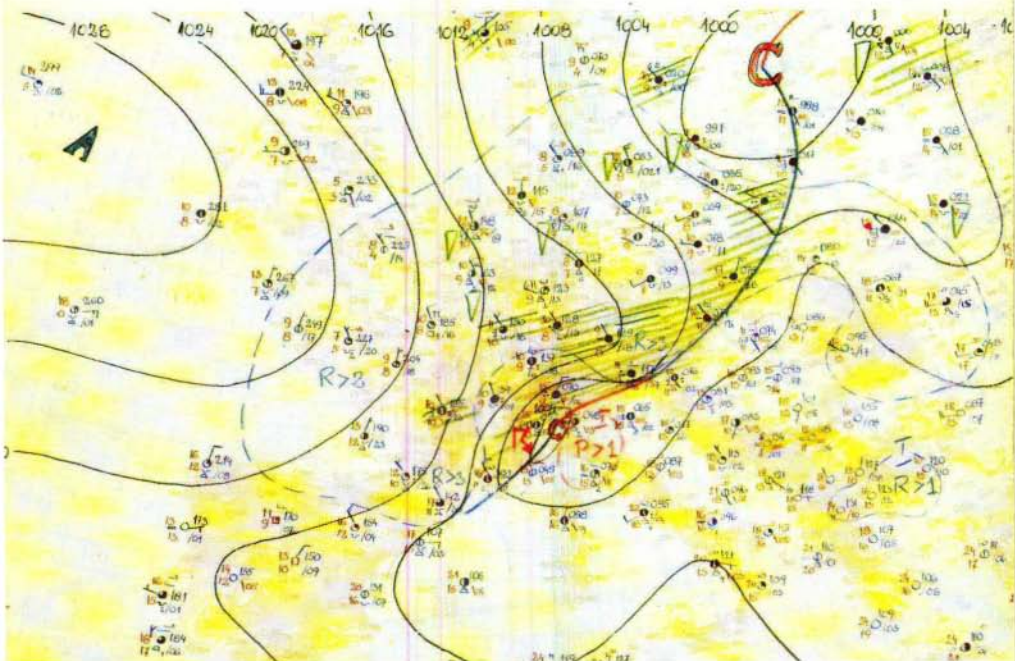


presek

2

IV 1976-77



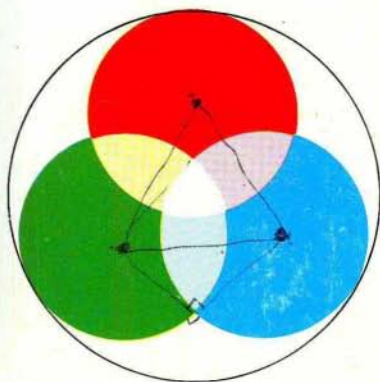
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS

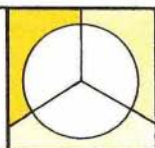


P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

4 (1976/77) št. 2, 65 - 128

V S E B I N A

UVODNIK	65	Želja uredništva (Peter Petek)
MATEMATIKA	67	Matematične nepake, 2. del (Anton Suhadolc)
	72	Koledar Indijancev Maja (Borut Jurčič-Zlobec)
	113	Odlikovani trikotniki (Edvard Kramar)
	116	Kako razrežemo kvadrat na same ostrokotne trikotnike (Ivan Vidav)
MATEMATIČNO	75	Škratek in pajek (Dušan Repovš)
RAZVEDRILLO	78	Poiščimo napako (Roman Rojko in Joso Vukman)
	79	Braminov prstan (Danijel Bezek)
	82	Račun z Venere - rešitev str. 102 (Zvonimir Bohte)
ASTRONOMIJA	80	Nekaj nebesnih pojavov v letu 1977 (Pavla Ranzinger)
FIZIKA	83	Nikola Tesla - razsipnij genij, 1.del (Tomaž Fortuna)
NOVE KNJIGE	87	(Andrej Čadež in Ciril Velkovrh)
METEOROLOGIJA	88	Zakaj vremenske napovedi niso vedno pravilne? (Jože Rakovec)
FIZIKALNO	94	(Dušan Repovš, ilustriral Božo Kos)
RAZMIŠLJANJE		
KRIŽANKA	96	(Pavle Gregorc)
NALOGE	98	Naloga o šahovski deski (Dušan Repovš)
	115	Dokaži... - rešitev str. 101 (Edvard Kramar)
REŠITVE NALOG	71	Zavorna pot (Peter Petek)
	86	Računska križanka (Zvonimir Bohte)
	100	Čudni potnik, Dva kvadrata (Danijel Bezek)
		Naloge: 1. in 2. (Franci Oblak), 3. (Matej Rupel)
	101	Praštevilco (Josko Vukman)
	106	Rebus (Sergej Pahor)
	128	Med cifre... (Zlatko Novak), Skrita števila (Pavle Gregorc)
NALOGE	102	Naloge z osnovnošolskega tekmovanja v BiH
TEKMOVANJA		(Bogomila Kolenko)
	103	Tekmovanje za zlato Vegovo priznanje (Pavle Zajc)
	105	Zvezno tekmovanje osnovnošolcev (Bogomila Kolenko)
	107	XVII. zvezno tekmovanje mladih matematikov (Boris Lavrič)
	110	Zvezno tekmovanje iz fizike (Bojan Golli in Merko Zgonik)
KOLEDAR	77, 104	Koledar tekmovanj za leto 1977 (Bojan Golli, Pavle Zajc in Mirko Dobovišek)
NOVICE	118	Stalna razstava v Vegovem domu (Jože Povšič)
PISMA BRALCEV	120	(Matilda Lenarčič)
PREMISLI IN REŠI	124	(Zlatko Novak in Jože Dover)
BOLJ ZA ŠALO	66	5 = 5 - rešitev str. 78 (Dušan Modic)
KOT ZARES	125	Pet volnenih kap tete Amalije (Peter Petek)
	126	Uganka s sodi (Roman Červ)
	127	Zabavna števila (Roman Rojko)
	111	Domino malo drugače (Ciril Velkovrh)
BISTROVIDEC	11	Kocke (Dušan Repovš), Mozaik - rešitev (France Dacar)



ZELJA UREDNIŠTVA

V uredništvo dobimo že sedaj precej pošte. Največ je seveda odgovorov za "Premisli in reši", vendar pa je vmes tudi kakšno naročilo, pismo bralca, rešitev Bistroidca. Ker moramo pisma razvrščati, bi nam, dragi bralci, prihranili precej dela in časa, če bi na ovitek vsakega pisma napisali, za katero rubriko ste ga namenili. Kaj pa, če nam hočete poslati prispevke za različne rubrike? Nič hudega, le na ovitek pisma napišite vse rubrike, npr. Premisli in reši, Bistroidec, Pisma bralcev. Le to bi še prosili, da prispevke za različne rubrike napišete vsakega na svoj list, ker rubrike urejajo različni uredniki in nam potem ni treba pisma rezati ali pošiljati od enega urednika do drugega. Na vsak list pa še napišite svoje ime in naslov.

Če se vaše pismo ne nanaša na nobeno od rubrik, pač ni treba napisati na ovitek ničesar. Pismo bo odgovorni urednik odprl in presodil, kateremu članu uredniškega odbora naj ga da. No, tudi če boste pozabili na oznako na ovitku, se ni bati, da bi pismo ne prišlo v prave roke, le malce več dela nam boste naložili.

Pišite nam še!

Peter Petek

SREČNO NOVO LETO 1977

P R E S E K - List za mlade matematike, fizike in astronome.

4. letnik, šolsko leto 1976/77, 2. števil., december 1976, str. 65-128

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Danijel Bezek, Andrej Čadež (urednik za astronomijo), Jože Dover, Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc, Marjan Hribar (urednik za fiziko), Andrej Kmet, Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Matilda Lenarčič, Norma Mankoč-Borštnik, Franci Oblak, Peter Petek (odgovorni urednik), Tomaž Pisanski (urednik za matematiko), Tomaž Skulj, Janez Strnad (glavni urednik), Marijan Vagaja, Ciril Velkovich (tehnični urednik).

Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 65-061/53, števil. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki števil. 50100-620-107-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 20.-din, za skupinska pa 18.-din, za inozemstvo 2 \$ = 36.-din, 1300.-Lit, 36.-Asch. Posamezna številka stane 5.-din.

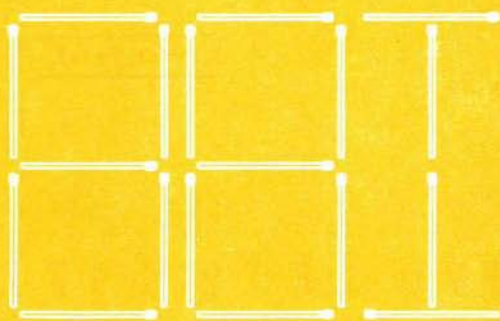
List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja štirikrat letno v nakladi 19.500 izvodov.

© 1976 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

5 = 5

Prestavi pet vžigalic na drugo stran navpične črte tako, da bo na obeh straneh enako. Rešitev lahko poiščeš v tem Preseku.



Dušan Modic



MATEMATIČNE NEPAKE

2. DEL

V 1. številki Preseka smo si ogledali nekaj primerov matematičnih nepak. Ponovimo, kaj je nepaka: to je naloga, ki jo računamo nepravilno, rezultat pa je kljub temu pravilen.

V drugem delu si bomo ogledali še nekaj novih primerov nepak.

1. Vsakdo ve, da je lažje seštevati kot množiti, zato skušamo izračunati $1\frac{1}{2} \cdot 3$ po lažji poti:

$$1\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2} + 3 = 4\frac{1}{2} \quad (1)$$

Običajna pot da isto. Spet se vprašamo, za kakšne ulomke je ta način računanja pravilen. Splošni primer računa (1) zapišemo v obliki

$$(k + \frac{a}{b}) \cdot n = (k + \frac{a}{b}) + n \quad (2)$$

Tu so a , b , k , n naravna števila, $a < b$, a in b nimata skupnega faktorja razen 1. Enačbo (2) množimo z b in uredimo, pa dobimo

$$(n - 1) [(k - 1)b + a] = b$$

če je $k \geq 2$, je leva stran enaka 0, če je $n = 1$, ali pa večja od $a + b$, če je $n > 1$, torej ne more biti enaka desni. Ostane še možnost $k = 1$:

$$(n - 1)a = b$$

število a deli b , ker pa nimata skupnih faktorjev, mora biti $a = 1$; potem pa je $n = b + 1$.

Splošna rešitev enačbe (2) je torej

$$(1 + \frac{1}{b}) \cdot (b + 1) = (1 + \frac{1}{b}) + (b + 1)$$

kjer je b poljubno naravno število. Primer (1) dobimo pri $b = 2$.

2. Vsi menimo, da je računanje z ulomki nadležno, zato jih bomo pri množenju kar spustili, kot kaže zgled

$$(31 + \frac{1}{2})(21 - \frac{1}{3}) = 31.21 \quad (4)$$

Po "stari" poti je leva stran $\frac{63}{2} \cdot \frac{62}{3} = 21.31$, torej je zgornji rezultat pravilen.

Splošen primer nepake (4) se da zapisati v obliki

$$(k + \frac{a}{b})(n - \frac{a}{d}) = k.n \quad (5)$$

Ta enačba ima v naravnih številih ogromno rešitev. Omejimo se npr. na rešitve, pri katerih je $a = a$; ko odpravimo ulomke in uredimo, dobimo

$$n.d = k.b + a$$

Tudi ta enačba ima mnogo rešitev. Izberimo si npr. $n = 43$, $d = 7$, pa dobimo

$$301 = k.b + a$$

ta ima rešitve $150.2 + 1$, $100.3 + 1$, in še druge. Te nam dajo nepake

$$(150 + \frac{1}{2})(43 - \frac{1}{7}) = 150.43$$

$$(100 + \frac{1}{3})(43 - \frac{1}{7}) = 100.43$$

$$(37 + \frac{5}{8})(43 - \frac{5}{7}) = 37.43$$

Naloga: Poišči nepake oblike (5), pri katerih je $a = a = 1$!

3. Večini učiteljev matematike in tudi mnogim učencem je iz prakse pred šolsko tablo domača formula za deljenje dvočlenikov

$$\frac{a + a}{b + d} = \frac{a}{b} + \frac{a}{d}, \quad b, d > 0 \quad (6)$$

Največkrat dobi učenec - zagovornik te formule - oceno nezadostno. Primeri kažejo, da je formula (vsaj včasih) pravilna:

$$\frac{3 - 12}{1 + 2} = \frac{3}{1} - \frac{12}{2} = -3$$

$$\frac{8 - 18}{2 + 3} = \frac{8}{2} - \frac{18}{3} = -2$$

Naloga: Pokaži, da velja pravilo (6), če je

$$a = -\frac{b^2 c}{d^2}$$

4. Tiskarne redno obiskuje tiskarski škrat, ki se rad poigra s tekstom (vprašajte v tiskarni "Dela"), posebno veselje pa ima nad številkami, ko v tiskarni stavijo in tiskajo matematične učbenike, zbirke nalog in zbirke tabel. (Kar pogledjte, koliko napak je v vaših zbirkah vaj iz matematike, posebno pri rezultatih!)

Matematika se pogosto upre celo tiskarskemu škrtu; ne more ji vedno do živega, kot kažejo primeri

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592$$

Tu je škrat eksponenta 5 in 2 spustil v višino ostalih znakov, znak za množenje pa je izgubil. A glej, leva stran je še vedno enaka desni:

$$2^5 \cdot 9^2 = 32 \cdot 81 = 2592 !$$

Na podoben način nam jo je skušal zagosti pri tehle računih:

$$11^2 \cdot 9\frac{1}{3} = 1129\frac{1}{3}$$

$$11^2 \cdot 93\frac{1}{3} = 11293\frac{1}{3}$$

$$11^2 \cdot 933\frac{1}{3} = 112933\frac{1}{3}$$

$$13^2 \cdot 7\frac{6}{7} = 1327\frac{6}{7}$$

$$3^4 \cdot 425 = 34425$$

Njegov trud je bil zaman, saj so vse leve strani enake desnim!

Naštete nepake je zelo težko poiskati. Prav tako je težko najti nepake, pri katerih je izpuščen znak za množenje in zamenjan vrstni red števil:

$$21 \cdot 87 = 1827$$

$$35 \cdot 41 = 1435$$

$$86 \cdot 251 = 21586$$

5. Podobno kot v primerih pod točko 4 nam je skušal škrat ponagajati pri tehle računih:

$$9^2 - 1^2 = 92 - 12 = 80$$

$$7^2 - 3^2 = 72 - 32 = 40$$

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$$

$$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$$

Oba tipa nepak se dasta rešiti povsem splošno.

