ je lahko pozitiven ali negativen, a iz praktičnih razlogov je inklinacija E ostri kot, podobno kot za naklon Zemljine vrtilne osi vedno štejemo ostri kot.

Kot ob Z poimenujmo β in zapišimo sinusni izrek za obravnavani trikotnik:

- $$\begin{aligned}\sin(\beta)/\sin(90° - \delta_S) &= \sin(\Delta\alpha)/\sin(l), \\ \sin(\beta) &= \sin(\Delta\alpha) \cdot \cos(\delta_S)/\sin(l).\end{aligned}$$

Oglejmo si trikotnik z oglišči NGP, NCP in Z. Dolžina loka od galaktičnega pola do zvezde je 90°, saj je izbrana zvezda na galaktičnem ekvatorju. Kot pri Z je koplementaren β.

Zapišimo kosinusni izrek za ta trikotnik in vstavimo prejšnjo zvezo za $\sin(\beta)$:

- $$\begin{aligned}\cos(E) &= \cos(90°) \cdot \cos(90° - \delta) + \\ &+ \sin(90°) \cdot \sin(90° - \delta) \cdot \cos(90° - \beta) = \\ &= \cos(\delta) \cdot \sin(\beta) \\ &= \cos(\delta) \cdot \sin(\Delta\alpha) \cdot \cos(\delta_S)/\sin(l).\end{aligned}$$

S tem izrazom pa lahko izračunamo E, tj. naklon galaktičnega ekvatorja glede na nebesni. Tretjine rezultatov, ki najbolj odstopajo od povprečja, ne upoštevamo in dobimo $E = 72{,}9°$.

→

ID	drugo ime	rektascenzija (h:min:s)	deklinacija (°:':")	oddaljenost od Sonca (kpc)
NGC 104	47 Tuc	00:24:05,67	−72:04:52,6	4,5
NGC 288		00:52:45,24	−26:34:57,4	8,9
NGC 362		01:03:14,26	−70:50:55,6	8,6
Whiting 1		02:02:57,00	−03:15:10,0	30,1
NGC 1261		03:12:16,21	−55:12:58,4	16,3
Pal 1		03:33:20,04	+79:34:51,8	11,1
AM 1	E 1	03:55:02,30	−49:36:55,0	123,3
Eridanus		04:24:44,50	−21:11:13,0	90,1
Pal 2		04:46:05,91	+31:22:53,4	27,2
NGC 1851		05:14:06,76	−40:02:47,6	12,1
NGC 1904	M 79	05:24:11,09	−24:31:29,0	12,9
NGC 2298		06:48:59,41	−36:00:19,1	10,8
NGC 2419		07:38:08,47	+38:52:56,8	82,6
Ko 2		07:58:17,00	+26:15:18,0	34,7
Pyxis		09:07:57,80	−37:13:17,0	39,4
NGC 2808		09:12:03,10	−64:51:48,6	9,6
E 3		09:20:57,07	−77:16:54,8	8,1
Pal 3		10:05:31,90	+00:04:18,0	92,5
NGC 3201		10:17:36,82	−46:24:44,9	4,9
Pal 4		11:29:16,80	+28:58:24,9	108,7
Ko 1		11:59:18,50	+12:15:36,0	48,3
NGC 4147		12:10:06,30	+18:32:33,5	19,3
NGC 4372		12:25:45,40	−72:39:32,4	5,8
Rup 106		12:38:40,20	−51:09:01,0	21,2
NGC 4590	M 68	12:39:27,98	−26:44:38,6	10,3
NGC 4833		12:59:33,92	−70:52:35,4	6,6
NGC 5024	M 53	13:12:55,25	+18:10:05,4	17,9
NGC 5053		13:16:27,09	+17:42:00,9	17,4
NGC 5139	omega Cen	13:26:47,24	−47:28:46,5	5,2
NGC 5272	M 3	13:42:11,62	+28:22:38,2	10,2
NGC 5286		13:46:26,81	−51:22:27,3	11,7
AM 4		13:56:21,70	−27:10:03,0	32,2
NGC 5466		14:05:27,29	+28:32:04,0	16,0
NGC 5634		14:29:37,23	−05:58:35,1	25,2
NGC 5694		14:39:36,29	−26:32:20,2	35,0
IC 4499		15:00:18,45	−82:12:49,3	18,8
NGC 5824		15:03:58,63	−33:04:05,6	32,1
Pal 5		15:16:05,25	−00:06:41,8	23,2
NGC 5897		15:17:24,50	−21:00:37,0	12,5
NGC 5904	M 5	15:18:33,22	+02:04:51,7	7,5
NGC 5927		15:28:00,69	−50:40:22,9	7,7
NGC 5946		15:35:28,52	−50:39:34,8	10,6
BH 176		15:39:07,45	−50:03:09,8	18,9
NGC 5986		15:46:03,00	−37:47:11,1	10,4
Lynga 7	BH184	16:11:03,65	−55:19:04,0	8,0
Pal 14	AvdB	16:11:00,60	+14:57:28,0	76,5
NGC 6093	M 80	16:17:02,41	−22:58:33,9	10,0
NGC 6121	M 4	16:23:35,22	−26:31:32,7	2,2
NGC 6101		16:25:48,12	−72:12:07,9	15,4
NGC 6144		16:27:13,86	−26:01:24,6	8,9
NGC 6139		16:27:40,37	−38:50:55,5	10,1
Terzan 3		16:28:40,08	−35:21:12,5	8,2
NGC 6171	M 107	16:32:31,86	−13:03:13,6	6,4
1636-283	ESO452-SC11	16:39:25,45	−28:23:55,3	8,3

