

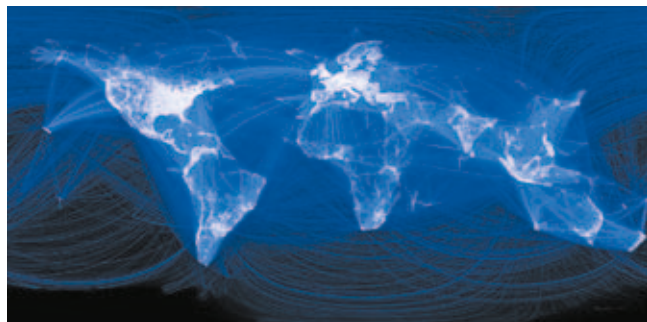


PRESEK



- ZMENEK IN VERJETNOST
- LETNICE PRI POUKU FIZIKE
- VAJE ESO/ESA, MASA ČRNE LUKNJE V SREDIŠČU GALAKSIJE
- PREDSTAVITEV CELIH ŠTEVIL V RAČUNALNIKU

Iskanje prijateljev



→ Facebook ima več kot 700 milijonov uporabnikov z več kot 70 milijardami povezav. Medtem ko uporabniki te strani z lahkoto najdejo nove spletne prijatelje, imajo računalniki, ki skrbijo za delovanje strani, zelo težko delo pri shranjevanju in pri dostopanju do ustreznih podatkov, ki vključujejo tudi informacije o prijateljih prijateljev. Slednje je pomembno pri priporočilih uporabnikom (*People You May Know*). Veliko algoritmov temelji na dognanjih računalniške znanosti, a brez matematike ne gre. Linearno programiranje in teorija grafov razpolovita čas, ki je potreben za določitev prijateljev uporabnikovih prijateljev, in pomagata zmanjšati mrežni promet za približno dve tretjini.

Verjetnost prijateljstva običajno pada z naraščanjem razdalje med osebama. To je smiselno tako v realnem kot v virtualnem svetu. Ogromna mreža Facebookovih uporabnikov je primer mreže majhnega sveta. Če za razdaljo med Facebookovima uporabnikoma vzamemo najkrajšo verigo prijateljev, ki ju povezuje, je povprečna razdalja manj kot pet. Čeprav se zdi na prvi pogled zbirka uporabnikov in njihovih povezav kaotična, je ustrezna mreža povezav precej strukturirana. Tudi osebo, ki je pet prijateljskih povezav stran od nas, je možno najti npr. le s sprotnim poznavanjem neposrednih prijateljev oseb, ki so v verigi (in tako poznavanje prijateljev posameznikovih prijateljev ni potrebno).

Več o tem lahko najdete v knjigi *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World* iz leta 2010, ki sta jo napisala David Easley in Jon Kleinberg. ✖ ✖ ✖



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 40, šolsko leto 2012/2013, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2012/2013 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1600 izvodov

© 2012 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1880

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Iskanje prijateljev

MATEMATIKA

- 4-8** Zmenek in verjetnost
(Marko Jakovac)
- 9-11** Pitagorov izrek v nekaterih jezikih
(Marko Razpet)
- 11** Rešitev ugank iz prejšnje številke
(Peter Legiša)
- 11-12** Še nekaj ugank iz ameriške
radijske oddaje Cartalk
(Peter Legiša)
- 12-13** 48. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje
(Klavdija Mlinšek)

FIZIKA

- 14-15** Letnice pri pouku fizike
(Tine Golež)
- 18** Poizkuševalnica v kuhinji –
V mrazu izginjajoči sneženi mož
(Mojca Čepič)
- 18-19** Razmisli in poskusi
(Mitja Rosina)

ASTRONOMIJA

- 20-25** Vaje ESO/ESA, Masa črne luknje
v središču Galaksije
(Andrej Guštin)
- 26** Evropski mladinski natečaj za
raziskovanje vesolja Odysseus
(Andrej Guštin)

RAČUNALNIŠTVO

- 27-30** Predstavitev celih števil v računalniku
(Aleksander Vesel)

RAZVEDRILO

- 31** Naravoslovna fotografija –
Mešanje barv
(Aleš Mohorič)
- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 40/1
(Marko Bokalič)
- 12,13** Barvni sudoku
- 19** Futošiki
- 25,26** Križne vsote

TEKMOVANJA

priloga

priloga

priloga

priloga

SLIKA NA NASLOVNICI: Tako je pod mikroskopom videti temnooranžna ploskev, ki jo ustvari stroj za tiskanje. Če množico pik pogledamo z večje razdalje, jih ne razločimo več in lise se zlijejo v ploskev z enotnim barvnim vtisom. Podrobnejšo razlago si oglejte v prispevku „Mešanje barv“. (Foto: Aleš Mohorič)

Zmenek in verjetnost



MARKO JAKOVAC

→ Velika večina se je že ali pa se še bo srečala s tistim trenutkom, ko je treba iti na prvi zmenek. Pogosto se takrat obremenjujemo s tem, ali smo dovolj šarmantni, lepo oblečeni, ali bomo pustili dober vtis, itd. Sprašujemo se tudi o tem, ali bo zmenek uspešen. V tej situaciji se pojavi povsem matematično vprašanje verjetnosti dogodka. V pričujočem članku se sicer ne bomo ukvarjali z verjetnostjo, da zmenek uspe, na preprostem primeru pa bomo izračunali verjetnost, da do zmenka sploh pride.

Verjetnost

Če želimo rešiti zgoraj podani problem, moramo najprej vedeti, kaj verjetnost sploh je. Pogosto je verjetnost zavita v tančico skrivnosti in nezaupanja, saj nam v večini primerov le podaja teoretično vrednost, povezano s tem, ali se določen dogodek zgodi ali ne. Zgodovinsko gledano so bile z matematičnim razumevanjem verjetnosti pogosto težave. V sodobni matematični obliki jo je v vsej splošnosti formuliral šele Kolmogorov leta 1933. Z aksiomi Kolmogorova je bila verjetnost matematično postavljena na trdne temelje. Več o tem lahko preberemo v knjigi [3]. To pa ni rešilo njene povezave z realnostjo – tu je možnih več interpretacij. Oglejmo si naslednja dva primera.

Primer 1

Kaj pomeni, če rečemo, da je verjetnost, da pri naslednji kontrolni nalogi iz matematike učenec Janez



dobi odlično oceno, 10 %? S to izjavo navadno mislimo, da ocenjujemo, da bo 10 % takih učencev, kot je Janez, pri takih kontrolnih nalogah dobilo odlično oceno (pri čemer imamo v mislih veliko učencev). Verjetnost je torej ocena za delež. ◇

Primer 2

Denimo, da vržemo pošteni kovanec, kar pomeni, da grb in cifra padeta teoretično enako verjetno. Verjetnost ne pomeni točnega deleža v naslednjih nekaj poskusih, pač pa se da delež dokaj natančno napovedati za veliko število poskusov. Če npr. pošteni kovanec vržemo 10-krat, navadno ne bomo dobili 5 cifer in 5 grbov. Pač pa bomo, če bomo tak kovanec vrgli 1000-krat, bržkone ugotovili, da je razmerje med številom padlih cifer in grbov skoraj 1 : 1. ◇

Zavedati se je treba, da v splošnem vsi izidi (npr. pri prvem primeru ocene od 1 do 5) niso enako verjetni. Pri primerih 1 in 2 je povezava med verjetnostjo in realnostjo različna. Pri prvem primeru si lahko predstavljamo, da z dolgoletnim opazovanjem testov učencev pridemo do tega, da dolgoročno gledano 10 % takih učencev kot je Janez, pri tovrstnih kontrolnih nalogah dobi odlično oceno in zato domnevamo, da bo tako tudi v prihodnje. Pri drugem primeru pa domnevo o poštenosti kovanca dobimo iz simetrije, pri tem pa zanemarimo vpliv različnih označb kovanca na obeh straneh na njegovo obnašanje.

V uvodnem poglavju smo postavili vprašanje, kolikšna je verjetnost, da do zmenka z določeno osebo sploh pride. Formulirajmo zdaj to vprašanje natančneje, tako da bo matematično dobro postavljeno. Predstavljajmo si, da se dve osebi dogovarjata za zmenek. Da bomo zadevo še bolj zapletli, denimo, da sta osebi pozabili doreči, kdaj točno se dobita. Vesta le, da bi se naj dobili med 20. in 22. uro. Ker osebi ne vesta točnega časa prihoda, ga določita na slepo. Privzemimo tudi, da na dogovorjeno mesto prispeta neodvisno drug od drugega. Pogosta lastnost ljudi je, da nihče rad ne čaka, zato predpostavimo, da vsak počaka pol ure in če drugega ni, odide. Kolikšna je torej verjetnost dogodka, da se bosta osebi srečali?

Preden se posvetimo našemu izhodiščnemu problemu, si oglejmo še, kako verjetnost matematično zastavimo na sodoben način. Ker vemo, da je matematika abstraktna veda, ni presenetljivo, da matema-

tična formulacija verjetnosti sama po sebi ne vključuje nobene povezave z realnostjo. V sodobni matematiki verjetnost predstavimo z množicami in funkcijami na njih. Množicam pravimo *dogodki*, ki so vsi podmnožice neke univerzalne množice Ω . To množico imenujemo *verjetnostni prostor* ali, če jo gledamo kot dogodek, *gotovi dogodek*. Pri tem ni nujno, da so vse podmnožice verjetnostnega prostora tudi dogodki, a se z razlogi, zakaj je to tako, tukaj ne bomo ukvarjali. Podrobnosti si lahko npr. preberemo v knjigah [1] ali [2].

Elementom verjetnostnega prostora pravimo *izidi*. Če vržemo navadno kocko, bo verjetnostni prostor sestavljalo 6 izidov: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dogodek, da pade vsaj pet pik, bo množica $\{5, 6\}$, dogodek, da pade več kot šest pik, pa bo prazna množica. Verjetnost je funkcija $\mathbb{P}$, ki vsakemu dogodku $A \subseteq \Omega$ priredi njegovo verjetnost $\mathbb{P}(A)$, ki mora biti število z intervala $[0, 1]$.

Klasična definicija verjetnosti

Pri *klasični definiciji verjetnosti* [4] privzamemo, da so vsi izidi enako verjetni. To tudi pomeni, da verjetnostni prostor Ω vsebuje končno mnogo (denimo n) izidov. Verjetnost dogodka A , ki vsebuje k izidov, je definirana kot ulomek:

$$\blacksquare \quad \mathbb{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

Primer klasične definicije verjetnosti sta npr. *pošteni kovanec* in *poštena kocka*. Pošteni kovanec smo že spoznali pri primeru 2. Kocka je po definiciji poštena, če vse strani padejo z enakimi verjetnostmi. Pri poštenih kocki je tako verjetnost dogodka, da pade vsaj pet pik, enaka $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Klasična definicija verjetnosti ustreza pojmu *slepe izbire*. Izbira neke stvari je slepa, če so vse možnosti enako verjetne. Met poštene igralne kocke je ekvivalenten slepi izbiri števila iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Včasih pa izbiramo več kot eno stvar, npr. vržemo dve kocki. Če izbiramo dve stvari, pravimo, da jih izberemo na *slepo in neodvisno*, če so vsi možni urejeni pari enako verjetni. Z drugimi besedami, slepa in neodvisna izbira pomeni *slepo izbiro iz kartezijskega produkta*. Če torej rečemo, da neodvisno vržemo dve pošteni kocki, bo verjetnostni prostor sestavljalo 36 urejenih parov (i, j) , kjer sta i in j elementa množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dogodek, da skupaj pade vsaj 11 pik,



→ bo množica urejenih parov $\{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$, njegova verjetnost pa bo $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Poglejmo si še primer igranja Lota. Pri igri Loto na osnovnem kombinacijskem listku prekrizamo 7 števil izmed 39, nakar loterija izžreba svojih 7 števil. Sedmico zadenemo, če je vseh naših 7 števil izžrebanih (dodatna številka pri sedmici ne igra vloge). Ker se kroglice pri žrebanju ne vračajo, za izide postavimo vse možne sedmerice različnih števil od 1 do 39, ki ustrezajo vsem možnim žrebanjem. Takih izidov je $39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 77\,519\,922\,480$. Dogodek, da zadenemo sedmico, vsebuje $7! = 5\,040$ izidov in njegova verjetnost je

$$\blacksquare \quad \frac{5\,040}{77\,519\,922\,480} = \frac{1}{15\,380\,937}.$$

Možnost, da bomo obogateli, je torej precej majhna.

Privzeli smo seveda, da je žrebanje pošteno, torej da so vsi izidi enako verjetni. Če je tako, je številka na posamezni kroglici, ki je izžrebrana (preden jih uredimo po velikosti), izbrana na slepo: zaradi simetrije so vse številke npr. na peti kroglici, ki pride iz bobna, enako verjetne. Niso pa neodvisne, saj kroglic ne vračamo: verjetnostni prostor ne vsebuje vseh $39^7 = 137\,231\,006\,679$ možnih urejenih sedmeric.