Naloga: Poišči rešitve nepak zgornjih dveh tipov!

6. Pri računanju s potencami nam je dobrodošlo pravilo: če potenciramo število samo s seboj, smemo (včasih) eksponente opustiti:

$$3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5 = 3435$$

$$\text{Res: } 27 + 256 + 27 + 3125 = 3435$$

Pogosto smemo eksponente opustiti ali celo "krajšati"

$$12^2 + 33^2 = 1233$$

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$9^3 + 4^3 + 7^3 + 4^3 = 9474$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24}$$

$$37^3 + 24^3 \quad 37 + 24$$

Vse zgornje nepake razen zadnje je silno težko poiskati. Zadnja je enostavna, saj velja identiteta

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a + b}{a + (a-b)}$$

Naloga: Preveri to identiteto!

7. Zamenjava vrstnega reda števil je koristna tudi pri drugih računih, ne samo pri množenju, kot smo videli v nepakah pod točko 5.

Spomnimo se, kaj pomeni zapis $\alpha = 342_{12}$! To je število α , zapisano glede na osnovo 12. V običajni osnovi 10 imamo:

$$\alpha = 3 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 2 = 482$$

Nasploh je dosti dela, če želimo pretvoriti zapis števila v dani osnovi v zapis glede na kakšno drugo osnovo. Oglejmo si se-daj dve enostavni pravili, kako to naredimo:

$$12_{73} = 21_{37}, \quad 13_{82} = 31_{28}, \quad 57_{64} = 75_{46}$$

ali z bolj enostavnimi zamenjavami:

$$98_{21} = 21_{98}, \quad 87_{32} = 32_{87}, \quad 41_{72} = 72_{41} \quad (7)$$

Oba tipa nepak se zdita prav neverjetna. Kaj lahko ju rešujemo splošno. Nepaka iz prvih treh zgledov je taka:

$$(10a + b)_{(10c+d)} = (10b + a)_{(10d+c)}$$

Upoštevajmo, kaj pomenita zapisa na levi in na desni strani enačbe

$$a(10c + d) + b = b(10d + c) + a$$

ali drugače

$$a(10c + d - 1) = b(10d + c - 1)$$

Ta diofantska enačba ima ogromno rešitev. Vzemimo npr. $a = 2b$ in dobimo

$$c = \frac{8d + 1}{19}$$

S poskušanjem ugotovimo, da imamo le eno rešitev, $d = 7$, $c = 3$, za a in b pa smemo vzeti pare 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; To nam da 4 nepake

$$21_{37} = 12_{73}, 42_{37} = 24_{73}, 63_{37} = 36_{73}, 84_{37} = 48_{73}$$

Naloga: Poišči nekaj nepak oblike (7)!

V zabavni matematični literaturi dobimo opisane še mnoge nepake in seveda mnoge druge zanimivosti iz matematike. Za bralce, ki jih take naloge privlačijo, navajamo nekaj knjig, ki so v matematični knjižnici, Jadranska 19.

Anton Suhadolc

- [1] R.A. Carman, *Mathematical Mistakes*, Mathematics Teacher 64, 109-115 (1971)
- [2] M. Kraitichik, *La mathematique des jeux on recreations mathematiques* Paris, Gauthier-Villars 1955.
- [3] C.S. Ogilvy, J.T. Anderson: *Zahlentheorie*, München, W. Goldmann Verlag 1970.

ZAVORNA POT - odgovor na vprašanje iz P III/2 str. 93

Avtomobil ima pri 100 km/h štirikrat večjo kinetično energijo kot pri 50 km/h. ($W = mv^2/2$!) Ker so sile pri zaviranju v obeh primerih enake, delo pa je enako produktu sile in poti, mora biti pri dvakrat večji hitrosti zavorna pot štirikrat večja, torej enaka 100 m.

Peter Petek

KOLEDAR INDIJANCEV MAJA

Indijanci Maja so živeli na področju Srednje Amerike, na ozemlju današnjih držav: Gvatemale, Hondurasa, Salvadorja in v Mehiki na polotoku Yucatan. Glede na njihovo civiliziranost jih uvrščamo med največje predšpanske ameriške kulture. Vrh svojega razvoja so dosegli v času od 3. do 4. stol. n.š.

Kakšen koledar so imeli Indijanci Maja? Videli bomo, da kar zapletenega.

Uporabljali so dva koledarja. Po enem je imelo leto 260 dni, po drugem pa 365. Leto z 260 dnevi so imenovali leto Tzolkin ali posvečeno leto, leto s 365 dnevi pa leto Haab. Oglejmo si vsako zase!

1. *Leto Tzolkin* ali posvečeno leto

To leto oz. koledar za to leto so uporabljali v religiozne namene. Po njem so določali rojstne dneve, praznike itd. Dneve so označevali z imeni v naslednjem vrstnem redu (beri po stolpcih):

Ik	Manik	Eb	Caban
Akbal	Lamat	Ben	Eznab
Kan	Muluc	Ix	Cauac
Chicchan	Oc	Men	Ahau
Cimi	Chuen	Cib	Imix

Vidimo, da je imen 20. Imenu so dodali še številko. Dnevi so se torej imenovali takole: 1 Ik, 2 Akbal, 3 Kan, 4 Chicchan itd. do 13. dneva, t.j. 13 *Ix*. Pri naslednjem dnevu (*Men*) pa so začeli znova z 1, torej so ga imenovali 1 *Men*; petnajstega 2 *Cib* itd. do 20. imena, 7 *Imix*. Tu so se povrnili k začetnemu imenu (*Ik*), štelili pa so naprej, dokler niso prišli znova do 13. 21. dan je bil torej 8 *Ik*, sledil mu je 9 *Akbal* itd. do 13 *Manik*.

Cikla števila (1 do 13) in imena (1 do 20) se torej med seboj prepletata. Izračunajmo, kdaj bomo zopet prišli do 1 *Ik*! Problem je preprost. Poiskati moramo najmanjši skupni večkratnik števil 20 in 13. Ker sta ti dve števili tuji, t.j. nimata skupnega faktorja, je najmanjši večkratnik kar produkt obeh. Torej: $13 \cdot 20 = 260$. Vidimo, da bo 1 *Ik* prišel na vrsto kot prvi dan v naslednjem letu. Od tod sledi, da se v letu Tzolkin ne ponovi enako poimenovan dan. Vzemimo 5 *Ahau*! Že vemo, da je to samo en dan v

letu, izračunajmo pa še, kateri dan je to! Poskusimo: Ko pride Ahau (šestnajsto ime) prvič v letu na vrsto, nosi število $16 - 13 = 3$. Naslednjikrat pride Ahau na vrsto čez 20 dni. Katero število bo nosil? $3 + 20 - 13 = 10$. Itd. Zapišimo zdaj vse po vrsti: 3 Ahau, 10 Ahau, 4 Ahau, 11 Ahau, 5 Ahau - in tu smo že pri tistem, ki smo ga iskali. Preštejmo, koliko dni je preteklo do 5 Ahau! $16 - 4 \cdot 20 = 96$. Torej je 5 Ahau 96. dan v letu. Prav tako si lahko bralec sam izračuna, kateri dan v letu je npr. 3 Lamat, 8 Eb, 13 Cib itd.

2. Leto Haab

To leto oz. koledar zanj so Maji uporabljali v nereligiozne namene, torej so se po njem ravnali pri poljedelskih opravilih itd. Leto Haab je bilo praktično tako kot naše, samo da niso poznali prestopnih let. Razdeljeno je bilo v 19 mesecev: 18 po 20 dni in 1 (zadnji v letu) po 5 dni. Imena mesecev so bila naslednja (beri po stolpcih):

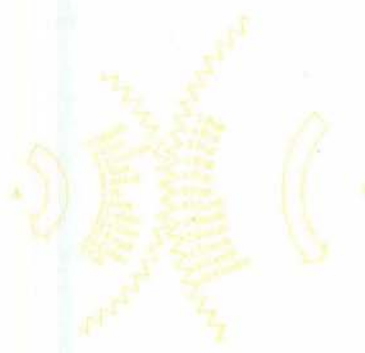
Pop	Tzec	Chen	Mac	Kayab
Uo	Xul	Yax	Kankin	Cumhu
Zip	Yaxkin	Zac	Muan	Uayeb
Zotz	Mol	Ceh	Pax	

Dnevi v mesecih so bili označeni s števili od 0 do 19, v 5-dnevnem mesecu pa od 0 do 4. Npr.: 0 Pop ... 19 Pop, 0 Uo, 1 Uo, ... 4 Uayeb, 0 Pop itd.

3. Zdaj pa sestavimo oba koledarja!

Da si bomo to lažje predstavljali, napravimo model z dvema zobatima kolesoma (glej sliko 1). Kolo A predstavlja leto Tzolkin, kolo B pa leto Haab. Prvo ima 260 zob, drugo pa 365. Pri prvem predstavlja jo dneve zohje, pri drugem pa presledki med zobmi. Kolesi na sliki sta ujeti v dnevu 2 Ik po Tzolkinu in 0 Pop po Haabu. Poglejmo, kolikokrat se mora

kolo B zavrteti, da bomo spet prišli do te kombinacije! Pred podobnim problemom smo kot prej pri letu Tzolkin. Poiskati mo-



ramo najmanjši skupni večkratnik števil 260 in 365. Vidimo, da je $260 = 5.52$ in $365 = 5.73$. Števili imata skupni faktor 5. Zato bo ponovno prišlo do 2 Ik 0 Pop čez $5.52.73 = 18980$ dni oziroma čez 52 let Haab ali 73 let Tzolkin. Ker števili 260 in 365 nista tuji, se poljubna kombinacija dneva leta Haab in dneva leta Tzolkin ne more pojaviti. Ker cikel traja 52 let Haab, bo lahko na neki dan leta Haab prišel samo eden izmed 52 od vseh 260 dni leta Tzolkin. Vzemimo kar prvi dan leta Haab (0 Pop) in pogledajmo, kateri dnevi leta Tzolkin lahko pridejo na ta dan! Za izhodišče vzemimo dan 1 Ik 0 Pop. Najprej ugotovimo, katera imena dni leta Tzolkin lahko pridejo na ta dan! Ker je imen 20 in ima leto Haab 365 dni, se v enem letu cikel imen ponovi 18 krat in ostane še 5 dni ($18.20 + 5 = 365$). Torej se ime vsakega naslednjega prvega dneva leta Haab pomakne naprej za 5 imen v ciklu. Ker je $20 = 4.5$, se bodo na ta dan zvrstila samo štiri imena. To so: prvo Ik, šesto Manik, enajsto Eb in šestnajsto Caban. Ko smo ugotovili imena, ugotovimo še števila! Postopek je enak: Ker je števil 13, se v enem letu Haab cikel ponovi 28 krat in ostane še 1 dan ($28.13 + 1 = 365$). Torej se število vsakega naslednjega prvega dneva leta Haab pomakne naprej za 1 v ciklu. Od tod sledi, da se bo na ta dan zvrstilo vseh 13 števil. Zdaj pa odgovorimo na vprašanje, ki smo si ga zastavili zgoraj: Kateri dnevi leta Tzolkin lahko pridejo na prvi dan leta Haab? Ker smo začeli z 1 Ik, se zvrstijo v naslednjem vrstnem redu: 1 Ik, 2 Manik, 3 Eb, 4 Caban, 5 Ik, ,, , 13 Ik, 1 Manik, 2 Eb, 3 Caban itd. Cikla imen (Ik, Manik, Eb, Caban) in števil se med seboj prepletata. Vseh različnih kombinacij je $4.13 = 52$.

Za poskus orientacije naj bralec sam izračuna naslednje: Katero leto v 52-letnem ciklu ima dan s kombinacijo 4 Muluc 17 Yaxkin? Najprej ugotovimo, kateri dan leta Tzolkin bo prišel na prvi dan v tem letu! Potem pa pogledamo, kateri je ta dan v zaporedju tistih 52 dni leta Tzolkin, ki pridejo na prvi dan leta Haab, in račun bo gotov. Bralca naj opozorimo: Ker so Maji šteli dneve mesecev od 0 naprej, je dan 17 Yaxkin 18. dan v mesecu Yaxkin.

Borut Jurčič-Zlobec

MATEMATIČNO RAZVEDRILO



ŠKRATEK IN PAJEK

Ogledali si bomo zanimiva (matematična) problemčka, ki sta med seboj tesno povezana, saj je drugi samo razširitev prvega. Pa začnimo!

Problem 1.: Škratek stoji v levem spodnjem kotu poljubno velike šahovske deske, torej na "koti" $(0,0)$. (V splošnem naj pomeni koordinata (m,n) kvadrata, ki se nahaja na presečišču m -tega stolpca in n -te vrstice.) Na koliko načinov (pri najmanjšem številu korakov) lahko pride iz kvadrata $(0,0)$ na izbrani kvadrat (x,y) ? Pri tem pa od škratka zahtevajmo, da se giblje vedno le vodoravno ali navpično.

Rešitev: Označimo s spremenljivko $u_{x,y}$ število možnih (najkrajših) prehodov iz kletke $(0,0)$ v kletko (x,y) . Očitno je za poljuben par števil x in y res:

$$u_{x,0} = 1 \quad \text{in} \quad u_{0,y} = 1$$

Prav tako je res, da lahko škratek pride v kletko (x,y) le iz kletk $(x-1,y)$ ali pa $(x,y-1)$, do katerih pa lahko pride seveda na natanko $u_{x-1,y}$ oziroma $u_{x,y-1}$ načinov. Odtod dobimo rekurzivno* relacijo za funkcijo $u_{x,y}$:

$$u_{x,y} = u_{x-1,y} + u_{x,y-1}$$

(Torej je $u_{x,y} = f(x,y)$ funkcija dveh celih nenegativnih spremenljivk.)

Sedaj se lotimo vpisovanja števil $u_{x,y}$ v posamezne stolpce. Postopek vidimo iz slike: (Ali ste prepoznali Pascalov trikotnik binomskih koeficientov? Zanimivo, mar ne?)