ID	drugo ime	rektascenzija (h:min:s)	deklinacija (°:':")	oddaljenost od Sonca (kpc)
NGC 6205	M 13	16:41:41,24	+36:27:35,5	7,1
NGC 6229		16:46:58,79	+47:31:39,9	30,5
NGC 6218	M 12	16:47:14,18	−01:56:54,7	4,8
FSR 1735		16:52:10,60	−47:03:29,0	9,8
NGC 6235		16:53:25,31	−22:10:38,8	11,5
NGC 6254	M 10	16:57:09,05	−04:06:01,1	4,4
NGC 6256		16:59:32,62	−37:07:17,0	10,3
Pal 15		16:59:51,00	−00:32:20,0	45,1
NGC 6266	M 62	17:01:12,80	−30:06:49,4	6,8
NGC 6273	M 19	17:02:37,80	−26:16:04,7	8,8
NGC 6284		17:04:28,51	−24:45:53,5	15,3
NGC 6287		17:05:09,13	−22:42:30,1	9,4
NGC 6293		17:10:10,20	−26:34:55,5	9,5
NGC 6304		17:14:32,25	−29:27:43,3	5,9
NGC 6316		17:16:37,30	−28:08:24,4	10,4
NGC 6341	M 92	17:17:07,39	+43:08:09,4	8,3
NGC 6325		17:17:59,21	−23:45:57,6	7,8
NGC 6333	M 9	17:19:11,26	−18:30:57,4	7,9
NGC 6342		17:21:10,08	−19:35:14,7	8,5
NGC 6356		17:23:34,93	−17:48:46,9	15,1
NGC 6355		17:23:58,59	−26:21:12,3	9,2
NGC 6352		17:25:29,11	−48:25:19,8	5,6
IC 1257		17:27:08,50	−07:05:35,0	25,0
Terzan 2	HP 3	17:27:33,10	−30:48:08,4	7,5
NGC 6366		17:27:44,24	−05:04:47,5	3,5
Terzan 4	HP 4	17:30:39,00	−31:35:43,9	7,2
HP 1	BH 229	17:31:05,20	−29:58:54,0	8,2
NGC 6362		17:31:54,99	−67:02:54,0	7,6
Liller 1		17:33:24,50	−33:23:20,4	8,2
NGC 6380	Ton 1	17:34:28,00	−39:04:09,0	10,9
Terzan 1	HP 2	17:35:47,80	−30:28:11,0	6,7
Ton 2	Pismis 26	17:36:10,50	−38:33:12,0	8,2
NGC 6388		17:36:17,23	−44:44:07,8	9,9
NGC 6402	M 14	17:37:36,10	−03:14:45,3	9,3
NGC 6401		17:38:36,60	−23:54:34,2	10,6
NGC 6397		17:40:42,09	−53:40:27,6	2,3
Pal 6		17:43:42,20	−26:13:21,0	5,8
NGC 6426		17:44:54,65	+03:10:12,5	20,6
Djorg 1		17:47:28,30	−33:03:56,0	13,7
Terzan 5	Terzan 11	17:48:04,80	−24:46:45,0	6,9
NGC 6440		17:48:52,70	−20:21:36,9	8,5
NGC 6441		17:50:13,06	−37:03:05,2	11,6
Terzan 6	HP 5	17:50:46,38	−31:16:31,4	6,8
NGC 6453		17:50:51,70	−34:35:57,0	11,6
UKS 1		17:54:27,2	−24:08:43,0	7,8
NGC 6496		17:59:03,68	−44:15:57,4	11,3
Terzan 9		18:01:38,80	−26:50:23,0	7,1
Djorg 2	ESO456-SC38	18:01:49,10	−27:49:33,0	6,3
NGC 6517		18:01:50,52	−08:57:31,6	10,6
Terzan 10		18:03:36,40	−26:04:21,0	5,8
NGC 6522		18:03:34,02	−30:02:02,3	7,7
NGC 6535		18:03:50,51	−00:17:51,5	6,8
NGC 6528		18:04:49,64	−30:03:22,6	7,9
NGC 6539		18:04:49,68	−07:35:09,1	7,8