Kako postavimo verjetnostni prostor, je deloma naša izbira. Dostikrat se to da storiti na več smiselnih načinov. Lahko bi zanemarili vrstni red kroglic in bi za izide postavili kar vse 7-elementne podmnožice naravnih števil do 39, ki jih je $\binom{39}{7} = 15\,380\,937$. V tem primeru pri le enem izidu zadenemo sedmico, kar nam da že prej izračunano verjetnost.

Geometrijska definicija verjetnosti

Klasična definicija verjetnosti ima eno veliko pomanjkljivost. Za njeno uporabo mora množica Ω biti končna, saj lahko le tako preštejemo, koliko dogodkov tega sistema je ugodnih in tako izračunamo ustrezno verjetnost. Težava nastopi, ko imamo opravka s prostorom, v katerem množice vsebujejo neskončno število elementov. Zato je s klasično definicijo verjetnosti nemogoče izračunati, kolikšna je verjetnost, da bomo na intervalu $[0, 1]$ izbrali število večje od npr. $\frac{\pi}{4}$. Tega se zagotovo ne da rešiti z razdelitvijo intervala na končno mnogo enako dolgih delov. Prav tako tega ne bomo mogli storiti (vsaj ne zlahka) pri izračunu verjetnosti, da bo naš zmenek uspešen: op-

ravka imamo namreč s časovnim intervalom, ki vsebuje neskončno mnogo vrednosti. Pač pa si bomo lahko pomagali z *geometrijsko definicijo verjetnosti* [5].

Cilj je definirati verjetnost tako, da jo bomo lahko s pridom uporabljali na množicah z neskončno elementi. Denimo, da lahko celoten verjetnostni prostor Ω predstavimo z neko množico na premici, na ravnini, ali v prostoru. Ideja geometrijske definicije verjetnosti je, da so vse točke enakovredne oz. da je verjetnost enakomerno razpršena po množici Ω . To dosežemo tako, da verjetnost dogodka $A \subseteq \Omega$ definiramo kot:

$$\blacksquare \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kjer je μ mera množice. Za nas bo pomembno le, da je mera μ na premici dolžina, na ravnini ploščina, v prostoru pa volumen. Ker je množica A podmnožica množice Ω , očitno velja $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

Geometrijsko definicijo verjetnosti uporabljamo takrat, ko imamo opravka s slepo izbiro točke z intervala, ravninskega lika, telesa ipd. Poglejmo si ta način razmišljanja na naslednjih dveh primerih.

Primer 3

Na intervalu $[0, 1]$ na slepo izberemo eno število. Kolikšna je verjetnost dogodka A , da bo to število večje od $\frac{\pi}{4}$?

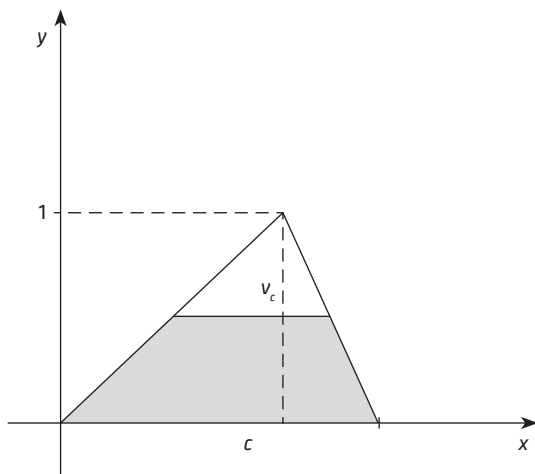
Število izbiramo z intervala $[0, 1]$, zato je naš verjetnostni prostor $\Omega = [0, 1]$. Za mero μ izberemo dolžino, saj točke z intervala $[0, 1]$ ležijo na premici (realni osi). Mera množice celotnega verjetnostnega prostora je dolžina intervala $[0, 1]$, $\mu(\Omega) = 1$. Mera množice dogodka A pa je razdalja med točkama $\frac{\pi}{4}$ in 1, $\mu(A) = 1 - \frac{\pi}{4}$. Verjetnost dogodka A je po geometrijski definiciji verjetnosti enaka

$$\blacksquare \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{4 - \pi}{4}. \quad \diamond$$

Primer 4

Na trikotniku z osnovnico c , ki leži na abscisni osi, in višino $v_c = 1$ na slepo izberemo točko. Kolikšna je verjetnost dogodka A , da bo točka imela ordinato manjšo od $\frac{1}{2}$?

Za mero μ tokrat izberemo ploščino, saj točko izbiramo na ravnini. Mera množice celotnega verjetno-



SLIKA 1.

Ugodno območje dogodka A

stnega prostora je ploščina našega trikotnika, $\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{c}{2}$. Ugodno območje, ki predstavlja dogodek A, je osenčeni trapez na sliki 1. Osnovnica manjšega trikotnika (neosenčeni del) je polovica osnovnice večjega trikotnika, zato je mera množice dogodka A enaka $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c - \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{v_c}{2} = \frac{c}{2} - \frac{c}{8} = \frac{3c}{8}$. Verjetnost dogodka A je po geometrijski definiciji verjetnosti enaka

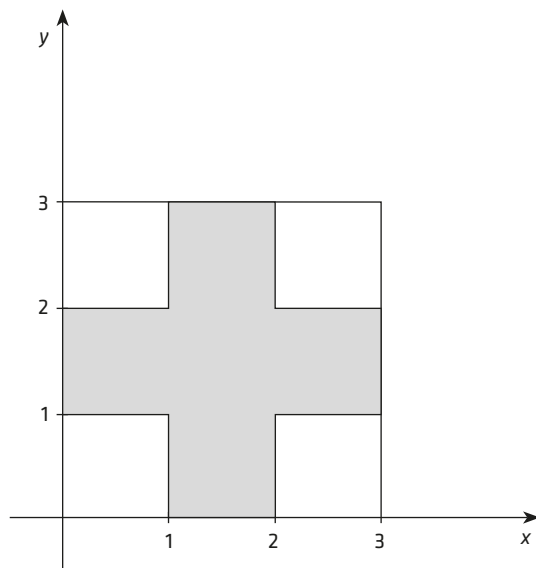
$$\blacksquare \mathbb{P}(A) = \frac{\frac{3c}{8}}{\frac{c}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Podobno kot pri klasični definiciji verjetnosti lahko tudi pri geometrijski definiciji verjetnosti definiramo slepo in neodvisno izbiro. To ponovno pomeni slepo izbiro iz kartezijskega produkta.

Primer 5

Na intervalu $[0, 3]$ na slepo in neodvisno izberemo dve števili x in y . Kolikšna je verjetnost dogodka A, da bo vsaj eno izmed števil oddaljeno od roba za več kot eno enoto?

Ker izbiramo dve števili neodvisno, si lahko rešitev tega problema predstavljamo v ravnini, kjer izbiramo točko (x, y) na kartezijskem produktu $\Omega = [0, 3] \times [0, 3]$. Če je torej $x \in [1, 2]$, potem je lahko y poljubno izbran na celotnem intervalu $[0, 3]$. Podobno velja, če vlogi x in y zamenjamo. Tako dobimo ugodno območje, ki ga prikazuje slika 2.



SLIKA 2.

Ugodno območje dogodka A

Osenčeni del predstavlja ugodno območje, čigar ploščina je enaka $\mu(A) = 5$. Ploščina celotnega območja je ploščina kvadrata $[0, 3] \times [0, 3]$, ki znaša $\mu(\Omega) = 9$. Torej je verjetnost dogodka, da bo vsaj eno število oddaljeno od roba za več kot eno enoto, enaka $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{9}$.

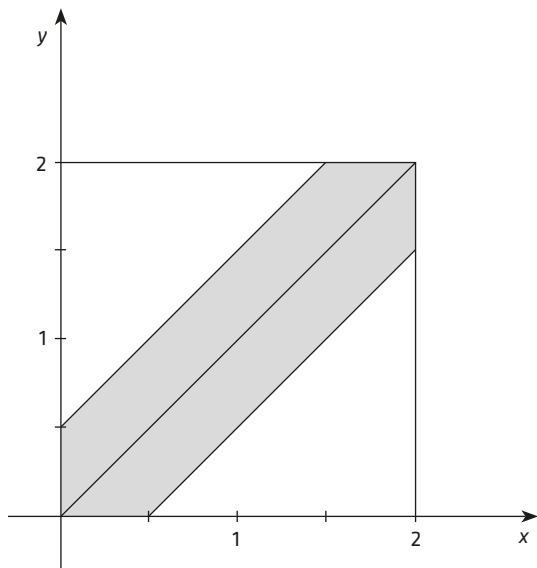
Sedaj imamo dovolj znanja, da rešimo primer zmenka.

Na zmenek z verjetnostjo

Naj čas prihoda osebe X predstavlja realna spremenljivka x , čas prihoda osebe Y pa realna spremenljivka y . Obe spremenljivki izbiramo z intervala $[20, 22]$ na slepo in neodvisno. Kot smo se naučili, predpostavka, da sta x in y izbrani na slepo in neodvisno z intervala $[20, 22]$, pomeni, da je točka (x, y) izbrana na slepo s kvadratu $[20, 22] \times [20, 22]$. Hiter matematičen razmislek pove, da je iskanje ugodnega območja na kvadratu $[20, 22] \times [20, 22]$ enakovredno iskanju ugodnega območja na kvadratu $[0, 2] \times [0, 2]$, zato bomo zaradi lažje predstavitve območja v koordinatnem sistemu izbrali drugo možnost. Verjetnostni prostor Ω torej že imamo, t.j. produkt $[0, 2] \times [0, 2]$. Cilj je poiskati še množico, ki izpolnjuje po-

→ goje dogodka A . Da se bosta osebi X in Y zagotovo srečali, sme med njunima prihodoma na dogovorjeno mesto miniti največ pol ure. Do zmenka torej pride, če je $|x - y| \leq \frac{1}{2}$. Sedaj moramo le še razrešiti tole neenakost.

Ločimo dve možnosti. Če oseba X prispe pred osebo Y , je $x \leq y$ in zato dobimo $|x - y| = y - x \leq \frac{1}{2}$ oz. $y \leq x + \frac{1}{2}$. Če pa oseba Y prispe pred osebo X , velja $y \geq x$ in zato je $|x - y| = x - y \leq \frac{1}{2}$ oz. $y \geq x - \frac{1}{2}$. Ugotoviti moramo, katero območje omejujeta dobljeni neenakosti znotraj celotnega območja Ω . Rešitev nam prikazuje slika 3.



SLIKA 3.
Ugodno območje dogodka A

Osenčeni del predstavlja ugodno območje, čigar ploščina je enaka

$$\mu(A) = 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

Ploščina celotnega območja Ω je ploščina kvadrata $[0, 2] \times [0, 2]$, ki je $\mu(\Omega) = 4$. Torej je verjetnost dogodka, da bosta osebi X in Y imeli zmenek, enaka $\mathbb{P}(A) = \frac{7/4}{4} = \frac{7}{16}$, kar je nekoliko manj kot polovica.

Seveda smo v realnem življenju ljudje precej različni, zato si oglejmo še primer, ko čas, ko je posamezna oseba pripravljena čakati, ni za obe osebi enak. Razmislimo, kako bi se problema lotili, če bi

pogoj o polurnem čakanju nadomestili s pogojem, da oseba X čaka pol ure, oseba Y pa le četrto ure. Sedaj problema ne moremo obravnavati enakovredno z izrazom $|x - y|$, saj je pomembno, kdo prvi prispe. Lahko pa razmislimo takole: če prej prispe oseba X , potem mora veljati $y - x \leq \frac{1}{2}$, če pa prej prispe oseba Y , mora veljati $x - y \leq \frac{1}{4}$. V tem primeru bi ugodno območje bilo podobno ugodnemu območju na sliki 3, le da bi spodnja premica bila bližje simetrali lihih kvadrantov in bi posledično tudi dobili manjšo verjetnost, da se osebi X in Y srečata. Le-ta je v tem primeru enaka

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4 - (1/2)(3/2)^2 - (1/2)(7/4)^2}{4} = \frac{43}{128}.$$

Verjetnost v realnem življenju

Dejstvo je, da smo verjetnost dogodka, da pride do zmenka, rešili le za zelo enostavno situacijo. Realnost je dosti bolj zapletena (kaj šele, če bi želeli izračunati verjetnost dogodka, da je zmenek uspešen, kar koli naj že to pomeni). Vseeno pa smo spoznali, da nam znanje verjetnosti lahko pomaga, da vsaj približno izračunamo, kakšne so naše možnosti oz. ali obstaja dovolj velika verjetnost, da se nam trud, ki ga vložimo v neko situacijo, tudi splača.