1					
1	5				
1	4	10			
1	3	6	10		
1	2	3	4	5	
	1	1	1	1	1

Poiščimo rešitev naše rekurzivne formule: očitno potrebuje skratek za prehod kvadratka $(0,0)$ na kvadratik (m,n) samo $m+n$ korakov, m vodoravnih in n navpičnih. Očitno imamo za izbor m mest na razpolago kvečjemu $c_{m+n}^m = (m+n)!/(m!n!)$ ^{**} možnosti. To pa je obenem odgovor na naše vprašanje:

$$u_{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$

Problem 2.: *Pajek si je spletel v kotu sobe nekakšno "kubično" mrežo. Dobljene prostorske kockice imenujemo kletke s koordinatami (x,y,z) . (Pomen x , y in z lahko uganete iz prejšnje rešitve). Na koliko načinov lahko pride pajek iz kota sobe, t.j. iz kletke $(0,0,0)$ v dano kletko (k,l,m) ? Pri tem mora vedno ubrati najkrajšo pot, kakor poprej škratek.*

Rešitev: Tako kot poprej tudi tu poiščemo podobne zakonitosti v gibanju pajka. Očitno je tokrat rekurzivna formula:

$$u_{x,y,z} = u_{x-1,y,z} + u_{x,y-1,z} + u_{x,y,z-1}$$

očitno pa veljajo tudi naslednje tri enačbe:

$$u_{x,y,0} = (x+y)!/(x!y!)$$

$$u_{x,0,z} = (x+z)!/(x!z!)$$

$$u_{0,y,z} = (y+z)!/(y!z!)$$

ker smo to ugotovili že pri škratku.

Da pridemo do kletke (k,l,m) , nam tokrat zadostuje natanko $k+l+m$ korakov. Te lahko izberemo najprej na $(k+l+m)!/(k!(l+m)!)$ načinov za pot po osi x , nato nam ostane $l+m$ mest, izmed katerih lahko spet izbiramo pot po osi y na $(l+m)!/(l!m!)$ načinov. Torej je celotno število možnosti izbora števil k in l (število m pa je že s tem enolično določeno) enako izrazu:

$$\frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \cdot \frac{(l+m)!}{l!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$$

In od tod dobimo rezultat, ki smo ga pričakovali:

^{**}Število $n!$ imenujemo " n fakulteta" ali " n faktorsko", pomeni pa produkt vseh zaporednih naravnih števil od 1 do n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots$$

Naj dodamo, da postanejo števila $n!$ že za relativno majhne n -je strahovito velika, npr. $10! = 3628800$, $20! = 2432902008176640000$, itd.

$$u_{x,y,z} = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}$$

Seveda se dá naloga posplošiti na poljubno dimenzionalno "pajkovo" mrežo in rezultat je spet analogen - v n -dimenzijah dobimo

$$u_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1! x_2! \dots x_n!}$$

Za konec pa poskusite rešiti tole nalogo: Imamo m oštevilčenih vrčkov, ki sprejemajo vase naslednje količine medu: prvi a_1 litrov, drugi a_2 litrov, ..., m -ti a_m litrov. Na koliko načinov jih lahko napojimo z medom, če moramo celo zajemalko zlititi naenkrat v en sam vrček?

$$\frac{i^{w_1} \dots i^{w_p}}{i^{(w_1 + \dots + w_p)}} : \text{дополно}$$

Dušan Repovš

* Rekurzivna formula je enačba, ki nam daje zvezo med nekaj zaporednimi členi kakšnega zaporedja $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Npr. za zaporedje Leonarda Fibonaccija (12. stol.) veljata naslednji dve rekurzivni formuli:

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n-1} \text{ in } a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_{n-1}a_{n+2}$$

samo zaporedje pa je tako: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (vsako število je vsota neposrednih dveh predhodnih).

Rešiti rekurzivno formulo pomeni poiskati ekspliciten izraz za splošen člen $a_n = f(n)$. Za Fibonaccijevo zaporedje je rešitev naslednja:

$$a_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n / \sqrt{5}$$

KOLENDAR

RAZPORED TEKMOVANJ SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1976/77

Republiško tekmovanje iz fizike bo v soboto, 14. maja 1977 v Škofji Loki. Sekretar tekmovanja bo prof. Branko Roblek.

Na srednjih šolah bodo izbirna tekmovanja do 16. aprila 1977.

Zvezno tekmovanje iz fizike bo v SR Hrvatski predvidoma konec maja.

Bojan Golli

POIŠČIMO NAPAKO

Pred seboj imamo šest izpeljav, ki nas pripeljejo do nemogočih rezultatov. V izpeljavah so torej napake. Poišči jih!

1. Pravilo o razliki kvadratov pravi:

$$1^2 - 1^2 = (1 - 1)(1 + 1)$$

Na levi strani izpostavimo 1:

$$1(1 - 1) = (1 - 1)(1 + 1)$$

in okrajšamo enačbo z $(1 - 1)$:

$$1 = 1 + 1$$

rezultat je torej:

$$1 = 2$$

2. Prav gotovo velja enačba:

$$16 - 36 = 25 - 45$$

Enačbi prištejemo $81/4$ in tvorimo kvadrata:

$$16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4$$

$$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$$

Nato še korenimo in prištejemo $9/2$:

$$4 = 5$$

3. Logaritmiramo enačbo:

$$(1 - 2)^2 = 1$$

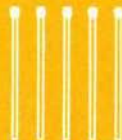
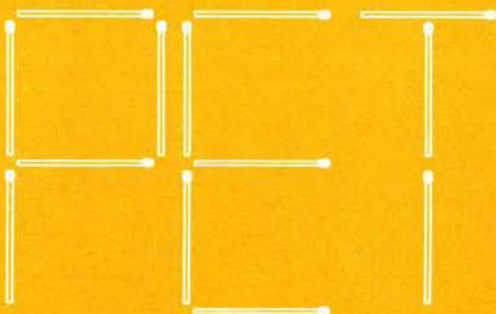
$$2 \log(1 - 2) = \log 1 = 0$$

jo delimo z 2 in dobimo:

$$\log(-1) = 0$$

4. $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Roman Rojko



Dušan Modic

5. Vzemimo neenačbo $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Zapišimo jo v obliki $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$

in jo logaritmirajmo. Imamo $2 \log \frac{1}{2} < \log \frac{1}{2}$. Po deljenju z $\log \frac{1}{2}$ dobimo $2 < 1$.

6. Ko odkriješ napako, se spoprimi še z naslednjim "dokazom".

Logaritmirajmo ponovno neenačbo $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$, tokrat naj bo osnova

logaritma $\frac{1}{2}$. Imamo $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$. Ker je $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$,

dobimo ponovno $2 < 1$.

Jošo Vukman

BRAMINOV PRSTAN

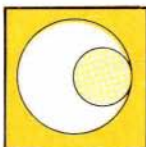
Iz deščice gledajo trije pokončni žebli. Na enem je natak-
njenih 5 okroglih koncentričnih ploščic. Sledijo si od spodaj
navzgor, od največje do najmanjše.



V kar najmanj potezih moraš preložiti vseh 5 ploščic na dru-
gi žebelj, tako da so ob koncu ploščice v istem vrstnem redu,
kot so bile v začetku na prvem žeblju. Pri tem si lahko pomaga-
mo s tretjim žebljem. Prelagamo lahko le po eno ploščico, toda
nikoli večjo na manjšo. Prenos od enega do katerega koli druge-
ga žeblja štejemo za potezo.

Z najmanj koliko potezami dosežemo želeni cilj? Poskusi! Ali
znaš problem posplošiti na poljubno število ploščic?

Danijel Bezek

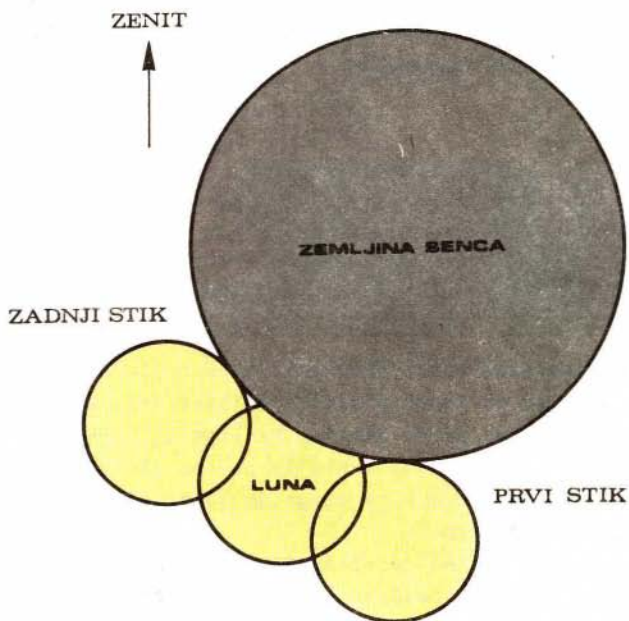


ASTRONOMIJA

NEKAJ NEBESNIH POJAVOV V LETU 1977

MRK

Dne 4. aprila bo delni Lunin mrk. Luna se bo dotaknila Zemljine sence ob $04^h30,1^m$. Ob največji stopnji mrka, t.j. ob $05^h18,3^m$, bo zatemnjenih 20 odstotkov Luninega premera. Mrk se bo končal ob $06^h06,4^m$. Med tem se bo zdanilo in tudi Luna bo zašla, tako bomo iz naših krajev lahko opazovali le nekaj več kot prvo polovico mrka, seveda če nam bo vreme naklonjeno.





Merkur kroži okoli Sonca znotraj Zemljinega tira, zato ga lahko opazujemo le takrat, ko se, gledano z Zemlje, najbolj oddalji od Sonca. Ko se Merkur odmakne najbolj proti zahodu, vzhaja pred Soncem, zato ga vidimo zjutraj. Ko pa se odmakne proti vzhodu, zahaja za Soncem, zato ga vidimo zvečer. Merkur bo jutranji planet okoli 29.I., 28.V. in 21.IX., večerni pa okoli 10.IV., 8.VIII. in 3.XII.



Venera je skoraj dvakrat bolj oddaljena od Sonca kot Merkur, zato se navidezno bolj oddalji od Sonca in je mnogo primernejša za opazovanje. Kot Večernica bo Venera vidna od januarja do marca, kot Danica pa od maja do konca leta.



Mars v začetku leta ne bo primeren za opazovanje, ker bo navidezno preblizu Sonca. Sčasoma bo vzhajal bolj zgodaj in ga bomo sredi maja videli že kmalu po tretji uri nad vzhodnim obzorjem v ozvezdju Rib. Sredi junija bo vzšel ob 01^h50^m, sredi julija ob 00^h45^m. V avgustu bo viden v ozvezdju Bika vso drugo polovico noči. Potem bo prešel v ozvezdje Dvojčkov, kjer ga bomo 4. septembra lahko opazovali pol stopinje severno od Jupitra. V drugi polovici oktobra bo Mars prišel v ozvezdje Raka in bo tam ostal do konca leta. V začetku novembra bo vzhajal po 22^h, ob koncu leta pa že okoli 18^h30^m.



Jupiter se bo gibal v ozvezdju Bika do druge polovice avgusta, ko bo prešel v ozvezdje Dvojčkov. V začetku leta bo zahajal v zgodnjih jutranjih urah, potem postopoma vedno prej: sredi marca ob 23^h30^m, sredi aprila ob 22^h. V začetku maja bo viden le še v večernih urah, nato bo zaradi bližine Sonca neprimeren za opazovanje. V juliju bo Jupiter jutranji planet: videli ga bomo v jutranjih urah na vzhodnem delu neba. Konec avgusta bo viden vso drugo polovico noči. Vzhajal bo vedno bolj zgodaj, sredi oktobra ob 21^h, sredi novembra ob 19^h. V decembru bo Jupiter viden vso noč.



Saturn bo v začetku leta viden v ozvezdju Raka vso noč. V tem času bo navidezna odprtina Saturnovega kolobarja največja. Videli bomo njegovo južno stran. Saturn bo postopoma zahajal bolj zgodaj, tako bo konec maja viden le še prvo polovico noči. Avgusta ne bo viden. V septembru bo vzhajal v jutranjih urah. Tedaj bo v ozvezdju Leva, kjer se bo zadrževal do konca leta. V novembru ga bomo lahko opazovali v drugi polovici noči. V decembru bo vzhajal v večernih urah.

ZODIAKALNA SVETLOBA

V jasnih pomladnih večerih brez mesečine lahko na zahodnem nebu vidimo iz opazovališča daleč od osvetljenih naselbin stožec medle svetlobe z osnovnico ob horizontu. Podoben pojav lahko opazujemo jeseni v zgodnjih jutranjih urah, pred zoro, na vzhodnem delu neba. Svetlobni stožec nastane zaradi sipanja Sončeve svetlobe na prašnih delcih medplanetne snovi. Ob Soncu je ta svetloba najmočnejša, potem pa pojema po jakosti in obsegu na obe strani vzdolž ekliptike. Ker teče ekliptika čez ozvezdja živalskega kroga ali zodiaka, imenujemo ta pojav zodiakalna svetloba.

Paula Ranzinger

RAČUN Z VENERE

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

V knjigi G. Dahlquist, Å. Björck, N. Anderson: Numerical Methods sem zasledil tole nalogo:

Vesoljska ladja Venera 17 je poslala na Zemljo sliko računa, ki so ga prebivalci Venere vklesali v skalo. Ugotovi, v katerem številskem sistemu računajo prebivalci Venere, če predpostavimo, da račun pomeni seštevanje!

$$\begin{array}{r} x \quad u \\ x \quad u \\ \hline x \quad s \quad x \end{array}$$

Zvonimir Bohte



NIKOLA TESLA – RAZSIPNI GENIJ

1. DEL

Malo je ljudi v zgodovini znanosti in tehnike, ki bi toliko prispevali k splošnemu napredku človeštva kot prav Nikola Tesla. Postavimo ga lahko ob Arhimeda ali Leonarda da Vincija. Res pa je, da je njegovo delo manj znano laiku. Nismo daleč od resnice, če iščemo vzrok temu v značaju velikega rojaka. Verjetno ga je najbolje označil njegov prijatelj in biograf, ki ga je imenoval razsipni genij.

Nikola Tesla se je rodil v noči od 9. na 10. julij 1856 v vasi Smiljan blizu Gospića. Že zgodaj je kazal izredno sposobnost pomnjenja. To naj bi podedoval po materi. Čeprav ni znala ne pisati ne brati, je znala na pamet ves Gorski venec.

Zelo zgodaj je mali Nikola kazal zanimanje za naravo. Pozneje je sam dostikrat pravil, da mu je bila najboljša šola. Iz opazovanja narave so sledili tudi njegovi prvi poskusi. Ko mu še ni bilo pet let, je skušal leteti kot ptič. Njegov polet se je končal s hudim pretresom možganov.