ID	drugo ime	rektascenzija (h:min:s)	deklinacija (°:':")	oddaljenost od Sonca (kpc)
NGC 6540	Djorg 3	18:06:08,60	−27:45:55,0	5,3
NGC 6544		18:07:20,58	−24:59:50,4	3,0
NGC 6541		18:08:02,36	−43:42:53,6	7,5
2MS-GC01	2MASS-GC01	18:08:21,81	−19:49:47,0	3,6
ESO-SC06	ESO280-SC06	18:09:06,00	−46:25:23,0	21,4
NGC 6553		18:09:17,60	−25:54:31,3	6,0
2MS-GC02	2MASS-GC02	18:09:36,50	−20:46:44,0	4,9
NGC 6558		18:10:17,60	−31:45:50,0	7,4
IC 1276	Pal 7	18:10:44,20	−07:12:27,4	5,4
Terzan 12		18:12:15,80	−22:44:31,0	4,8
NGC 6569		18:13:38,80	−31:49:36,8	10,9
BH 261	AL 3	18:14:06,60	−28:38:06,0	6,5
GLIMPSE02		18:18:30,50	−16:58:38,0	5,5
NGC 6584		18:18:37,60	−52:12:56,8	13,5
NGC 6624		18:23:40,51	−30:21:39,7	7,9
NGC 6626	M 28	18:24:32,81	−24:52:11,2	5,5
NGC 6638		18:30:56,10	−25:29:50,9	9,4
NGC 6637	M 69	18:31:23,10	−32:20:53,1	8,8
NGC 6642		18:31:54,10	−23:28:30,7	8,1
NGC 6652		18:35:45,63	−32:59:26,6	10,0
NGC 6656	M 22	18:36:23,94	−23:54:17,1	3,2
Pal 8		18:41:29,90	−19:49:33,0	12,8
NGC 6681	M 70	18:43:12,76	−32:17:31,6	9,0
GLIMPSE01		18:48:49,70	−01:29:50,0	4,2
NGC 6712		18:53:04,30	−08:42:22,0	6,9
NGC 6715	M 54	18:55:03,33	−30:28:47,5	26,5
NGC 6717	Pal 9	18:55:06,04	−22:42:05,3	7,1
NGC 6723		18:59:33,15	−36:37:56,1	8,7
NGC 6749		19:05:15,30	+01:54:03,0	7,9
NGC 6752		19:10:52,11	−59:59:04,4	4,0
NGC 6760		19:11:12,01	+01:01:49,7	7,4
NGC 6779	M 56	19:16:35,57	+30:11:00,5	9,4
Terzan 7		19:17:43,92	−34:39:27,8	22,8
Pal 10		19:18:02,10	+18:34:18,0	5,9
Arp 2		19:28:44,11	−30:21:20,3	28,6
NGC 6809	M 55	19:39:59,71	−30:57:53,1	5,4
Terzan 8		19:41:44,41	−33:59:58,1	26,3
Pal 11		19:45:14,40	−08:00:26,0	13,4
NGC 6838	M 71	19:53:46,49	+18:46:45,1	4,0
NGC 6864	M 75	20:06:04,69	−21:55:16,2	20,9
NGC 6934		20:34:11,37	+07:24:16,1	15,6
NGC 6981	M 72	20:53:27,70	−12:32:14,3	17,0
NGC 7006		21:01:29,38	+16:11:14,4	41,2
NGC 7078	M 15	21:29:58,33	+12:10:01,2	10,4
NGC 7089	M 2	21:33:27,02	−00:49:23,7	11,5
NGC 7099	M 30	21:40:22,12	−23:10:47,5	8,1
Pal 12		21:46:38,84	−21:15:09,4	19,0
Pal 13		23:06:44,44	+12:46:19,2	26,0
NGC 7492		23:08:26,63	−15:36:41,4	26,3

TABELA 1.

Podatki za kroglaste kopice v Galaksiji.

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

						6	
4		1					
			2		8		
		3					4
	5		3	2			
	2	4		8			6
			8	7			
7				6			2

REŠITEV BARVNI SUDOKU

2	3	7	5	4	1	6	8
4	8	1	6	3	2	5	7
5	4	6	2	1	8	7	3
8	7	3	1	5	6	2	4
6	5	8	3	2	7	4	1
1	2	4	7	8	5	3	6
3	6	2	8	7	4	1	5
7	1	5	4	6	3	8	2

Proceduralno generiranje terena s prelomnim algoritmom

Marko Jovčeski

Uvod

Gotovo ste se kdaj ob igranju katere od strateških iger vprašali, na kakšen način se vsakič ustvari nova igralna površina. Kako bi se vi lotili generiranja pokrajine?