Literatura

- [1] M. Hladnik, *Verjetnostni račun in statistika: zapiski s predavanj*, FRI, Ljubljana, 2002.
- [2] R. Jamnik, *Verjetnostni račun in statistika*, DMFA, Ljubljana, 1995.
- [3] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Pub. Co. 2. edition, Chelsea, 1960.
- [4] <http://sl.wikipedia.org/wiki/Verjetnost>
- [5] http://www.e-studij.si/Geometrijska_definicija_verjetnosti

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

Pitagorov izrek v nekaterih jezikih



MARKO RAZPET

→ Pitagorov izrek je eden temeljnih izrekov v geometriji. Poznali so ga že pred Pitagoro, o čemer pa tukaj ne bomo posebej razpravljali, ker se bomo posvetili le temu, kako se ga z besedami za-
piše v nekaterih evropskih jezikih. Podani niso dobesedni prevodi, toda le-ti povedo eno in isto. V večini besedil takoj prepoznamo vsaj dve besedi: **kateta** in **hipotenuza**. Vir navedenih besedil je v glavnem svetovni splet, kjer najdemo besedila tudi v drugih jezikih.

V stari grščini najdemo Pitagorov izrek z dokazom vred v Evklidovih *Elementih*. Evklid izreka ne imenuje po Pitagori. Po njem so izrek namreč začeli imenovati kasneje. Kljub temu bomo ime izreka navedli tudi v stari grščini.

■ Πυθαγόρειον θεώρημα (stara grščina)

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθῆν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθῆν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

■ Πυθαγόρειο θεώρημα (nova grščina)

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

■ Pythagoras' theorem (angleščina)

In a right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

■ Satz des Pythagoras (nemščina)

In jedem ebenen rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

■ Stelling van Pythagoras (nizozemščina)

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van de lengtes van de rechthoekszijden.

■ Pitagorov izrek (slovenščina)

V pravokotnem trikotniku je ploščina kvadrata nad hipotenuzo enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama.

■ Pitagorin poučak (hrvaščina)

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad ostale dvije stranice pravokutnog trokuta.

■ Pythagorova věta (češčina)

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého rovinného trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.

■ Pytagorova veta (slovaščina)

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.

■ Twierdzenie Pitagorasa (poljščina)

W dowolnym trójkacie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

■ Теорема Пифагора (ruščina)

В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

■ Теорема Піфагора (ukrajinščina)

У прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.

■ Тэарэма Піфагора (beloruščina)

Плошча квадрата, набудаванага на гіпатэнузе роўная суме плошчаў квадратаў, набудаваных на катэтах прамавугольнага трохвугольніка.





■ **Питагорова теорема** (bolgarščina)

В правоъгълния триъгълник сборът от квадратите дължините на катетите е равен на квадрата на дължината на хипотенузата.

■ **Питагорина теорема** (makedonščina)

Квадратот над хипотенузата кај правоаголен триаголник е еднакот на збирот на квадратите над двете катети.

■ **Питагорина теорема** (srbščina)

Квадрат над хипотенузом правоуглог трокута једнак је збиру квадрата над катетама.

■ **Theorema Pythagorae** (latinščina)

Trianguli recti hypotenusam quadratam est aequalem summae aliorum laterum quadratorum.

■ **Teorema di Pitagora** (italijanščina)

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

■ **Théorème de Pythagore** (francoščina)

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

■ **Teorema de Pitágoras** (španščina)

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

■ **Teorema de Pitàgores** (katalonščina)

En un triangle rectangle la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa.

■ **Teorema de Pitágoras** (portugalščina)

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

■ **Teorema lui Pitagora** (romunščina)

În orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor catelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

■ **Pitagorasz-tétel** (madžarščina)

Tetszőleges derékszögű háromszögben a befogók fölé írt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogó fölé írt négyzet területével.

■ **Pythagoras sats** (švedščina)

I en rätvinklig triangel, kvadraten på hypotenusan är lika med summan av kvadraterna på kateterna.

■ **Pythagoras' læresetning** (norveščina – bokmål)

I en rettviklet trekant er summen av kvadratene på katetene lik kvadratet på hypotenusen.

■ **Den pythagoræiske læresætning** (danščina)

I alle retvinklede trekanter er summen af kateternes kvadrat lig hypotenusens kvadrat.

■ **Regla Pýþagórasar** (islandščina)

Í rétthyrndum þríhyrningi er summan af feringstöllum skammhliðanna jöfn feringstölu langhliðarinnar.

■ **Pythagoraan lause** (finščina)

Suorakulmaisen kolmion kateetit sivuina piirrettyjen neliöiden alojen summa on yhtä suuri kuin hypotenuusa sivuna piirretyn neliön ala.

■ **Teorema e Pitagorës** (albanščina)

Në çdo trekëndësh këndrejtë shuma e katrorëve të ndërtuar mbi katete është e barabartë me katrorin e ndërtuar mbi hipotenuzë.

■ **Pisagor teoremi** (turščina)

Bir dik açılı üçgende dik kenarların her birinin uzunluklarının karelerinin toplamaları, dik açılı köşe karşısındaki kenarın uzunluğunun karesine eşittir.

■ **Pythagorase teoreem** (estonsščina)

Täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusi ruut võrdub kaatetite ruutude summaga.

■ **Pitagora teorēma** (letonščina)

Taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas kvadrāts ir vienāds ar katešu kvadrātu summu.

■ **Pitagoro teorema** (litovščina)

Stačiojo trikambio įžambinės ilgio kvadratas yra lygus statinių ilgių kvadratų sumai.

■ **Pitagorassen teorema** (baskovščina)

Hiruki zuzen baten katetoen karratua, hipotenusaren karratuaren berdina da.

■ **Teoremo de Pitagoro** (esperanto)

En ajna orta triangulo, la areo de la kvadrato kun lateroj kies longo egalas al la longo de la hipotenuzo de tiu triangulo estas egala al la sumo de la areoj de la du kvadratoj kun lateroj kies longoj egalas respektive al la longo de la du katetoj.

xxx

Rešitev ugank iz prejšnje številke

↓↓↓

PETER LEGIŠA

→

- Tončka je prevozila 40 km več kot Janez.
- Iz prvega stolpca vzamemo en žeton, iz drugega dva, iz tretjega 2^2 , iz naslednjega 2^3 , ..., iz sedmega $2^6 = 64$ žetonov. Če so vsi žetoni pravi, vse skupaj tehta $127 \cdot 10 \text{ g} = 1270 \text{ g}$. Sicer pa od rezultata odštejemo 1270 g. Dobljeno število gramov zapišemo kot vsoto različnih potenc števila 2. Denimo, da smo natehtali 1275 g. Potem je pribitek $5 = 2^2 + 1$ gramov. Od tod vidimo, da sta prvi in tretji stolpec sestavljena iz ponarejenih žetonov, preostali so pravi.
- Z nekaj poskušanja ugotovimo, da na koncu svetilke 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... skratka tiste, ki odgovarjajo kvadratom naravnih števil. Dokažimo to. Vzemimo število m . Ugotoviti moramo vse njegove delitelje. Zapišimo $m = a_1^{n_1} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$, kjer so $a_1, \dots, a_k$ različna praštevila. Vsakega od deliteljev lahko na en in en sam način zapišemo kot $a_1^{r_1} \cdot \dots \cdot a_k^{r_k}$, kjer so $0 \leq r_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq r_k \leq n_k$. Torej je vseh mogočih deliteljev $d = (n_1 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$. Svetilka m bo na koncu prižgana, če jo bomo potegnili liho mnogokrat, se pravi, če bo d liho število. To pa je natanko takrat, ko so vsa števila $n_1 + 1, \dots, n_k + 1$ liha, torej $n_1, \dots, n_k$ soda, se pravi, da je m kvadrat.
- Prva premica gre med 10 in 11 in med 2 in 3. Druga premica je vzporedna prvi.

xxx

Še nekaj ugank iz ameriške radijske oddaje Cartalk

↓↓↓

PETER LEGIŠA

→ V prejšnji številki Preseka smo povedali nekaj o priljubljeni ameriški radijski oddaji *Cartalk* in o matematičnih ugankah v njej. Priredil sem še nekaj nalog iz te oddaje. Na spletu pa boste našli še več strani s podobnimi ugankami.

- Imamo 32 rezervoarjev, polnih vode. Vemo, da je natančno eden od rezervoarjev onesnažen. Onesnaženje dokažemo s testerjem, za katerega je potrebna majhna količina tekočine. Imamo pet testerjev in veliko časa. Kako sorazmerno enostavno določimo onesnaženi rezervoar? (Ta naloga je standardna in kolikor vemo, ni iz omenjene oddaje, vključil sem jo le zaradi naslednjih, težjih problemov.)
- Imamo 13 rezervoarjev, polnih vode. Vemo, da je natančno eden od rezervoarjev onesnažen. Onesnaženost dokažemo s testerjem, ki ga damo v majhno količino tekočine. Imamo štiri testerje, preizkus traja 12 ur, na razpolago imamo manj kot 24 ur. Kako določimo onesnaženi rezervoar?
- Imamo 50 žetonov. Od teh je 49 pravih; ti imajo vsi enako maso. Eden pa je ponarejen in nekoliko lažji od preostalih. Imamo natančno umerjeno tehtnico z dvema skodelicama. Ali lahko s štirimi tehtnjo, brez uporabe uteži, izločimo ponarejeni žeton?

Rešitve teh ugank bodo objavljene v naslednji številki Preseka.

Oddaji *Cartalk* na ameriskem National Public Radio (NPR) sledi zabavni kviz *Wait Wait...Don't Tell*



→ *Me!* Tudi ta odlična oddaja ima vzgojno komponento. Gostje v oddaji morajo namreč izbirati med tremi zgodbami, ki so vse na videz enako (ne)verjetne, a je le ena med njimi resnična. Dobra vaja za sistem brezobzirne ekonomije, kjer nas pogosto poskušajo navleči. Nekoliko lažja naloga (vsaj za tiste, ki jim je angleščina materni jezik) v tej oddaji pa je uganiti zadnjo besedo v kratki rimani pesmici.

xxx

48. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

↓↓↓

KLAVDIJA MLINŠEK

→ **Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj** so se v soboto, 21. aprila 2012, pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1 % vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 63, v osmem 64 in v devetem 65 zlatih Vegovih priznanj.

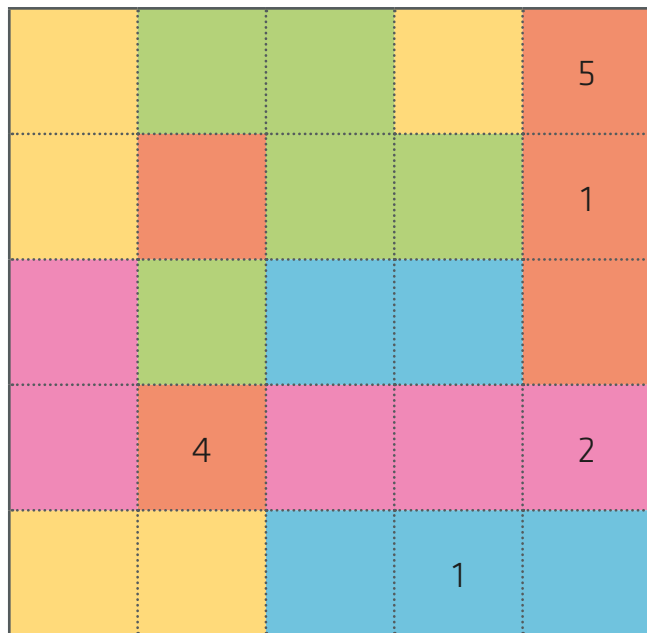
Najboljših 20 devetošolcev je bilo povabljenih na Poletno šole matematike, ki je bila od 22. do 26. junija 2012 v Bohinju. V poletni šoli so učenci poslušali naslednja predavanja: Barvanje v matematiki, Pravilni petkotnik, Kam postaviti prenosnik in druge zgodbe, Matematični triki, Astronomija, Geometrija nekoliko drugače in dokazovanje. Poleg predavanj so imeli udeleženci poletne šole tudi pester športno-rekreativni program in družabne večere. Svoje moči so lahko nabirali tudi s kolesarjenjem po bohinjski kolesarski poti, s kopanjem v jezeru, s pohodom okoli jezera, z igranjem odbojke, košarke, nogometa in še drugih skupinskih iger.

Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh ter hkrati dosežejo vsaj polovico točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. Letos smo jih odpeljali v Salzburg in njegovo okolico. Ogledali so si rudnik soli Salzbergwerk pri Berchtesgadnu in dvorec

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 5×5 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 5, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve nastopalo vseh 5 števil.



xxx

Hellbrunn z znamenitimi vrtovi, kjer so velika zanimivost „Wasserspiele“ ter glavne znamenitosti mesta Salzburg.

