5

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

PRESEK LETNIK 41 (2013/2014) ŠTEVILKA **5**

PRESEK

→ KROŽNA KONSTANTA IN SKRIVNOSTNI ROKOPIS
→ SENCA SLAMICE
→ ALI OBSTAJA ŽIVLJENJE NA EKSOPLANETU MAJA?
→ POMOČ ZA TRGOVSKEGA POTNIKA

ISSN 0351-6652

9 770351 665159

MATEMATIČNI TRENUTKI

Manevriranje vesoljskih plovil

→ Čeprav mednarodne vesoljske postaje nikoli nismo prisiljeni parkirati bočno, so večkrat potrebni natančni manevri, ki spremenijo orientacijo vesoljskih plovil. Takšne rotacije v treh razsežnostih niso enostavne. Nekatera plovila si pomagajo s potiskom, druga pa izkoristijo vrtilno količino, ki je shranjena v žiroskopih in podobnih napravah. Ustrezna programska oprema si pri izračunih večinoma pomaga s kvaternioni, ki so nekakšna štirirazsežna posplošitev kompleksnih števil. Tako določimo pot, ki je potrebna za spremembo orientacije. S pomočjo diferencialnih enačb je potrebno poiskati optimalne poti, ki minimalizirajo potreben čas in porabo goriva.

Dodatno težavo pri manevriranju v prostoru povzročajo napake, do katerih pride pri združevanju dveh plovil. Pri pristanku se večkrat spremenijo fizikalne lastnosti plovil, npr. njihove simetrijske osi. Ena od metod, ki jo imenujemo tudi Optimalni pogonski manever, deluje tudi v primerih, ko se plovilu spremeni masa. Potisne šobe upravlja tako učinkovito, da je samo v prejšnjem letu privarčevala več milijonov dolarjev in več kot 1100 kilogramov goriva. Število potiskov zmanjša na najmanjše možno število s pomočjo linearne algebre in aproksimacije funkcij. S tem zmanjša tudi strukturno obremenitev postaje in tako podaljša njeno življenjsko dobo.

Če vas ta tema bolj zanima, si preberite članek *Optimal Propellant Maneuver Flight Demonstrations on ISS* v reviji American Institute of Aeronautics and Astronautics, ki so ga leta 2013 napisali S. Bhatt, N. Bedrossian in L. Nguyen.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 41, šolsko leto 2013/2014, številka 5

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2013/2014 je za posamezne naročnike 18,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 15,75 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Žled je ledena prevleka na rastlinah in predmetih na zemeljskem površju. Nastane po obdobju hladnega vremena, ko toplejši in vlažni zrak pride nad ohlajeno površje. Iz oblakov pada dež, ki se na poti do tal podhladi, tako da je v kapljicah voda pod lediščem. Ko kapljice dosežejo mrzla tla, tam zmrzujejo v vedno debelejšo plast ledu. Žled povzroča škodo na rastlinju, saj se led obdrži na veji, tudi ko se veja povesi. Foto: Aleš Mohorič

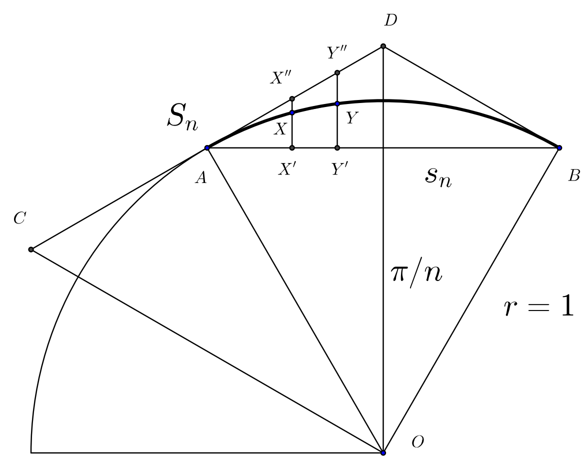
Krožna konstanta in skrivnostni rokopis

Marko Razpet

O številu π, krožnem številu ali krožni konstanti, to je o razmerju med obsegom in premerom kroga, je bilo v Preseku že veliko napisanega. Kljub temu pa ne bi škodilo, če celotno zgodbo dopolnimo še z nekaterimi, verjetno za marsikoga manj znanimi dejstvi. Morda je celo pravi čas, da to naredimo, kajti v letu 2014 praznujemo 260-letnico rojstva barona Jurija Vege in 200-letnico rojstva viteza Franca Močnika. Oba matematika sta omenjena v nadaljevanju.

Dolgo časa, od Arhimeda iz Sirakuz (živel je približno od leta 287 do leta 212 pred našim štetjem) pa vse do Isaaca Newtona (1643–1727), so število π računali z metodo krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov, po tako imenovani *arhimedski metodi*. Najbolje to razumemo, če začnemo s pravilnim šestkotnikom, izračunamo njegov obseg in ga delimo s premerom kroga, kateremu je bil včrtan (tabela 1). Dobimo prvi približek za število π. Nato preidemo na pravilni 12-kotnik, včrtan istemu krogu, izračunamo njegov obseg in ga delimo s premerom kroga. Dobimo drugi, boljši približek za število π. Sledi pravilni 24-kotnik in nov približek za π. Tako nadaljujemo do pravilnega $3 \cdot 2^n$-kotnika, pri čemer na vsakem koraku iz stranice prejšnjega pravilnega večkotnika izračunamo stranico naslednjega pravilnega večkotnika.

Krogu s polmerom $r = 1$ včrtamo in očrtamo pravilni n-kotnik s stranico s_n oz. S_n. Oba razdelimo na enakokrake trikotnike z vrhom v središču O kroga (slika 1). Na sliki sta načrtana dva taka enakokraka trikotnika: tisti od včrtanega n-kotnika ima osnovnico AB z dolžino s_n, oni od očrtanega n-kotnika pa ima osnovnico CD z dolžino S_n.



SLIKA 1.
Stranici krogu včrtanega in očrtanega večkotnika.

Kot ob vrhu je $2\pi/n$ (na sliki je označena polovica tega kota) in brez težav izrazimo stranici

- $s_n = 2\sin(\pi/n), \quad S_n = 2\,\mathrm{tg}(\pi/n)$

ter ustrezna obsega, $o_n = ns_n$ in $O_n = nS_n$. Očitno je $s_6 = 1$ in $S_6 = 2\sqrt{3}/3$.

Kaj je dolžina daljice ali pa iz daljic sestavljene krivulje, je lahko razumeti, medtem ko je dolžina poljubne krivulje, s tem pa tudi dolžina krožnega loka, nekoliko težji pojem. Vzdolž krivulje od začetne točke Z proti končni točki K po vrsti poljubno izberemo točke $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$ in seštejemo razdalje:

- $|ZT_1| + |T_1T_2| + \ldots + |T_{m-1}K|$.

To je približek dolžine krivulje med Z in K. Če kakšno točko na krivulji med Z in K dodamo, dobimo kvečjemu več. Za razdalje namreč velja *trikotniška neenakost*. Toda točke od Z do K lahko izberemo na nešteto načinov in dobimo nešteto ustreznih vsot dolžin. Katero sedaj izbrati za dolžino krivulje? Navadno nobene od teh. Za dolžino vzamemo *natančno zgornjo mejo* ℓ, to je najmanjšo zgornjo mejo *vseh* vsot dolžin, dobljenih na opisani način. Če so vse te vsote navzgor omejene, potem natanko eno tako število ℓ zaradi narave realnih števil tudi obstaja in ga imenujemo *dolžina krivulje* med točkama Z in K.

Sedaj nas zanima krožni lok med točkama A in B na sliki 1. Izberimo na tem loku točki X in Y. Njuni pravokotni projekciji na tetivo AB sta X' in Y'. Daljici $X'X$ in $Y'Y$ podaljšamo do točk X'' in Y'' na daljici AD oziroma DB. Očitno je zaradi lastnosti trikotnikov $|X'Y'| < |XY| < |X''Y''|$. Če vzdolž krožnega loka od A do B kakorkoli po vrsti izberemo točke $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$, potem je zaradi prejšnje ugotovitve

$$
\begin{aligned}
s_n = |AB| &< |AT_1| + |T_1T_2| + \ldots + |T_{m-1}B| \\
&< |AD| + |DB| = S_n.
\end{aligned}
$$

Torej obstaja dolžina ℓ_n krožnega loka med A in B in velja. $s_n < \ell_n < S_n$. Obseg kroga ℓ je seveda $n\ell_n$ in posledično je $ns_n < n\ell_n < nS_n$, zato za obseg kroga ℓ za vsak n velja relacija $o_n < \ell < O_n$. Za razmerji med obsegoma in premerom krogu včrtanega in očrtanega pravilnega n-kotnika, ki ju ustrezno označimo s $\underline{\pi}_n = o_n/2$ in $\overline{\pi}_n = O_n/2$, ter za razmerje med obsegom in premerom kroga, to je $\pi = \ell/2$, velja za vsak n relacija $\underline{\pi}_n < \pi < \overline{\pi}_n$. Z rastočim n se razlika $\overline{\pi}_n - \underline{\pi}_n$ manjša in je za dovolj velik n manjša od še tako majhnega pozitivnega števila. Pri tem zaporedje $\{\underline{\pi}_n\}$ narašča, zaporedje $\{\overline{\pi}_n\}$ pa pada proti istemu številu, to je ravno π. Vsak $\underline{\pi}_n$ je spodnji, vsak $\overline{\pi}_n$ pa zgornji približek števila π.

Naloga 1. Načrtajte grafa funkcij $x \mapsto \sin x/x$ in $x \mapsto \operatorname{tg} x/x$ na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ in s pomočjo grafov preverite, da zaporedje $\{\underline{\pi}_n\}$ narašča, zaporedje $\{\overline{\pi}_n\}$ pa pada proti istemu številu, in sicer proti številu π.

Med stranicama s_n in s_{2n} ter med S_n in S_{2n} obstajata zvezi

$$
s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}, \quad S_{2n} = 2\frac{\sqrt{4 + S_n^2} - 2}{S_n}. \tag{1}
$$

Naloga 2. Zapišite izraza za s_{2n} in S_{2n} ter preverite relaciji (1) s trigonometričnimi formulami.

Z relacijama (1) lahko izračunamo zgornje in spodnje približke števila π, to je $\underline{\pi}_{2n}$ in $\overline{\pi}_{2n}$. Nekaj približkov, zapisanih na 10, izračunanih pa na nekaj več decimalk, je zbranih v tabeli 1. Avtor seveda ni računal približkov v tej in naslednjih tabelah tako, kot so delali nekoč, ampak z računalniškim programom DERIVE, ki obvlada veliko decimalk.

n	$\underline{\pi}_n$	$\overline{\pi}_n$
6	3,00000 00000	3,46410 16151
12	3,10582 85412	3,21539 03091
24	3,13262 86132	3,15965 99420
48	3,13935 02030	3,14608 62151
96	3,14103 19508	3,14271 45996
192	3,14145 24722	3,14187 30499
384	3,14155 76079	3,14166 27470
768	3,14158 38921	3,14161 01766
1536	3,14159 04632	3,14159 70343
3072	3,14159 21059	3,14159 37487
6144	3,14159 25166	3,14159 29273
12288	3,14159 26193	3,14159 27220
24576	3,14159 26450	3,14159 26707
49152	3,14159 26514	3,14159 26578
98304	3,14159 26530	3,14159 26546
196608	3,14159 26534	3,14159 26538
393216	3,14159 26535	3,14159 26536

TABELA 1.
Spodnji in zgornji približki števila π.

Namesto s pravilnim šestkotnikom lahko začnemo tudi s kvadratom. Delo je očitno zamudno in nekateri so tako računali v potu svojega obraza število π tudi po več let. Samo ugibamo lahko, o čem so pri tem razmišljali. Je pa res, da je razvoj znanosti terjal vedno bolj natančne vrednosti matematičnih in drugih konstant.

Pomembno vlogo pri računanju števila π, pravzaprav $\tau = 2\pi$, je odigral zdravnik, matematik in astronom Al-Kaši, ki se je rodil okoli leta 1380 v Iranu, znanstveno pa deloval v Samarkandu v današnjem Uzbekistanu, kjer je leta 1429 tudi umrl. Znan je po marsičem, omenimo le nekaj njegovih del. Na veliko decimalk je izračunal sin 1° z iteracijo, o čemer smo že pisali v Preseku, z uporabo pravilnega $3 \cdot 2^{28}$-kotnika pa je okoli leta 1424 našel na devet šestdesetiških mest za celim delom število: $\tau = 6; 16, 59, 28, 01, 34, 51, 46, 14, 50$. Zapis pomeni $\tau = 6 + 16 \cdot 60^{-1} + 59 \cdot 60^{-2} + 28 \cdot 60^{-3} + \ldots$, kar je v desetiškem sistemu $\tau = 6{,}283\,185\,307\,179\,586\,4$ in je pravilno na 16 decimalk.

Druga zanimivost je *kosinusni izrek* za ravninske trikotnike. Izrek povezuje stranice trikotnika a, b, c z enim njegovim notranjim kotom, npr. s kotom γ, ki je nasproti stranice c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Do Al-Kašija sta bila znana kosinusna izreka (za stranice in kote) za sferne trikotnike, ki so ju uporabljali v astronomiji. Kosinusni izrek za ravninske trikotnike je v bistvu zapisal že Evklid v svojih Elementih, le da ni uporabljal funkcije kosinus, ampak ustrezno pravokotno projekcijo. Ko je kosinusni izrek, ki ga je odkril Al-Kaši, prišel na Zahod, so ga nekateri imenovali *Al-Kašijev izrek*. Francozi v Franciji mu še vedno pravijo *Théorème d'Al-Kashi*, v drugih deželah, kjer govorijo francosko, pa *Loi des cosinus*, kar dobesedno pomeni *kosinusni zakon*.

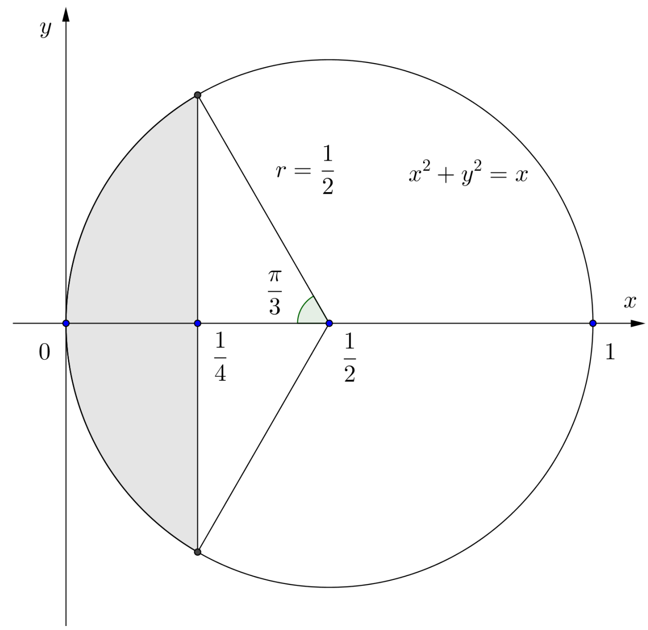
Ludolph van Ceulen (1540–1610) je polovico svojega življenja porabil za izračun števila π po arhimedski metodi in svoje delo okronal s 35 točnimi decimalkami. Očitno se je uporabljena metoda izčrpala.