Z razvojem računalniške grafike se je porodila potreba po hitrem generiranju vsebin, kar bi poenostavilo dolgotrajnost in zahtevnost ročnega modeliranja. V ta namen se je razvilo proceduralno generiranje vsebin, ki algoritmično ustvarja podatke. Pomemben del tega področja predstavlja proceduralno modeliranje, ki vključuje algoritme za naključno generiranje trirazsežnostnih modelov. Sem spada proceduralno generiranje terena, ki z uporabo algoritmov modelira pokrajine za uporabo v računalniški grafiki in animaciji, filmski industriji in tudi na drugih področjih, kot so geologija, geografija in inženirstvo [1–4].

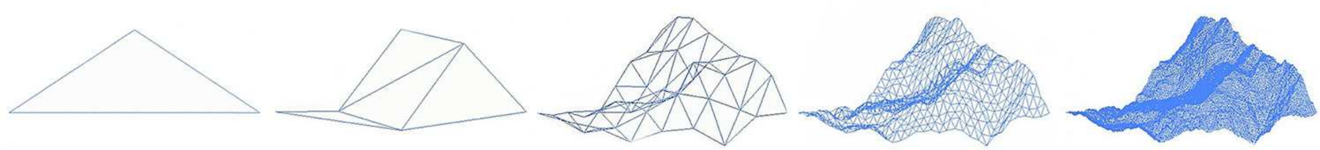
Eden od možnih pristopov h generiranju terena je uporaba funkcije dveh spremenljivk, katere graf je ploskev v trirazsežnem prostoru. Vendar se tak pristop navadno ne uporablja, saj so takšne funkcije težko izračunljive, niso dovolj naključne in njihovi grafi niso podobni pokrajinam v naravi.

V nadaljevanju bomo predstavili enega od možnih pristopov k naključnemu modeliranju terena z uporabo fraktalnega algoritma. Nastala fraktalna površina bo predstavljala želeni naključni teren. Zaradi fraktalnih lastnosti narave se izkaže uporaba takšnega algoritma kot zelo učinkovita, saj je takšno stopnjo naključnosti in kompleksnosti modela z uporabo klasičnih metod težko doseči. Na sliki 1 vidimo primer terena, generiranega s fraktalnim algoritmom.

Prelomni algoritem

S pojmom prelom opisujemo ploskovno razpoko ali razmeroma ozko razpokano cono v Zemljini skorji, povezano s preteklimi in morebitnimi prihodnjimi tektonskimi premiki [5]. *Fraktal* lahko definiramo kot geometrijski vzorec, ki ga dobimo s ponavljanjem nekega iterativnega procesa na preprostejšem mnogotniku ali poliedru.

Prelomni fraktal na grobo simulira posledice močnih potresov vzdolž naključnih prelomnih premic. Pod izrazom *prelomna premica* razumemo vsako takšno premico, ki gre skozi teren in ga deli na dva dela. Fraktal bomo ustvarili na prazni višinski sliki. *Višinska slika* je sivinska rasterska slika, ki se uporablja za shranjevanje vrednosti, običajno so to nadmorske višine. Bela barva predstavlja najvišjo višino,



SLIKA 1.
Primer generiranja fraktalnega terena v več korakih, od leve proti desni

črna pa najnižjo. Na prazni višinski sliki se bo izvršilo zaporedje »potresov« na sledeči način: na sliki se izbere naključna premica in vsako vozlišče nad to premico se premakne gor, vozlišča pod njo pa navzdol. Ta iterativni postopek se ponavlja, dokler ne dobimo zadovoljivega terena.