Nagrade, ki so bile podeljene v Koloseju, so prejeli najboljši tekmovalci, in sicer:

7. RAZRED

I. nagrada

- ROK ŠTUHEC, OŠ Kungota

II. nagrada

- LEON SAMOTORČAN, OŠ Vrhovci, Ljubljana

III. nagrada

- MATEJ ŠKARABOT, OŠ Log – Dragomer
- LUKA GOVEDIČ, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica
- KLARA ŠPARLEK, OŠ Toneta Okrogarja, Zagorje
- NIK WALLAS, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana

8. RAZRED

I. nagrada

- AJDA FRANKOVIČ, OŠ Gustava Šiliha, Velenje
- MARTINA LOKAR, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina
- MIHA RAJTER, OŠ Lenart

II. nagrada

- TIMEN STEPIŠNIK PERDIH, OŠ Šmarje pri Jelšah
- LUCIJA BOGATAJ, OŠ Poljane

III. nagrada

- ALEKSEJ JURCA, OŠ Ledina, Ljubljana
- ANA TREBŠE, OŠ dr. Aleš Bebler-Primož, Hrvatini
- NINA ŠTROVS, OŠ Ivana Cankarja, Trbovlje

www.presek.si

9. RAZRED

I. nagrada

- ROK KRUMPAK, OŠ Šmarje pri Jelšah
- MIHA LIČEF, OŠ Gorje

II. nagrada

- KATARINA ČERNAČ, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna
- KLARA GROZNIK, OŠ Ferda Vesela, Šentvid pri Stični

III. nagrada

- DORIS KERŠIČ, OŠ Podčetrtek
- JAKOB JURIJ SNOJ, OŠ Belokranjskega odreda, Semič

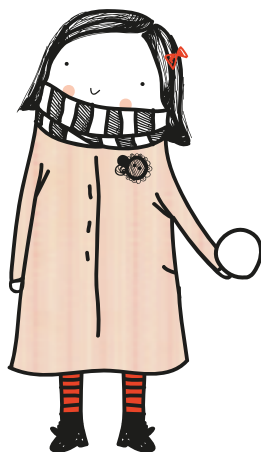
× × ×

↓ ↓ ↓

REŠITEV BARVNI SUDOKU S STRANI 12

4	1	3	5	2
2	3	1	4	5
3	2	5	1	4
1	5	4	2	3
5	4	2	3	1

× × ×



Letnice pri pouku fizike



TINE GOLEŽ

→ Paradna disciplina fizike zagotovo ni pomnjenje. Pri fiziki moramo prav malo podatkov, dejstev in opisov pospraviti v spomin, če se izrazimo v računalniškem žargonu. Seveda pa popolnoma brez deklarativnega znanja ne gre. Za primerjavo vzemimo množenje. Na pamet se naučimo poštevanko (deklarativno znanje) in postopek (proceduralno znanje), kako množiti večmestna števila. Tako z majhno zalogo v spominu in z nekaj truda brez uporabe računalja pomnožimo tudi veliki števili, npr. 35674 in 8243. Naš cilj pri učenju mora biti, da „pospravimo“ čim manj v svoj spomin; to, kar pa imamo, pa moramo tako spretno razširiti (proceduralno znanje), da je vse, kar zmoremo pri fiziki, daleč več od tega, kar smo si zapomnili (deklarativno znanje).

Ob tem se postavi vprašanje, ali naj si sploh zapomnimo kako letnico; nekatera pomembna odkritja prav gotovo. A skušajmo veliko stvari obestiti na malo število letnic, hkrati pa ustvariti čim več povezav. Poskusimo!

Najbrž vsi vemo, kdaj je Trubar napisal prvo slovensko knjigo (1550). To je lahko oporna letnica tudi za Kopernika. Niti deset let ni razlike med izzidoma knjig Kopernika in Trubarja. Sedaj torej vemo, kdaj (približno) je izšla tudi knjiga, ki je Sonce postavila v središče vesolja.

Gotovo je pametno pomniti tudi leto 1609. Galileo Galilei je prav tega leta prvič opazoval zvezde in planete z daljnogledom. Istega leta je tudi Kepler zapisal prva dva zakona, ki nosita njegovo ime. Pravzaprav sta to zadnji veliki astronomski odkritji, do katerih so se dokopali še brez daljnogledov. Ker je devet in devet osemnajst, lahko omenimo še leto 1618, ko je Kepler zapisal še tretji zakon; za potrebna opazovanja pa je uporabil daljnogled, ki ga je sam sestavil iz dveh zbiralnih leč, kar je bila novost in izboljšava dotedanjih daljnogledov.

Letnico 1789 gotovo poznamo vsi. Gre za leto francoske revolucije. Dogodek je imel tolikšen vpliv na svetovno zgodovino, da ga nekateri obravnavajo kot mejnik v novem veku. Prav tega leta pa je Francoz Lavoisier izdal knjigo *Elementarna razprava o kemiji*, ki je morda prvi moderni učbenik kemije. A vrnimo se k fiziki.

Bodimo pri zamenjavi druge in četrte številke malo nerodni, pa zasukajmo devetico v šestico:

$$1789 \rightarrow 1_7 8^9 \rightarrow 1^6 8_7 \rightarrow 1687$$

Prišli smo do letnice izida ene najpomembnejših znanstvenih knjig. Gre za Newtonove *Principe*, kot skrajšano pravimo njegovi knjigi *Matematični principi filozofije narave* (1687). Veliko ugotovitev, ki so zapisane v tej knjigi, je moč najti tudi v današnjih srednješolskih in univerzitetnih učbenikih.

Letnico francoske revolucije poznamo, zato bomo medsebojno zamenjali še zadnji dve številki. Tako pridemo do leta 1798, ko je Henry Cavendish izmeril gravitacijsko konstanto. Newtonov gravitacijski zakon je več kot stoletje čakal na manjkajoči podatek, saj je šele s to konstanto postal tako uporaben, da so lahko izračunali maso Zemlje in maso Sonca.

Spodobi se, da bi poznali tudi letnico, ko je Jožef Stefan zapisal zakon sevanja, ki je med drugim omogočil, da smo ugotovili temperaturo na površju Sonca. Spet naj bo oporna letnica kar revolucionarno leto 1789. Tokrat medsebojno zamenjajmo srednji številki in dobimo 1879, pa je že pred nami letnica najslavnejše enačbe kakega Slovenca.

Preselimo se še do leta 1895. Slovenci bi to letnico morali poznati, saj je bil tedaj precej močan

potres na področju Ljubljane. Škoda ni bila velika, a fotografije podprtih hiš so naredile svoje in cesarski Dunaj je razvezal mošnjo, da se je precej denarja nabralo za obnovo (in je bil za to tudi porabljen). To pa je tudi letnica, ki jo povežemo z Röntgenom, ki je tega leta začel sistematično preučevati neznane žarke, ki so (vsaj v Evropi) pozneje dobili njegovo ime. Že šest let pozneje, to je leta 1901, je za odkritje žarkov „x“ prejel prvo Nobelovo nagrado za fiziko.

Prelom stoletja je odprl pot v kvantno fiziko. Z pomnimo si letnico 1900. Tega leta je Max Planck po dolgih izpeljavah ugotovil, da obstaja energijski kvant („obrok energije“). Izračunal je vrednost konstante, ki jo danes imenujemo Planckova konstanta. Prav zato pomeni to leto rojstno leto kvantne fizike.

Newton je zapisal: „Če sem videl dlje, je to zaradi tega, ker sem stal na ramenih velikanov.“ To velja tudi za Einsteina. Leta 1905 je razložil fotoefekt in s tem pokazal praktično plat tega, kar je Planck ugotovil o svetlobnih kvantih. Istega leta je razložil še Brownovo gibanje. Izpeljal je tudi posebno teorijo relativnosti; z računi je pokazal, da čas dejansko lahko teče različno, da je relativen. Kar nekaj miselne drznosti je potrebno, da se odpovemo absolutnemu teku časa, ki ga kažejo vse naše izkušnje. Prav istega leta pa je Einstein zapisal tudi najslavnejšo enačbo: $E = mc^2$. Ob tako velikanskih dosežkih v enem samem letu ni presenetljivo, da je bilo to leto poimenovano Einsteinovo „čudežno leto“, leto 2005 (stoletnica čudežnega leta) pa razglašeno za svetovno leto fizike.

Bo pomnenje podatkov sedaj zabava in ne nadloga? Morda. A največ je vredno, če vsak sam sestavi zgodbo, v kateri poveže pomembne letnice. Izkušnja namreč kaže, da je prav ustvarjalna pot pri učenju tisto, kar nam pomaga kaj pospraviti globoko v spomin. Tuje zgodbe so sicer tudi uporabne, a ker se nismo „zabavali“ pri njihovem ustvarjanju, ne pristanejo tako globoko v spominu kot lastne.

Zato še sami sestavite kako zgodbo – za lastno uporabo, morda pa tudi za objavo.

× × ×

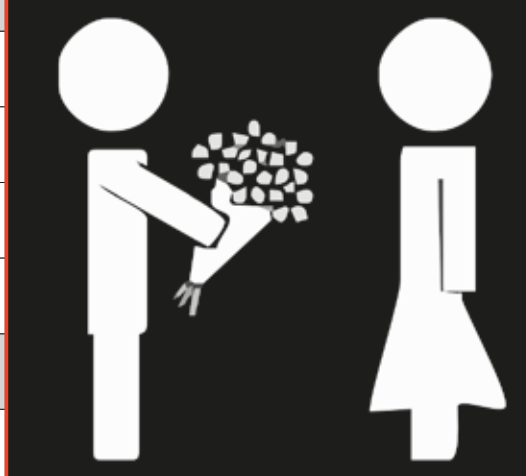
www.presek.si

www.dmfa.si





GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	PREDSTAVITEV	UMETNIŠKI VODJA USTVARJANJA IGRANIH DEL	SOSEDI ČRKE F	HRVAŠKA PEVKA	MATEMATIK SAJOVIC	ROMBOIDNA MORSKA RIBA S TRNASTIM REPOM
PROMETNI OBJEKTI SKOZI HRIB	1					
JADRALSKA TEKMA						
EDVARD ŽITNIK			PRIBOR ZA REZANJE NAŠ PEVEC (ANŽEJ)	22		
ZIDANA STENA						
LEPOSLOVNI SPIS RASNA SKUPINA MONGOLIDOV					KROMPIRJEVI SVALJKI V PRIMOR. OKOLJU	RAZLIČNA SAMOGLASNIKA



ČETRT HAMBURGA Z ŽELEZNISKIM KRIZIŠCEM	OTOK SREDI IRSKEGA MORJA	AVTOMATSKO STRELNO OROŽJE										
		3. OSEBA ŽENSKEGA SPOLA		RT NA VZH. OBALI SPANJE INDIJSKI SAHIST			AMERIŠKA IGRALKA (DOROTHY) VLADIMIR ČADEŽ					
		PO NJEJ TEČE TOK PREJEMKI VLADARSKE RODBINE			VASE ZA- PRT OTROK, KI ŽIVI V SVOJEM SVETU	PREPIR- LJIVEC GLASBENI MOJSTER, DIRIGENT						19
		RAZGIBANOST NEKD. ČIL. TENISAČ (MARCELO)									OLEG ANTONOV NIZEK ŽENSKI GLAS	
	OVADBA				21		SKUPINA ATLETINJ (GLEDE NA PANOGO)	GOSPA BOVARY FRANC. PISATELJ (PHILIPPE)			MITIČNI VELIKAN ALUMINIJ	
	ANTON INGOLIČ PROTOKOL GRAD PRI CERKLJAH		HRVAŠKI PISATELJ KOVAČIČ ŽEN. SPOL- NI ORGAN				VESOLJSKI CENTER V FRANC. GVAJANI					
			12		LOKAL Z GLASBO ZA MLADE			NAŠ VIRTUOZ NA KITARI (ANŽE)	GOROVJE NA RUSKO- MONGOLSKI MEJI	7		
SERVIRNI PLADENJ (POGOV.) SUHA KRMA	10			ANGLOAM. PLOŠČIN- SKA MERA	VISOKA ZGRADBA DALJŠI MOŠKI SUKNJIČ							
			ZARODEK MNOGOCE- LIČARJEV KRAD- LJIVEC									23
14						VELIKA GORSKA UJEDA OZNAKA SLOVAŠKE						
		DODATEK K AKTU		20			RIMSKO KRALJE- STVO UMRLIH					
		IGRA S 54 KARTAMI					IZVIRNA KRATICA ZA ZDA					

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnico pošljite na Presekov naslov (poštnina je že plačana) do **1. decembra 2012**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

xxx

V mrazu izginjajoči sneženi mož



MOJCA ČEPIČ

→ Če bo letošnja zima snežena, se lahko ponovno poigramo s snegom. Verjetno ste si pozimi že večkrat oddahnili, ko so bile napovedane temperature nizke, vreme pa sončno, češ, sneg bo ostal. A glej ga zlomka! Čeprav se čez dan sneg ni prav nič talil, so se ob tanki snežni odeji pojavile lise zemlje in snežna odeja se je kljub mrazu stanjšala. Sneg je hlapel!