Do Newtona bistvenega napredka v računanju decimalk števila π ni bilo. Newton ga sicer ni izračunal na več kot 15 decimalk, je pa uporabil novost, in sicer številske vrste. Vzel je krog, omejen s krožnico $x^2 + y^2 = x$, od katerega je s premico $x = 1/4$ odrezal odsek, in zapisal njegovo ploščino S na dva načina: kot razliko ploščin krožnega izseka z notranjim kotom $2\pi/3$ in temu včrtanega enakokrakega trikotnika ter z integralom funkcije $x \mapsto \sqrt{x - x^2}$ na intervalu $[0, 1/4]$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 2\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,dx.$$

Ker je že poznal binomsko vrsto, mu to ni bilo težko, brez zadrege jo je členoma integriral in nazadnje dobil:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-2)!}{(2n+3)2^{4n+1}(n!)^2}.$$



SLIKA 2.
Krožni odsek, ki nam pomaga izraziti število π.

Seštel je nekaj členov dobljene vrste, izračunal še $\sqrt{3}$, pri čemer je vse delal na primerno število decimalk in leta 1666 našel približek za število π na 15 decimalk natančno. Tabela 2 kaže, kako raste število točnih decimalk, ko v zgornji vrsti upoštevamo prvih m členov in dobimo približke π_m števila π.

m	π_m
10	3,14159 26541 65068 11554 17997 46458
20	3,14159 26535 89793 35498 34596 47026
30	3,14159 26535 89793 23846 26864 65927
40	3,14159 26535 89793 23846 26433 83300
50	3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
60	3,14159 26535 89793 23846 26433 83279

TABELA 2.
Približki števila π po Newtonovi metodi.

V tistih časih je bila že znana vrsta

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{2}$$

ki konvergira, če je $|x| \leq 1$. Ponovno jo je odkril James Gregory (1638–1670). *Ponovno* zato, ker jo je poznal že Indijec Madhava iz Sangamagrame (1340–1425) v obliki, ki jo dobimo, če v (2) x zamenjamo s $\operatorname{tg}\varphi$, pri čemer mora za konvergenco veljati $|\operatorname{tg}\varphi| \leq 1$.

Vrsta (2) konvergira tem hitreje, čim manjši je x. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) je vedel, da za $x = 1$ dobimo vrsto

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ki pa zelo počasi konvergira. Za borih deset točnih decimalk števila π je treba sešteti kakšnih pet milijard njenih členov.

Abraham Sharp (1653–1742) je v vrsto (2) vstavil $x = \sqrt{3}/3$, dobil po poenostavitvi vrsto

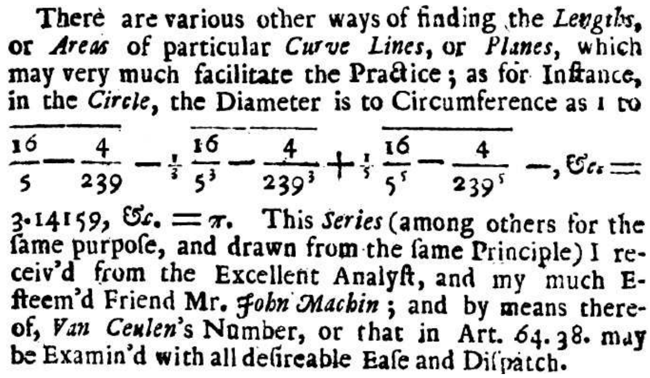
$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \tag{3}$$

in uspel leta 1699 najti 71 točnih decimalk števila π. Formula je nerodna zaradi faktorja $\sqrt{3}$, ki ga je treba tudi izračunati na veliko število decimalk.

Na srečo pa imajo trigonometrične funkcije adicijske izreke s svojimi posledicami, s katerimi dosežemo mnogo hitrejšo konvergenco. Ena takih je *Machinova formula*

$$\pi = 4\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}\right), \tag{4}$$

poimenovana po Johnu Machinu (1680–1751), ki je oba člena v (4) po formuli (2) razvil v vrsti, seštel dovolj členov in izračunal število π na 100 pravilnih decimalk. Pri tem je očitno potekal ves račun samo z racionalnimi števili. William Jones (1675–1749) je leta 1706 v delu *Synopsis Palmariorum Matheseos* opisal Machinov uspeh z vsemi stotimi decimalkami števila π, avtorja zelo pohvalil glede natančnosti in predlagal, da se krožno konstanto označi s π, ker je to prva črka grške besede περιφέρεια, kar pomeni obod, krog (slika 3). To besedo uporablja tudi Evklid v svojih Elementih. Formulam, ki so oblike (4), v


There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Inſtance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -$, &c. $=$ 3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the ſame purpoſe, and drawn from the ſame Principle) I receiv'd from the Excellent Analyſt, and my much Eſteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all deſireable Eaſe and Diſpatch.

SLIKA 3.
Kako je William Jones označil krožno konstanto.

katerih je lahko tudi več členov z arctg racionalnega števila, pravimo *formule Machinovega tipa.*

Thomas Fantet de Lagny (1660–1734) je bil še bolj vztrajen kot Sharp, kajti z vrsto (3) je leta 1719 izračunal število π na 127 decimalk, dve leti kasneje pa je bil rezultat objavljen. Prvih 112 decimalk je v De Lagnyjevem rezultatu točnih, 113. decimalka pa je napačna (namesto 8 je zapisano 7), naslednje, od 114. do 127. pa so pravilne. Morda gre pri nesrečni 113. decimalki le za napako pri prepisovanju ali stavljenju v tiskarni. Kot kaže, se dolgo vrsto let z računanjem števila π nihče ni več resno ukvarjal in kot najboljši dotakratni rezultat so po matematičnih besedilih navajali objavljeni De Lagnyjev približek z napako na 113. decimalki vred.

Leonhard Euler (1707–1783) je pri vsem svojem ogromnem delu razvil tudi nekaj formul Machinovega tipa za izračun števila π. Sam z računanjem krožne konstante ni izgubljal dragocenega časa, izračunal je na hitro le 20 njenih decimalk leta 1755. S svojim velikim vplivom pa je dosegel, da se jo še danes označuje s π, kar je prvi predlagal omenjeni Jones.

Baron Jurij Vega (1754–1802) je uporabljal formule Machinovega tipa in leta 1789 poslal akademiji znanosti v Sankt Peterburg svoj izračun števila π na 143 decimalk z opisom postopka vred. Bil je prepričan, da je 140 decimalk točnih, v resnici pa jih je bilo točnih samo 126. Je pa odkril, da je 113. De Lagnyjeva decimalka 8, ne pa 7. Akademija je z objavo zakasnila: namesto leta 1791 je luč sveta Vegov π v Rusiji ugledal šele leta 1795. Toda Vega je najbrž sam ugotovil napako in leta 1794 v dodatku k svoji *Popolni zakladnici logaritmov* objavil število π na 140 decimalk, od katerih pa so zadnje štiri spet napačne. Isti rezultat so ponatisnili še 15 let po Vegovi smrti v njegovem učbeniku. Ker boljšega rezultata tisti čas ni bilo, nihče pravzaprav ni vedel, katere decimalke od 126. naprej so pravilne.

Sledi glavno presenečenje. Leta 1822 je Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832), profesor matematike v Göttingenu, v svojem učbeniku objavil 157 decimalk števila π. Na tamkajšnji univerzi je takrat deloval tudi Carl Friedrich Gauß (1777–1855), najboljši takratni matematik sploh. Pravijo, da Gauß ni nič kaj rad predaval, kajti Thibaut ga je kot predavatelj popolnoma zasenčil. Od kod sedaj Thibautu število π na toliko decimalk? Če pa pozorno pogledamo v njegov učbenik, opazimo napako že na 10. decimalki: namesto 5 piše 9. Naslednja napaka je na 108. decimalki: namesto 6 stoji 3. Potem sledijo pravilne decimalke vse do 127. Sledita popolnoma napačni decimalki 4 in 6, za katerima pa je šest pravilnih decimalk, samo da so za dve mesti pomaknjene v desno. Sledi decimalka 1, ki je napačna, nato pa kar 19 pravilnih decimalk, ki so za tri mesta pomaknjene v desno. Zadnji dve, 156. in 157. pa sta napačni. Verjetno so napake nastale pri prepisovanju ali stavljenju v tiskarni, kajti v naslednji izdaji učbenika leta 1831 sta popravljeni 10. in 108. decimalka, izpuščene so vrinjene decimalke 4, 6 ter 1 in tako natiskano število π je popolnoma pravilno na 152 decimalk. Napačni sta le zadnji dve, 0 in 2, kar se lepo vidi v tabeli 3, v kateri je zapisanih nekaj decimalk, od vključno 126. naprej.

V tabeli 3 kratica in letnica pomenita, kdo in kdaj je približek števila π objavil oz. poslal v objavo: L — De Lagny, V — Vega, T — Thibaut, R — Rutherford, D — Dase. Prečrtane števke so napačne, podčrtane pa odveč. Thibaut je sicer opisal postopek za izračun, ni pa navedel, od kod mu 154 decimalk, od tega kar 152 pravilnih.

Leta 1841 je William Rutherford (1798–1871) objavil 208 decimalk števila π, ki ga je izračunal po formuli Machinovega tipa. Opisal je postopek in zapisal, da se njegov izračun zagotovo ujema na 152 decimalk z izračunom na rokopisu, ki leži v Radcliffski knjižnici v Oxfordu. Fizik John Radcliffe (1652–1714) pa je tisti, po katerem je knjižnica dobila ime. Žal je bilo kljub vsemu trudu samo teh 152 decimalk

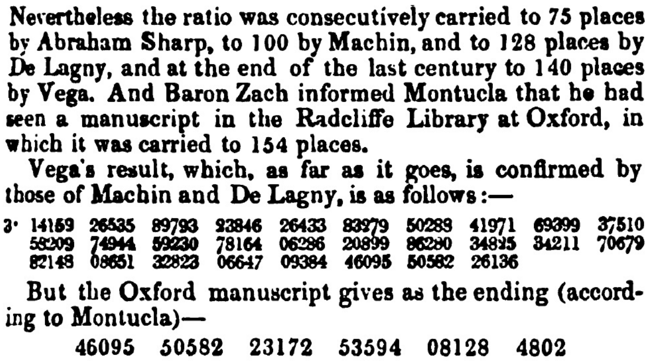
	130 140 150
prav	46095505822317253594081284811174…
L 1719	46
V 1789	4~~47672138611733138~~
V 1794	46095505822~~6136~~
T 1822	46~~$\underline{46}$095505$\underline{1}$822317253594081284802~~
T 1831	460955058223172535940812848~~02~~
R 1841	460955058223172535940812848~~47378~~…
D 1844	46095505822317253594081284811174…

TABELA 3.

Zadnje decimalke objavljenih približkov števila π.

točnih, vse nadaljnje pa napačne, o čemer Rutherford ni mogel vedeti, ker boljšega rezultata ni bilo. Na vprašanje, ki ga mu je nekdo zastavil leta 1842 glede rokopisa v Oxfordu, je odgovoril, da ga sicer sam ni videl, da pa o njegovem obstoju ne dvomi, češ da je naveden z vsemi do takrat znanimi decimalkami v *Penny Cyclopaedia, Vol. XIX* iz leta 1841. Pod geslom *Quadrature of the circle* je res opisana vsa problematika v zvezi z obsegom in ploščino kroga ter seveda z računanjem števila π. Med drugimi je omenjen tudi Vega in njegovih 140 decimalk. Pomemben pa je zapis, da je grof Franz Xaver Zach (1754–1832), priznani astronom, seznanil Montucla o Radcliffskem rokopisu. Francoz Jean-Étienne Montucla (1725–1799) je bil uveljavljeni zgodovinar matematike. Če je to res, je nekdo izračunal število π na 152 točnih decimalk že pred letom 1800. Očitno pa so ga prepisovali in pošiljali naokoli. Verjetno ga je tako dobil tudi Thibaut. Ostaja pa popolna skrivnost, kdo je avtor omenjenega rokopisa. Novejše uradne kronologije števila π v Radcliffskem rokopisu niti ne omenjajo.

Leta 1844 je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) izračunal 200 točnih decimalk števila π po neki drugi formuli Machinovega tipa. Formulo je izpeljal Leopold Karl Schulz von Straßnitzki (1803–1852). Rezultat je bil objavljen v nemški reviji *Crelle's Journal*, kar je popularno ime za *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki izhaja še danes, ustanovil pa jo je leta 1826 matematik August Leopold Crelle (1780–1855).


Nevertheless the ratio was consecutively carried to 75 places by Abraham Sharp, to 100 by Machin, and to 128 places by De Lagny, and at the end of the last century to 140 places by Vega. And Baron Zach informed Montucla that he had seen a manuscript in the Radcliffe Library at Oxford, in which it was carried to 154 places.

Vega's result, which, as far as it goes, is confirmed by those of Machin and De Lagny, is as follows:—

3· 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 26136

But the Oxford manuscript gives as the ending (according to Montucla)—

46095 50582 23172 53594 08128 4802

SLIKA 4.
Penny Cyclopaedia 1841; detajl.

Straßnitzki takoj za petimi vrsticami decimalk števila π predstavi Daseja iz Hamburga kot nadpovprečnega računarja, sposobnega računanja na pamet z dolgimi večmestnimi števili. Dase se je preživljal s tem, da je po gostilnah za denar na pamet računal s takimi števili. Ravno zaradi izjemne sposobnosti je Straßnitzki najel Daseja kot nekakšno živo računalo, da mu je izračunal krožno konstanto na 200 decimalk, in to v dveh mesecih. Mimogrede omeni tudi dokument v Radcliffski knjižnici in ujemanje Dasejevega izračuna na prvih 152-ih decimalkah. Prosil je celo oblasti, da bi mlademu Daseju pomagale najti primerno službo. Žal je Dase prej umrl, preden je dobil stalno zaposlitev.

Straßnitzki, rojen v Krakovu, je študiral matematiko, fiziko in še nekatere druge vede na Dunaju. Med letoma 1827 in 1834 je predaval matematiko na ljubljanskem liceju in našega Franca Močnika (1814–1892), bodočega matematičnega pedagoga in pisca matematičnih učbenikov, navdušil za študij matematike. V Ljubljani je Straßnitzki imel več javnih predavanj iz višje matematike in astronomije. Iz Ljubljane je odpotoval v Lvov, kjer je leta 1834 doktoriral in postal univerzitetni profesor. Nazadnje pa se je ustalil na Dunaju, kjer je razmeroma mlad umrl.

Za konec omenimo, da je Rutherford še enkrat stisnil zobe in število π leta 1853 izračunal na 440 točnih decimalk. Takrat je bilo drugače: primerjal se je lahko z Williamom Shanksom (1812–1882), ki je istega leta izračunal 527 točnih decimalk.

× × ×

Prostornina sodov

Janez Strnad

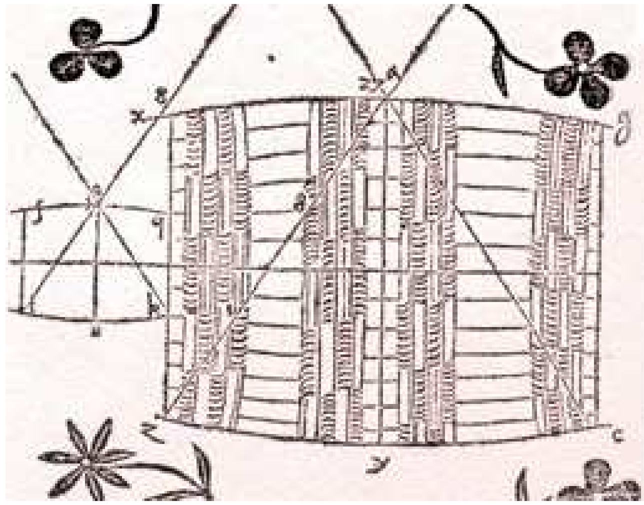
Johannes Kepler je sicer najbolj znan po treh zakonih o gibanju planetov (1609 in 1618). Odkril pa je tudi večino spoznanj geometrijske optike, ki jo vsebujejo današnji srednješolski učbeniki. Med drugim je tako navedel približek $\alpha/\beta = n$ za lomni zakon, ki ga tedaj še niso poznali in ga še dandanes uporabljamo pri preprostih računih za leče. Obravnaval je tudi sestave leč ter predlagal daljnogled z dvema zbiralnima lečama. Po obliki snežink je sklepal, da kristale sestavljajo gosto naložene kroglice.