Osnovno šolo je obiskoval v rodni vasi, nižjo realko (danes 5. do 8. razred osnovne šole) pa v Gospiću, kamor se je preselila družina. V mestu se ni mogel vživeti v novo okolje in je zaradi tega prišel v spor s skoraj vso mestno srenjo. Pa se je znašel in si vrnil ugled! Ko so mestni gasilci demonstrirali gasilsko črpalko, ta ni in ni hotela delovati. Sedemletni Nikola se je ponudil, da jo spravi v tek. Opazil je, da je sesalna cev, ki je bila na enem koncu v vodi, popolnoma ploska. Skočil je v vodo, odvezal vozel na cevi in črpalka je delovala. Lastnost, da vidi bistvo problema in hkrati njegovo rešitev, je njegovemu geniju omogočala, da je razumel in videl rešitev tudi

tam, kjer se drugim še sanjalo ni, da bi lahko obstajala.

V šoli je bil ves čas odličen učenec, čeprav se ni mnogo učil. Njegov izredni spomin mu je pomagal, da si je zapomnil učiteljevo razlago v celoti. V Gospiću je prvič pokazal razsipnost svojega genija. Nek njegov sošolec ne bi dobil štipendije, če bi imel v razredu najslabšo oceno iz risanja. Tesla mu je pomagal tako, da je sam imel najslabšo oceno. Zelo rad je imel matematiko. Matematične naloge je reševal tako hitro, da so njegovi učitelji dvomili o njegovi poštenosti. Prepričani so bili, da jih spretno vara. Kmalu pa so spoznali, da je izredno sposoben učenec. Bistvo problema je dojemal že, ko so mu ga postavljali. Hkrati pa je že videl rešitev. Ker je izredno hitro na pamet računal, je takoj lahko povedal rezultat in to so vzroki za njegove uspehe v poznejšem znanstvenem in konstrukcijskem delu. Zelo lahko se je naučil tujih jezikov. To znanje je koristno uporabil, ko je bral knjige iz bogate očetove knjižnice. Oče, ki se je bal za sinov vid, mu je odvzel vse sveče. Enajstletni Nikola pa jih je začel sam vlivati. Zaradi te izredne želje za znanjem in zaradi telesnih naporov, ki si jih je nalagal, je hudo zbolel.



Višjo realko je nadaljeval v Karlovcu in jo je skupaj z zrelostnim izpitom končal v treh letih. V tem času se je odločil, da bo postal elektrotehnik. Po vrnitvi v Gospić je zbolel za kolero in sam je pravil, da je ozdravel le zaradi tega, ker mu

je oče dovolil študirati elektrotehniko.

Z devetnajstimi leti je začel v Gradcu študirati. Študija se je lotil s tako zagnanostjo, da je dekan fakultete celo pisal njegovemu očetu, da sina vzame iz šole, ker študij škodljivo vpliva na njegovo zdravje. Očetu je moral obljubiti, da si bo privoščil tudi razvedrilo. Začel je igrati karte. Zaradi sposobnosti kombinatornega mišljenja je večinoma dobival. Denar pa je na koncu vedno vračal tistim, ki so ga izgubili.

Ko je bil drugo leto v Grazu, so tja dobili dinamostroj za enosmerno napetost. Takrat nekako se je začel ukvarjati s prvim kasnejšim velikim odkritjem - elektromotorjem za izmenično napetost. Zaradi preobremenjenosti z delom je spet hudo zbolel. Bolehal je za neko vrsto hipersenzibilnosti čutil. Bolezen ga je toliko ovirala, da je princip elektromotorja za izmenično napetost spoznal šele l. 1882. Svoje odkritje je sam pozneje opisal kot vizijo. Na vizije se je mnogokrat zgovarjal tudi kasneje, vendar bi temu lahko rekli drugače. Tesla je imel nekaj, kar večina ljudi nima. Imel je izredno fantazijo in bil je skrajno pogumen. Ti lastnosti pa sta nujni pri raziskavah na popolnoma neznanih področjih. Ker je hitro razumel bistvo problema, je lahko našel rešitve tam, kjer jih drugi zaradi pomanjkanja ene ali druge lastnosti sploh ne bi iskali. Večinoma tudi ni risal skic za svoje naprave, ampak je vse podatke hranil v spominu in jih je tako praktično imel ves čas na razpolago. Imel je tudi navado, da sploh ni delal modelov, ampak je že prvi izdelek bil kar prototip. Sam je to imenoval vizijo. V resnici pa gre tu za znanstveno metodo, ki je večina ljudi sploh ni sposobna posnemati, kaj šele uporabljati na novih področjih.

Ideja, ki jo je takrat Tesla našel s svojo metodo, se nam danes zdi preprosta, takrat pa je bilo potrebno veliko razmišljanja in jasnovidnosti. Izumil je asinhronski električni motor. Hkrati je spoznal, kako lahko napravimo vrteče magnetno polje. Skušal je prepričati evropske elektrotehnike o prednostih svojega motorja, pa pri njih ni našel razumevanja.

Brez sredstev in le s priporočilom za Thomasa Edisona je odšel v ZDA. Ta je hitro spoznal Tesline sposobnosti, kljub temu pa mu ni hotel pomagati. Edison je prihodnost videl le v enosmernem toku. Malo več razumevanja je imel za njegovo delo G. Westinghouse, ki je od Tesle odkupil avtorske pravice za izde-

lavo izmeničnih dinamostrojov in jih začel izdelovati v za tiste čase velikih serijah. Vendar je družba Westinghouse Teslo zapletla v njemu nerazumljive finančne špekulacije, zaradi tega jo je zapustil in se posvetil raziskovalnemu delu v lastnem laboratoriju.

Brez pridržka lahko rečemo, da je Nikola Tesla utemeljitelj druge znanstveno tehnične revolucije.

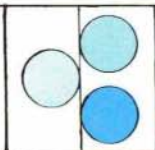
Tomaž Fortuna

RAČUNSKA KRIZANKA - rešitev iz P-III/4, str. 211

¹ 0	4	² 3	1	1	6	2	³ 3	5	⁴ 5
0		5					2		0
⁵ 0	3	4	⁶ 1			⁷ 1	0	4	5
1		⁸ 2	0	1	0	2	1		6
0			3			0			4
1			2			2			2
1		⁹ 0	3	2	4	1	¹⁰ 2		7
¹¹ 1	2	1	0			¹² 3	1	0	2
0		5					0		1
¹³ 1	3	4	5	2	4	2	1	0	3

Zvonimir Bohte

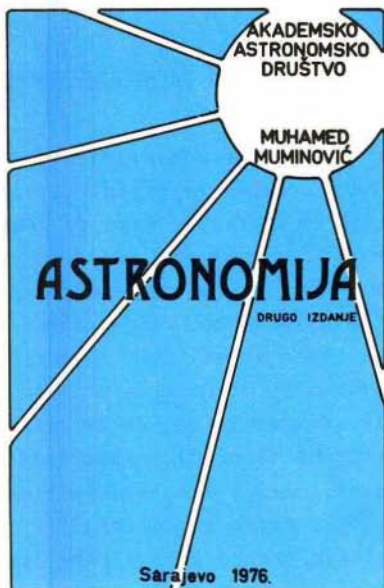
NOVE KNJIGE



Akademsko astronomsko društvo iz Sarajeva je izdalo knjigo Muhameda Muminovića *Astronomija*. Muhamed Muminović, ki je upravnik sarajevskega observatorija Čolina Kapa, je knjigo namenil amaterskim astronomom, pa tudi širši javnosti. Knjiga zato obsega poglavja iz klasične astronomije s koristnimi napotki za opazovalno delo pa tudi poglavja iz moderne astronomije, ki naj razširijo bralčevo obzorje. Poglavja so: Sferna astronomija, Sončni sistem, Astronomski instrumenti in metode astronomskega raziskovanja, Astronomija zvezd, Astronomija Galaksije, Astronomija drugih galaksij in Radijska astronomija.

Knjiga nudi zanimivo in prijetno branje in je zelo dober uvod za vsakega, ki se želi seznaniti s to zanimivo znanostjo. Zahtevnejšega bralca pa velja morda opozoriti, da so nekateri odstavki zaradi razumljivosti močno poenostavljeni. Tak bralec pa naj ob branju knjige včasih pobrskaa še po periodičnih astronomskih revijah. Cena 80.-din.

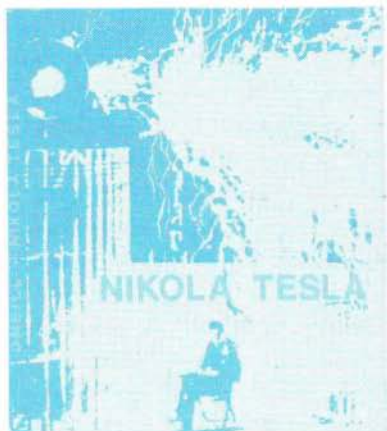
Andrej Čadež

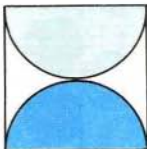


John F. O'Neill, Nikola Tesla, priredil dr. Lavo Čermelj, Državna založba Slovenije 1976, 242 str., cena 165.-din

Ob 120-letnici rojstva Nikole Tesle je dr. Lavo Čermelj pripravil drugo razširjeno izdajo knjige, ki je prvič izšla že pred petindvajsetimi leti. V tej izdaji je dopolnjeno predvsem poglavje, ki govori o Teslovem bivanju v Mariboru v začetku leta 1879. Knjiga vsebuje naslednja poglavja: Svetloba in energija, Sreča in slava, Notranje vibracije, Samorasli nadčlovek, Večerna zarja ter Tesla kot Srb in Jugoslovan. Med tekstom je več fotografij iz življenja in dela Nikole Tesle.

Ciril Velkovrh





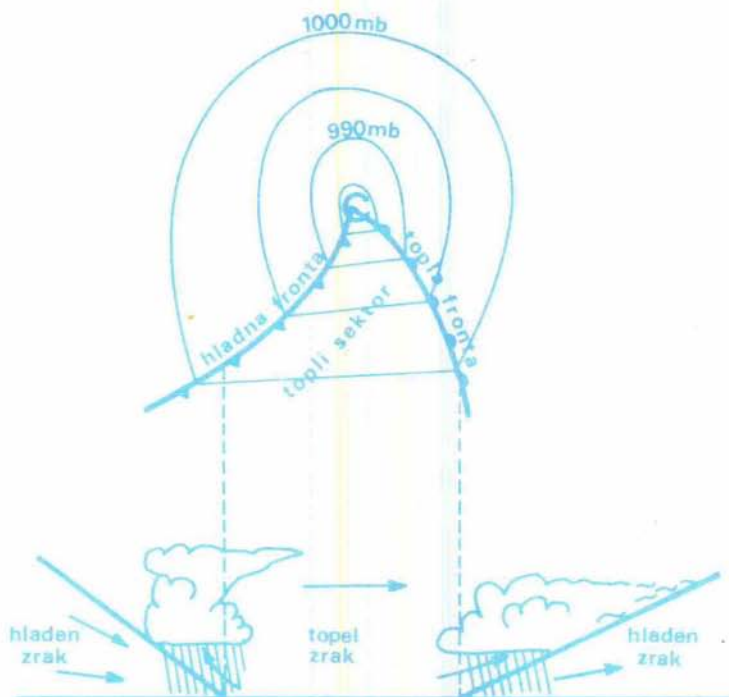
ZAKAJ VREMENSKE NAPOVEDI NISO VEDNO PRAVILNE?

Vprašanje v naslovu ni mišljeno kot pikra na račun meteorologov, ampak je čisto resno. Če hočemo odgovoriti nanj, moramo najprej spoznati, kako se vreme sploh razvija, kako je moč ta razvoj spremljati in kako ga napovedovati.

Predstavo o tem, kaj je vreme, imamo vsi. Če je sončno in toplo, pravimo, da je vreme lepo, kadar nas moči dež, se jezimo na slabo vreme. Toda vreme, za katerega navadno pravimo, da je slabo, je morda prav odlično za kmeta, čigar polja so žejna vode. Vidimo torej, da je treba stanje vremena bolje opisati. To storimo tako, da povemo kakšni so *vremenski parametri*: *oblačnost*, *veter*, *temperatura zraka*, *padavine*, posebni pojavi kot so blisk, megla in podobno. Pa tudi *zračni tlak*. Ker je v vremenoslovju precej bolj v rabi izraz *zračni pritisk*, ga uporabljajmo tudi mi. Pritisk za naše dožemanje vremena ni pomemben, ker njegovih sprememb, kljub močno razširjenemu nasprotnemu mnenju, naša čutila ne zaznavajo. Vendar pa so meteorologi ugotovili, da dosti pove o dogajanjih v ozračju *polje pritiska*, to je potek zračnega pritiska nad zemeljskim površjem. Vetrovi na višinah, ki presegajo kak kilometer in kjer vpliv trenja ob tla pomenja, pihajo namreč *vzporedno z izobarami*, to je s črtami, ki povezujejo kraje, v katerih je na isti nadmorski višini pritisk enak. Polje zračnega pritiska je torej podobno polju zračnih tokov. Skupaj z zračnimi gmotami prenašajo tokovi tudi njihove lastnosti: vlažnost, notranjo energijo, pa tudi bolj zapletene lastnosti, kot je npr. težnjo po ustvarjanju *front* med različnimi zračnimi gmotami ali težnjo po vrtinčenju. Ker take lastnosti ozračja odločajo o vremenskem stanju, jih želimo spremljati. In ker se prenašajo skupaj z zračnimi gmotami v skladu s tokovnim (ali pritiskovim) poljem, je to torej vzrok, da je v zvezi z vremenom toliko govora o zračnem pritisku.

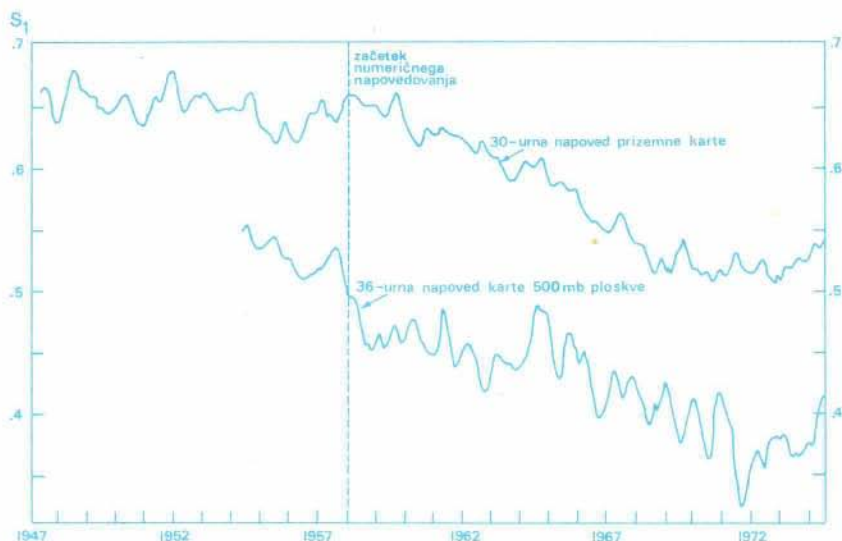
Lastnosti ozračja pa se ne le premeščajo, temveč se tudi spreminjajo. Tako se npr. hladna zračna gmota lahko ogreje, ko pride iznad oceana nad toplejše kopno. Naloga vremenske napovedi je napovedati vse to premeščanje in preoblikovanje tistih lastnosti ozračja, ki določajo vreme.