Psevdokoda

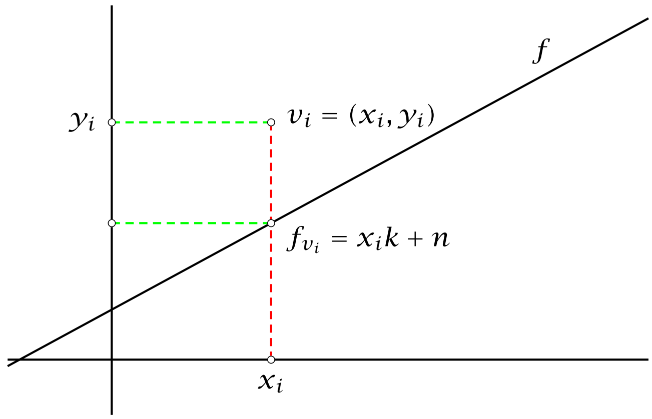
Algorithm 1 Prelomni fraktal

Require: Poligonska ravnina Π
Ensure: Poligonska mreža Π

$iter \Leftarrow 0$
while iter < stIteracij **do**
  $k \Leftarrow$ *naključno število*
    ▷ Zgenerira smerni koeficient k
  $n \Leftarrow$ *naključno število*
    ▷ Zgenerira odsek na osi y
  for all vozlišče $v_i \in \Pi$ **do**
    $f_{v_i} \Leftarrow x_i \cdot k + n$
      ▷ Izračuna točko na premici
    if $y_i > f_{v_i}$ **then**
      ▷ Če je vozlišče nad premico
      dvigni $z_i \Leftarrow z_i + \Delta h$
        ▷ Spremeni višino vozlišča v_i
    else
      spusti $z_i \Leftarrow z_i - \Delta h$
        ▷ Spremeni višino vozlišča v_i
    end if
  end for
  zmanjšaj $\Delta h \Leftarrow \Delta h-$ konst.
    ▷ Zmanjša spremembo višine
  $iter \Leftarrow iter + 1$
    ▷ Poveča števec izvedenih iteracij
end while

Delovanje algoritma

Poligonska ravnina je poseben primer poligonske mreže, ki zadošča Evklidovi definiciji ravnine. *Poligonska mreža* je v računalniški grafiki definirana kot 3-terica (V, E, F), kjer V predstavlja množico vozlišč (točk v prostoru), $E \subset (V \times V)$ množico robov (segmentov premice) in s $F \subset E^*$ označujemo množico lic (konveksnih poligonov). *Vozlišče* v računalniški grafiki predstavlja podatkovno strukturo, ki opisuje določene atribute. Običajno je to pozicija točke v



SLIKA 2.
Primer vozlišča v_i, ki leži nad generirano premico f.

dvorazsežnem ali trirazsežnem prostoru. Vozlišče v_i je 3-terica oblike (x_i, y_i, z_i), kjer so x_i, y_i in z_i elementi iz množice realnih števil $\mathbb{R}$.

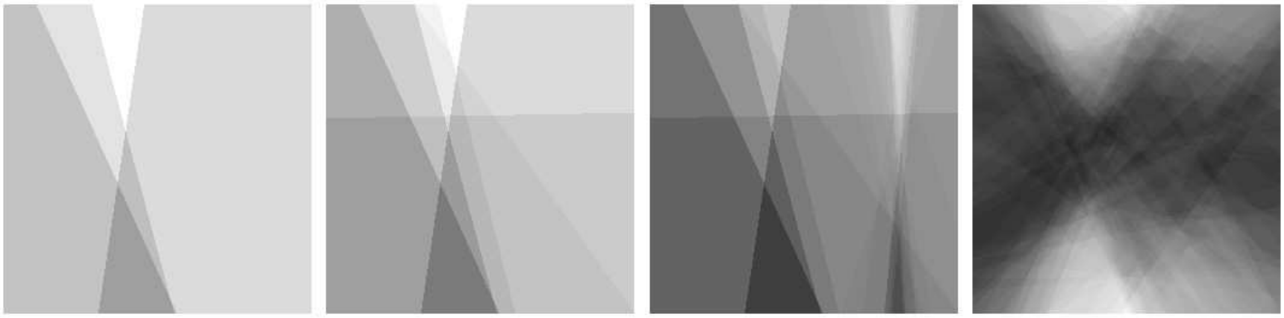
Poligonska ravnina se nahaja v tridimenzionalnem prostoru, vendar je premice dovolj generirati v dvodimenzionalnem prostoru. Zato je koordinata z v algoritmu uporabljena le takrat, ko se spremeni višina vozlišča v.

Algoritem izpolnjuje teren iterativno z izbiro dveh naključnih parametrov. Za vsako iteracijo se določita smerni koeficient k in odsek na y osi n.

$$y = k \cdot x + n \tag{1}$$

Enačba 1 predstavlja eksplicitno enačbo premice v ravnini $z = 0$, ki jo enolično določata parametra k in n. Za vsako vozlišče v_i poligonske ravnine Π je moč izračunati, ali v_i leži nad ali pod generirano premico. Algoritem preveri, ali bo vozlišče dvignil ali spustil tako, da koordinato x_i vstavi v formulo 1. Par (x_i, f_{v_i}) predstavlja točko, ki leži na premici f. Iz slike 2 je očitno, da zadošča pogledati odnos med koordinato y_i od vozlišča v_i in izračunan f_{v_i}. V primeru, da je $y_i \geq f_{v_i}$, se to vozlišče dvigne. Na tak način se preverijo vsa vozlišča, ki ležijo na poligonski ravnini, in priredi nova višina.