Pa preverimo, ali lahko hlapenje snega opazujemo tudi v kuhinji.

Potrebščine:

- dve zbirki okroglih kep trdno stisnjenega snega različnih mas,
- prozorna folija za živila,
- dva krožnika.

Kepe snega stehtajte in si zapišite njihovo maso. Eno od kep v vsaki zbirki zavijte v živilsko folijo, ostale pa položite na dva krožnika. V vsaki zbirki naj bodo velike in male kepe. Eno zbirko snežnih kep postavite v hladilnik, drugo pa v zmrzovalni del hladilnika ali v zmrzovalnik. Po 12-ih urah in po enem dnevu vzemite kepe iz hladilnika in si jih oglejte ter jih ponovno stehtajte. Opazujte in tehtajte jih nekaj dni. Kako se je spreminjala njihova masa? Katerim kepam, večjim ali manjšim, se je spremenil večji delež mase? Kaj se je zgodilo s kepo snega, zavito v folijo? Kaj menite zakaj?

xxx

Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA



50. Kakšna skladovnica iz ploščic je stabilna?

Zanimiv problem statike je stabilnost skladovnice iz ploščic, ki niso med seboj zlepljene. Vzemimo opeke ali lesene kvadre, kocke, domine ali celo karte za tarok. Iz njih lahko sestavimo razna telesa, z nekaj domišljije prave spomenike. Vprašanje je, katera sestavljena telesa so stabilna. Preučimo nekaj zgledov. Skladovnica na sliki 1 je gotovo stabilna, saj se ploščici B in C ne prevrneta sami od sebe celo brez obtežbe D. (Sta sicer v labilnem ravnotežju, toda ko se malce nagneta, ju zadrži lepenje.) Kako pa je s skladovnicama na slikah 2 in 3 ali pa s še večjimi podobnimi skladovnicami? Ali je vseeno, če namesto kvadrov vzameš kocke ali pa tanke ploščice (igralne karte)?

Napravi poskuse, pa tudi „teorijo“ (nariši sile in preveri ravnovesje sil in navorov).

ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

49. Slapovi in tolumni

Gretje vode zaradi padca v slapu ni zelo vzpodbudno. Tudi če je slap visok 100 m, je potencialna energija 1 kg vode le $W_p = mgh = 1000 \text{ J}$. Voda se s tem segreje kvečjemu za

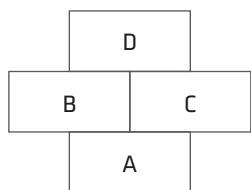
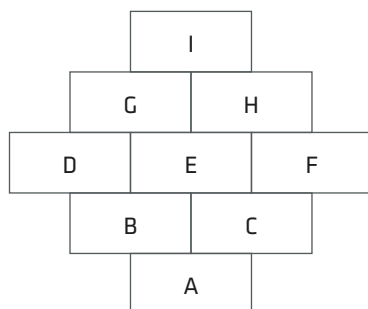
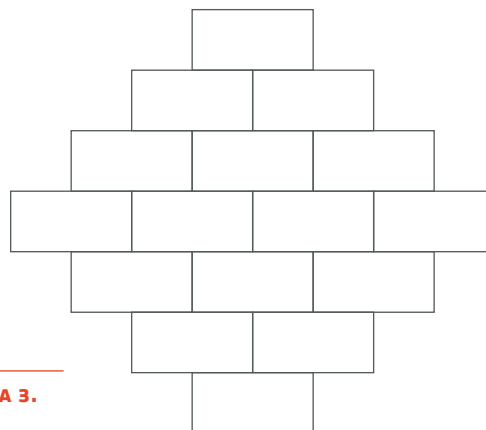
$$\Delta T = W/mc_p = 1000 \text{ J} / (1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) = 0,24 \text{ K}.$$

Dejansko pa se segreje še manj, ker se del energije porabi za poganjanje zračnega toka ob slapu in za dolbenje tolmana.

Sonce pa vodo v potoku precej bolj segreje. Predlagal sem zgled, da je pretok $\Phi = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$, širina $b = 2 \text{ metra}$ in hitrost vode $v = 1 \text{ m/s}$. Povprečna globina potoka je potem $h = \Phi/bv = 0,1 \text{ m}$. Gostota energijskega toka s Sonca na vodoravno ploskev opoldne v naši zemljepisni širini je $j = j_0 \cos 45^\circ$

$\approx 1 \text{ kW/m}^2$. Če bi bila voda črna, bi se v eni uri segrela za

- $\Delta T = jSt/hS\rho c_p = (1000 \text{ Wm}^{-2} \cdot 3600 \text{ s}) / (0,1 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \approx 8 \text{ K}.$

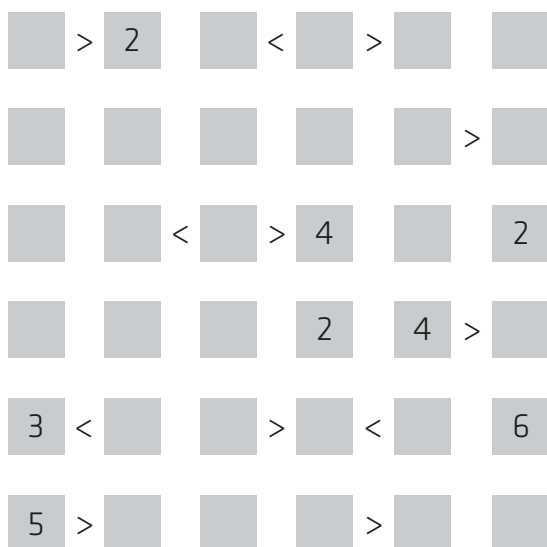
**SLIKA 1.****SLIKA 2.****SLIKA 3.**

× × ×

Futoški

↓ ↓ ↓

→ V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n , tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter, da bodo izpolnjene vse relacije.



www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

↓ ↓ ↓
REŠITEV FUTOŠIKI

5	1	3	6	2	4
3	5	2	4	1	6
6	2	4	1	3	5
4	3	1	5	6	2
2	6	5	3	4	1
1	4	6	2	5	3

Vaje ESO/ESA¹, Masa črne luknje v središču Galaksije



ANDREJ GUŠTIN

→ Črne luknje se morebiti zdijo skrivnostne, a so iz prav take snovi kot Sonce, Zemlja in mi. Pomembna razlika je v tem, da je snov v črni luknji stisnjena na zelo majhno prostornino. Če bi se Zemlja spremenila v črno luknjo, bi bila velika kot frnikola, približno centimeter v premeru.

Newtonov gravitacijski zakon

$$\blacksquare F_g = Gm_1m_2/r^2 \quad (1)$$

pravi, da je privlačna sila F med dvema telesoma z maso m_1 in m_2 obratno sorazmerna s kvadratom oddaljenosti r med njima oz. med njunima težiščema. G je gravitacijska konstanta. Na Zemlji smo od njenega središča (težišča) oddaljeni približno za njen polmer, torej 6378 km. Če bi se Zemlja skrčila v črno luknjo, pa bi bili od središča oddaljeni 0,5 cm. Veliko zmanjšanje polmera r bi pomenilo več kot milijonkrat večjo privlačno gravitacijsko silo na Zemljinem površju.

Prav ta velika sila je vzrok za to, da se v bližini črne luknje začnejo dogajati nevsakdanje reči. Primer je obzorje dogodkov, meja brez povratka. Kar je enkrat onstran tega obzorja, ne more več pobegniti navzven, niti svetloba ne. Po drugi strani zaradi ve-



¹Vaja je iz zbirke, ki jo je pripravila Evropska vesoljska agencija ESA v sodelovanju z Evropskim južnim observatorijem ESO.

like gravitacijske sile telesa v bližini črne luknje okoli nje krožijo z zelo veliko hitrostjo. Če tako hitro gibajoča telesa trkajo med seboj, se pri tem sprošča zelo veliko toplote in svetlobe. Vaja je namenjena prav spoznavanju več podrobnosti o črnih luknjah.

Kako so črne luknje dobile ime?

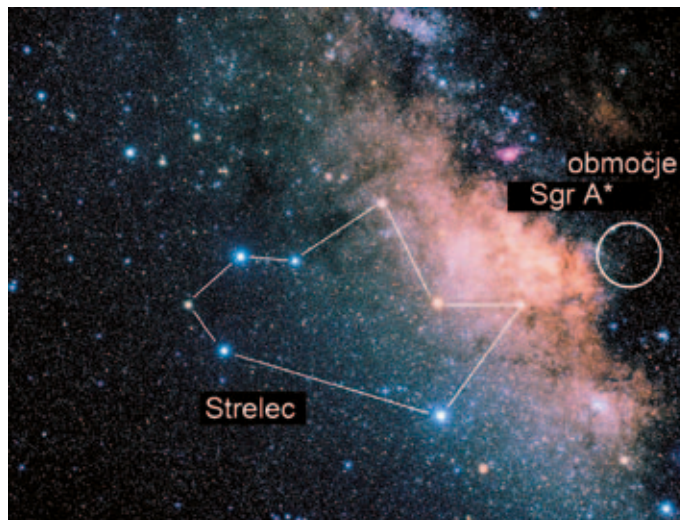
Tako jih je leta 1967 poimenoval fizik John Wheeler. Pojem luknja se zdi smiseln, saj telesa, ki gredo onstran obzorja dogodkov, nikoli več ne pridejo ven. Natančneje, nič ne more priti izza obzorja dogodkov črne luknje. Telesa lahko ubežijo Zemljini težnosti, če je njihova hitrost večja od 11 km/s. To je zelo velika hitrost, toda za pobeg iz črne luknje bi morala biti ta ubežna hitrost večja od hitrosti svetlobe, ki je približno 300 000 km/s! Toda v skladu s teorijo relativnosti se nič ne more gibati hitreje od svetlobe. To pomeni, da iz črne luknje ne more pobegniti niti svetloba, zato gre zares za nekakšno luknjo. Karkoli pade v črno luknjo, se od tam ne more vrniti.

Ob rojstvu zamisli o črnih luknjah je le-te večina znanstvenikov imela za zanimivo teoretično zamisel, ki pa v resničnem svetu ne obstaja. Danes imamo trdne dokaze o obstoju črnih lukenj, ena od njih je celo v središču Galaksije. S to vajo bomo ponovno odkrili črno luknjo v središču Galaksije in določili njeno maso.

Črna luknja v središču Galaksije

Prvi namig o tem, da se v središču Galaksije nahaja črna luknja, so dala radioastronomska opazovanja nenavadnega radijskega izvora v južnem ozvezdju Strelec (glej sliko 1). Izvor so poimenovali Strelec A* (mednarodno Sagittarius A* oz. skrajšano SgrA*). Očitno je bilo, da izvor radijskih valov ne more biti zvezda, zato so astronomi sklepali, da gre za masivno črno luknjo. Snov, ki se hitro giblje okoli črne luknje, je potencialni izvor netipičnega radijskega valovanja. Žal je črna luknja zelo majhna in povsem „črna“ telo, zato ni veliko možnosti, da bi ga neposredno videli. Prisotnost črne luknje je tako mogoče posredno ugotoviti iz meritev dveh količin: hitrosti snovi v bližini morebitne črne luknje in „svetlobnega odtisa“.

Hitrost snovi kaže na maso telesa, okoli katerega kroži, svetlobni odtis pa pove, če svetloba izhaja od zvezd. Veliko zvezd se giblje okoli središča Gala-



SLIKA 1.

Središče Galaksije se za opazovalca na Zemlji nahaja v ozvezdju Strelec. Tam je Rimska cesta videti še posebej gosta. Na sliki je označeno območje, kjer se nahaja radijski izvor SgrA*, kjer je tudi masivna črna luknja.

ksije. V tem delu vaje bomo uporabili prava opazovanja središča Galaksije in določili hitrosti zvezd.

Gravitacija

Na začetku 17. stoletja je nemški astronom Johannes Kepler odkril tri zakone o gibanju planetov v Osončju.

Prvi pravi, da se planeti gibljejo po eliptičnih orbitah, ki imajo skupno gorišče v Soncu.

Drugi pravi, da je površina, ki jo v časovni enoti opiše zveznica med Soncem in planetom, konstantna.