Leta 1613 je trta obilno obrodila in na donavski obali v Linzu so živahno trgovali ter nalagali sode z vinom na ladje. Tudi Kepler je kupil nekaj sodov. Postal je pozoren na to, kako je trgovec izmeril prostornino vina in določil ceno. Skozi odprtino na sredi zgornjega dela ležečega soda je poševno segel do dna z merilno palico. Na palici je odčital, do kod je segalo vino, in po tem določil ceno. Kepler spočetka temu ni zaupal in se je zadeve lotil z matematiko. Hitro je sestavil kratek rokopis, ki pa je obtičal pri tiskarju. Kasneje je v njem popravil napake in besedilo dopolnil; leta 1615 je tako izšla *Nova stereometrija vinskih sodov*. V njej je izračunal prostornino 92 različnih teles, ki so nastala z vrtenjem dela krožnice, elipse, parabole ali hiperbole. S tem je Kepler naredil enega od korakov proti diferencialnemu računu, ki sta ga kasneje razvila Isaac Newton in Gottfried Wilhelm Leibniz (slika 3). Telesa je poimenoval po plodovih s podobno obliko: jabolko, sliva, limona… Paul Guldin, s katerim si je Kepler dopisoval, je opozoril, da so nekateri Keplerjevi sklepi le približni, drugi pa povsem zgrešeni. Po Keplerjevi zaslugi pa so se matematiki začeli podrobneje ukvarjati z vrteninami.

A vrnimo se k sodom.

Uradno imenovani cenilci – »vizirci« – so na opisani način z merilno palico segli v sod poševno do osnovne ploskve na eno in na drugo stran. Upoštevali so povprečje potopljene dolžine, če sod morda ni bil čisto simetričen ali ni stal na čisto vodoravni podlagi.

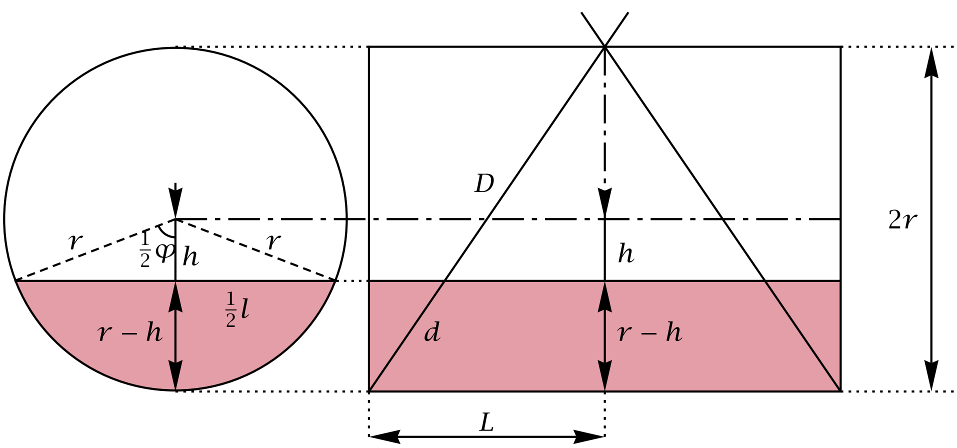
Keplerja je zanimala predvsem prostornina soda, to je prostornina vina v zvrhano polnem sodu. Vzemimo, da je sod valj s premerom $2r$ in dolžino L (sliki 1 in 2). Prostornina je zmnožek ploščine osnovne ploskve, to je kroga $p_0 = \pi r^2$, in dolžine $V_0 = p_0 L = \pi r^2 L$. Od sredine soda na vrhu do spodnjega roba vodi diagonala v polovici osnega preseka $D = \sqrt{(2r)^2 + (\frac{1}{2}L)^2}$. Z njo je Kepler izrazil kvadrat polmera $r^2 = \frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}L^2$ in dobil za prostornino soda $V_0 = \pi(\frac{1}{4}LD^2 - \frac{1}{16}L^3)$. Vprašal se je po razmerju $L/(2r)$ za sod, ki ima pri dani diagonali D največjo prostornino. Iz zahteve, da je odvod $dV_0/dL = \pi(\frac{1}{4}D^2 - \frac{3}{16}L^2) = 0$, je izluščil zvezo $D^2 = \frac{3}{4}L^2 = (2r)^2 + \frac{1}{16}L^2$ in končno dobil $L/(2r) = \sqrt{2}$. Ugotovil je, da to presenetljivo dobro ustreza »avstrijskim« sodom. Pomislil je celo, da ne gre za naključje. Prostornina takega soda $V_0 = \pi D^3/(3\sqrt{3})$ je sorazmerna s kubom diagonale D. Z merjenjem diagonale je potemtakem mogoče ugotoviti prostornino soda. Najbolje je na merilno palico narisati kubično skalo.



SLIKA 2.
Keplerjeva risba soda.

Zares je sorazmernostni koeficient odvisen od razmerja med $2r/L$. Vendar zaradi zahteve $dV_0/dL = 0$ odvisnost ni izrazita. Kepler se je prepričal, da je rezultat uporaben tudi za »avstrijske« sode z rahlo izbočenim plaščem.

Kepler se je vprašal, ali je mogoče na opisani način ugotoviti tudi prostornino vina v sodu, ki ni zvrhano poln. Namignil je, da je to pomembno vprašanje za gospodarja, če ga skrbi, da kdo brez njegove vednosti prazni sod. Na to vprašanje odgovorimo po svoje.



SLIKA 1.
Pogled na sod z vinom v smeri osi (levo) in pravokotno nanjo (desno).

Gladina vina v sodu je vodoravna in njegova prostornina je $V = pL$, če je p ploščina spodnjega krožnega odseka. Ploščino odseka dobimo, ko od ploščine krožnega izseka s središčnim kotom φ odštejemo ploščino trikotnika:

- $p = \frac{1}{2}r \cdot r\varphi - \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)$.

Upoštevali smo, da je $l = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$, $h = r\cos\frac{1}{2}\varphi$ in $lh = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi \cdot r\cos\frac{1}{2}\varphi = r^2\sin\varphi$.

Višina vina $r - h$ je proti premeru soda $2r$ v enakem razmerju kot potopljeni del merilne palice d proti diagonali D:

- $\dfrac{d}{D} = \dfrac{h-r}{2r} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{r} - 1\right)$.

Razmerje med prostornino vina in prostornino soda je

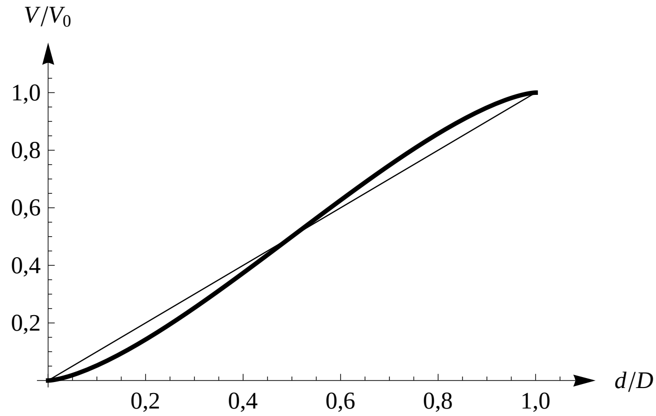
- $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{\frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)L}{\pi r^2 L} = \dfrac{1}{2\pi}(\varphi - \sin\varphi)$.

Iz zveze $h = r\cos\frac{1}{2}\varphi$ izračunamo:

- $\varphi = 2\arccos(h/r) = 2\arccos(1 - 2d/D)$.

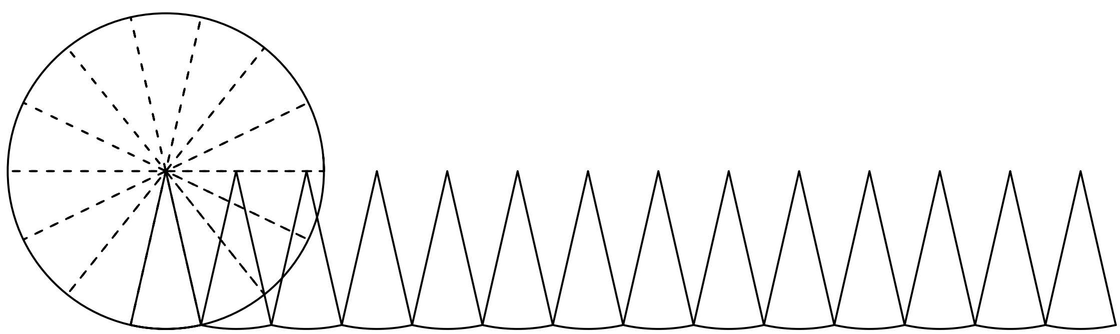
Tako naposled dobimo

- $$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{2\pi}[2\arccos(1-2d/D) - \\ - \sin(2\arccos(1-2d/D))].$$



SLIKA 4.
Razmerje prostornin delno praznega in polnega soda V/V_0 v odvisnosti od razmerja d/D (debelejša krivulja). Približek $V/V_0 = d/D$ (tanjša krivulja) se od tega razlikuje kvečjemu za 0,06.

Diagram kaže, da je dober približek te funkcije $V/V_0 = d/D$ (slika 4). (Največja napaka doseže 0,06.) Ker izrazimo prostornino z razmerjem V/V_0 in dolžino d z razmerjem d/D, lahko na opisani način v dobrem približku ugotavljamo tudi prostornino vina v sodu, ki ni poln. Kaže tudi, da Keplerjevi sodobniki prostornine sodov niso merili natančno. Izražali so jo namreč v vedrih (Eimer); »avstrijsko« vedro je imelo 56,6 litra. Po tem sklepamo, da so se lahko zmotili za več litrov.



SLIKA 3.
Tako je Kepler pojasnil enačbo za ploščino kroga πr^2. Krog je razdelil na vse večje število vse ožjih krožnih izsekov, ki so se vse manj razlikovali od trikotnikov. Nazadnje je izračunal ploščino kroga kot ploščino trikotnika, ki ima za osnovnico obseg kroga in za višino polmer. Arhimedov način dokazovanja se je marsikateremu Keplerjevemu sodobniku zdel težaven. Kepler je za π uporabil 22/7, čeprav je poznal boljše približke.

× × ×

Pravokotne ure

MIHA MIHOVILOVIČ

V nedeljo mi je Janez zastavil zanimivo nalogo, ki se je spominja še iz mladosti. Zanimalo ga je, kolikokrat na dan ter ob katerih časih kazalca na uri oklepata pravi kot. Takoj sem začel razmišljati o rešitvi.

Urni kazalec za en obhod potrebuje dvanajst ur, kar pomeni, da se giblje s kotno hitrostjo $\omega_U = \frac{2\pi}{12}\,\mathrm{h}^{-1}$. Minutni kazalec za isto pot potrebuje le eno uro in ima zatorej kotno hitrost $\omega_M = \frac{2\pi}{1}\,\mathrm{h}^{-1}$. Denimo, da kroženje kazalcev začnemo opazovati točno opolnoči, ko sta kazalca poravnana v navpični legi. Ker se kazalca gibljeta enakomerno, njuna trenutna odklona od navpičnice ϕ_U, ϕ_M izračunamo tako, da njuni kotni hitrosti pomnožimo s trenutnim časom t. Kot med kazalcema $\Delta\phi$ potemtakem določa razlika med njunima odklonoma:

$$\Delta\phi = |\phi_M(t) - \phi_U(t)|\,, \qquad \phi_M = \omega_M\, t, \quad \phi_U = \omega_U\, t. \qquad (1)$$

Čase t_n, pri katerih kazalca oklepata pravi kot, poiščemo tako, da rešimo enačbo:

$$\Delta\phi(t_n) = \pi/2 + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Periodo $n\pi$ potrebujemo zato, da poleg kota $\Delta\phi = \pi/2$ upoštevamo tudi kot $\Delta\phi = 3\pi/2$, ko se minutni kazalec nahaja na nasprotni strani ure, ter vse nadaljne kote, ko minutni kazalec začne prehitevati urnega (glej sliko 1). Uporabimo izraz (1) v enačbi (2):

$$|\omega_M - \omega_H|\, t_n = \frac{11\pi}{6\,\mathrm{h}}\, t_n = \pi/2 + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

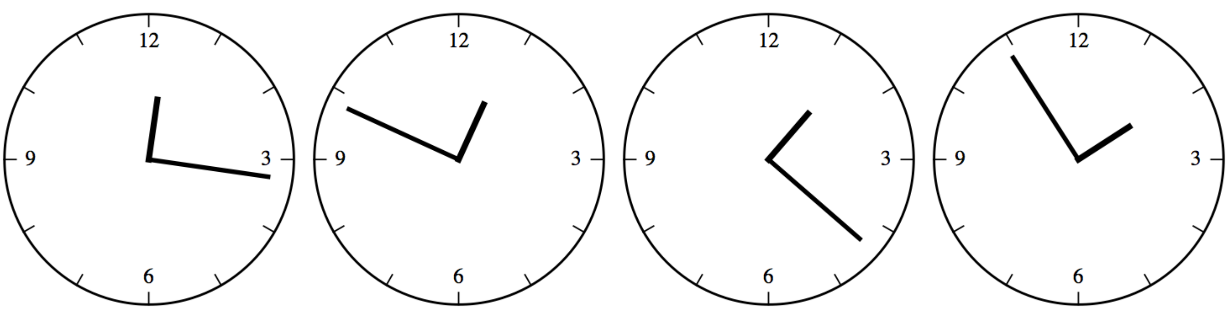
Če od tod izrazimo t_n, dobimo končno formulo, po kateri izračunamo čase, ko kazalca na uri oklepata pravi kot:

$$t_n = (2n+1)\frac{3}{11}\,\mathrm{h}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Kolikokrat na dan pride do omenjenega pojava, izračunamo tako, da iz enačbe (3) izrazimo n in dobljeni izraz izračunamo za $t = 24\,\mathrm{h}$:

$$n = \frac{11}{6\,\mathrm{h}}\, t + \frac{1}{2}\Big|_{t=24\,\mathrm{h}} = 44{,}5.$$

Ker je n nenegativno celo število, vzamemo le celi del rezultata. Urina kazalca tako 44-krat na dan oklepata pravi kot. Točni časi, ob katerih se to zgodi, pa so zbrani v tabeli na naslednji strani.



SLIKA 1.
Štirje zaporedni primeri časov, ko kazalca na uri oklepata pravi kot.

zap. št.	čas
1	00:16:22
2	00:49:05
3	01:21:49
4	01:54:33
5	02:27:16
6	03:00:00
7	03:32:44
8	04:05:27
9	04:38:11
10	05:10:55
11	05:43:38
12	06:16:22
13	06:49:05
14	07:21:49
15	07:54:33
16	08:27:16
17	09:00:00
18	09:32:44
19	10:05:27
20	10:38:11
21	11:10:55
22	11:43:38

zap. št.	čas
23	12:16:22
24	12:49:05
25	13:21:49
26	13:54:33
27	14:27:16
28	15:00:00
29	15:32:44
30	16:05:27
31	16:38:11
32	17:10:55
33	17:43:38
34	18:16:22
35	18:49:05
36	19:21:49
37	19:54:33
38	20:27:16
39	21:00:00
40	21:32:44
41	22:05:27
42	22:38:11
43	23:10:55
44	23:43:38

TABELA 1.
Točni časi, ob katerih kazalca na uri oklepata pravi kot.