Po vsaki iteraciji se zmanjša sprememba višine Δh zato, da teren ne bo imel v vseh točkah enakih višinskih razlik. Atribut $consth$ je konstanta in določa razliko, za katero se zmanjšuje višina. Večja vrednost $consth$ pomeni hitrejše padanje Δh in s



SLIKA 3.
Primer štirih višinskih slik dimenzij 256×256 pikslov in barvne globine 8 po 4, 8, 32 in 128 iteracijah algoritma

tem tudi položnejši teren. Manjši $consth$ pomeni, da bo sprememba višine Δh manjša, zato se bo teren bolj strmo vzpenjal ali spuščal. Z drugimi besedami to pomeni, da $consth$ vpliva na razgibanost terena. Atribut $stIteracij$ neposredno vpliva na izgled terena, saj predstavlja število ponovitev algoritma. Za upodobitev realističnega terena je potrebnih veliko prelomov, kot je razvidno na sliki 5.

Sicer na takšen način ne moremo generirati navpičnih prelomov, saj v eksplicitni obliki naklon za navpično premico ni definiran, vendar izvzetje le–teh ne vpliva občutno na končni teren.

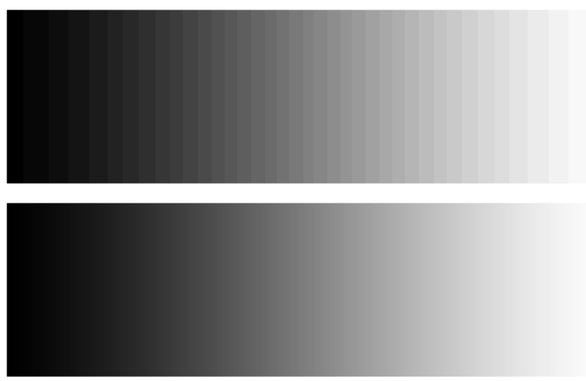
Primeri generiranih terenov

Na sliki 3 so prikazani primeri generiranih višinskih slik pri različnem številu iteracij prelomnega algoritma. Zgenerirana višinska slika je odvisna od števila zgeneriranih naključnih prelomov, dimenzije teksture ter barvne globine teksture.

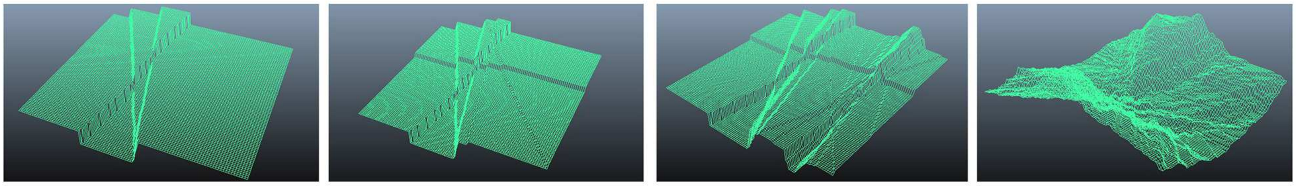
Na skrajno levi višinski sliki, prikazani na sliki 3, jasno ločimo, kje so potekale prelomne premice. Na sliki je le nekaj zelo podobnih sivih odtenkov, ki zavzemajo veliko površine. Iz tega lahko sklepamo, da bi teren iz takšne slike bil skoraj povsem raven, z malimi višinskimi razlikami. Druga slika je podobna prejšnji in pridemo tudi do enakih zaključkov. To ni presenetljivo, saj je razlika v iteracijah algoritma med slikama zelo majhna. Na tretjem primeru opazimo v zgornjem desnem kotu zabrisane meje, kjer so potekale prelomne premice. Ker je tisto območje svetlo obarvano, vemo, da bi v upodobitvi takšne višinske slike tam stal hrib, kot lahko vidimo na tretjem terenu na sliki 5.

Na skrajno desnem primeru zaznamo ogromno različnih odtenkov. Povemo lahko le, da ta višinska slika opisuje dve gori ter dolino med njima. Za razliko od prvih dveh višinskih slik, si je brez upodobitve v trirazsežnem prostoru takšen primer težko predstavljati.

Ker je višinska slika odvisna tudi od barvne globine generirane teksture, velja, da lahko teksture z večjo barvno globino tvorijo bolj razgibane terene.



SLIKA 4.
Primerjava sivinske lestvice med slikama z 8-bitno barvno globino (zgoraj) in 16-bitno barvno globino (spodaj)



SLIKA 5.
Primer generiranih terenov po 4, 8, 32 in 128 iteracijah algoritma na poligonski ravnini velikosti 10×10 enot z 10201 vozliščų v programu *Autodesk Maya*

Slika 4 ponazarja razliko dveh sivinskih lestvic.