Tretji Keplerjev zakon pravi, da je razmerje kvadrata obhodnega časa t_0 in kuba velike polosi orbite a za vse planete enaka:

$$t_0^2/a^3 = \text{konst.} \quad (2)$$

Ob odkritju zakonov gibanja planetov Kepler ni mogel vedeti, zakaj so ti zakoni prav taki. Predvsem tretji zakon je videti nenavaden. Šele Newtonovo odkritje gravitacijskega zakona je dalo odgovor na to. Gravitacijska sila planeta, ki se giblje okoli Sonca, je namreč enaka centripetalni sili F_c .

V srednji šoli, kjer dijaki še ne poznajo lastnosti



→ elipse, lahko tretji Keplerjev zakon izpeljemo z nekaj poenostavitvami. Najprej privzamemo, da je orbita planeta krožnica s polmerom a . Do tega smo upravičeni v primeru večine planetov v Osončju, saj so njihove orbite le malo „razpoteegnene“ elipse in se bistveno ne razlikujejo od krožnic. Predpostavimo še, da je masa planeta zanemarljivo majhna v primerjavi z maso Sonca m_{Sonce} , kar tudi dejansko drži. Masa Zemlje je, denimo, $3 \cdot 10^{-6}$ mase Sonca. Tako sledi:

$$\blacksquare F_c = 4\pi^2 m_p a / t_0^2, \quad (3)$$

$$\blacksquare F_g = F_c. \quad (4a)$$

Izenačimo (3) in (4a):

$$\blacksquare Gm_p m_{\text{Sonce}} / a^2 = 4\pi^2 m_p a / t_0^2, \quad (4b)$$

$$\blacksquare t_0^2 / a^3 = \frac{4\pi^2}{Gm_{\text{Sonce}}}. \quad (5)$$

Tretji Keplerjev zakon (5) smo dobili v samo nekaj korakih. Na desni strani enačbe so samo konstante, kar pomeni, da je konstanta v prej zapisanem tretjem Keplerjevem zakonu (2)

$$\blacksquare \text{konst.} = \frac{4\pi^2}{Gm_{\text{Sonce}}}.$$

Če upoštevamo, da se planet giblje po elipsi, se tretji Keplerjev zakon glasi:

$$\blacksquare t_0^2 / a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_{\text{Sonce}} - m_p)}. \quad (6)$$

Izpeljava lahko služi kot lepa matematična rekreacija.

Keplerjevi zakoni pa ne veljajo le za Osončje. Če kaka zvezda kroži okoli črne luknje, potem je iz meritev dveh od treh količin (obhodni čas zvezde t_0 , velika polos orbite a , skupna masa zvezde in črne luknje) mogoče izračunati maso črne luknje.

Naloge

1. naloga / Spoznaj elipso

Keplerjeve zakone lahko izkoristimo tudi za spoznavanje lastnosti elipse. Prvi Keplerjev zakon ugotavlja, da se planeti gibljejo po elipsah. Elipsa s središčem v izhodišču koordinatnega sistema je krivulja, za katero velja

$$\blacksquare (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1,$$

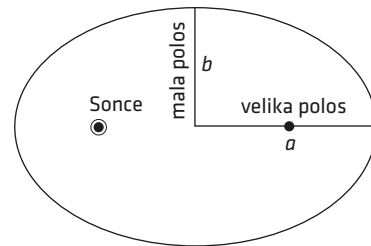
kjer je a velika, b pa mala polos elipse (glej sliko 2).

Naj bo $a = 10$ cm, $b = 5$ cm. Z zgornjo enačbo izračunajmo več vrednosti (x, y) , vnesimo v koordinatni sistem in jih povežimo. V istem koordinatnem sistemu narišemo še elipso z $a = 10$ cm, $b = 2$ cm.

Kaj se zgodi z elipso, če je razlika med a in b večja?

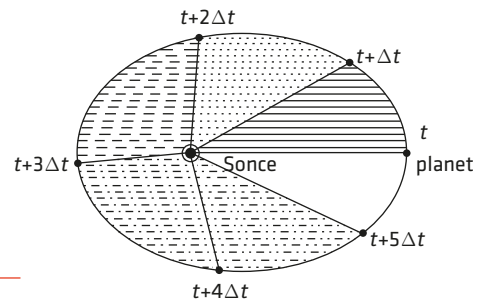
Kaj bi dobili, če bi bil $b = a$?

Razmislimo, kako bi lahko narisali „gladko“ elipso. Namig: prav bi prišle buciki in nitka.



SLIKA 2.

Elipsa z veliko polosjo a in malo polosjo b . Gorišči sta označeni z odebeljenima točkama. Za katerokoli točko na elipsi velja, da je vsota oddaljenosti r_1 in r_2 od gorišč konstantna. Krožnica je poseben primer elipse z enim goriščem. Za planete v Osončju velja, da se njihove orbite le neznatno razlikujejo od krožnic.



SLIKA 3.

Drugi Keplerjev zakon pravzaprav trdi, da se planet na svoji eliptični orbiti okoli Sonca ne giblje s konstantno hitrostjo. Ko je planet dlje od Sonca, se giblje počasneje, ko je Soncu bližje, pa hitreje. Zato je tudi površina, ki jo opiše zveznica med Soncem in planetom (črtkano) v enakih časovnih intervalih konstantna.

2. naloga / Masa Sonca

S tretjim Keplerjevim zakonom izračunajmo maso

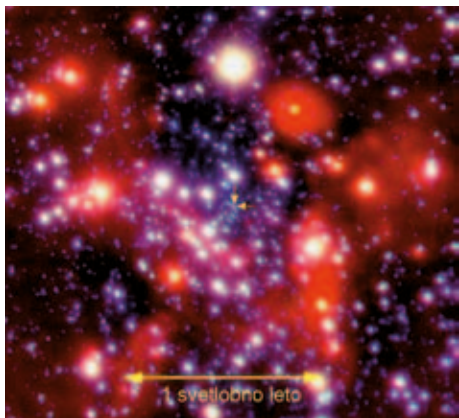
Sonca, če vemo, da je velika polos Zemljine orbite 150 milijonov kilometrov, njen obhodni čas okoli Sonca eno leto in gravitacijska konstanta

▪ $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$.

Opazovanja

Opazovanja zvezd blizu središča Galaksije so zapletena. Veliko število zvezd in oblakov namreč zastira pogled v to območje. Rešitev so opazovanja v infrardeči svetlobi, ki ima daljšo valovno dolžino od vidne svetlobe in jo zaradi tega prašnati oblaki vpijajo manj kot vidno svetlobo. Skupina astronomov pod vodstvom nemškega raziskovalca Reinharda Genzela je s teleskopom VLT v Čilu vrsto let v infrardeči svetlobi slikala središče Galaksije (slika 4).

Na posnetkih, ki so nastali v časovnem zaporedju nekaj let, je mogoče opaziti premike hitro gibajočih se zvezd. Najbolj opazen je bil premik zvezde S2. Na sliki 5 je vidna v neposredni bližini potencialne črne luknje.

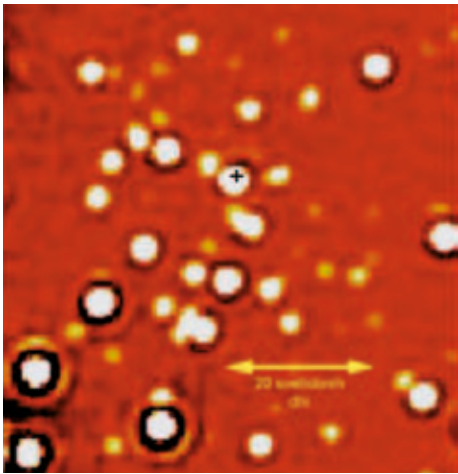


SLIKA 4.

Posnetek v bližnji infrardeči svetlobi je bil narejen z instrumentom NACO na VLT in pokriva nekaj svetlobnih let veliko območje okoli središča Galaksije. Modro obarvane zvezde so vroče, rdeče obarvane pa hladnejše. Puščici označujeta lego kandidata za črno luknjo SgrA*.

Izračun mase

Iz položajev zvezde S2 v preglednici 1 in s tretjim Keplerjevim zakonom lahko določimo maso SgrA*. Za to potrebujemo obhodni čas t_0 in veliko polos orbite zvezde a .



SLIKA 5.

Infrardeči posnetek okolice črne luknje SgrA*, ki je označena s črnim križcem. V njeni neposredni bližini je tudi zvezda S2 (bela pika s križcem).

datum (leto)	X (kotne sekunde)	Δx (kotne sekunde)	Y (kotne sekunde)	Δy (kotne sekunde)
1992,226	0,104	0,003	-0,166	0,004
1994,321	0,097	0,003	-0,189	0,004
1995,531	0,087	0,002	-0,192	0,003
1996,256	0,075	0,007	-0,197	0,010
1996,428	0,077	0,002	-0,193	0,003
1997,543	0,052	0,004	-0,183	0,006
1998,365	0,036	0,001	-0,167	0,002
1999,465	0,022	0,004	-0,156	0,006
2000,474	-0,000	0,002	-0,103	0,003
2000,523	-0,013	0,003	-0,113	0,004
2001,502	-0,026	0,002	-0,068	0,003
2002,252	-0,013	0,005	0,003	0,007
2002,334	-0,007	0,003	0,016	0,004
2002,408	0,009	0,003	0,023	0,005
2002,575	0,032	0,002	0,016	0,003
2002,650	0,037	0,002	0,009	0,003
2003,214	0,072	0,001	-0,024	0,002
2003,353	0,077	0,002	-0,030	0,002
2003,454	0,081	0,002	-0,036	0,002

PREGLEDNICA 1.

V prvem stolpcu je datum opazovanja lege zvezde S2 (decimalni zapis pomeni del leta). Stolpci od 2 do 5 podajajo meritve in merske napake lege zvezde S2 glede na lego potencialne črne luknje, ki ima v izbranem koordinatnem sistemu lego (0, 0). Velikosti so podane v kotnih sekundah (").



→ 3. naloga / Določitev velike polosi tira

Veliko polos tira a zvezde S2 dobimo tako, da skozi lege S2 iz preglednice 1 narišemo elipso.

Na milimetrski papir narišimo koordinatni sistem. Enota naj bo 0,01 kotne sekunde/2 mm. Nato vrišemo vse lege S2 iz preglednice 1. Označimo še mersko napako posamezne meritve. To lahko naredimo tako, da od točke po osi x in y narišemo prečko v velikosti napake. (Lahko uporabimo tudi primernen računalniški program.)

Skozi točke prostoročno narišemo elipso, ki se jim najbolj prilega. Točk ne povezujemo. Narišemo gladko krivuljo, ki gre skozi označene merske napake.

Izmerimo veliko os elipse v kotnih sekundah in ocenimo napako meritve.

Če vajo izvaja več ljudi, potem naj ti svoje rezultate primerjajo med seboj, izračunajo povprečno vrednost in napako.

4. naloga / Določitev obhodnega časa

Obhodni čas t_0 zvezde S2 okoli črne luknje lahko določimo z drugim Keplerjevim zakonom. Površina elipse je

$$\blacksquare S = \pi ab.$$

Drugi Keplerjev zakon pravi, da je površina, ki jo opiše zveznica med črno luknjo in zvezdo, sorazmerna s časovnim intervalom. V času $t_0/2$ zveznica opiše $S/2$. V splošnem pa zveznica v časovnem intervalu Δt , ko se zvezda premakne iz točke 1 v točko 2, opiše ploščino

$$\blacksquare \Delta S = \Delta t / (t_0 S).$$

Obhodni čas t_0 je:

$$\blacksquare t_0 = \Delta t S / \Delta S \quad (7).$$

Če hočemo torej izračunati obhodni čas t_0 , moramo določiti ΔS , Δt in S . To lahko naredimo na več načinov.

$$\blacksquare \text{Metoda A - Štetje kvadratkov}$$

Površino S in ΔS lahko določimo tako, da preštejemo

kvadratke na milimetrskem papirju znotraj elipse in segmenta ΔS elipse, ki smo jo narisali v nalogi 3. Vrednosti izrazimo kar v mm^2 .

Izračunajmo razmerje $S/\Delta S$. Izračunajmo še časovni interval Δt . Ta je enak razliki časov med zadnjo in prvo meritvijo lege zvezde S2 iz preglednice 1. Z enačbo (7) izračunajmo obhodni čas zvezde. Rezultat primerjajmo s pravo vrednostjo, ki je $15,7 \pm 0,7$ leta.

$$\blacksquare \text{Metoda B - Tehtanje}$$

Če vam je štetje kvadratnih milimetrov znotraj elipse, ki smo jo narisali na milimetrskem papirju, zoprno, si lahko pomagamo s tehtnico, ki ima natančnost vsaj 0,01 g.

Najprej s škarjami natančno izrežemo elipso in jo stehamo. Tako dobimo maso izrezane elipse, ki je sorazmerna z njeno površino S .