Rešitev testa iz prejšnje številke Preseka

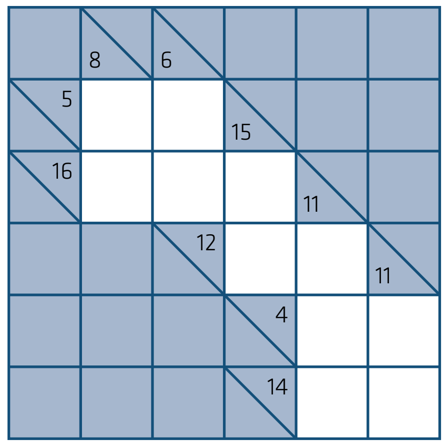
V prejšnji številka Preseka smo vam v članku »Ful drgačen test iz mate« zastavili nekaj vprašanj in možnih odgovorov nanje. Edini pravilni odgovori so:

- 1f, 3e, 5b, 7c, 8b, 9d, 10b, 11a,b.

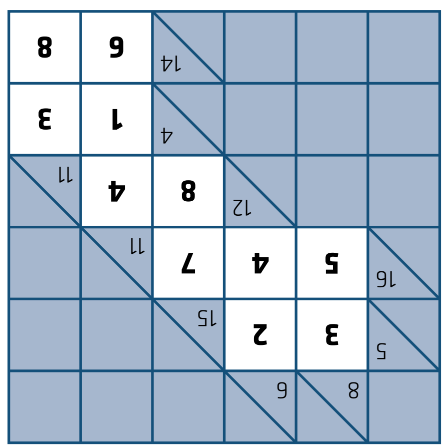
www.presek.si

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



Rešitev križne vsote



Razmisli in poskusi

Odgovori na vprašanja iz prejšnjih številk Preseka (38/6, 40/4, 41/2)

Mitja Rosina

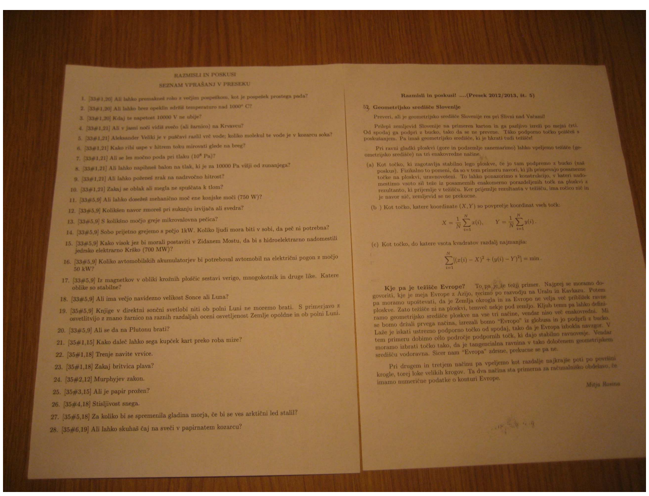
43. »Varčne žarnice«

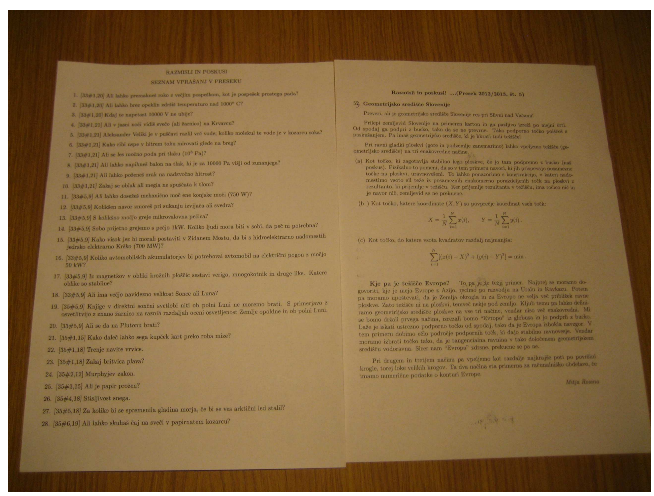
Preverimo, ali so »varčne žarnice« zares varčne. Preberemo na reklamnem letaku, da 8-wattna varčna žarnica sveti enakovredno kot 40-wattna navadna žarnica z wolframovo nitko, 20-wattna varčna žarnica pa kot 100-wattna wolframova.

Poskus. Svetilnost žarnic sem primerjal z digitalnim fotoaparatom. Na mizo sem položil bel papir z besedilom in slikal. Avtomatski fotoaparat se sam prilagodi osvetljenosti in javi podatke o slikanju. Svetlobni tok, ki ga foroaparat sprejme, je sorazmeren z osvetljenostjo papirja, s časom ekspozicije in s kvadratom premera zaslonke.

Vzel sem navadno žarnico (40 W, 415 lumnov) in »varčno žarnico« (8 W, 400 lm). Pri prvi je javil fotoaparat $f = 5{,}8$ mm, 2592×1944 pikslov, osvetlitev $1/40$ s, premer odprtine 2,8. Pri varčni pa $f = 5{,}8$ mm, 2592×1944 pikslov, osvetlitev $1/50$ s, premer odprtine 2,8. Torej imata res približno isto svetilnost (tako kot piše v reklami). Tudi vtis na sliki je podoben, le da je pri navadni žarnici svetloba bolj rdečkasta, pri varčni pa bolj bela. (Levo besedilo na sliki je osvetljeno z navadno, desno pa z varčno žarnico.)

Nekaj podatkov. Zeleni svetlobi ustreza občuteni svetlobni tok 680 lm/W (lumna na watt), navadni 40-wattni žarnici 10 lm/W (izkoristek 1,5 %), navadni 100-wattni žarnici 17 lm/W (izkoristek 2,5 %), varčni 8-wattni žarnici pa 50 lm/W (izkoristek 7,5 %). Diode LED (*light emitting diodes*) pa imajo izkoristek do 30 %.





→
52. Ali led plava na alkoholu?

Vsi vemo, da led plava na vodi. Plava zaradi vzgona, saj ima voda gostoto 1000 kg/m^3, *led pa le* 900 kg/m^3. *V čistem etanolu* (ρ = 790 kg/m^3) *pa led potone. Na alkoholu torej plava, če ga dovolj razredčiš.*

Poskus. V posodico sem s pipeto nalil 30 ml etanola (96 vol. %, ρ = 808 kg/m^3), košček ledu je potonil. Ko sem dolil 15 ml vode, je led zaplaval. Na videz ustreza taki mešanici gostota 870 kg/m^3 namesto 900. Morda je kdo preje etanol dodatno rahlo razredčil, verjetnejši razlog pa je, da je skupni volumen po mešanju manjši od njune vsote. (Kar pomislite, če nalijete v liter soli liter vode, bo skupaj še vedno komaj dober liter.)

→
54. Debelina milnega mehurčka

Mehurček napihujte počasi z dovolj debelo cevko, da bo zrastel čim večji. V začetku se bo prelival v lepih barvah, ko bo pa dovolj velik (in tanek!), bodo barve postale medle in izginile, mehurček bo prozoren. Kmalu za tem bo počil. Kako debel je takrat?

Razlaga. Barve lahko razložimo z interferenco. Svetloba se odbije na zadnji steni kožice mehurčka z obratno fazo kot na sprednji; pri tanki kožici se prispevka uničita. To velja za tanjšo kožico, kot je velikostni red valovne dolžine svetlobe. Pri debelejši kožici pa ustreza raznim barvam svetlobe različno število valovnih dolžin in je za nekatere interferenca konstruktivna, za nekatere pa destruktivna.

Poskus. Premer cevke je bil 20 mm. Mehurček je bil najprej rdečkast, potem rumenkast, moder in vijoličast. Pri pri premeru mehurčka 200 mm so barve izginile, pri 240 mm je počil.

Volumen milnice sem ocenil tako. S cevke sem kanil nabrano milnico 40 krat, da sem napolnil žličko, 33 žličk vode pa je napolnilo skodelico 100 ml, kar da volumen V = 76 mm^3. Pri radiju r = 100 mm je imel mehurček debelino

$$d = \frac{V}{4\pi r^2} = \frac{76\ \mathrm{mm}^3}{4\pi \cdot 10^4\ \mathrm{mm}^2} = 0{,}60\ \mu\mathrm{m}.$$

To lepo ustreza valovni dolžini svetlobe.

×××

↓↓↓

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 41/4

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke 41. letnika Preseka je **Krepko stiskanje.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Luka Jevšenak iz Velenja, Boris Kožlin iz Dobrova v Brdih in Barbara Zorman iz Preddvora, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

×××

↓↓↓

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ

RDEČE RJAV PTIČ PEVEC

ŽENSKA, KI PRVIČ RODI

NASPROTJE RAZLIČNOSTI

KITAJSKO LJUDSKO BRENKALO

MOŽNOST URESNIČITVE, NADA

GOBAVOST

AMERIŠKO OLIMPIJSKO MESTO

JUŽNOITAL. VELEMESTO

MEDSEBOJNO ZADETJE GIBAJOČIH SE TELES

PREPRODAJALEC, KI IZKORIŠČA NIHANJE CEN

1

OTROŠKA IGRA S KARTAMI

2

MATEMATIK VIDAV

BAKTERIJ. ZOBNA OBLOGA

ZAPOREDNI ČRKI

IT. PEVEC FILIPPO NEVIANI

RIMSKA LJUBLJANA

MASTNA RIBA

NAŠ FOTOGRAF (MILAN)

IGRALEC TOŠ

DMFA

NEMŠKI FIZIK NOBELOVEC (MAX)

VOZILO S KRILI IN REPOM

CESTNI ZAVOJ

DRŽAVA V JUŽNI AFRIKI, NEKDAJ NJASA

HRVAŠKA NAFTNA DRUŽBA

NIKOLA TESLA

AFRIŠKI VLADARSKI NASLOV

15

NAŠ POKOJNI IGRALEC (JANEZ)

ZGORNJA PLAST ZEMELJ. POVRŠJA

KRAJ NAD VZHODNO OBALO ISTRE

NAMOTANJE OKOLI ČESA

RIBJE JAJČECE

MITIČNI VELIKAN

NASLOV, NAZIV

PREBIVALEC VZHODNIH SREDOZEM. DEŽEL

12

PODZEMNA ŽIVAL

NAJDIŠČE SITULE PRI LITIJI

VETER Z RUŠILNO MOČJO

RDEČE KRVNO TELESCE

OZNAKA LITVE

HUNSKI KRALJ

NEKD. IZR. PREDSEDNIK (MOŠE)

ZVOK IZ GRLA

BIOGRAFIJA

IZGNANEC

4

DRAMATURGINJA IN PEVKA MILČINSKI

OZNAKA GRČIJE

EMANUEL LASKER

OČALA, KI SE PRITRDIJO NA NOS, ŠČIPALNIK

NEKDANJI AMERIŠKI POLITIK CHENEY

ŽELJA PO JEDI, TEK

REKA V BELGIJI (NIZOZEM. MAAS)

SREDIŠČE AMERIŠKIH SLOVENCEV V OHIU

ČRNEC (SLABŠAL.)

MAKEDON. JANEŽEVO ŽGANJE

VZOR POPOLNOSTI

JEDKA TEKOČINA

ODPRTA LIVARSKA FORMA

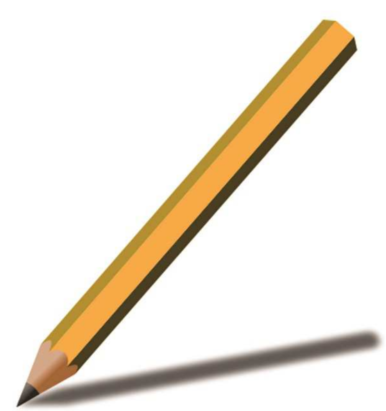
FRANC. IGRALKA (ANOUK)

NAŠ PEVSKI TRIO

6

NESTROKOVNJAK

NAŠA TROSKOKAŠICA (ANJA)



PREDSTOJNIK SAMOSTANA

PEVKA SOKLIČ

ŽENA ALEKSANDRA VELIKEGA

CORSA, ASTRA, MERIVA, ZAFIRA, ANTARA

PESNIK IN NOVINAR BABAČIĆ

PREMICA, OKOLI KATERE SE TELO VRTI

KLADA ZA SEKANJE DRV

RUŠA

VIŠINOMER

PREDNJI DROG PRI VOZU

GLAVNO MESTO INDIANE

IGRALEC DOUGLAS STAREJŠI

VAS MED RAŠICO IN ROBOM V DOLINI RAŠICE

5

ODKRITELJ TEMELJNIH ZAKONOV MEHANIKE (ISAAC)

MOZOLJ

NORVEŠKI SMUČAR SKAARDAL

REKA V SIBIRIJI, ODTOK BAJKAL. JEZERA

GRAFIČNO OBLIKOVANJE: MATEVŽ BOKALIČ

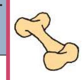
LAHKOTNO GLASBENO ODRSKO DELO

GOSPODARSKI OBRAT OB MORJU

SREDIŠČE JUŽNEGA DELA POLJSKE

ASTAT

PRIPADNIK NAJŠTEVILNEJŠEGA SLOVAN. NARODA



PERNATA ŽIVAL

MAJHEN TOVORNJAK

MEHIŠKO INDIJAN. LJUDSTVO

DELAVEC, KI OPREMLJA PRIZORIŠČE

GLAVNO MESTO ALBANIJE

HOLLYWOODSKA FILMSKA NAGRADA

SOSEDI ŠPANCEV

8

PISATELJICA PEROCI

NEMŠKA IGRALKA (ELKE)

ŽULJ, OTIŠČANEC

TOVARNA V RIBNICI

ZGODOV. MESTO V TOSKANI

PREIZKUS TREZNOSTI

9

OSNOVNA MERA

SLANO MOČVIRJE V SZ. AFRIKI

NEMŠKI FILOZOF (LORENZ)

PODREDNI VEZNIK

7

STARA ENOTA PREJETE DOZE SEVANJA

NOVINARKA KOČAR

NAJSTAREJŠE RUSKO MESTO V SIBIRIJI

DELOVNO PODROČJE, PRISTOJNOST

GRADBENI MATERIAL IZ ŽGANE GLINE

101 Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI

OLEG ANTONOV

PRITOK DRAVE V AVSTRIJI

ENOTA ZA MNOŽINO SNOVI V KEMIJI

KOMIČNA ODRSKA IGRICA

DEL VELIKE BRITANIJE

NACE SIMONČIČ

MADŽAR. PISATELJ (LAJOS)

TROSNI MEŠIČEK PRI ZAPRTOTROSNICAH

EGIPTOV. BOMBAŽ

POLPREVODNIŠKI ELEMENT

ENOJKA

NEMŠKI SLIKAR IN LESOREZEC (LOUIS)

ZVOK DOLOČENE VIŠINE

ŽITARICA, KI MEDI

AMERIŠKA DRŽAVA

FRANC. FILOZOF (ERNEST)

VRSTA KITAJSK. ČRNEGA ČAJA

SEČEVOD

ČLOVEKOV NOTRANJI JAZ

OZNAKA SLOVAŠKE

NAMIZNO PREGRINJALO

NAŠA NESTRUPENA KAČA

3

GRADITELJ SUEŠKEGA PREKOPA (FERDINAND)

FUNKCIJA IZ VIŠJE MATEMAT.