Še do nedavnega so se *sinoptiki*, to so tisti meteorologi, ki spremljajo razvoj vremena in ga napovedujejo, pri svojem delu lahko naslonili le na osnovna spoznanja o vremenskih pojavih ter na svoje izkušnje. Na *prizemnih vremenskih kartah* so v polju zračnega pritiska spremljali premeščanje in razvoj *ciklonov*



Sl. 1.: V ciklonu so obsežna dviganja zraka posledica tudi tega, da se ob topli fronti napredujoči topli zrak nariva na hladnejšega, ob hladni fronti pa težji hladni zrak kot klin prodira pod toplega in ga dviga. Ob dviganju se zrak ohlaja, vlaga v njem se zato kondenzira, nastanejo oblaki in lahko tudi padavine.

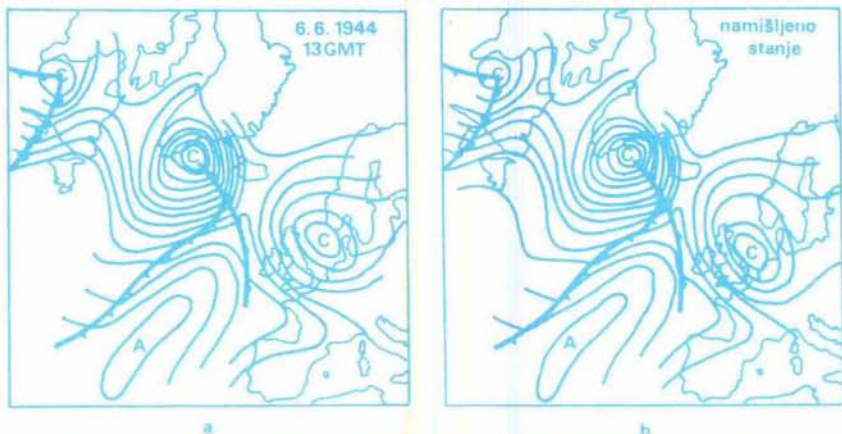
(področij z nizkim zračnim pritiskom in kroženjem zraka, nasprotnim kroženju kazalcev na uri) in *anticeiklonov* (področij z visokim zračnim pritiskom in kroženjem v smeri kazalcev na uri). Na takih vremenskih kartah, ki jih rišejo vsakih šest ur, je moč videti, da se proti središču ciklona zajeda jezik toplega zraka, ki je s frontama ločen od hladnejšega zraka, ki pri tleh v ciklonu prevladuje. Tako na topli fronti napredujoči toplejši zrak odriva hladnega, na hladni fronti pa napredujoči hladni zrak izriva toplega (glej sliko 1). Ob frontah se na stiku dveh zračnih mas z različnima temperaturama zrak meša, se dviga in se ob dviganju ohlaja, zato pride do vtekočinjanja vodne pare in nastanka oblakov. Prav vtekočinjanje pa pomeni pomemben prispevek k razpoložljivi energiji, saj je množina toplote, ki jo pri tem odda voda, zelo velika. Dogajanja ob frontah so torej



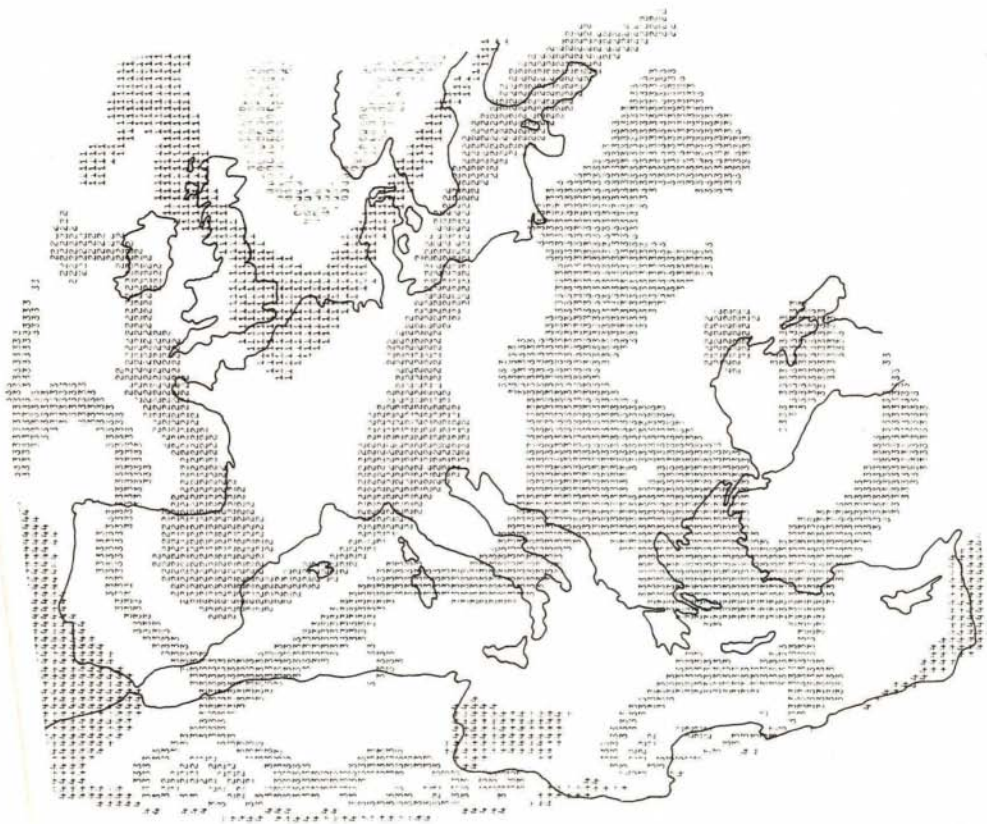
Sl. 2.: Ocena uspešnosti napovedi vremenskih kart je lahko definirana tudi takole $S_1 = 100(\sum n_g / \sum G_i)$, kjer je n_g napaka v napovedi gradienta pritiska, G_i pa napovedani ali dejanski gradient pritiska, tisti, ki je pač večji. Sumiranje se nanaša na vse točke v mreži, ki jo položimo nad obravnavano področje in na vse dni v mesecu. Ta ocena kaže, da se je kvaliteta napovedi precej izboljšala, odkar uporabljajo računalnike za napovedovanje. Kaj pa je zadnja leta? Ali je vreme tako neobičajno, da se napovedi slabšajo? Saj bi le težko mogli trditi, da se je poslabšala metoda napovedovanja. (Po National Meteorological Center, Washington, ZDA).

lahko burna in padavine lahko zelo izdatne. Zato je zasledovanje premeščanja in razvoja ciklonov in front eno najvažnejših opravil pri napovedovanju vremena. Seveda je za popolno razumevanje dogajanj v ozračju treba poznati tudi polje pritiska, temperature, vlage in vetra v višinah. Zato meteorologi uporabljajo tudi višinske vremenske karte, na katerih pa je videti, da v višinah tok zraka ni sklenjen v vrtince (ciklone in anticiklone), temveč je valovit.

Danes so sinoptikom v veliko pomoč računalniki. Lahko rečemo, da marsikdo med meteorologi, ki se danes ukvarjajo z *numeričnim napovedovanjem vremena*, misli pri tem predvsem na uspešno računanje vremenskih kart za dan, dva ali več dni vnaprej. Tako računanje je že povsem vsakdanja stvar. Reševanje zapletenega sistema enačb, ki opisujejo dogajanja v ozračju, je že nadomestilo druge načine napovedovanja vremenskih kart za prihodnje stanje ozračja. Čeprav je to ena najobsežnejših nalog, ki jih danes opravljajo računalniki, jo opravljajo prav dobro (glej sliko 2). Toda tudi tu so meje. Načelno ni mogoče napove-



Sl. 3.: Slika a je tako podobna sliki b, da bi bil take podobnosti med napovedano vremensko karto in karto dejanskega vremena vsak sinoptik vesel. Slika a kaže vremensko stanje 6. jun. 1944, ko se je, kljub težavam z vremenom, z uspehom začelo izkrcanje v Normandiji. Če pa bi bilo stanje tako, kot ga kaže slika b, s ciklonom nekoliko južneje, prav nad Normandijo, bi izkrcanje ne bilo mogoče. Sedaj pa si zamislimo obratno možnost, da bi bila napoved taka kot po sliki a, po tej napovedi bi se štab odločil za začetek izkrcanja, vreme bi bilo pa v resnici slabše, tako kot ustreza sliki b. Kakšen vojaški polom bi morda to lahko bil! Sama napovedana vremenska karta torej še ne pomeni dobre napovedi, pa čeprav je lahko dokaj dobra. (Po G.D. Robinsonu, QJRM 93, 409-418, 1967).



Sl. 4.: Primer s pomočjo računalnika dobljene višinske vremenske karte. Meje potiskanih področij predstavljajo izohipse ploskve, na kateri je pritisk 500 mb.

Na naslovni strani si oglejte
Sl. 5.: Izsek iz prizemne vremenske karte (3.9.1976 ob 06⁰⁰GTM), z anticyklonom nad Atlantikom in ciklonoma nad Baltikom in severnim Sredozemljem. Do 15⁰⁰GTM se je tega dne s fronto od severa razširilo padavinsko območje (zeleno šrafirano) že preko vse Slovenije. Ob taki vremenski situaciji, ko se iz vala na hladni fronti razvije sekundarni, tako imenovani genovski ciklon, je pri nas navadno veliko padavin.

dati prihodnje vremenske karte brez napak, saj tudi začetnega stanja ni mogoče opisati dovolj podrobno. Iz grobega opisa začetnega stanja nastale napake se med računom povečujejo. Torej je zgolj z znanstvenega stališča velik uspeh, če se napovedana in dejanska karta razlikujeta le toliko, kot tisti dve na sliki 3. In vendarle, kaj vse lahko pomenijo te čeprav tako majhne razlike v napovedi!

Zelo je treba namreč poudariti, da vremenska karta, četudi je precej pravilno napovedana, še ne pomeni vedno tudi dobre napovedi vremena. Še posebej velja to za naše kraje, kjer Alpe s svojimi, skoraj do tretjine troposfere segajočimi grebeni, močno vplivajo na potek dogajanj v tej spodnji plasti ozračja, v kateri se v glavnem odvija vreme. Kar precej izkušenj mora imeti sinoptik, da lahko ob upoštevanju vseh razpoložljivih podatkov oceni, kako se bo kakšno splošno vremensko stanje odrazilo npr. v Novem mestu, kako v Sežani in kako v Ptujju. Pri tem si pomaga z napovedano vremensko karto, s podatki o trenutnem vremenskem stanju in seveda s primerjavo z vsemi vremenskimi dogajanjmi, ki so se mu po dolgoletnem delu nakopičila v spominu. Pri takem delu noben stroj ne more nadomestiti človeka. Po drugi strani pa je res, da je prav tu vzrok za marsikatero od napačnih napovedi, saj je človek zmotljiv.

Vremenske napovedi torej niso vedno pravilne prvič zato, ker niso vedno povsem natančno izračunane vremenske karte za bodoče stanje vremena. Tu so prepreke načelne narave, ki jim tudi v prihodnje ne bo lahko priti do živega. Drugi vzrok za napačne napovedi pa je ta, da tudi ob dobro napovedani vremenski karti ni moč povsem zanesljivo reči, kakšno bo vreme. Saj npr. ob neki hladni fronti pade precej padavin, ob drugi, na videz prav taki, ob prav takem vremenskem stanju, pa ne pade niti kaplja. Vreme je tudi prostorsko zelo spremenljivo, še posebej pri nas, ko se na stiku gorskega, panonskega in sredozemskega sveta mešajo najrazličnejši vplivi. Nekatere zakonitosti vremena že poznamo, druge pa so še nejasne. Vremenski stroj je namreč občutljiv tudi za nadrobnejša dogajanja. Zato ne bodimo preslabe volje, če nas v nedeljo zjutraj zbudi dež, napovedovali pa so sončno vreme.

Jože Rakovec



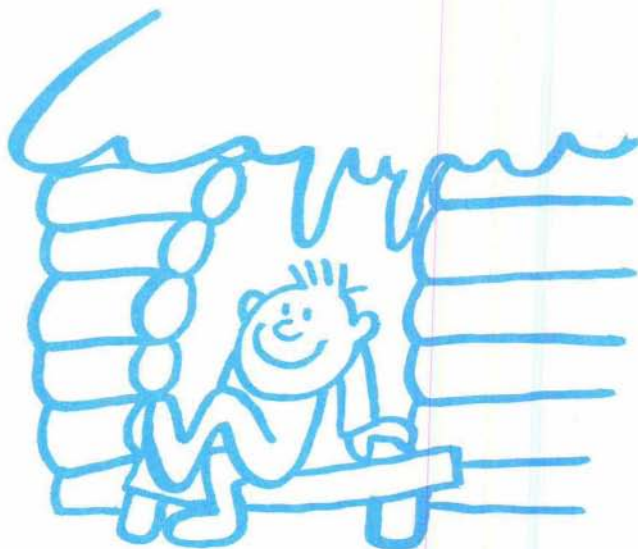
FIZIKALNO RAZMIŠLJANJE

NA REČNEM DNU je del vodovodne cevi. Po reki vlečejo vlačilci težko otovorjeno barko. Ali se tlak vode ob cevi kaj spremeni, ko pluje barka nad njo?



Tlak vode ob cevi je odvisen le od višine rečne gladine, zato se ne spremeni, ko pluje barka preko cevi.

KADAR PRIDE POZIMI do nenadnih otoplitev, se na stenah opečnatih zgradb pojavi slana, na stenah lesenih hiš pa je običajno ni. Pojasni ta pojav!



Les ima manjšo specifično toploto kot opeka, zato se pri nenadnih otoplitvah lesene stene hiš hitreje ogrejejo, opečnati zidovi pa so še dolgo ohlajeni pod ledišče. Vlaga iz okoliškega zraka se kondenzira na njih.

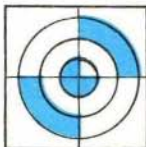
POLETI, ko pritisne vročina, se vsi radi kopamo. Ko se odpravljamo v vodo, se nam zdi mrzla. Ko pridemo iz vode, pa nas zebe na vročem zraku. Zakaj?