Nato izrežemo segment elipse, ki ga omejujeta zveznici med prvo in zadnjo izmerjeno lego zvezde S2, in ga stehamo. Masa tega segmenta je sorazmerna s površino ΔS . Ker za izračun t_0 iz enačbe (7) potrebujemo razmerje $S/\Delta S$, pretvorba količin S in ΔS iz gramov sploh ni potrebna.

Izračunajmo razmerje $S/\Delta S$. Izračunajmo še časovni interval Δt . Ta je enak razliki časov med zadnjo in prvo meritvijo lege zvezde S2 iz preglednice 1. Z enačbo (7) izračunajmo obhodni čas zvezde. Rezultat primerjajmo s pravo vrednostjo, ki je $15,7 \pm 0,7$ leta.

5. naloga / Izračun mase črne luknje

Iz dobljenih vrednosti za a , t_0 in tretjega Keplerjevega zakona (5) izračunajmo maso črne luknje.

Je to res črna luknja?

Vrednost za maso telesa, ki smo jo dobili v nalogi 5, je velikostnega razreda nekaj milijonov mas Sonca. Najmasivnejše zvezde imajo maso do 100 Sončevih, zato je njihova masa zanemarljiva v primerjavi z izračunano vrednostjo in smo povsem upravičeno uporabili poenostavljeno obliko Keplerjevega zakona (5) in ne enačbe (6), kjer bi morali poznati še maso krožeče zvezde.

Očitno zvezda S2 kroži okoli zelo masivnega telesa. Toda je to res črna luknja? Kaj pa če zvezda

kroži okoli zelo zgoščene zvezdne kopice?

Razmislimo, kako svetel bi moral biti SgrA*, če bi bila tam zvezdna kopica.

6. naloga / Črna luknja ali veliko zvezd

Najprej predpostavimo, da je v središču Galaksije zvezdna kopica, v kateri so Soncu podobne zvezde. Masa Sonca je približno $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Izračunajmo, koliko zvezd bi bilo v SgrA*, če bi imele vse enako maso kot Sonce.

Izsev Sonca $L_S = 4 \cdot 10^{26}$ W.

Izračunajmo, kolikšen bi bil skupni izsev kopice, če bi bila ta na mestu SgrA*.

Astronomi so ugotovili, da iz območja SgrA* ne prihaja skoraj nič svetlobe, kar je tudi razvidno iz slik 4 in 5. To območje je celo manj svetlo, kot je območje okoliških zvezd. Sklepamo lahko, da bi se tam lahko nahajala zvezdna kopica s tako velikim številom zvezd, ki smo ga izračunali v 6. nalogi.

Glede na veliko maso telesa lahko z gotovostjo trdimo, da je v SgrA* masivna črna luknja.

7. naloga / Polmer obzorja črne luknje

Čeprav so črne luknje relativistična telesa, ki jih moramo obravnavati v okviru splošne teorije relativnosti, pa lahko njihovo velikost oz. velikosti njihovega obzorja dogodkov ocenimo po klasični poti. Dejali smo, da lahko o črnih luknjah razmišljamo kot o telesih, katerih ubežna hitrost je enaka ali večja od hitrosti svetlobe.

Ubežno hitrost s kakega (okroglega) vesoljskega telesa izračunamo tako:

$$\blacksquare v_u = \sqrt{(2Gm/r)}, \quad (8)$$

kjer je G gravitacijska konstanta (glej 2. nalogo), m masa telesa, r pa polmer telesa.

Izračunajmo ubežno hitrost s površja Zemlje. Polmer Zemlje je 6400 km, njena masa $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Izračunajmo, kolikšen bi moral biti polmer Zemlje, da bi bila ubežna hitrost z njenega površja enaka hitrosti svetlobe $c = 300\,000$ km/s.

Izračunajmo, kolikšen bi moral biti polmer Sonca, da bi bila ubežna hitrost z njegovega površja enaka hitrosti svetlobe $c = 300\,000$ km/s. Masa Sonca je $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Izračunajmo polmer črne luknje oz. polmer ob-

zorja dogodkov v SgrA*. Za maso uporabimo rezultat iz 5. naloge.

Sklep

Astronomi lahko obstoj črnih lukenj zaznajo posredno. Posredno lahko izmerijo tudi njihovo maso. Eno od metod smo spoznali. Ta temelji na meritvah gibanja zvezd okoli črne luknje. Ugotovili smo, da je v jedru naše Galaksije masivna črna luknja. Podobne črne luknje so astronomi našli tudi v jedrih drugih velikih galaksij. Njihova masa je lahko tudi več sto milijonov mas Sonca.

Več zanimivosti na to temo lahko najdete na spletnem naslovu <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/exotic/black-hole/>, zanimive animacije in podrobnosti o črnih luknjah pa na http://hubblesite.org/explore_astronomy/black_holes/.

xxx

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9, tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	12	23					
16						15	4
13			9		12		
	9			9			
		15		3			
			10				

Evropski mladinski natečaj za raziskovanje vesolja Odysseus

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ Natečaj Odysseus je namenjen učencem in dijakom v starosti od 14 do 18 let. Mladi raziskovalci so vabljeni k vesoljskim raziskavam, pri katerih lahko izkažejo svoje znanje, kreativnost in kritično mišljenje.

Prijavijo se lahko skupine od dva do pet mladih raziskovalcev, ki jih vodi en mentor/mentorica.

Drznite si sanjati... Drznite si raziskovati...
Drznite si ustvarjati...

Odysseus

Vseevropsko izobraževalno tekmovanje o vesolju

www.odysseus-contest.eu

Projekt sofinancira

Logo of the European Union, GNSIS, and other partners.

Vsebinska področja natečaja so:

- Osončje,
- Vesoljsko plovilo – globalno sodelovanje,
- Koevolucija organizmov.

Prijava in izdelava projektov je mogoča do januarja 2013. Jezik prijavljenih projektov oz. raziskovalnih nalog je slovenščina. Več podrobnosti, navodil in nasvetov za izdelavo projekta najdete na uradni spletni strani projekta Odysseus: <http://www.odysseus-contest.eu/>. Kontaktna oseba za Slovenijo: Andrej Guštin (gustinvesolje@gmail.com).

× × ×

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE S STRANI 25

	12	23					
16	7	9				15	4
13	5	8	9		12	9	3
	9	6	3	9	2	6	1
		15	6	2	7		
			10	1	9		

Predstavitev celih števil v računalniku



ALEKSANDER VESEL

→ Binarna predstavitev

Današnji računalniki skoraj brez izjeme temeljijo na *binarni predstavitvi* podatkov. To pomeni, da so podatki v računalniku shranjeni kot zaporedje elementov, ki so lahko v enem od dveh možnih stanj. V jeziku računalništva pravimo, da je informacija predstavljena kot zaporedje bitov. *Bit* predstavlja eno od dveh možnih stanj, ki ju ponavadi označimo s števčkama dvojiškega številskega sistema 0 in 1. Bit je najmanjša količina informacije, ki je sploh mogoča in ki jo lahko računalnik shrani ter obdela.

Posamezni bit nam ne pove veliko. Lahko si predstavljamo, da omogoča odgovoriti na vprašanje, na katero sta možna dva odgovora. Ker pa velja, da je v slogi moč, tudi združevanje bitov omogoča predstavitev večje količine informacije. Zaporedje dveh bitov lahko tako predstavi štiri možna stanja, npr. štiri smeri neba:

- 00: sever,
- 01: vzhod,
- 10: jug,
- 11: zahod.

Trije biti predstavljajo osem stanj (dvakrat več stanj kot dva bita), kar hitro vidimo, če si izpišemo vsa



→ možna zaporedja treh bitov: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. V splošnem velja, da lahko z n biti predstavimo 2^n različnih stanj.

Osem zaporednih bitov imenujemo *zlog* ali *bajt*. Koliko različnih stanj lahko predstavimo z enim zlogom? S pomočjo zgornje razlage hitro dobimo odgovor: $2^8 = 256$. Na zadevo pa lahko pogledamo še z druge plati: z osmimi biti lahko predstavimo dvojiška števila med 00000000 in 11111111 oz. zapisano v desetiškem sistemu, števila med 0 in 255.

Za ponazoritev zgornje trditve spomnimo, da je vsaka številka (bit) v dvojiški predstavitvi, glede na svoj položaj v zapisu, povezana z zaporedno potenco števila 2. Najbolj desna z 2^0 , naslednja v smeri proti levi z 2^1 , naslednja z 2^2 in tako naprej. Desetiško vrednost, ki jo predstavlja dvojiški zapis, npr. 1111000, lahko razumemo kot:

$$\begin{aligned} & \blacksquare 1111000_{(2)} = \\ & = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\ & = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \\ & = 120_{(10)}. \end{aligned}$$

Predstavitev nepredznačnih celih števil

Preden se lotimo samega opisa predstavitve, je potrebno poudariti, da množica celih števil, ki jo lahko predstavi računalnik, nikoli ni neskončna, kot smo navajeni v matematiki. Računalniki so naprave z omejeno možnostjo predstavitve in hranjenja informacij, zato seveda tudi neomejeno velikih števil ne moremo predstaviti.

Velikost predstavljene množice nepredznačenih celih števil je odvisna od števila bitov, ki jih namenimo za predstavitev. V prejšnjem razdelku smo se naučili, da zaporedje osmih bitov omogoča naravno predstavitev 256 nepredznačenih števil med 0 in 255: zaporedje bitov 00000000 predstavlja vrednost 0, zaporedje 11111111 pa vrednost 255. Če namenimo za predstavitev nepredznačenih celih števil več zlogov, tudi množica predstavljenih števil ustrezno naraste. Dva zloga tako omogočata predstavitev $2^{16} = 65536$ različnih nepredznačenih celih števil (števila med 0 in 65535), štirje zlogi pa predstavitev števil med 0 in 4294967295 ($= 2^{32} - 1$). Nekateri programski jeziki omogočajo celo predstavitev celih števil z osmimi zlogi, kar pomeni množico velikosti 2^{64} oz. predstavitev števil med 0 in 18446744073709551615 ($= 2^{64} - 1$).

Za konec tega razdelka pogledjmo, kako seštejemo celi števili 42 in 23, predstavljeni z osmimi biti. Seštevanje poteka kot običajno pisno seštevanje, od najbolj desnega (najmanj pomembnega) bita proti najbolj levemu:

$$\begin{array}{r} 42 \qquad \qquad \qquad 00101010 \\ + 23 \qquad \qquad \qquad 00010111 \\ \hline 65 \qquad \qquad \qquad 01000001 \end{array}$$

Opozoriti velja, da je rezultat seštevanja lahko tudi večji od največjega števila, ki ga lahko predstavimo v izbrani predstavitvi. Če v predstavitvi z osmimi biti npr. seštevamo števili 172 in 98, bi morali dobiti število 270, ki pa ga z osmimi biti ne moremo predstaviti. V tem primeru pravimo, da se zgodi *prekoračitev*.

Predstavitev predznačnih celih števil

Pri predznačenih celih številih je potrebno upoštevati predznak števila, ki je lahko plus (+) ali minus (-). V običajnem (desetiškem) zapisu pišemo predznak pred številko. Predstavitev v računalniku je v osnovi podobna. Enega od bitov, ponavadi je to najbolj levi bit, uporabimo za predstavitev predznaka. Temu bitu rečemo tudi *vodilni bit*. Če je predstavljeno celo število negativno, je vodilni bit enak 1, če pa je predstavljeno celo število nenegativno, pa je vodilni bit enak 0. V nadaljevanju bomo sicer videli, da se pri predstavitvi števila nič stvari lahko nekoliko zapletejo.

Kot pri predstavitvi množice nepredznačenih celih števil, velja tudi za predznačena cela števila, da je velikost množice predstavljenih števil odvisna od števila bitov, ki jih namenimo za predstavitev. Razlika je le v tem, da v tem primeru polovico predstavljenih vrednosti predstavljajo nenegativna, drugo polovico pa negativna števila. Zaporedje osmih bitov tako omogoča predstavitev števil med -128 in 127, dva zloga omogočata predstavitev števil med -32768 in 32767, štirje zlogi pa predstavitev števil med -2147483648 in 2147483648. Če programski jezik omogoča predstavitev celih števil z osmimi zlogi, imamo na razpolago števila med -2^{63} in $2^{63} - 1$.

Izvedba zgoraj opisane ideje pa ni tako enostavna, kot se morda zdi na prvi pogled. Opisali bomo tri različne načine predstavitve, od katerih se prvi dve

danes uporabljata le redko, zato bo njun opis služil predvsem kot motivacija za opis zadnje.

Predstavitev z navadnim predznakom

Nenegativna števila predstavimo enako, kot smo to storili za nepredznačena, le vodilni bit je rezerviran za predznak in je vedno enak 0. Za predstavitev negativnega števila naredimo enako, le da je vodilni bit v tem primeru enak 1.

Primer za predstavitev z osmimi biti:

- $+23_{(10)} \rightarrow 00010111$
- $-23_{(10)} \rightarrow 10010111$.