Upodobitev višinskih slik iz slike 3 na ravnini v prostoru vidimo na sliki 5. Po dovolj veliko iteracijah algoritma lahko zmodeliramo realistični fraktalni teren, ki je dovolj dober za uporabo v računalniški grafiki ali na kakšnem drugem področju.

Zaključek

Vidimo, da fraktalni teren izkazuje značilnosti, ki bi jih pričakovali v pokrajinah iz narave. Sicer predstavljeni algoritem ne generira jam in votlin, za to se v praksi uporabijo posebni algoritmi, vendar pa smo z implementacijo prelomnega algoritma dobili realistične gore in doline. Če bi podoben teren želeli zmodelirati ročno, bi nam to vzelo precej časa.

Algoritem z vsako iteracijo obišče vsa vozlišča v poligonski mreži, zato je njegova časovna zahtevnost $O(n^2)$, kjer je n število vozlišč poligonske mreže. To med drugim pomeni, da algoritem ni primeren za uporabo v grafiki v realnem času, saj je prepočasen. Tovrstni algoritem se zato uporablja v predprocesiranju, kjer si vnaprej zgeneriramo poljubno število višinskih slik, ki jih potem uporabljamo kot teksture za upodobitev terena.

Postavi se nam vprašanje, ali je mogoče prelomni algoritem na kak način posplošiti. Izkaže se, da je z nekaj spremembami prelomni fraktal moč pretvoriti v algoritem, ki generira naključne planete. V tem primeru ne ločujemo ravnine s premico, ampak generiramo naključne ravnine, ki delijo sfero. Potrebno je samo določiti lego vozlišč glede na ravnino. Če se vozlišče nahaja nad prelomno ravnino, ga premaknemo v smeri njegovega normalnega vektorja, v primeru da se nahaja pod njo, pa v negativno smer tega vektorja.

Literatura

[1] D. S. Ebert, F. K. Musgrave, D. Peachey, K. Perlin in S. Worley, *Texturing and Modeling, Third Edition: A Procedural Approach*, Morgan Kaufmann, 2002.

[2] M. DeLoura, *Game Programming Gems 2*, Charles River Media, 2001.

[3] I. Parberry, *Tobler's First Law of Geography, Self Similarity, and Perlin Noise: A Large Scale Analysis of Gradient Distribution in Southern Utah with Application to Procedural Terrain Generation*, Technical Report LARC-2014-04, 2014.

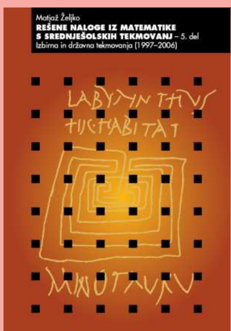
[4] e-on software, inc. *Vue Helps Industrial Light & Magic Create Environments for »Pirates Of The Caribbean: Dead Man's Chest« VFX*, ogled 12. 1. 2016. Dostopno na naslovu: `http://www.e-onsoftware.com/news/?page=pressreleases\&date=August\%201,\%202006`.

[5] J. Lapajne. Uprava Republike Slovenije za zaščito in reševanje. *Nekateri tektonski, seizmotektonski in seizmološki termini – 1. Del*, ogled 12. 1. 2016. Dostopno na naslovu: `http://www.sos112.si/slo/tdocs/ujma/2008/316.pdf`.

× × ×

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju matematike in fizike. Za lažjo pripravo vam ponujamo nekaj zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami, ki so na voljo pri DMFA–založništvu.



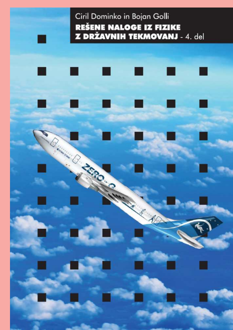
Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