Voda je v vročih dneh znatno hladnejša od zraka v okolici, zato nas zebe, ko se poženemo vanjo. Ko pridemo iz vode, so na našem telesu številne kapljice, ki začno v suhem zraku naglo izhlapevati. Pri tem odvzemajo telesu toploto, tako da nas prične zebsti.

Dušan Repovš

Ilustriral Božo Kos



NALOGE

NALOGA O ŠAHOVSKI DESKI *

Razdelimo šahovsko desko razsežnosti 8×8 na p pravokotnikov, ki nimajo skupnih notranjih točk in se pri tem držimo naslednjih pravil:

- a) vsak pravokotnik je sestavljen iz določenega števila polj, in sicer ima *enako* število belih in črnih;
- b) če je a_i število *belih* polj v i -tem pravokotniku, potem je
- $$a_1 < a_2 < \dots < a_p$$

Poišči največji p , pri katerem je taka razstavitev še mogoča. Zanj poišči vse mogoče končne skupine takih števil $a_1, a_2, \dots, a_p$.

Rešitev:

Iz pogojev naloge sledi, da je $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_p \geq p$, zato je vsota $a_1 + a_2 + \dots + a_p \geq 1 + 2 + \dots + p = p(p+1)/2$. Vemo pa, da je $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 32$, saj ima deska 64 polj. Odtod dobimo pogoj za število p

$$p(p+1)/2 \leq 32$$

ki nam pove, da mora biti $p \leq 7$.

Vse možne razstavitve števila 32 na vsoto sedmih različnih števil so:

$$32 = 1+2+3+4+5+6+11 \quad (1)$$

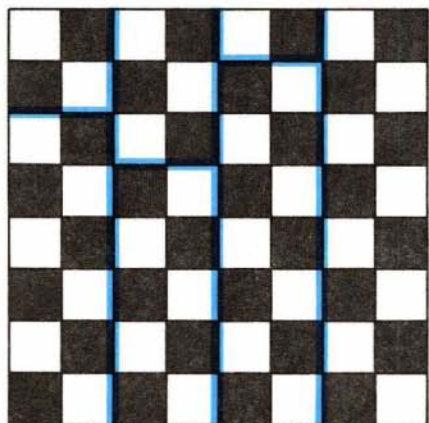
$$32 = 1+2+3+5+6+7+8 \quad (2)$$

$$32 = 1+2+3+4+5+7+10 \quad (3)$$

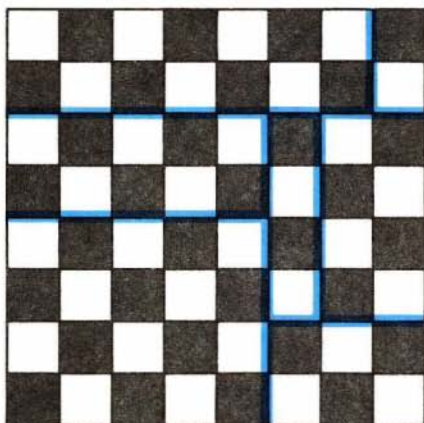
$$32 = 1+2+3+4+5+8+9 \quad (4)$$

$$32 = 1+2+3+4+6+7+9 \quad (5)$$

Na naši deski ni moč najti pravokotnika, ki bi obsegal natanko 22 polj, zato razstavitev (1) ni možna. Vse ostale štiri razstavitve pa so možne in na slikah 1-4 si lahko ogledate primer za vsako (na sliki 1 primer za razstavitev (2), na sliki 2 za (3), itd.).



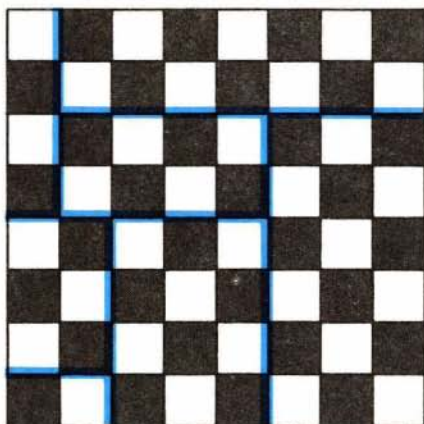
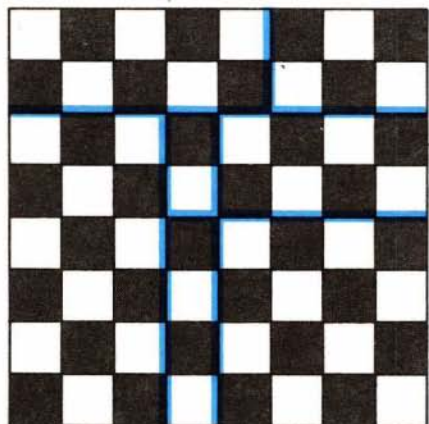
S1. 1



S1. 2

S1. 3

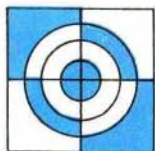
S1. 4



Dušan Repovš

NALOGE

* 16. mednarodna matematična olimpiada srednješolcev, Erfurt, NDR, 1974



REŠITVE NALOG

ČUDNI POTNIK - rešitev s str. 23, P IV/1

Naj bo R polmer Zemlje, k pa višina človeka. Iskana dolžina je enaka razliki poti, ki jo naredi teme in ki jo naredijo stolpa

$$2\pi(R + k) - 2\pi R = 2\pi k$$

Dolžina je neodvisna od polmera, zato je pri vseh okroglih telesih enaka.

DVA KVADRATA - rešitev s str. 14, P IV/1

- a) Kvadrat leži nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika s kateta a in b .
b) Kvadrat leži nad preostalo kateto pravokotnega trikotnika s hipotenuzo a in kateto b ($a^2 > b^2$); oziroma nad hipotenuzo b in kateto a ($b^2 > a^2$).

Danijež Bezek

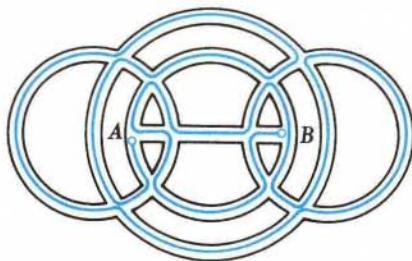
NALOGE - rešitev iz P 4(1976/77)1, str. 48

1. Prvi igralec mora postavljati svojo damo samo na polja, ki so označena s klicaji (sl. 1), kar more vedno napraviti (ta polja so v sodih vrsticah in po stolpcih od leve navzgor).
2. $403 + 403 + 403 = 1209$
 $(2 + 2) : 2 = 2$

Franci Oblak

3. Pot začnemo v točki A in jo nato končamo v točki B , lahko je ravno obratno.

Matej Rupel



DOKAŽI... rešitev s str. 115. Spomnimo se transformacij med dolžinami stranic trikotnika (a,b,c) in novimi količinami (u,v,z) , ki smo jih srečali v članku: "Kako dobimo nekatere celoštevilске trikotnike".

$$a = u + z, b = v + z, c = u + v + z$$

kjer smo namesto Pitagorovega izreka dobili enačbo

$$uv = z^2/2$$

Pitagorejsko trojico smo dobili z izbiro poljubnega sodega števila za z , u in v pa sta bila delitelja števila $z^2/2$.

Vzemimo, da je $a = n$ in naj bo $n \geq 3$. Imamo dve možnosti: n je lahko liho ali pa sodo število.

Če je n liho število, je $n - 1$ sodo in izberimo $z = n - 1$. Iz zgornjih zvez sledi

$$u = 1, v = z^2/2u = (n - 1)^2/2$$

in pitagorejsko trojico brž izračunamo

$$a = n, b = (n^2 - 1)/2, c = (n^2 + 1)/2$$

Če pa je n sodo število, je tako tudi $n - 2$ in ga lahko izberemo za z . Za ostali količini dobimo

$$u = n - (n - 2) = 2, v = z^2/2u = (n - 2)^2/4$$

in po kratkem računu dobimo iskano trojico

$$a = n, b = (n^2 - 4)/4, c = (n^2 + 4)/4$$

Sam se prepričaj, da naloga ni rešljiva za $n = 1$ ali $n = 2$!

Edvard Kramar

PRAŠTEVILO? - rešitev iz P IV/1 str. 7

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

Prvi faktor je za vsako naravno število n večji od 1, drugi faktor pa je pri $n = 1$ enak 1 in večji za $n > 1$. Zato v primeru, ko $n \neq 1$, $n^4 + 4$ ne more biti praštevilo; za $n = 1$ ima izraz seveda vrednost 5, t.j. praštevilo.

Joso Vukman

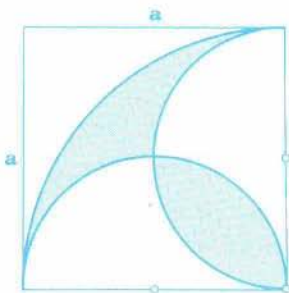
Prebivalci Venere uporabljajo številski sistem z osnovo 3.
Račun je

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Zvonimir Bohte

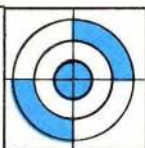
NALOGE Z OSNOVNOŠOLSKEGA TEKMOVANJA V BIH

1. Dokaži, da vsota poljubnih petih zaporednih naravnih števil ne more biti praštevilo!
2. Če sta kraka trapeza drug na drugega pravokotna, dokaži, da je vsota kvadratov njegovih diagonal enaka vsoti kvadratov obeh osnovnic tega trapeza!
3. V paralelogramu $ABCD$ je stranica $\overline{AB}$ dvakrat daljša od stranice $\overline{BC}$. Naj bo točka M v razpolovišču stranice $\overline{AB}$. Dokaži, da je daljica $\overline{CM}$ pravokotna na daljici $\overline{DM}$!
4. Razstavi na prafaktorje izraz:
 $(x - 0,1)^2 - (0,2x + 1)^2$! Določi nato vse vrednosti števila x , za katere je ta izraz enak 0 !
5. Izračunaj ploščino osenčenega dela kvadrata ($a = 6\text{ cm}$) !
6. Dokaži, da je produkt treh zaporednih naravnih števil, povečan za drugo število, enak kubu drugega števila!
7. Dan je tak trikotnik ABC , da je $AB > BC$ in točka D na daljici $\overline{AB}$ tako, da je $BC = BD$. Dokaži, da $\overline{DC}$ deli kot pri C na dva dela, od katerih je eden enak polovični vsoti, drugi pa polovični razliki notranjih kotov pri C in pri A tega trikotnika!
8. V treh posodah imamo vodo. Če $1/2$ vode iz prve posode prelijemo v drugo, nato $1/3$ tako dobljene količine vode prelijemo iz druge posode v tretjo in končno $1/4$ vode iz tako dobljene vsebine tretje posode prelijemo v prvo posodo, dobimo v vsaki posodi po 6 litrov vode. Koliko vode je bilo prvotno v vsaki posodi?
9. Dana je tristrana enakorobna piramida z robom $a = 4\sqrt{2}$. Razpolovišča robov te piramide so oglišča novega telesa. Izračunaj a) površino, b) prostornino tega novega telesa!
10. Dana je premica z enačbo $3x + 4y = 10$. Določi:
 a) Dolžino odseka $\overline{MN}$, ki ga na premici določajo sečišča s koordinatnima osema!
 b) Oddaljenost premice od koordinatnega izhodišča (O)!
 c) Prostornino telesa, ki nastane pri vrtenju trikotnika MNO okrog daljice $\overline{MN}$!



Bogomila Kolenko

NALOGE-TEKMOVANJA



TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Na republiškem tekmovanju iz matematike, ki je bilo dne 29. maja 1976 v Celju, Kopru, Ljubljani, Mariboru in Novi Gorici, je sodelovalo 231 učencev osmih razredov osnovnih šol Slovenije. Zlato Vegovo priznanje si je pridobilo 59 učencev, ki so dosegli najmanj 10 točk od 25 možnih.

Osem najboljših učencev je dobilo posebne nagrade:

1. PIBERNIK MACA, OŠ P. Voranc, Ljubljana, I. nagrada, 2. CILENŠEK ALJA, OŠ V. Šmuc, Izola, I: nagrada, 3. RESMAN BOJAN, OŠ Koroška Bela, II. nagrada, 4. KOGLER ROBERT, OŠ Janko Padežnik, Maribor, II. nagrada, 5. CERAR CIRIL, OŠ Marjan Nemec, Radeče, II. nagrada, 6. GORŠIČ MARKO, OŠ Majda Vrhovnik, Ljubljana, III. nagrada, 7. ZWITTER TOMAŽ, OŠ P. Voranc, Ljubljana, III. nagrada, 8. PRAVDIČ MIRAN, OŠ Neznanih talcev, Dravograd, III. nagrada.