Na prvi pogled je ta predstavitev zelo naravna, a za predstavitev v računalniku ni najbolj primerna. Eden od problemov je, da je potrebno pri izvajanju računskih operacij (npr. pri seštevanju in odštevanju) vodilni bit obravnavati drugače od ostalih bitov, kar povzroča težave pri strojni opremi računalnika. Neprijetna značilnost te predstavitve sta tudi dve predstavitvi števila nič: $00 \dots 0$ in $100 \dots 0$.

Predstavitev z eniškim komplementom

Nenegativna števila spet predstavimo enako, kot smo to storili za nepredznačena, le vodilni bit rezerviramo za predznak in je vedno enak 0.

Pri predstavitvi negativnega števila izhajamo iz predstavitve njegove nasprotne (pozitivne) vrednosti. V dobljeni predstavitvi potem obrnemo vrednost vseh bitov: vsak bit 1 postane 0 in vsak bit 0 postane 1.

Kot primer pogledjmo predstavitev števila -23 z osmimi biti. Kot vemo, se 23 predstavi kot 00010111. Ko obrnemo vrednosti vseh bitov v vzorcu 00010111, dobimo

- $-23_{(10)} \rightarrow 11101000$.

Prednost te predstavitve je, da lahko tudi vodilni bit obravnavamo enako kot druge bite, zato lahko operaciji seštevanja in odštevanja razmeramo enostavno izvedemo. Seštevanje dveh nenegativnih števil se izvede popolnoma enako, kot smo to že pokazali. Tudi odštevanje poteka v osnovi enako kot seštevanje, izjema je le primer, ko se zgodi prekora-

čitev. V tem primeru je potrebno dobljenemu rezultatu prišteti 1.

Kot primer si pogledjmo, kako v osem bitni predstavitvi od števila 42 odštejemo 23.

Najprej izvedemo „običajno“ seštevanje števil 42 in -23:

```
+42          00101010
-23          11101000
-----
              1|00010010
```

Rezultat presega 255 (za predstavitev bi potrebovali devet bitov), zato k 00010010 prištejemo 1.

```
              00010010
              00000001
-----
              00010011
```

Dobljeni rezultat 00010011 predstavlja število 19.

V preteklosti se je predstavitev z eniškim komplementom precej uporabljala, danes pa skorajda ne. Glavna slabost tega pristopa sta ponovno dve predstavitvi za število nič: $00 \dots 0$ in $11 \dots 1$.

Predstavitev z dvojiškim komplementom

Nenegativna števila so predstavljena na že opisani način, pri predstavitvi negativnega števila pa izhajamo iz predstavitve njegove nasprotne (pozitivne) vrednosti. V dobljeni predstavitvi najprej obrnemo vrednost vseh bitov, nato pa rezultatu prištejemo ena.

Kot primer spet pogledjmo predstavitev števila -23 z osmimi biti. Vemo, da se 23 predstavi kot 00010111. Ko obrnemo vrednosti vseh bitov, dobimo 11101000. K temu rezultatu prištejemo 1 in dobimo:

```
              11101000
              00000001
-----
              11101001
```

V predstavitvi z dvojiškim komplementom in z osmimi biti je torej število -23 predstavljeno z bitnim vzorcem 11101001. Operaciji seštevanja in odštevanja se izvedeta kot običajno seštevanje, morebitno prekoračitev pa zanemarimo. Kot primer spet

+42	00101010
-23	11101001
	00010011

Prednost dvojiškega komplementa v primerjavi z eniškim je predvsem ta, da nimamo dveh predstavitev za število nič.

Za konec pa v naslednji tabeli še pogledjmo, kako so predstavljena predznačena cela števila v osem bitni predstavitvi z dvojiškim komplementom.

vrednost	dvojiška predstavitev
127	01111111
126	01111110
.	.
.	.
1	00000001
0	00000000
-1	11111111
-2	11111110
.	.
.	.
-128	10000000

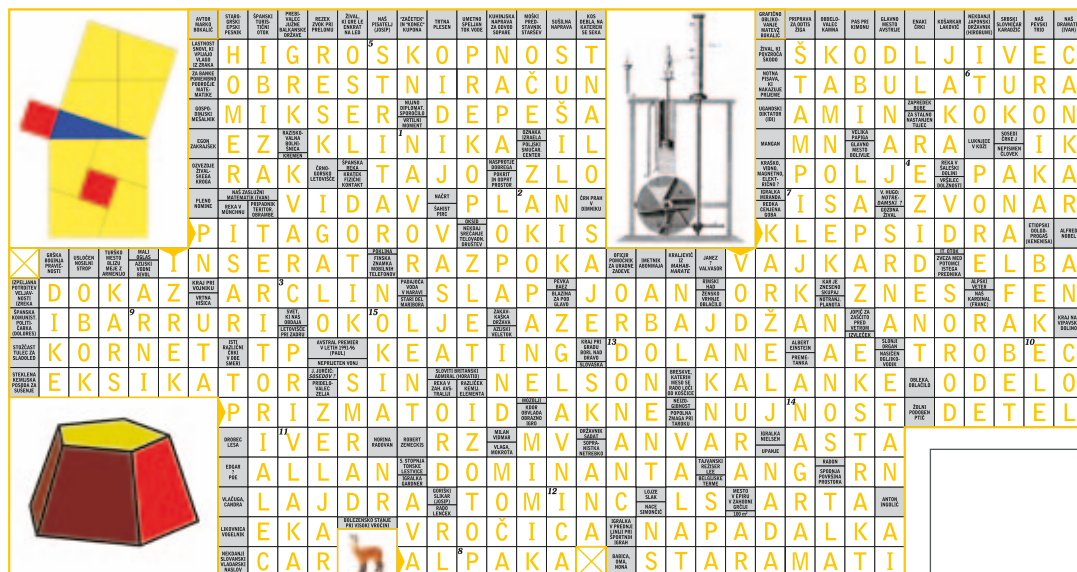
× × ×

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.dmfa.si

www.presek.si



→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke 40. letnika Preseka je **Na cesti previdno**. Izmed pravilnih rešitev smo izžrebali PREDRAGA GRUJIČA iz Zagorja, STAŠA BUCIKA iz Solkana in KATARINO ŽUREJ iz Frankolovega, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

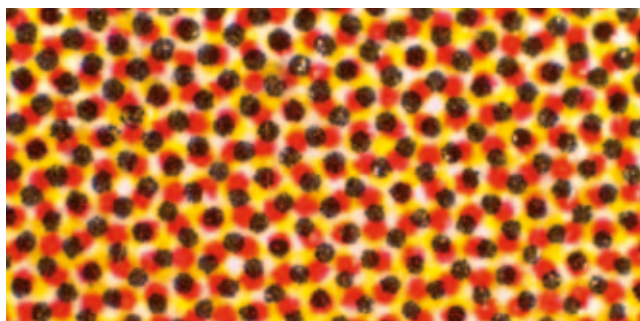
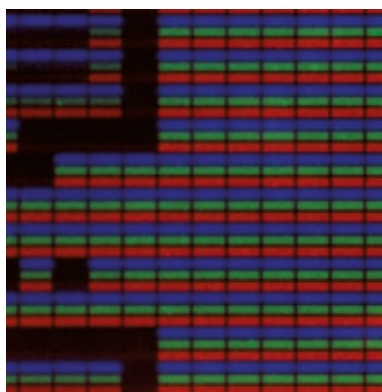
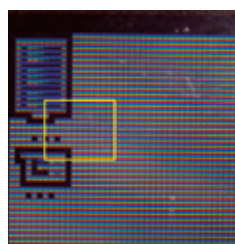
✗ ✗ ✗

Mešanje barv

↓ ↓ ↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Svetloba je elektromagnetno valovanje. Barvo svetlobe opiše spekter, ki pove delež različnih mavričnih barv v svetlobi. Posamezno mavrično barvo opiše njena valovna dolžina λ ali pa frekvenca ν , saj velja $c = \lambda\nu$, kjer je c svetlobna hitrost $3 \cdot 10^8$ m/s. Vidna svetloba ima valovno dolžino med 400 nm (vijolična) in 700 nm (rdeča). Z očmi zaznamo barvo zato, ker imamo na mrežnici več vrst čutnic, ki so različno občutljive na različne barve. Občutek barve lahko v očeh ustvarimo že z mešanjem treh različnih, primarnih barv. To naredimo lahko na več načinov. Pri prikazu barv na zaslonih (računalniški monitor, televizijski ekran, telefonski zaslon) uporabimo za vsak slikovni element (tujka je piksel) tri drobne svetilke rdeče (red R), modre (blue B) in zelene (green G) barve. Ta sistem imenujemo tudi RGB sistem barv. Različne barve ustvarimo tako, da svetilke svetijo različno močno. Videz bele ustvarimo tako, da rdeča, modra in zelena svetijo enako močno, videz črne pa tako, da svetila ne svetijo. Takemu mešanju barv pravimo seštevalno (aditivno) mešanje. Primer je prikazan na fotografiji mobilnega telefona. Fotografija telefona je narejena s fotoaparatom, povečavi pa z mikroskopom, na katerega je pritrjena kamera. S pravokotnimi okvirji je nakazan izsek, ki je na sosednji sliki prikazan v povečavi. Na zadnji sliki vidimo, da vsak slikovni element sestavlja tri pravokotne, podolgovate svetilke. Tam, kjer je prikazana bela, vse tri svetilke svetijo enako močno.



Drugi način mešanja uporabljamo pri tisku. Tam videz barve ustvarimo z barvilom, ki ga nanesemo na belo podlago. Bela podlaga odbije vso vpadno svetlobo enako, barvilo pa del spektra absorbira tako, da je odbita svetloba obarvana. Z različno velikimi lisami treh različnih barvil lahko ustvarimo barvni vtis. Običajno uporabljamo zelenomodro (cian C, absorbira rdeči del spektra), modrordečo (magenta M, absorbira zeleni del spektra) in rumeno (yellow Y, absorbira modri del spektra) barvilo. Belo barvo naredimo tako, da barvila ne nanesemo, črno pa tako, da nanesemo vsa v enaki meri. Ta tri barvila zmešana skupaj običajno ne naredijo ustrezne črnine, ampak nekaj sivorjavega, zato pri kakovostnejšem tisku uporabljamo še posebno črno barvilo (namesto B za black, barvo imenujejo Key in dobi kodo K). Te štiri barve tvorijo osnovo CMYK barvnega sistema, ki ga uporablja tudi večina barvnih tiskalnikov. Ker barvilo del bele svetlobe absorbira, ta način mešanja barv imenujemo odštevalno (subtraktivno) mešanje. V povečavah si lahko ogledate, kako ustvarimo s tiskom videz oranžne barve. V največji povečavi vidimo, da so levo zgoraj črne lise večje, ker je tam slika temnejša, desno spodaj pa se mešajo modrordeče in rumene lise, da ustvarijo vtis oranžne.

× × ×

Knjižnica Sigma

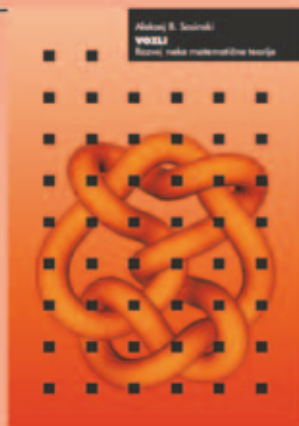
Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Aleksej B. Sosinski:

VOZLI
Razvoj neke
matematične teorije

160 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR

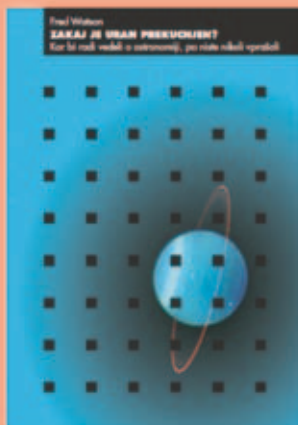
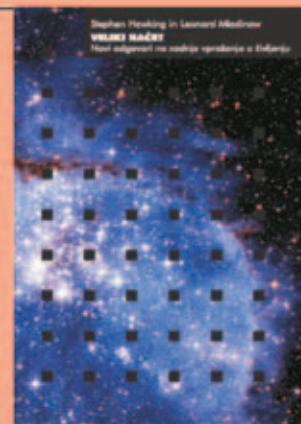


**Stephen Hawking in
Leonard Mlodinow:**

VELIKI NAČRT
Novi odgovori na zadnja
vprašanja o življenju

164 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR



Fred Watson:

**ZAKAJ JE URAN
PREKUCNjen?**
Kar bi radi vedeli o
astronomiji, pa niste
nikoli vprašali

200 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

22,39 EUR



Janez Strnad:

**SVET NIHANJ IN
VALOVANJ**

200 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

19,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.