IRS. DIRKAČ (EDDIE)

10

LEONHARD EULER

TEORETIK KITAJSKE REVOLUCIJE (SUN)

DRŽAVNI ZAKLAD V ST. RIMU

PEVEC SMOLAR

DENIS NOVATO

PISEC EPA *ENEIDA*

13

VISOK MOŠKI PEVSKI GLAS

BEG, UMIKANJE

GRŠKA BOGINJA MODROSTI

NEMŠKI REZBAR IZ POZNE GOTIKE (BERNT)

LONDONSKA GALERIJA

RASTLINA, KI VSEBUJE MENTOL

11

SOSED IRAKA

SEVEROVZHOD

GOTOVČEV OPERNI JUNAK

ŽIVALSKO OZVEZDJE OB NEBESNEM EKVATORJU

STARO IZRAEL. PRISTANIŠKO MESTO

DEJAVNOST ZA OSKRBO Z ENERGIJO

WILLIAM GOLDING

POSMEHLJIVEC

ELEGANTNA LAHKOŽIVKA V FRANC. OKOLJU

14

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. maja 2014**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Senca slamice

NADA RAZPET

Sence nas lahko zanimajo iz različnih razlogov. Poleti jo iščemo, da se v njej nekoliko ohladimo. Kadar kaj delamo pri umetni svetlobi, pazimo, da nam predmeti ne mečejo sence na delovno površino. Tokrat nas zanimajo sence, ki jih opazimo na dnu posode, v kateri je voda.

Za razlago pojavov potrebujemo nekaj priprav. Najprej si oglejmo, kaj lahko opazimo pri predmetih, ki jih položimo na vodno gladino.

V posodo nalijemo vodo in na vodno gladino previdno položimo pisarniško sponko ali kovanec (sliki 1 in 2).

Pri pisarniški sponki opazimo, da je tam, kjer je sponka, in v bližnji okolici vodna gladina »vdrta«. Sponka leži nekoliko nižje od gladine vode. Težo sponke in kovanca uravnovešata vzgon, ki je majhen in površinska napetost. Prepričajmo se, da je površinska napetost pomembna. Zmanjšajmo jo tako, da na površino kanemo kapljico detergenta ali mila. Tako kovanec kot sponka hitro potoneta.

Če sponko rahlo vlečemo iz vode, je slika drugačna. Del površine ob sponki se dvigne (slika 3). Lahko bi rekli, da s sponko vlečemo za seboj tudi del vodne gladine.

Ponovimo še lomni zakon, ki ga zapišemo v obliki:

- $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$,

Pri tem je $n_1 = 1$ lomni količnik zraka in $n_2 = 4/3$ lomni količnik vode. Z α smo označili vpadni kot, z β pa lomni kot. Na sliki 4 imamo označena dva vpadna kota (to sta kota med vpadnim žarkom in vpadno pravokotnico) α in γ in njima pripadajoča lomna kota β in δ. Pri prehodu iz zraka v vodo se žarki lomijo k vpadni pravokotnici. Kaj to pomeni? Narisali smo tri vzporedne žarke (a, b in c). Opazimo, da se žarek c pri prehodu iz zraka v vodo ne lomi, ostala žarka pa se lomita. Žarek c pada pravokotno na mirno gladino. Druga dva žarka padata na val. Vpadna pravokotnica je pri žarku c kar v smeri žarka, vpadni kot je $0°$ in zato tudi lomni kot $0°$. Pri žarku b pa se vpadna pravokotnica ne ujema s smerjo žarka. Vse vpadne pravokotnice smo na sliki označili z debelejšo rdečo črtkano črto. Če se žarek

SLIKA 1.
Na vodni gladini plava sponka. Težo sponke uravnovešata vzgon in površinska napetost.

SLIKA 2.
Kovanec plava na vodni gladini. Leži pod gladino.

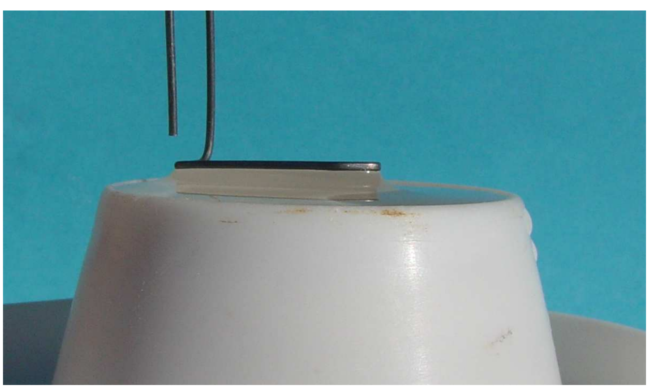
b pri prehodu iz zraka v vodo ne bi lomil, bi šel v smeri črtkane črne črte. Ker pa se lomi, kaže smer žarka daljica b'. Pri prehodu žarka iz zraka v vodo je vedno lomni kot manjši od vpadnega kota. Pravimo, da je voda optično gostejše sredstvo. Pri prehodu žarka iz optično redkejšega sredstva (v našem primeru je to zrak zrak) v optično gostejše sredstvo (voda) je vedno lomni kot manjši od vpadnega kota, torej se žarek lomi k vpadni pravokotnici.

Zdaj pa nazaj k sencam. Posodo z vodo smo postavili pod svetilko tako, da so svetlobni žarki padali na dno posode navpično. Tako lego smo izbrali zato, da bosta razlaga in risanje žarkov preprostejša. Pojave opazimo tudi takrat, ko padajo žarki poševno na dno posode.

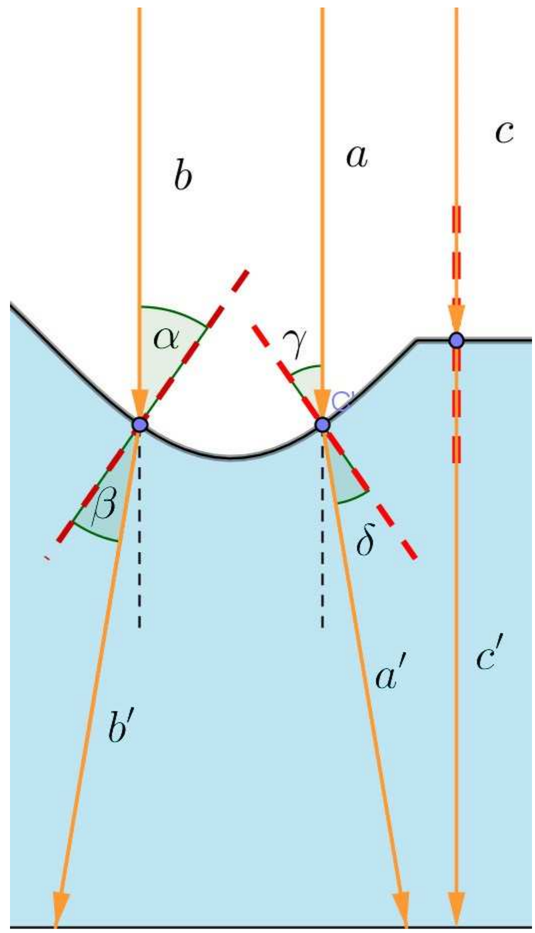
Kadar držimo slamico nad banjico, na dnu banjice opazimo senco slamice, ki ima obliko pravokotnika, kar nas seveda ne preseneča (slika 5). Žarki, ki vpadajo pravokotno na mirno gladino se pri prehodu v vodo ne lomijo. Slamica pa svetlobe ne prepušča. Na dnu posode z vodo je zato tam senca. K fotografiji smo dodali še skico žarkov.

Zdaj naj bo del slamice potopljen v vodo (slika 6), drugi del pa držimo v roki in ga rahlo vlečemo navzgor.

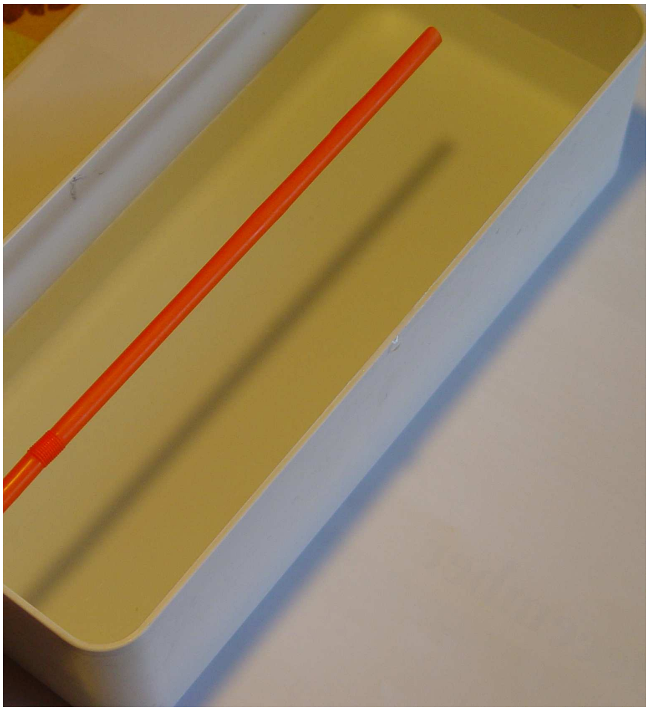
Ker slamico rahlo vlečemo, se del gladine tik ob slamici nekoliko dvigne (tako kot pri vlečenju pisarniške sponke na sliki 3). Oglejmo si podrobneje potek žarkov v navpični ravnini (pravokotno na slamico). Slika 6 spodaj ponazarja dogajanje. Prerez (poševno ležeče) slamice smo predstavili z elipso, dvig vode ob slamici zaradi površinske napetosti pa narisali pretirano. Opazimo, da se žarki, ki padajo na dvignjeni del navpično, pri prehodu iz zraka v vodo lomijo tako, da padajo na dno posode tudi v območje pod slamico. Zato je tudi ta del dna osvetljen in je senca tam prekinjena. Navpični žarki, ki padajo na slamico, seveda ne morejo skozi slamico, zato je pod njimi na dnu senca. Ostala površina vode je ravna, zato se navpični žarki pri prehodu v vodo ne lomijo in je tam zopet svetlo. Na dnu je torej pod slamico senca tam, kjer je gladina vode ravna. Pod delom, kjer je gladina dvignjena, je na dnu svetlo. Senca je tam prekinjena.

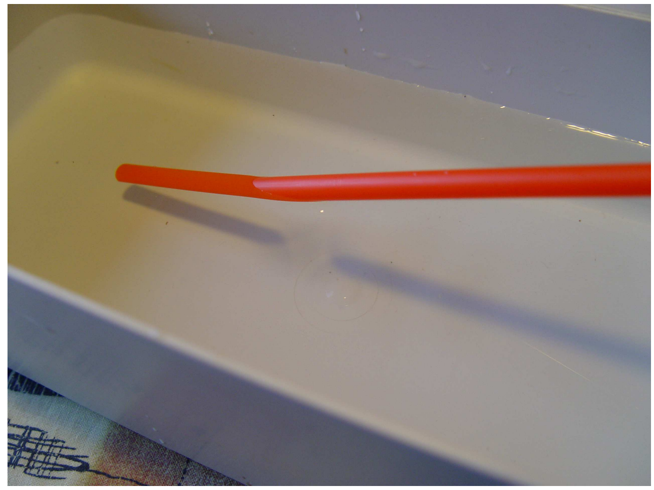


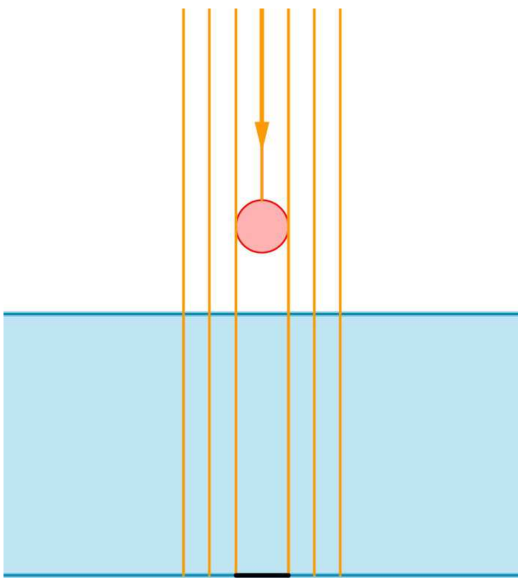
SLIKA 3.
Pisarniško sponko rahlo vlečemo iz vode. Vodna gladina je ob sponki dvignjena.



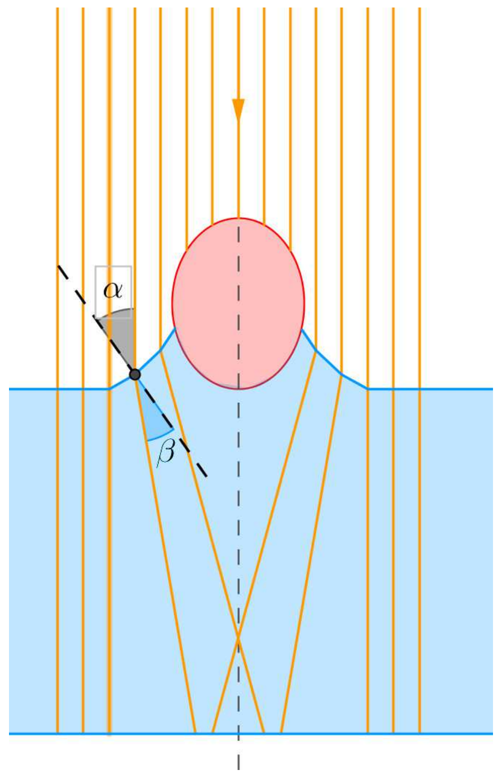
SLIKA 4.
Del vodne gladine je raven, del pa valovit. Na sliki je prikazan lom svetlobnih žarkov pri prehodu iz zraka v vodo.



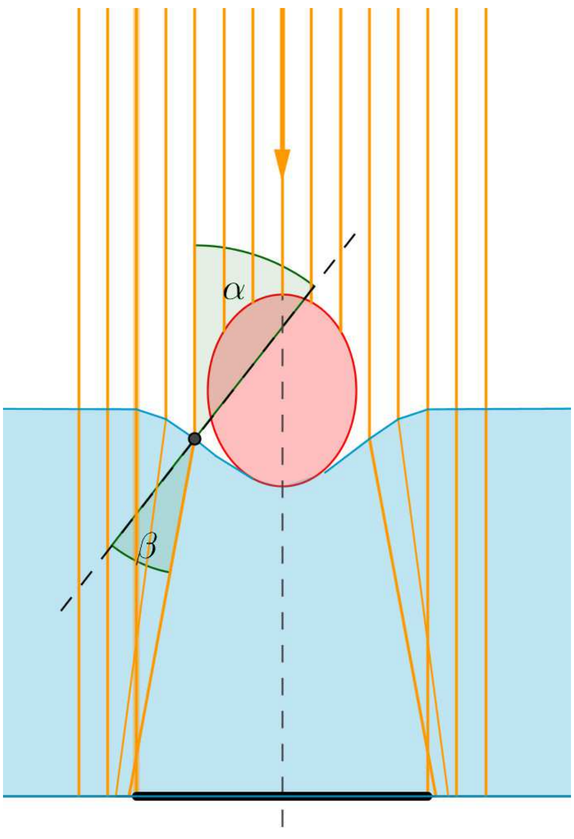




SLIKA 5.
Zgoraj: Senca slamice, ki je v zraku, vzporedno z mirno vodno površino. Spodaj: Skica dogajanja. Žarki vpadajo pravokotno na mirno gladino, zato se pri prehodu v vodo ne lomijo. Slamica svetlobe ne prepušča, pod njo je senca.



SLIKA 6.
Zgoraj: Senca slamice, katere en konec je potopljen v vodo, drugi del pa držimo v roki in ga rahlo vlečemo navzgor. Spodaj: Žarki, ki so v območju dvignjenega dela gladine, po prehodu v vodo padejo na dno v območje pod slamico. Senca je zato prekinjena.



SLIKA 7.
Zgoraj: Fotografija sence. Spodaj: Kako nastane odebeljena senca.

Kaj pa če slamico držimo tako, da en konec opremo na dno, drugi pa ob rob posode in jo rahlo tiščimo navzdol? V tem primeru pa na senci opazimo odebeljeni del (slika 7 zgoraj).