Izb. in drž. tekm. 1997–2006

142 strani, format 14 × 20 cm

12,49 EUR



Ciril Dominko in Bojan Golli

REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ – 4. del

Državna tekmovanja 1999–2013

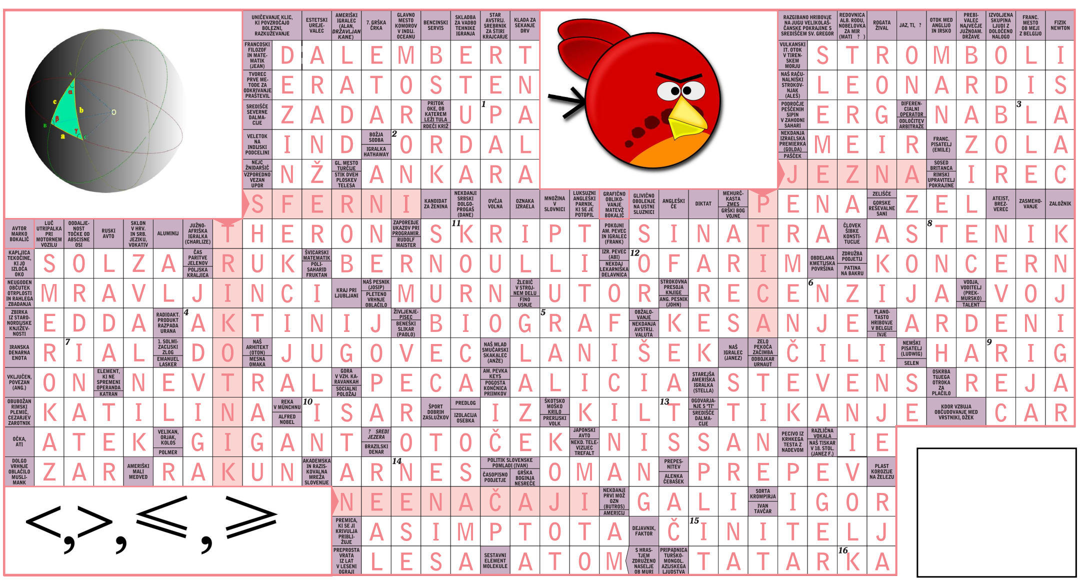
408 strani, format 14 × 20 cm

25,00 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 43/4

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke 43. letnika Preseka je **Polarni trikotnik**. Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Jani Čede iz Petrovč, Zoja Gašparič iz Ljubljane in Zala Hriberšek Mislinje, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Zmrznjena senca

Aleš Mohorič

Kadar so vremenske razmere prave (nizka temperatura zraka in tal, primerna vlažnost), nastane čez noč na tleh plast ledenih kristalov – slana. Če se noč nadaljuje v dovolj topel, jasen dan, se slana stali – pobere jo. V primeru, da tla ostanejo mrzla in je sončna svetloba glavni vir energije za taljenje ledu, lahko nastane senca, kot jo kaže današnja naravoslovna fotografija. Osenčeni del tal je pokrit s slano, na obsijanem pa slane ni več.

Izven zahodnega roba sence ostane ozek pas obsijane slane. Zakaj zahodni rob in kolikšna je širina tega pasu? Zemlja se vrti okoli svoje osi in zato Sonce na videz potuje po nebu od vzhoda proti zahodu. Ustrezno se senca na severni polobli vrti v smeri urinega kazalca in se premika od zahoda proti vzhodu. Od leve sega po sredini v fotografijo senca kamnitega stebra ograje. Dolžino sence ocenimo na 2 m. Nad zgornjim in desnim robom sence poteka kakih 5 cm širok pas obsijane slane. Senca se je s pasu obsijane slane umaknila šele pred kratkim. Sonce se na nebu v eni uri premakne za lok, ki ustreza kotu približno 15°. Hitrost premikanja Sonca po smereh neba (od vzhoda preko juga proti zahodu) pa ni točno 15° na uro, ampak na to hitrost vplivajo tudi geografska širina, letni in dnevni čas – vseeno zaradi preprostosti vzemimo, da se tudi senca obrača za 15° na uro. Kot, ki ob tej poenostavitvi ustreza širini pasu, je približno 5 cm/2 m = 0,03 rad. Senca se za tak kot zasuka v času 60 min 0,03 rad 180°/15°/π rad = 6 min. Torej, rob sence je segal čez pas slane še pred šestimi minutami.

V šestih minutah vpade s Sonca na kvadratni meter veliko, na sončne žarke pravokotno ploskev nad atmosfero 0,5 MJ energije. Na enako velik, vodoravni del tal pri naši zemljepisni širini vpade ob jutranjem času le kaka desetina te energije. Manj energije vpade zaradi absorpcije v atmosferi in zaradi kota, pod katerim svetloba vpada. Led, ki tvori slano, absorbira le kako desetino te energije. Torej je za taljenje ledu v slani na voljo kakih 5 kJ za kvadratni meter. Talilna toplota ledu je 334 kJ/kg in na kvadratnem metru tal se v šestih minutah stali nekaj deset gramov ledu, kar bi ustrezalo nekaj stotin milimetrov debeli kompaktni plasti ledu. Slana pa ne prekriva tal v enakomerno debeli plasti ampak v množici drobnih kristalčkov, med katerimi je zrak in zato so kristalčki tudi dosti daljši od te ocenjene debeline ledu.

× × ×

NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR

14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.