Zlato Vegovo priznanje so prejeli še:

LONČAR MAJDA, OŠ Marjan Nemec, Radeče, MAJARON BORIS, OŠ Fr. Rozman-Stane, Maribor, HUDOKLIN IZTOK, OŠ J. Moškrič, Ljubljana, ROMIH MAKŠ, OŠ T. Tomšič, Ljubljana, TAVČAR ANDREJ, OŠ P. Voranc, Ljubljana, BAHOVEC IGOR, OŠ A. Kebe, Ljubljana, REGORŠEK MARJETA, OŠ A. Aškerc, Šmarje pri J., MATOH LEOPOLD, OŠ Grm, Novo mesto, DOLENC MAJA, OŠ P. Voranc, Ljubljana, CENCIČ MAGDA, OŠ M. Štrukelj, Nova Gorica, ŽURA MARJAN, OŠ Fr. Prešeren, Kranj, KREJAN ALENA, OŠ P. Voranc, Ljubljana, VIDIC IZTOK, OŠ P. Voranc, Ljubljana, RIHAR BOŠTJAN, OŠ P. Voranc, Ljubljana, ŠKERLJ DUŠKO, Cerknica, FILEJ BORIS, OŠ P. Voranc, Maribor, KOBAL DAMJAN, OŠ B. Kidrič, Ajdovščina, ZIMIC NIKOLAJ, OŠ A. Velušček, Kanal, VERBOVŠEK TONE, OŠ Fr. Marn, Vodice, CESTNIK BOJAN, Borovnica, HVALA BOJAN, OŠ Spomenik NOB, Cerkno, ŽNIDARŠIČ JONAS, OŠ P. Voranc, Ljubljana, SITAR DUŠAN, OŠ Fran Albreht, Kamnik, KOS MIHA, OŠ Prule, Ljubljana, LAMPREHT CVETKA, OŠ Valentin Vodnik, Ljubljana, PADEŽNIK JANA, OŠ Bratov Polančič, Maribor, SARKA DEJAN, OŠ P. Voranc, Ljubljana, STRNIŠA VIDA, OŠ Marjan Nemec, Radeče, GAŠPARIČ JOŽE, OŠ I. Spolenjak, Ptuj, OŠTERC EMIL, OŠ Križevci pri Ljutomeru, PIŠKUR VERONIKA, OŠ Peter Kavčič, Škofja Loka, KRANJC VILMA, OŠ Zvonko Runko, Ljubljana, TUŠAR MARJAN, OŠ Hinko Šmrekar, Ljubljana, PAVŠEK VOJKO, OŠ Ljubljana-Polje, GANTAR ZMAGO, OŠ Jože Mihevc, Idrija, JURKOVNIK MARIJA, OŠ Biba Rock, Šoštanj, KUNIČ ROMAN, OŠ Miran Jarc, Črnomelj, VUGA MATJAŽ, OŠ M. Štrukelj, Nova Gorica, SAJOVIC ALENKA, OŠ Fr. Rozman-Stane, Maribor, PAJNTAR KARIN, OŠ Fr. Prešeren, Kranj, ZORE FRANCI, OŠ Ljubljana-Vič, ŠUSTERŠIČ BRANKO, OŠ Bratov Ribarjev, Brežice, KORELC DUŠAN, OŠ Kette in Murn, Ljubljana, BOGATAJ SAMO, OŠ Jože Potrč, Ljubljana, KOŠNIK MITJA, OŠ M. Vrhovnik, Ljubljana, FERČAJ DARJA, OŠ Miran Jarc, Ljubljana, MEZGOLITZ MAJA, OŠ Valentin Vodnik, Ljubljana, DOLENŠEK MARJAN, OŠ J. Mevželj, Mokronog, COLARIČ SMILJANA, OŠ Kostonjeva, HORVATIČ MARJAN, OŠ Savo Kladnik, Sevnica, TRČEK MIRKO, OŠ Jože Mihevc, Idrija.

N A L O G E:

1. Obeska tehtata skupaj m gramov. Prvi obesek vsebuje p % zlata, drugi pa q %. V prvem obesku je n gramov zlata več kot v drugem. Koliko tehta vsak obesek?
2. Okrog ekvatorja je koncentrično postavljen obroč, ki je za 1m daljši od ekvatorja. Ali se lahko miš splazi pod tem obročem? (Vzemi, da je Zemlja popolna krogla!)
3. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v C so dolžine težiščnic t_a , t_b in t_c . Dokaži, da velja enačba:

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$$
4. Iz kvadrata z diagonalo $(1 + \sqrt{3})$ dm izrežemo mrežo največje možne enakorobne štiristranične piramide. Izračunaj površino in prostornino te piramide!
5. Višina pokončnega stožca je v dm. Dve med seboj pravokotni stranici stožca razdelita rob njegove osnovne ploskve na dva loka. Dolžini lokov sta v razmerju 1 : 2. Izračunaj prostornino stožca!

Pavle Zajc

KOLEDAR VII. TEKMOVANJA ZA VEGOVA PRIZNANJA V ŠOLSKEM LETU 1976/1977

- do 7. maja 1977 šolska tekmovanja
bronasta Vegova priznanja
- 14. maja 1977 občinska tekmovanja
srebrna Vegova priznanja
- 28. maja 1977 republiško tekmovanje
osmošolcev
zlata Vegova priznanja

Pavle Zajc



OBVESTILO O TEKMOVANJIH IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Februarja 1977 bomo poslali na vse šole razpis tekmovanj. Predtekmovanje bo v soboto, 12. marca 1977. Naloge bo sestavila tekmovalna komisija za republiško tekmovanje mladih matematikov in jih razmnožene poslala na vse prijavljene šole. Profesorji bodo sami ocenili izdelke in poslali imena dijakov, ki jih predlagajo za republiško tekmovanje. Republiško tekmovanje bo v soboto, 9. aprila 1977 ob 10^h v Novem mestu.

Letos bo v Sloveniji tudi zvezno tekmovanje iz matematike in to v nedeljo, 24. aprila 1977 v Velenju.

Mirko Dobovišek

Letos je bilo tekmovanje v Kumrovcu, rojstnem kraju predsednika Tita. Matematički list za učnike osnovne šole (Beograd), ki je že več let glavni organizator teh tekmovanj, je letos naprosil Društvo matematikov, fizikov in astronomov iz republike Hrvatske, da je prevzelo tehnično plat organizacije tekmovanja. Žal tudi letos nekatere republike niso poslale svojih tekmovalcev (Črna gora, Makedonija). Posebej so tekmovali učenci sedmega in posebej učenci osmega razreda. Obojih je bilo po 35, od tega v sedmem razredu trije Slovenci in v osmem sedem Slovencev. Komisija se je sestala v soboto, 5. junija v Stubiških toplicah in izbrala naslednje naloge:

VII. RAZRED

1. Morska voda vsebuje 5% soli. Koliko kg destilirane vode je treba zmešati s 40 kg morske vode, da bo dobljena zmes vsebovala 2% soli?
2. Poišči tak najmanjši ulomek, s katerim je treba deliti ulomke $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{35}$ in $\frac{20}{21}$, da bo količnik v vseh treh primerih naravno število.
3. Krožnici k_1 in k_2 se dotikata zunaj v točki A . Premica nosilka točke A seče krožnico k_1 še v točki M in krožnico k_2 še v točki N . Dokaži, da sta tangenti t_1 in t_2 na krožnici k_1 in k_2 z dotikalisci M in N med seboj paralelni.
4. Dokaži, da imajo vsi kvadri, katerih površina (v cm^2) in prostornina (v cm^3) je izražena z istim številom, isto vsoto recipročnih vrednosti dolžin treh robov, ki se stikajo v istem oglišču.
5. Izbrano je katerokoli število z 2000 številskami (ciframi), ki je deljivo z 9. Vsoto cifer tega števila označimo z a , vsoto cifer števila a z b , vsoto cifer števila b pa s c . Določi ta c .

VIII. RAZRED

1. Vsoto kateregakoli naravnega števila n s štirikratnikom njegove recipročne vrednosti kvadriramo. Če dobljeni rezultat zmanjšamo za kvadrat štirikratne recipročne vrednosti danega naravnega števila n , dobimo naravno število, ki ni deljivo s 5. Dokaži to!
2. Letalo je preletelo prvih 385 km s hitrostjo 220 km/h. Ostali del poti je preletelo s hitrostjo 330 km/h. Povprečna hitrost letenja na celotni poti je bila 250 km/h. Kako dolgo pot je preletelo letalo?
3. Ravnina preseka kocko tako, da seče robove izhajajoče iz skupnega vrha v točkah, ki delijo te robove v razmerjih 2:1, 3:1 in 4:1 od skupnega vrha. V kakšnem razmerju so prostornine teles, na katera deli kocko ta ravnina?
4. Dan je pravokotni trikotnik ABC . Iz vrha A pravega kota narišemo težiščnico AM . Višina AD trikotnika ACM razpolavlja nasprotno stranico.
 - a) Izračunaj kote trikotnika ABC .
 - b) Izračunaj površino in prostornino telesa, ki nastane z vrtenjem trikotnika ABC okoli stranice AB , če je dolžina daljice $AD = k\sqrt{3}$ cm.
5. V trapezu $ABCD$ seče vzporednica z osnovnico AB daljici AC in BC po vrsti v točkah M in N . Dokaži, da so ploščine trikotnikov DAM in DBN enake.

Učenci so jih reševali 6. junija. Naloge so bile primerne, kar so pokazali solidni rezultati in zadovoljstvo tekmovalcev. Medtem ko je komisija popravljala naloge, so si tekmovalci ogledali spominski dom v Kumrovcu, nato pa v 35 km oddaljenih Stubicah monumentalni spomenik Matiji Gubcu, spominski muzej o kmečkih puntih v Donji Stubici ter Titov rojstni dom. V ponedeljek, 7. junija, je bila slovesna razglasitev zmagovalcev in podelitev nagrad. Vsi tekmovalci so dobili za spomin lepo knjižno darilo, zmagovalci pa še posebej matematične knjige.

V sedmih razredih so razdelili 3 prve nagrade, 2 drugi nagradi in 4 tretje nagrade, ter 7 pohval. Med pohvaljenimi sta bila tudi Tomaž Cokan z osnovne šole Prule-Ljubljana in Gorazd Habjan, osnovna šola Žiri. V osmih razredih sta dva učenca prejela prvo nagrado, po šest učencev pa je dobilo drugo in tretjo nagrado oziroma so bili pohvaljeni. Od Slovencev je dosegla Cilenšek Alja, osnovna šola Vojka Šmuc, Izola, drugo nagrado, Resman Bojan z Jesenic in Pibernik Maca z osnovne šole Prežihov Voranc, Ljubljana, pa sta bila pohvaljena.

Učenci, ki sodelujejo na zveznih tekmovanjih, so izbrani po republikah in pokrajinah na tekmovanjih, ki jih organizirajo republiška oziroma pokrajinska društva matematikov, fizikov in astronomov ob sodelovanju zavodov za šolstvo. Pri nas v Sloveniji imenujemo ta tekmovanja po slovenskem matematiku Juriju Vegi. Tekmovalcev je vsako leto več, pa tudi naloge so vedno zahtevnejše. Matematički list pa omogoči najboljšim tekmovalcem iz vseh republik tudi 10-dnevno bivanje v letovišču šuplje stjene pri Beogradu, kjer organizirajo zanje letno šolo. Letos je bilo iz Slovenije 5 učencev na letni šoli - trije kot nagrajenci na zveznem tekmovanju in dva kot uspešna reševalca nagradnih nalog. Kako so se naši imeli na letni šoli, bodo poročali v eni prihodnjih števil.

Bogomila Kolenko

REBUS - rešitev iz P IV/1 str. 7

OBELISK (ob el isk = zavrtena grška črka ksi)

Sergej Pahor

XVII. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Letos je bilo to tradicionalno srednješolsko tekmovanje 25. aprila v Kragujevcu. Organiziralo ga je društvo DMFA Srbije. V komisiji za tekmovanje je bil po en član iz vsake republike, manjkal je le predstavnik črne gore. V soboto je leta prvič zasedala in izdelala program dela, izbrala je 16 nalog, po štiri za vsak razred. Za svojega predsednika je izvolila predstavnika AP Vojvodine. Slovenski in makedonski tekmovalci so dobili naloge v dveh izvodih (enega v materinem jeziku). Tekmovanja se je udeležilo 87 srednješolcev, med njimi deset Slovencev. Trajalo je štiri ure, pričelo pa se je 25. aprila ob devetih v kragujevski gimnaziji.

S pomočjo nekaterih bivših tekmovalcev je komisija takoj po končanem tekmovanju pregledala in ocenila izdelke. Nato je določila nagrade in pohvale, končno pa še dešifrirala izdelke ter ugotovila avtorje. Učenci so si takole razdelili nagrade in pohvale:

- I. razred - dve tretji nagradi in štiri pohvale
- II. razred - prva nagrada, druga nagrada in pet tretjih nagrad
- III. razred - druga nagrada, tretja nagrada in dve pohvali
- IV. razred - dve drugi nagradi, tretja nagrada in štiri pohvale

Od Slovencev sta se najboljše uvrstila Gorazd Cvetič iz gimnazije Miloš Zidanšek v Mariboru (bil je najboljši v 3. razredu - osvojil je edino drugo nagrado) in Edmond Rusjan iz I. gimnazije v Ljubljani, ki je prejel tretjo nagrado v drugem razredu.

Po tekmovanju so si udeleženci lahko ogledali znamenitosti mesta gostitelja. Vodja naše ekipe je bil študent Zvone Duplančič. V ponedeljek dopoldne pred podelitvijo nagrad in priznanj mesta Kragujevac je bilo še tekmovanje za izbor članov letošnje jugoslovanske olimpijske ekipe. Trajalo je štiri ure, dane pa so bile tri naloge, izbrane prejšnji večer. Pri tej izbiri se komisija ni ozirala na program pouka srednješolske matematike v posameznih republikah, kot je to storila pri zveznem tekmovanju, ampak je izbrala naloge, ki so bolj podobne tistim na olimpia-

di. Snov, ki se uporablja pri reševanju takih nalog, pa včasih ne spada strogo v okvir programa naših srednjih šol. Male olimpiade se je udeležilo petnajst tekmovalcev, ki jih je izbrala dan prej komisija na osnovi preteklih in tu doseženih rezultatov. Med njimi sta bila dva Slovenca (Gorazd Cvetič iz 3. razreda in Tamar Čefarin iz 4. razreda), ki sta se oba uspela uvrstiti v osemčlansko ekipo. Le-ta nas zastopa na MMO (mednarodna matematična olimpiada), ki je letos v Avstriji. Tekmovalci, ki niso sodelovali na kvalifikacijah, so si ogledali tovarno Crvena Zastava.

Slovenska ekipa je imela pred zveznim tekmovanjem v Ljubljani skupne tridnevne priprave. Vodili smo jih nekateri študentje odseka za matematiko. Obenem z vabili na priprave smo izbranim srednješolcem poslali tudi naloge, ki naj bi si jih ogledali in jih skušali tudi rešiti. Na pripravah smo predelali vse te naloge, poleg njih pa so člani naše ekipe poslušali še dve krajši predavanji.

N A L O G E

I. RAZRED

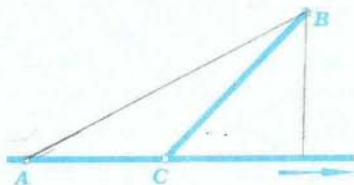
1. Naj bo dano N objektov, od katerih jih ima N_a lastnost a , N_b lastnost b , N_c lastnost c , $N_{a,b}$ lastnosti a in b , $N_{a,c}$ lastnosti a in c in $N_{b,c}$ lastnosti b in c . Dokaži, da velja neenakost:

$$3N + N_{a,b} + N_{a,c} + N_{b,c} \geq 2N_a + 2N_b + 2N_c$$

2. Dokaži, da se v krog polmera 9 ne more postaviti 400 točk tako, da je razdalja med poljubnima dvema točkama od njih večja od 1.

3. Dokaži, da za tri pozitivna števila, katerih produkt je enak 1, njihova vsota pa je strogo večja od vsote njihovih recipročnih vrednosti, velja: obstaja natanko eno od njih, ki je večje od 1.