Še tu narišimo prečni presek. Kaže ga slika 7 spodaj. Ker je zdaj vodna gladina ob slamici ukrivljena drugače, se žarki po prehodu iz zraka v vodo lomijo tako, da noben od njih ne pade na določeno območje na dnu posode. Zato je tam zdaj senca, ki je »debelejša«, kot je slamica.

Z malo poigravanja pa lahko opazimo oba pojava obenem (slika 8).

Ali lahko dobimo še drugačno sliko? Pojav je opazen na sliki 7. Okrog odebeljenega dela sence opazimo odebeljen svetel »obroč«. Slamica je gladka in del svetlobe odbija, pri risanju pa od slamice odbitih žarkov nismo upoštevali. Prav tako izbočena vodna površina deluje kot zbiralna leča (svetle lise lahko zato opazujemo tudi na dnu bazena, če vodna gladina ni mirna). O tem si več lahko preberete v starejših letnikih Preseka.

Poskusi se lepo posrečijo, če vzamemo večjo posodo iz bele plastike ali pa prozorni posodi pod dno položimo bel kos papirja. V posodo nalijemo nekaj centimetrov vode in vanjo delno potapljamo slamico. Če vode ni dovolj, prekinjene sence ne vidimo. Zakaj? Odgovor je na sliki 6. Namesto slamice lahko uporabo leseno ali plastično paličico. Ni potrebno, da je presek paličice krog, lahko je tudi pravokotnik; tudi v tem primeru bomo lahko opazovali prekinjeno in odebeljeno senco.

SLIKA 8.
Del sence je odebeljen in del prekinjen.

× × ×

Ali obstaja življenje na eksoplanetu Maja?[1]

Gorazd Planinšič in Rick Marshall

Astronomija in astrofizika sta zelo priljubljeni pri učencih; eksperimentalno delo, ki ga lahko učenci izvedejo v šoli, pa je žal precej omejeno. Iskanje življenja drugje v vesolju (eksobiologija) je po hitro naraščajočem številu odkritih planetov – eksoplanetov, ki krožijo okoli drugih zvezd v naši Galaksiji, v polnem zagonu. Nedavno (marca 2012) so astronomi izoblikovali tehniko za iskanje znakov življenja na eksoplanetih. Kljub temu, da eksoplaneti sami niso ločljivi kot samostojni objekti, tehnika izkorišča polarizacijske lastnosti svetlobe, ki jo seva matična zvezda in se odbija od eksoplaneta. Članek opisuje način, kako lahko dokaj enostavno to tehniko preizkusimo tudi v šolskem laboratoriju.

Ali obstajajo planeti podobni Zemlji drugje v vesolju? Če obstajajo, potem na njih mogoče obstaja tudi življenje. Leta 1995 so poročali o odkritju prvega eksoplaneta. Do danes jih je odkritih okoli 1000. Eden od ciljev takih raziskav je najti tudi eksoplanet, na katerem obstaja življenje. Ena od metod odkrivanja planetov ponuja možnost za določanje narave snovi na planetu in s tem njegovo morebitno primernost za obstoj življenja. Lastnosti svetlobe, ki se odbije od eksoplaneta, so namreč odvisne od narave njegove površine.

Ko eksoplanet pride med zvezdo in teleskop, s katerim se izvaja opazovanje (temu pojavu pravimo prehod planeta pred zvezdo), je mogoče zaznati majhen padec v siju matične zvezde. Ko eksoplanet ni pred zvezdo, se bo nekaj svetlobe zvezde, ki osvetljuje eksoplanet, odbilo v smeri teleskopa. Seveda s teleskopi ni mogoče neposredno razločiti eksoplaneta od zvezde. Ne samo, da je preblizu matični zvezdi, ampak se skromni sij planeta izgubi v mnogo večjem siju zvezde. Vendar pa obstaja način, kako lahko planetni sij ločimo od zvezdnega sija. Svetloba, ki se odbije od eksoplaneta, je delno polarizirana, medtem ko je svetloba zvezde nepolarizirana.

Intenziteta odbite svetlobe od različnih vrst površin se spreminja glede na vpadni kot ter je delno polarizirana. Odbita intenziteta je najmanjša pri pravokotnem vpadu na površino (vpadni kot je enak 0°). Z večanjem vpadnega kota se povečuje tudi odbita intenziteta, dokler se pri majhnih kotih ne odbije vsa svetloba (vpadni kot je enak 90°). Tako bodo različne površine na eksoplanetu, ki so usmerjene različno glede na smer svetlobe z zvezde, povzročile različno stopnjo polarizacije v odbitem planetnem siju. Ločimo npr. lahko različne kombinacije tekoče vode, kamnin in vegetacije. Metoda, o kateri bo govora v nadaljevanju, omogoča odkrivanje takšnega »biološkega prstnega odtisa« v odbiti svetlobi. Planet, na katerem je življenje mogoče, bo verjetno imel kamnito površje, delno pokrito s tekočo vodo. Metoda sloni na meritvah ločenih spektrov svetlobe, ki niha v izbranih smereh (tj. ima določeno polarizacijo). Ker gre za metodo, ki združuje meritve spektrov in meritve polarizacije svetlobe, so jo poimenovali spektropolarimetrija.

Preprosta demonstracija

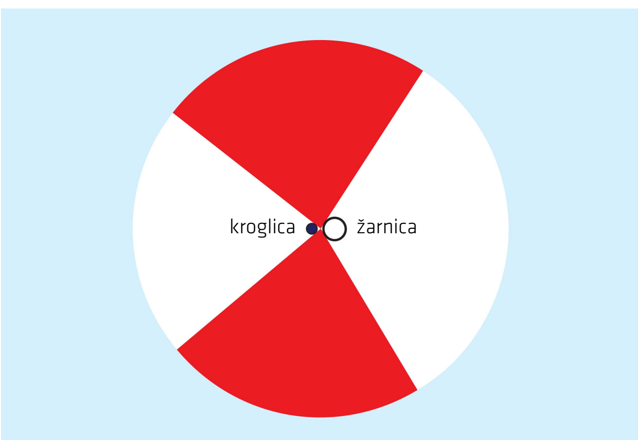
Odkrivanje planetov s potencialnimi pogoji za življenje s spektropolarimetrično metodo lahko demonstriramo tudi v šoli. Glede na to, da metoda vključuje abstraktne koncepte, kot so spekter in polarizacija, je pomembno začeti s preprostimi pojavi, ki

[1]Prevod članka: Gorazd Planinšič, Rick Marshall, *Is there life on exoplanet Maja? A demonstration for schools*, Physics Education **47** (2012), 584, prevedla Anja Lautar. Založnik IOP Publishing Ltd. ne odgovarja za pravilnost prevoda.

jih dijaki in študentje lahko neposredno opazujejo. Preproste pojave nato postopoma združujemo v bolj kompleksne zamisli, ki so potrebne za razumevanje astronomskih opazovalnih tehnik. Predlog, kako to storiti, je opisan v nadaljevanju.

Vzemite motno žarnico (npr. 60 W klasično žarnico s premerom 8 cm) kot model za zvezdo ter žogo (npr. žogico iz stiropora, prebarvano na zeleno, s premerom 6 cm) kot model za planet. Vsi planeti imajo ime; mi smo naš model planeta poimenovali Maja. Modela postavite na mizo in prilagodite njuni višini tako, da sta njuni središči približno v isti ravnini (slika 2). Dijakom dajte polarizacijske filtre ter jih razporedite okrog mize. Zatemnite prostor, prižgite žarnico in prosite dijake naj pazljivo opazujejo »zvezdo« in »planet«, medtem ko vrtijo polarizacijski filter.

Opozorite jih, naj iščejo spremembe v svetlosti planeta. Opazovalci, ki stojijo približno v rdečem območju (slika 1), bodo lahko opazili spremembe v intenziteti svetlobe, ki se odbija od planeta, medtem ko drugi sprememb ne bodo opazili. Kot je prikazano na sliki 2, sprememba ni zelo velika, je pa jasno vidna. Posnetki na sliki 2 so bili narejeni s polarizacijskim filtrom, obrnjenim navpično (a) in vodoravno (b).



SLIKA 1.
Dijaki, ki stojijo približno v rdečem območju (pogled od zgoraj), bodo lahko opazili spremembe v intenziteti svetlobe, ki se odbija od zelene žoge (planeta), ko jo opazujejo skozi polarizacijski filter.

V našem primeru se je intenziteta odbite svetlobe najbolj zmanjšala, ko je bil polarizator obrnjen vodoravno (slika 2 b). V tem primeru je bil eksoplanet še vedno viden, kar kaže na to, da je svetloba, ki se odbija od njega, le delno polarizirana. Majhne razlike v intenziteti so bolj izrazite, če obe sliki med seboj odštejemo (slika 2 c). Za dobre meritve morata biti sliki zajeti z natanko istega položaja. V ta namen smo uporabili fotografsko stojalo ter samosprožilec na fotoaparatu, s čemer smo se izognili morebitnim tresljajem. Odštevanje slik se lahko naredi v skoraj vsakem programu za urejanje slik (uporabili smo brezplačni program ImageJ). Uporabili smo postopek imenovan »difference« (razlika). Ta postopek odšteje intenziteto vsake slikovne točke na eni sliki od iste slikovne točke na drugi sliki in rezultat poda v absolutni vrednosti razlik. Slika razlik, ki nastane kot rezultat razlike barvnih slik, ima nenavadne barve. Da se izognemo temu motečemu učinku, smo pretvorili sliko razlik v črno belo sliko, na kateri so vidne le razlike v intenziteti. Intenziteta končne slike je največja tam, kjer je oddana svetloba linearno polarizirana v navpični ali vodoravni smeri. V našem primeru je to del eksoplaneta, od katerega se je odbila svetloba. Vse površine, ki oddajajo nepolarizirano svetlobo (tako kot sredina žarnice) ali oddajajo svetlobo, polarizirano pod kotom 45° glede na navpičnico, se kažejo kot črne, ker sta na teh mestih intenziteti na obeh slikah enaki (bralec naj sam razmisli, zakaj je tako pri kotu 45°; namig: za kot 45° velja, da je $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$). Svetloba, razpršena na stekleni površini žarnice, je tudi delno polarizirana v smeri pravokotni na steklo. To je razlog za svetli halo okoli robov slike žarnice. Temni madeži na približno 45° so v skladu z razmislekom, ki smo ga prepustili bralcem.

Bolj realistični model za življenje primernega planeta

Dijaki bi se lahko pritožili, da so planeti kamniti in ne iz stiropora. Prav tako lahko rečejo, da nas najbolj zanimajo planeti, na katerih je voda ter mogoče celo nekaj rastlin. Ni težko narediti model takega planeta in s pomočjo zgoraj opisane metode raziskati svetlobo, ki se odbija od njegovega površja. Naš planet smo spremenili v kamniti planet tako, da smo na kroglico iz stiropora nanesli lepilo in jo posuli z drobnim peskom. Ko se je lepilo posušilo, smo na kroglico pritrdili regratov list, ki predstavlja vegetacijo, ter majhen kos toaletnega papirja, prepojenega z vodo, ki predstavlja oceane, jezera in reke (slika 3 a). Planet smo posneli iz treh različnih kotov, približno 30° narazen. Iz vsakega položaja smo posneli dve fotografiji s pomočjo polarizacijskega filtra, eno z navpično in eno z vodoravno usmeritvijo polarizatorja. Slike 3 b–d prikazujejo slike razlik med pari posnetkov, narejenih iz treh različnih kotov. Slike 3 b–d so bile narejene z zmanjševanjem kota med fotoaparatom, planetom in zvezdo od približno 90° do 30°.

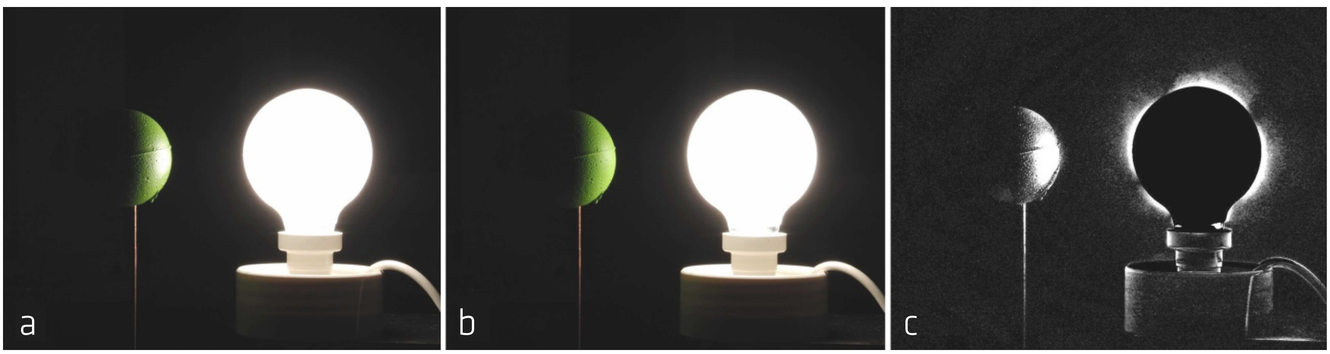
Opazimo, da je pesek videti približno enako temen na vseh slikah, kar kaže na to, da odboj od peskaste površine komajda vpliva na polarizacijo svetlobe (nepolarizirana svetloba ostane taka tudi po odboju). Regratov list predstavlja najsvetlejše območje na vseh slikah in kaže na to, da je stopnja polarizacije svetlobe, ki se odbije od njega, precej visoka. Moker toaletni papir je svetel na sliki b, vendar bledi z zmanjševanjem kota med fotoaparatom, planetom in zvezdo. Iz tega lahko sklepamo, da je stopnja polarizacije svetlobe, ki se odbija od različnih površin, odvisna ne le od materiala ampak tudi od kota opazovanja.

Spektropolarimetrija

Čeprav je odštevanje slik koristno astronomsko orodje, ga ni mogoče uporabiti, kot je pojasnjeno v uvodu, v raziskovanju oddaljenih planetov. Zvezde in eksoplaneti, ki krožijo okoli njih, so od nas preveč oddaljeni, da bi jih lahko ločili kot samostojne objekte. Toda čeprav ne moremo razločiti njihovih podob, lahko še vedno analiziramo sestavo svetlobe s pomočjo njenega spektra. Zamisel, ki so jo predlagali avtorji članka, objavljenega v reviji Nature (Stersik M F et al 2012 Nature 483 64–6), združuje spektrometrijo z analizo polarizacije svetlobe. Temelji na predpostavki, da je odbita svetloba delno polarizirana, svetloba, ki prihaja neposredno od zvezde, pa sploh ni polarizirana. Posnamemo lahko dva spektra, enega z vodoravno in enega z navpično usmerjenim polarizatorjem ter ju odštejemo. Če vpadna svetloba vsebuje polarizirane komponente, bi se v spektru razlik morala pojaviti neničelna vrednost. Le-ta kaže na prisotnost planeta, od katerega se je svetloba odbila. Neničelna vrednost spektra razlik načeloma vsebuje informacije o lastnostih snovi, ki se nahajajo na površju planeta.

Spektropolarimetrija v šolskem laboratoriju

Poglejmo, kako to lahko naredimo s šolsko opremo. Spektrometri za analizo svetlobe v vidni svetlobi so dostopni po razumnih cenah pri več proizvajalcih šolske opreme (mi smo uporabili Vernierjeve naprave). Običajno se za vodenje svetlobe do spektrometra uporablja optično vlakno, ki ima prečni prerez manjši od polovice kvadratnega milimetra. Izostritev slike žarnice (zvezde) in žoge (eksoplaneta) na tako majhno površino bi v učilnici bilo težko doseči. Tudi

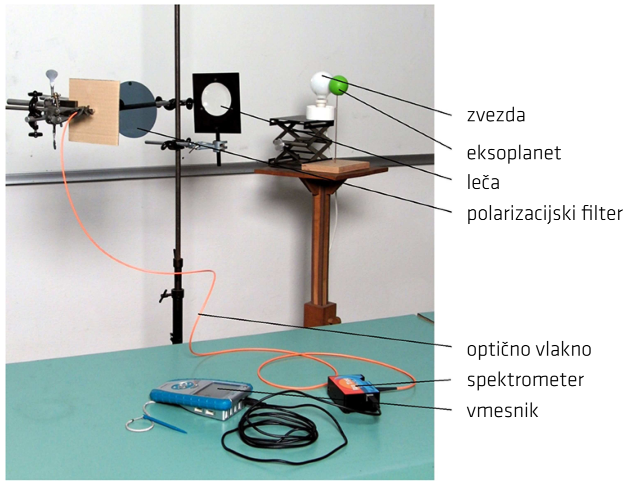


SLIKA 2.
Posnetek žarnice (zvezda) in žoge (planet) z uporabo dveh usmeritev polarizacijskega filtra: (a) navpična in (b) vodoravna usmeritev. Slika (c) je rezultat razlike med slikama (a) in (b). Zaradi jasnosti je pretvorjena v črno belo sliko.

če bi nam uspelo, bi takšno fokusiranje bilo podvrženo več napakam med merjenjem. Zato je bolje poskus izvesti na preprostejši način, ki še vedno vodi do istega končnega rezultata.

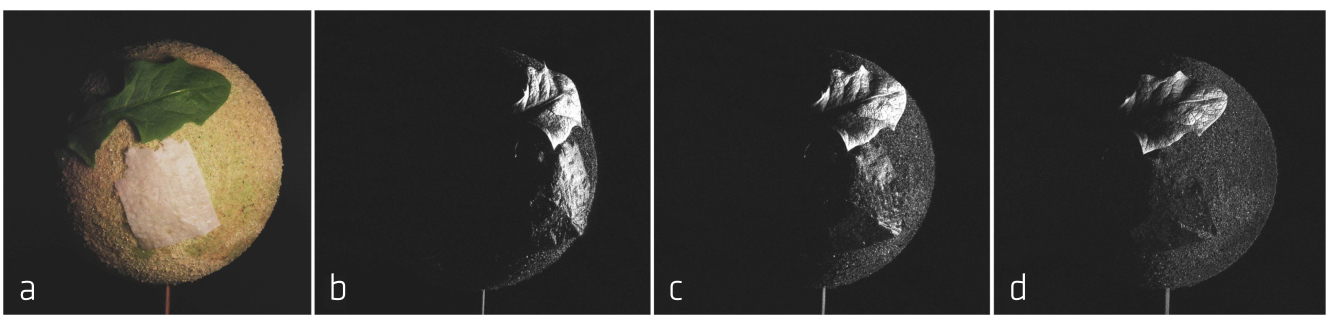
Žarnico (zvezda) in žogo iz stiropora (eksoplanet) lahko projiciramo na zaslon s pomočjo zbiralnih leč (npr. z lečo z goriščno razdaljo 27 cm). Postopek je sledeč. Iz belega kartona izrežite zaslon in v njem naredite majhno luknjo. Nato skozi luknjo porinite optično vlakno in ga pritrdite s pomočjo prižeme. S pomočjo druge prižeme pritrdite polarizacijski filter med optično vlakno in lečo. Vse tri elemente pritrdite na stojalo, kot je prikazano na sliki 4. S premikanjem stojala ali posameznega elementa bi morali na zaslonu, na mestu kjer je optično vlakno, dobiti sliko žarnice ali sliko žoge. Z zasukom polarizacijskega filtra za 90° lahko ločeno posnamemo spekter svetlobe, ki jo oddaja žarnica, in spekter svetlobe, ki se odbije od žoge za obe usmeritvi polarizatorja. Rezultati so prikazani na slikah 5 a in b.

Meritve kažejo, da svetloba iz središča žarnice ni polarizirana, da je svetloba odbita od žogice delno polarizirana in da ima svetloba odbita od žogice največjo intenziteto v območju zelene barve. Seveda takih spektrov ne moremo dobiti z opazovanjem dejanskih eksoplanetov, saj njihove podobe ne moremo ločiti. Vendar pa z analizo teh spektrov lahko dobimo informacijo, kakšen spekter pričakujemo pri opazovanju eksoplanetov. Vse, kar moramo narediti, je sešteti spekter žarnice in spekter svetlobe odbite od žoge, za vsako usmeritev polarizatorja posebej (slika 6 a).



SLIKA 4.
Preprosta postavitev šolske spektropolarimetrije.

Spekter, ki ustreza primeru zvezde brez planeta, je spekter same žarnice, prikazan na sliki 5 a. Kakršnakoli razlika med spektroma na slikah 5 a in 6 a je rezultat prisotnosti svetlobe, odbite od modela eksoplaneta. Razlike postanejo veliko bolj izrazite, če isto vrsto spektrov, ki ustrezajo dvema različnima polarizacijama, med seboj odštejemo (slika 6 b). Spekter razlike svetlobe same žarnice predstavlja bela krivulja. Če bi svetloba žarnice bila popolnoma nepolarizirana in če bi oprema bila brezhibna, bi ta spekter moral imeti ničelno vrednost pri vseh valovnih dolžinah. Zelena krivulja prikazuje spekter razlike, pri katerem je svetloba žarnice kombinirana

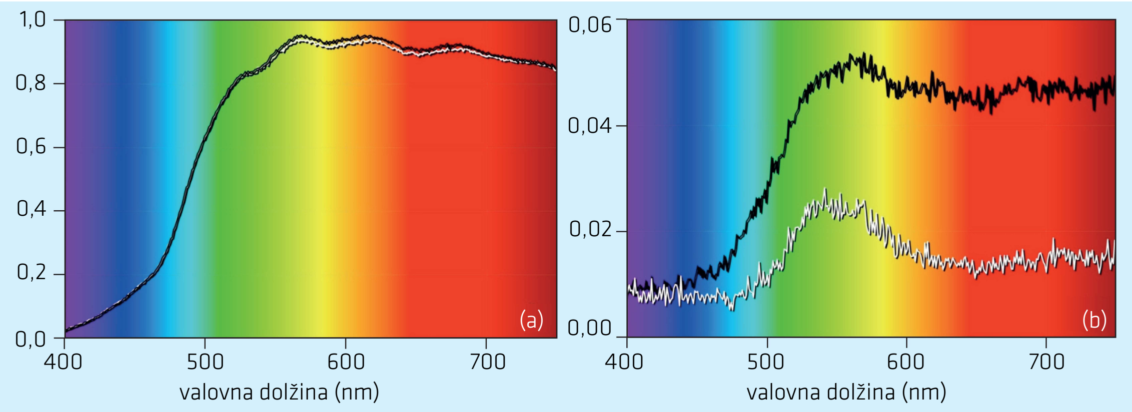


SLIKA 3.
(a) Planet Maja s kamnitim površjem (drobni pesek), vegetacijo (regratov list) in oceani (kos mokrega toaletnega papirja); (b)–(d) Slike razlik, narejene pri treh različnih kotih.

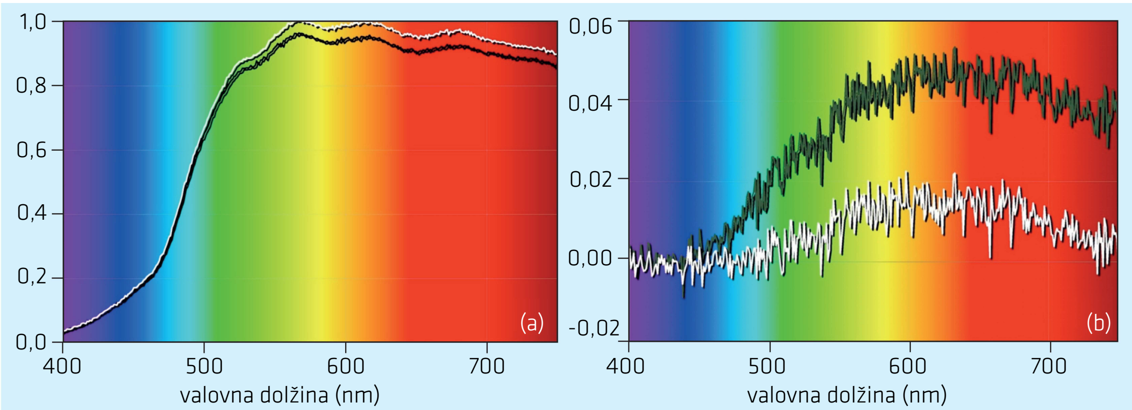
→

s svetlobo, odbito od žoge. Neničelna komponenta tega spektra je jasno vidna in kaže na prisotnost polarizirane svetlobe. Intenziteta določene valovne dolžine v takem spektru je odvisna od stopnje polarizacije, smeri polarizacije in intenzitete svetlobe pri tej valovni dolžini. Zato je interpretacija takega spektra zapletena naloga.

Kaj smo se iz teh poskusov naučili? Da je spektropolarimetrija uporabna pri odkrivanju sledi odbite svetlobe znotraj močne svetlobe, ki jo oddaja oddaljen izvor in da lahko z analizo takšne svetlobe izvemo nekaj o naravi predmetov od katerih se svetloba odbija. Metodo so astronomi preizkusili z opazovanjem svetlobe, ki se najprej odbije od Zemlje, nato pa od Lune in spet pride nazaj na Zemljo. Metoda se je pokazala kot dober način za opazovanje planetov zunaj Osončja, ki je morda primerna tudi za odkrivanje življenja na eksoplanetih.



SLIKA 5.
Spektra dveh delov slike: (a) spekter žarnice in (b) spekter svetlobe, odbite od žoge iz stiropora. Spektra, ki ustrezata navpično in vodoravno usmerjenemu polarizatorju, sta prikazana z belo in črno krivuljo.



SLIKA 6.
(a) Kombinirani spekter svetlobe žarnice in svetlobe, odbite od žoge iz stiropora (spektra, ki ustrezata navpično in vodoravno usmerjenem polarizatorju, sta prikazana z belo in črno krivuljo). (b) Razlika med spektroma iste svetlobe, pridobljenima s pomočjo pravokotno usmerjenima polarizacijskima filtroma: zelena krivulja prikazuje razliko med spektroma na sliki 5(a), bela krivulja med spektroma na sliki 5(b).

× × ×

Pomoč za trgovskega potnika

Aleksander Vesel

Trgovski potnik ima problem

Trgovski potniki, poštarji, vozniki dostavnih vozil, kurirji in ljudje podobnih poklicev nimajo prav lahkega dela. Pred delom dobijo seznam krajev oz. naslovov, ki jih morajo obiskati, ter se vrniti v izhodišče. Pomembno je, da obiščejo vse kraje s seznama in da za obisk porabijo čim manj sredstev, predvsem časa in goriva. Izkaže se, da je pravilna izbira vrstnega reda obiskanih krajev zelo pomembna, saj lahko z nerodno izbiro bistveno povečamo stroške poti.

Matematično lahko opišemo *problem trgovskega potnika* na naslednji način. Dana je množica mest $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Za vsak par mest c_i, c_j je znana cena povezave od mesta c_i do mesta c_j, ki jo označimo z $d_{i,j}$. Trgovski potnik mora začeti pot v enem od mest, obiskati vsa preostala mesta s seznama ter se vrniti v izhodišče, tako da bo skupna cena poti čim manjša. Z drugimi besedami, poiskati želimo takšno zaporedje mest $(c_{\pi_1}, c_{\pi_2}, \ldots, c_{\pi_n})$ iz C, da bo vrednost izraza $d_{\pi_1,\pi_2} + d_{\pi_2,\pi_3} + \ldots + d_{\pi_{n-1},\pi_n} + d_{\pi_n,\pi_1}$ najmanjša. Zaporedju mest, ki minimizira zgornji izraz, bomo rekli tudi *najcenejša rešitev*.

Nalogo problema trgovskega potnika zelo naravno predstavimo z grafom, v katerem so mesta vozlišča grafa. Vsako vozlišče grafa povežemo z vsemi drugimi vozlišči, povezavi pa priredimo število, ki je enako ceni poti med mestoma, ki predstavljata krajišče povezave.

Kot primer si poglejmo množico mest $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, cene povezav med njimi pa so $d_{1,2} = d_{2,1} = 132$, $d_{1,3} = d_{3,1} = 308$, $d_{1,4} = d_{4,1} = 68$, $d_{1,5} = d_{5,1} = 233$, $d_{2,3} = d_{3,2} = 180$, $d_{2,4} = d_{4,2} = 66$, $d_{2,5} = d_{5,2} = 114$, $d_{3,4} = d_{4,3} = 240$, $d_{3,5} = d_{5,3} = 80$ in $d_{4,5} = d_{5,4} = 167$. Primer je predstavljen na sliki 1.

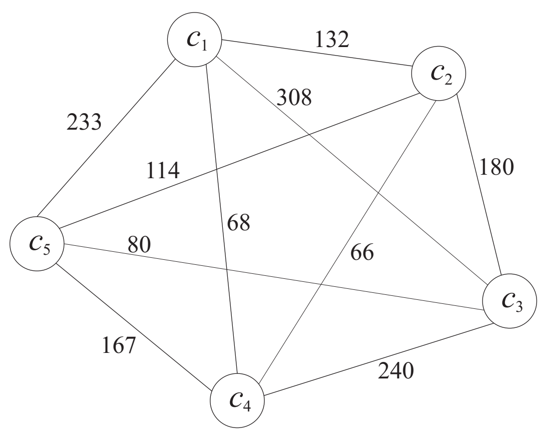
Hitro opazimo, da je cena povezave od mesta c_i do mesta c_j enaka ceni povezave od mesta c_j do mesta c_i, velja torej $d_{i,j} = d_{j,i}$ za vsak par mest c_i in c_j. Omejitev je precej naravna, saj je načeloma dolžina poti med dvema mestoma enaka v obeh smereh. Ker je v praksi pogosto cena povezave sorazmerna dolžini razdalji med mestoma, je v takih primerih zato tudi cena povezave enaka v obe smeri. Problem s to lastnostjo imenujemo *simetrični problem trgovskega potnika*.

Malo težje je opaziti, da v primeru s slike 1 za cene velja *trikotniška neenakost*. S tem povemo, da je cena povezave od mesta c_j do mesta c_i vedno manjša ali enaka vsoti cen povezav od mesta c_j do mesta c_i preko mesta c_k. Z drugimi besedami, za poljubno trojico mest c_i, c_j, c_k velja $d_{i,j} \leq d_{i,k} + d_{k,j}$. Tudi ta omejitev je naravna, saj je dolžina direktne poti med dvema mestoma običajno manjša od dolžine poti, pri kateri naredimo ovinek preko tretjega mesta.

Naivni algoritem

Spomnimo se, da želimo poiskati najcenejšo krožno pot, to je pot, ki se začne v nekem mestu, gre skozi vsa preostala mesta in se zaključi v izhodišču. Hitro opazimo, da je vseeno, v katerem mestu začnemo krožno pot. Brez izgube za splošnost bomo zato vedno začenjali v c_1.

Različnih krožnih poti je veliko, njihove cene pa zelo različne. Če npr. mesta iz slike 1 obiščemo glede na naraščajoče indekse, dobimo krožno pot $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ s ceno 952. Že majhna sprememba v zaporedju lahko povzroči bistveno spremembo cene. Če v zgornjem zaporedju c_2 premaknemo na



SLIKA 1.
Primer problema trgovskega potnika.

konec, dobimo krožno pot $(c_1, c_3, c_4, c_5, c_2)$ s ceno 961, če pa na konec zaporedja premaknemo c_3, dobimo krožno pot $(c_1, c_2, c_4, c_5, c_3)$ s ceno 753. Tudi najcenejšo pot za ta primer lahko hitro najdemo. Ker bomo vedno začeli v mestu c_1, moramo pravilno razporediti preostala štiri mesta. Poiskati moramo vse ureditve zaporedja c_2, c_3, c_4, c_5 in izračunati cene pripadajočih krožnih obhodov. Z drugimi besedami, potrebno je poiskati in ovrednotiti vse permutacije zaporedja s štirimi elementi. Teh je natanko $4! = 24$, zato jih lahko razmeroma enostavno preverimo tudi brez računalnika. Najcenejši obhod s ceno 627 nam tako da zaporedje $(c_1, c_2, c_3, c_5, c_4)$ (glej levo stran slike 2).

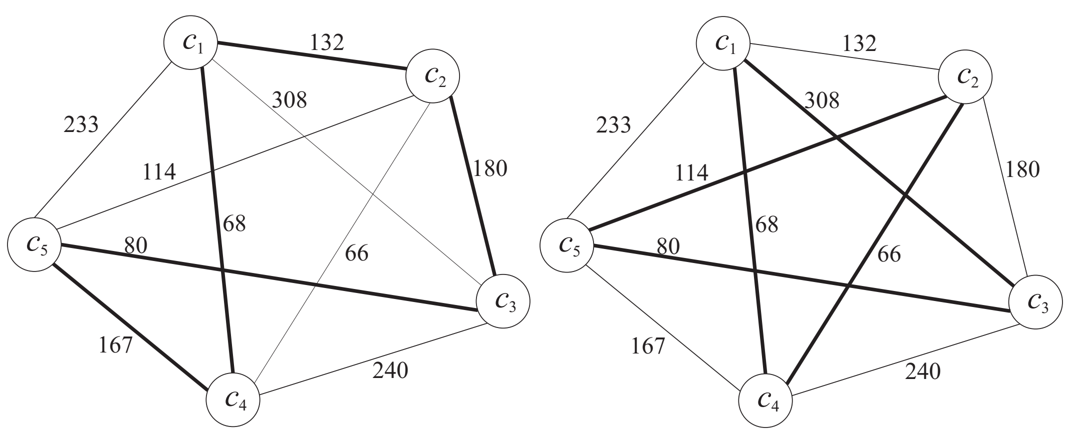
Tudi v splošnem primeru lahko naredimo podobno kot zgoraj: potrebno je samo poiskati vse permutacije zaporedja $c_2, c_3, \ldots, c_n$ in izračunati ceno pripadajočega krožnega obhoda. Opisani postopek zaradi preprostosti imenujemo tudi *naivni algoritem* in ga brez težav zapišemo v programskem jeziku. Ker so računalniki in računalnikom podobne naprave danes zelo vsakdanja stvar, si ni težko zamisliti, da bi takšen program namestili na računalniško tablico ali pametni telefon. Program bi omogočil trgovskemu potniku vnos podatkov o mestih in cenah med njimi ter mu izračunal krožno pot z najmanjšo ceno.

Ali bomo s takim programom v resnici lahko pomagali trgovskemu potniku? V nekaterih primerih že, v vseh pa še zdaleč ne. Spomnimo se, da je vseh permutacij zaporedja $c_2, c_3, \ldots, c_n$ natanko $(n-1)!$. Težava je zato v tem, da število krožnih obhodov, ki jih mora pregledati program, glede na n izredno hitro narašča. Že pri seznamu s štirinajstimi mesti število pregledanih zaporedij presega šest milijard, pri $n = 42$ pa dobimo število krožnih obhodov, ki je večje od skupnega števila vseh atomov na Zemlji!

V realnem svetu to pomeni, da je problem lepo rešljiv za primere, ko je mest na seznamu malo. Ko gre za trgovskega potnika, ki potuje po Sloveniji, je to seveda čisto realna predpostavka. Drugače pa je, ko bi radi pomagali poštarju pri raznosu pošiljk znotraj večjega mesta, saj lahko pričakujemo, da je na njegovem seznamu več deset naslovov. V tem primeru še tako hiter računalnik ne bo pomagal, saj bi bil čas računanja programa mnogo prevelik.

Če hiter računalnik ne pomaga, se je seveda smiselno vprašati, ali bi mogoče pomagal manj naiven in zato hitrejši algoritem. Hitrejši algoritmi v resnici obstajajo, a niso bistveno hitrejši od naivnega algoritma. V praksi to pomeni, da je možno z zmogljivim namiznim računalnikom v smiselnem času rešiti problem za 16 ali 17 mest. Reševanje problema za večje število mest pa bi se hitro zavleklo v več mesecev, let ali celo stoletij, če bi le bilo število mest dovolj veliko.

Problem trgovskega potnika spada med tako imenovane *NP-težke probleme*. Zelo poenostavljeno povedano s tem izrazom označimo probleme, ki jih ne znamo rešiti s hitrimi algoritmi, torej z algoritmi, ki bi omogočali izračun rešitve v sprejemljivem času tudi za večje število vhodnih podatkov. Seznam težkih problemov je zelo dolg, med zelo znane in pro-



SLIKA 2.
Najcenejša rešitev (levo) in rešitev pridobljena z algoritmom najbližja točka (desno).

učevane probleme s tega seznama tako npr. spada tudi problem izdelave urnika.

Aproksimacija

Glede na zgoraj povedano bi lahko pomislili, da trgovskemu potniku, ki mora obiskati večje število mest, sploh ne moremo pomagati. Na srečo zadeva ni popolnoma brezupna, le svoje želje mora trgovski potnik nekoliko prilagoditi. Namesto da bi se trudil z iskanjem najcenejše rešitve, se bo moral zadovoljiti z obhodom, ki zelo verjetno ne bo najcenejši, bo pa izračunan dovolj hitro. Tako izračunanemu zaporedju mest bomo rekli *približna rešitev*.

Obstaja veliko pristopov, kako hitro izračunati približno rešitev problema trgovskega potnika ali kakega drugega težkega problema. Zelo zanimivi so postopki, pri katerih znamo oceniti, za koliko se bo v najslabšem primeru izračunana približna rešitev razlikovala od najcenejše. Algoritme s to lastnostjo imenujemo *aproksimacijski algoritmi*. Posebej zaželjeni so seveda aproksimacijski algoritmi, pri katerih se izračunana približna rešitev preveč ne razlikuje od najcenejše.

Algoritem z zgornjo lastnostjo za splošni problem trgovskega potnika žal ne obstaja, obstajo pa aproksimacijski algoritmi za problem trgovskega potnika, ki zadošča trikotniški neenakosti. Tukaj bomo predstavili algoritem *najbližja točka*.

Algoritem postopoma gradi krožno pot D, ki najprej obsega samo mesto c_1. V nadaljevanju na posameznem koraku doda v krožno pot tisto mesto, iz katerega med vsemi mesti, ki še niso uvrščena v trenutno krožno pot, vodi najcenejša pot do nekega mesta, ki je že na trenutni krožni poti. Algoritem 1 opisuje postopek še formalno.

Algoritem 1: Najbližja točka

Vhod: *Množica mest* $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, *cene* $d_{i,j}$ *za vsak par* c_i, c_j.
Izhod: *Zaporedje mest* $D = (c_{\pi_1}, c_{\pi_2}, \ldots, c_{\pi_n})$.
begin
  $D := (c_1)$;
  for $i := 2$ **to** n **do**
    x naj bo mesto izven D, iz katerega vodi najcenejša pot do nekega mesta y v D;
    Dodaj x v D takoj za y;
  end
end

Predstavimo potek algoritma za primer s slike 1. Pred vstopom v zanko se v zaporedje D vstavi mesto c_1. Algoritem nato vstopi v zanko in med preostalimi mesti c_2, c_3, c_4, c_5 išče tisto, iz katerega vodi najcenejša pot do c_1. Očitno je to c_4, iz katerega pridemo v c_1 za ceno 68. Podobno se zgodi na naslednjem koraku. Algoritem izmed mest s seznama c_2, c_3, c_5 išče tisto, iz katerega vodi najcenejša pot do c_1 ali c_4. Do c_1 pridemo najceneje iz c_2 za ceno 132, do c_4 pa prav tako iz c_2 za ceno 66. Zato v D dodamo c_2 takoj za c_4. Na podoben način ugotovimo, da najceneje v zaporedje (c_1, c_4, c_2) dodamo c_5 takoj za c_2. Na zadnjem koraku ostane c_3, ki ga najceneje priključimo v obhod za c_5. Podrobneje je potek algoritma predstavljen v tabeli 1.

i	x	y	D	mesta izven D
			(c_1)	c_2, c_3, c_4, c_5
2	c_4	c_1	(c_1, c_4)	c_2, c_3, c_5
3	c_2	c_4	(c_1, c_4, c_2)	c_3, c_5
4	c_5	c_2	(c_1, c_4, c_2, c_5)	c_3
5	c_3	c_5	$(c_1, c_4, c_2, c_5, c_3)$	

TABELA 1.
Potek izračuna algoritma za primer s slike 1.

Izračunano zaporedje predstavlja krožno pot s ceno 636, ki je predstavljena na desni strani slike 2, dobljena rešitev pa je le za dober odstotek slabša od najcenejše krožne poti. V splošnem sicer ne moremo vedno pričakovati tako dobrega približka, dokazano pa je, da je vrednost izračunane rešitve tudi v najslabšem primeru največ dvakratnik najcenejše rešitve. Za konec povejmo, da je znanih še nekaj aproksimacijskih algoritmov za rešitev problema trgovskega potnika, ki zadošča trikotniški neenakosti. Najboljši med njimi je Christofidesov algoritem, s katerim lahko izračunamo približno rešitev, ki se za največ 50 odstotkov razlikuje od najcenejše.

Literatura

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson in R. L. Rivest, *Introduction to algorithms*, The MIT Press, 2001.

×××

Velike Sončeve pege

Andrej Guštin

→ Sonce je v večini starih kultur veljalo za brezmadežno nebeško luč, še posebej v zahodni kulturi. Ta se je do znanstvene renesanse naslanjala na antično podobo nespremenljivega vesolja. Toda občasno, najpogosteje ob višku Sončeve aktivnosti, se na Soncu pojavijo orjaške pege, ki so ob zahajanju ali vzhajanju Sonca, pa tudi skozi gosto meglo vidne tudi s prostim očesom. Marsikdo je zato še pred odkritjem daljnogleda opazil nekakšne madeže na brezmadežni nebeški luči. Taka videnja so v kronikah iz prvega stoletja pred našim štetjem zapisali že kitajski pisci, pa tudi v srednjeveški Evropi so vedeli, da se na Soncu občasno pojavijo temne lise.

Zaradi pričakovane brezmadežnosti so stvar pripisovali prehodu kakega temnega nebesnega telesa pred Soncem. Celo slavni astronom Kepler je leta 1607 videl tako pego, a je menil, da je to planet Merkur. Šele po letu 1608, ko je nizozemski optik Lippershey odkril daljnogled, so se začela nekoliko bolj sistematična opazovanja naše zvezde, ki so potrdila obstoj Sončevih peg. Odkritje obstoja le-teh je leta 1612 objavil Galileo Galilei, ki naj bi pege prvič opazoval že dve leti prej. Z gotovostjo je trdil, da so pege na Soncu pege in ne nekakšen privid ali prehod planeta pred Soncem.

Trenutni višek Sončeve aktivnosti je najskromnejši v zadnjih 100 letih, kar pomeni, da je na Soncu v povprečju peg v tem obdobju sorazmerno malo. Kljub temu pa se je v začetku letošnjega leta na Soncu pojavilo nekaj peg, ki so bile načeloma vidne tudi s prostimi očmi brez pomoči daljnogleda. Gotovo se bo še kaka!

Take velike pege so tudi zelo fotogenične, saj jih lahko posnamemo že s skromnejšim teleobjektivom. Fotografiranje Sončevih peg pa vseeno ni povsem preprosto, saj se moramo spopasti z najmanj dvema velikima ovirama: Sončeva ploskvica je na nebu relativno majhna, Sonce pa zelo svetlo.

Prva ovira – velikost Sonca

Sončeva ploskvica se nam na nebu le zdi zelo velika. V resnici je njen premer 0,5 kotne stopinje – to je njen zorni kot. Kaj to pomeni pri fotografiji? Pomagajmo si z malo računstva.

Premer slike Sončeve ploskvice na čipu fotoaparata D, ki nastane v goriščni ravnini objektiva, enostavno povežemo z goriščno razdaljo objektiva f in z zornim kotom Sončeve ploskvice na nebu φ:

- $\operatorname{tg}\varphi = D/f$,

iz česar sledi

- $D = f \operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}009 \cdot f$.

Če imamo fotoaparat z 200-milimetrskim teleobjektivom, kar je že »poštena zadeva«, potem je premer slike Sonca na čipu fotoaparata le 1,8 mm! To pa ni prav veliko, kajne?

Zelo velike pege imajo premer okoli 1/20 Sončevega in so torej na čipu velike

- $D_p \approx 0{,}00045 \cdot f$.

Če jih torej fotografiramo z 200-milimetrskim objektivom, so na čipu velike le 0,09 milimetra. Predpostavimo, da ima čip fotoaparata 10 mikronov velike slikovne elemente. To pomeni, da premer slike pege pokrije le devet slikovnih elementov. To je res skromna velikost, sploh če naš fotoaparat sliko »prežveči« in jo »izpljune« le v formatu jpg, ki dodatno prizadene detajle. Rešitev je ta, da vzamemo teleobjektiv z daljšo goriščnico, če ga seveda imamo.

Druga ovira – velika svetlost Sončeve ploskvice

Ko je Sonce visoko na nebu, je svetlost njegove ploskvice tako velika, da z nobenim fotoaparatom ni mogoče posneti pravilno osvetljene fotografije. Seveda si lahko pomagamo s filtri, a ne s fotografskimi, saj so ti premalo gosti. Najbolje je uporabiti kar varilsko steklo, ki ga (nekako) pritrdimo pred objektiv. Težava takega filtra pa je ta, da je iz precej debelega stekla in nima antirefleksnega sloja, kar pomeni, da bo fotografija Sonca obremenjena z odsevi. Poleg tega filter prinese še druge optične napake, tako da tudi velika pega na fotografiji ne bo prav ostra. Varilsko steklo lahko nadomestimo s folijo mylar, ki je namenjena prav varnemu opazovanju Sonca; a izkušnje kažejo, da je kakovost slike tedaj še slabša kot pri varilskem steklu.

Fotografsko najlepša rešitev je ta, da Sonce in pego na njem posnamemo, ko je Sonce tik nad obzorjem, saj v tem primeru ozračje poskrbi za naravni filter. Poleg tega pa lahko tako naredimo tudi panoramsko sliko s fotogeničnimi objekti na obzorju.

Kljub temu, da so pege temnejša območja na zelo svetli fotosferi Sonca in je zaradi tega med pegami in okolico velik kontrast, so že na malo nadosvetljeni fotografiji pege »prežgane«, torej zalite s svetlobo fotosfere. Na posnetku jih tako sploh ne bo videti oz. bo kontrast med njimi in okolico zelo majhen. Pravzaprav postanejo pege na fotografiji dobro vidne le, če je slika nekoliko podosvetljena in je tako tudi manj »parazitske« svetlobe svetlega dela ploskvice Sonca. Pri tem se ne gre zanašati na avtomatske nastavitve ali podatke svetlomera, temveč je modro narediti več posnetkov z različnimi časi osvetlitve. To še posebej velja pri fotografiji Sonca tik nad obzorjem, saj so takrat pogoji (prosojnost neba, meglice, oblaki) vsakič različni. Pri fotografiji Sonca in njegovih peg velja pravilo – večkrat poskusiti in si tako nabrati prepotrebnih izkušenj.

Za konec še dve malenkosti. Pri fotografiranju Sonca fotoaparat pritrdimo na fotografski stativ. Nikoli ne gledamo skozenj naravnost v Sonce, morda le takrat, ko je Sonce tik nad obzorjem. Sicer bomo oslepeli!

SLIKA 1.

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR

14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.