4. Na obali reke je mesto A , mesto B pa leži navzdol ob reki, vendar ne na obali. Določi, na katerem mestu obale je treba zgraditi pristanišče C , da bi bil transport iz A v B preko C najcenejši, če vemo, da je cena transporta po reki dvakrat manjša kot po kopnem. Predpostavimo, da sta tok reke in pot iz C v B ravna (glej sliko!)



$$\textcircled{3} \quad a+b+c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \quad abc = 1; \quad a+b+c > ab+bc+ca \quad | :abc=1$$

$$108 \quad (a-1)(1-b)(1-c) > 0 \rightarrow a > 1 \rightarrow b < 1; c < 1$$

II. RAZRED

1. Izračunaj vsoto:

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$$

2. Dan je pravilen šesterokotnik s stranico dolžine a . Le s pomočjo ravnila konstruiraj daljice z dolžinami a/n , kjer je $n = 2, 3, 4, \dots$

3. Podan je trikotnik ABC s stranicami $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Določi točko P znotraj tega trikotnika tako, da je vrednost izraza

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

najmanjša, če so x, y, z oddaljenosti točke P od premic BC, CA, AB !

4. Poišči največje z 11 deljivo število, ki ima vse cifre med seboj paroma različne!

III. RAZRED

1. Dokaži neenakost:

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_a b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

če je $a > 1, b > 1, c > 1$ ali $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$.

2. Naj bodo α, β, γ koti netopokotnega trikotnika. Dokaži, da velja:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

3. Določi največjo vrednost količnika prostornin krogle in njej opisanega stožca!

4. Dana je množica S , ki vsebuje $n (n > 2)$ točk v ravnini in ima lastnost: če je $A, B \in S$, tedaj obstaja $C \in S$, tako da je $\triangle ABC$ enakokraničen. Za katera števila $n > 2$ je to mogoče?

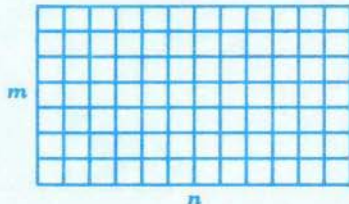
IV. RAZRED

1. Naj bo S množica točk v ravnini, ki imajo celoštevilske koordinate (v nekem izbranem pravokotnem koordinatnem sistemu). Dokaži, da za vsako naravno število n obstaja krog s središčem $(\sqrt{2}, 1/3)$, ki vsebuje natanko n točk množice S !

2. Sklenjeni ravninski krivulji C'_1, C'_2 omejujeta konveksna lika, katerih obsega merita x_1 in x_2 . Velja še $x'_1 + x'_2 = d = \text{const}$. Krivulji C_1 in C_2 sta njima podobni, njuna obsega merita δ_1 in δ_2 , ploščini likov, ki jih omejujeta pa p_1 in p_2 . Določi x_1 in x_2 tako, da je vsota ploščin likov, ki jih omejujeta krivulji C'_1 in C'_2 , najmanjša.

3. Dani sta množici celih števil $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ z lastnostjo: obstajata elementa $x \in A$ in $y \in B$ tako, da je $x \equiv y \pmod{2n}$. Dokaži, da obstajata taki neprazni množici $A' \subseteq A$ in $B' \subseteq B$, da je vsota elementov iz A' in elementov iz B' deljiva z $2n$!

4. Mesto ima kvadratno mrežo z m "vodoravnimi" in n "navpičnimi" ulicami (glej sliko!). Kolikšna je najmanjša dolžina dela mreže, ki jo je treba asfaltirati, tako da se od vsakega križišča mreže do poljubnega drugega križišča more priti po asfaltu?



Boris Lavrič

XII. zvezno tekmovanje je bilo 23. maja 1976 v Varaždinu. Slovensko ekipo so sestavljali: Križan Peter, Opáškar Vojko, Mayer Barbara, Lakner Mitja iz 4. razreda, Mikuž Marko, Vidmar Matjaž, Žlajpah Leon, Jenčič Igor, škof Mirko iz 3. razreda in Mlakar Primož iz 2. razreda. Četrtošolci so tekmovali v skupini Električna in magnetizem, tretješolci in drugošolci pa v skupini Mehanika in kalorika. Pred tekmovanjem so bile organizirane tridnevne priprave za tekmovalce, ki so jih vodili študenti višjih letnikov fizike.

Tekmovanje je potekalo v nedeljo dopoldne v prostorih gimnazije v Varaždinu. Za reševanje nalog so imeli tekmovalci na voljo štiri polne ure. Kljub predlogom, da bi tekmovalci pri reševanju lahko uporabljali učne knjige, je obveljalo staro pravilo, da je uporaba literature prepovedana.

Naši tekmovalci so se najbolje odrezali v skupini Mehanika in kalorika, kjer so osvojili vse nagrade: Matjaž Vidmar iz Nove Gorice I. nagrado, Marko Mikuž iz I. gimnazije v Ljubljani II. nagrado in Igor Jenčič iz II. gimnazije v Ljubljani III. nagrado.

Naloge z zveznega tekmovanja

Naloge je izbrala komisija, sestavljena iz zastopnikov republiških in pokrajinskih društev. Naloge skupine A so bile zanimive, zahtevale so več fizikalnega premisleka in manj računske rutine. Tega pa ne bi mogli trditi za naloge skupin B in C.

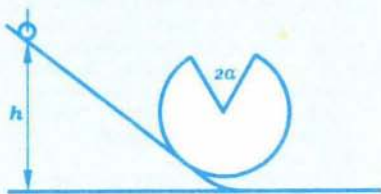
SKUPINA A (Mehanika in kalorika)

1. Na ravni podlagi stoji homogena kocka. Potisneš jo s silo pravokotno na stransko ploskev. Pri določenih višinah prijemališča sile kocka zdrsne, pri drugih pa se prevrne. Od česa je odvisna ta višina? Pojasni to kvantitativno!
2. Kozmična ladja s prečnim presekom 10m^2 se giblje s hitrostjo 10000 m/s in zaide v oblak mikrometeoritov. V kubičnem metru oblaka sta povprečno po dva mikrometeorita z maso po $2 \cdot 10^{-5}\text{ kg}$. S kolikšno potisno silo mora delovati motor, da se hitrost ladje ne zmanjša? Mikrometeoriti se ob trku zapčijo v ladjo.



NALOGE-TEKMOVANJA

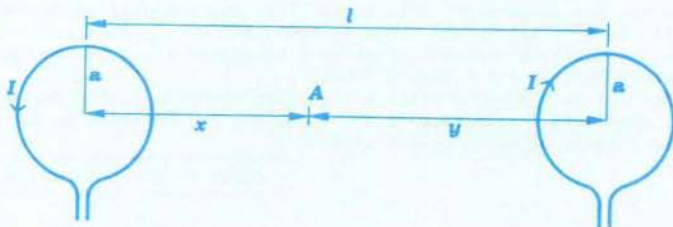
3. Žleb z obliko (mrtve) pentlje (Galileo) je na zgornjem delu prekinjen simetrično glede na navpičnico, ki gre skozi središče pentlje. Polmera od središča do prekinitev žleba tvorita kot 2α (gl. sliko). S katere najmanjše višine h moramo spustiti majhno telo, ki drsi po žlebu brez trenja, da bo preletelo prekinitev in spet padlo v žleb? Kakšen je tir med letom?



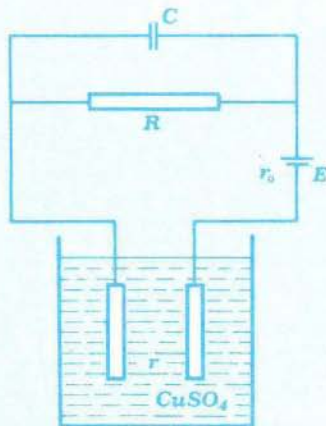
4. Na gladki vodoravni mizi stoji posoda, ki je pregrajena v dva enaka dela. V prvem delu posode je dušik, v drugem pa kisik. Tlak dušika je dvakrat večji od tlaka kisika. Koliko se posoda premakne, če pregrado odstranimo? Dolžina posode je 0,2m. Maso posode zanemarimo. Sprememba naj bo izotermna.
5. Pri pripravljanju ledu v hladilniku se temperatura vode zmanjša od 313K na 293K v času 300s. Talilna toplota ledu je $334,4 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$. Določi v kolikšnem času od takrat, ko smo dosegli temperaturo 293K, bo vsa voda zmrznila. Odvajanje toplote poteka enakomerno. Specifična toplota vode je $4,18 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$.

SKUPINA B (Elektrika in magnetizem)

1. Naboja $-2e$ in e sta v razdalji d pritrjena v prostoru. Naboj $+q$ premikamo po premici, na kateri sta naboj. Kako izgleda graf sile na naboj $+q$ v odvisnosti od njegove lege? V katerih točkah na premici je ta naboj v ravnovesju?
2. Dve kovinski krogli z radijema r_1 in r_2 sta povezani z dolgim tankim vodnikom. Na krogli nanesemo naboj Q . Nato kroglo z radijem r_1 namestimo znotraj kovinske ozemljene kroglice s polmerom $R = 3r_1$. Kolikšen naboj steče pri tem skozi vodnik, ki povezuje krogli?
3. Dve enaki prevodni krožni zanki z radijem po 0,1 m postavimo drugo poleg druge tako, da njuni osi sovpadata. Razdalja med njima znaša 1,8 m. Skozi obe zanki teče tok po 30A v smereh, ki sta označeni na sliki. Poišči gostoto magnetnega polja v točki A, ki leži na osi in je oddaljena od zank za x in y , pri čemer je razmerje $x:y = 4:5$.
4. Kovinska krožna plošča se vrti v magnetnem polju Zemlje ($B = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$). Polje je vzporedno z rotacijsko osjo. Kolikšna naj bo frekvenca vrtenja, da se ne bo inducirala napetost med robom in centrom krožne plošče zaradi centrifugalne sile na elektron? ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$).



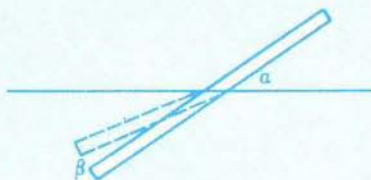
5. Posoda za elektrolizo, v kateri je 0,1 kg vodne raztopine CuSO_4 , je vezana kot kaže slika. Napetost izvora je 32V, njegov notranji upor pa 1,5 ohm. Zunanji upornik ima 60 ohm, upor elektrolita pa je 2,5 ohma. Specifična toplota raztopine je 236 J/kgK.



- a) Kolikšen tok teče v stacionarnem stanju (ko se kondenzator napolni) skozi raztopino?
 b) Izračunaj, v kolikšnem času se izloči $0,658 \cdot 10^{-3}$ kg bakra, če je konstanta za izločanje bakra $K_{\text{Cu}} = 0,329 \cdot 10^{-3}$ kg/As.
 c) V posodi za elektrolizo nadomestimo elektrodi z upornikom za 98,5 ohm. Izračunaj, koliko se tedaj segreje raztopina CuSO_4 v času 300s.
 č) Kolikšen naboj se nabere na kondenzatorju v stacionarnem stanju, če je njegova kapaciteta 10^{-3} F in je v vezje vključen grelec.
 d) Izračunaj še razmerje moči, ki se razvijata na uporih R in R_1 .

SKUPINA C (Optika in atomika)

1. Na prazen okrogel balon z zelo tanko steno, ki je potopljen v neko tekočino, pada ozek vzporeden snop svetlobe, tako da gre os snopa skozi središče balona. Na nasprotni strani balona ima snop (pri izhodu iz balona) premer, ki je dvakrat večji od premera snopa, ki pada na balon. Izračunaj lomni kvocient tekočine, v katero je balon potopljen.
2. V prozorno tekočino, katere lomni količnik glede na zrak je n , je potopljen en konec palice, tako da tvori s površino kot α . Opazovalcu, ki gleda od zgoraj, se zdi, da je potopljeni del palice premaknjen za kot β (glej sliko). Pri kateri vrednosti kota α bo kot β največji?
3. Monokromatična svetloba z valovno dolžino $6000\text{\AA}$ gre skozi uklonsko režo, ki ima 500 zarez na 0,01 m. Na razdalji 0,8 m od mreže je zaslon iz motnega stekla. Dve sosednji črti gledamo z lečo z goriščno razdaljo 0,12 m. Kolikšna je razdalja navideznih črt, ki jih vidimo skozi lečo, če je normalna zorna razdalja 0,25 m? Svetloba vpada na režo pravokotno.
4. Iz de Brogliejeve zveze izračunaj valovno dolžino vodikovega atoma pri temperaturi 0°C , če je kinetična energija atoma vodikovega atoma $E_k = 3kT/2$. Masa vodikovega atoma je $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, splošna plinska konstanta $R = 8,314 \cdot 10^3$ J/KmolK, Planckova konstanta $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js in Avogadrovo število $N = 6,023 \cdot 10^{26}$ Kmol $^{-1}$.
5. Na jedro litija vpadajo protoni s kinetično energijo E . Pri jedrski reakciji nastane dva delca alfa z enako energijo. Kolikšen je kot med smerema gibanja nastalih delcev alfa?



Bojan Golli in Marko Zgonik



ODLIKOVANI TRIKOTNIKI

Vprašajmo se po takih trikotnikih, katerih dolžine stranic so naravna števila, imenovali jih bomo kar celoštevilski trikotniki, ki imajo še lepo lastnost, da je njihov obseg po številski vrednosti enak njihovi ploščini (spet po številski vrednosti)

$$o = p$$

Spodaj bomo videli, da obstaja le pet takih trikotnikov. Preden se lotimo iskanja teh nenavadnih trikotnikov, problem še malo posplošimo. Najprej se vprašajmo po vseh celoštevilskih trikotnikih, za katere velja, da je $o = 2p$. Videli bomo, da obstaja le en tak trikotnik, celoštevilskih trikotnikov, ki bi imeli obseg enak tri ali večkratni ploščini, pa sploh ni.

Postavimo kar splošno nalogo: *iščemo celoštevilške trikotnike, za katere velja*

$$o = \lambda p$$

kjer je λ neko realno število. Ugotovili bomo, da imamo za naravne vrednosti parametra λ rešitve le pri $\lambda = 1$ in $\lambda = 2$, za nekatere necele vrednosti parametra dobimo še take trikotnike, za parametre $\lambda > \sqrt{48}$ pa nobenega več. Ker so taki trikotniki nekaj posebnega in so zelo redki, jih bomo imenovali *odlikovani trikotniki*.

Lotimo se iskanja teh trikotnikov! Najprej vpeljemo običajno oznako za polovičen obseg trikotnika $s = o/2 = (a+b+c)/2$. S to količino se po znanem Heronovem obrazcu izraža ploščina trikotnika

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Tako lahko naš pogoj zapišemo v obliki

$$2s = \lambda \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dolžine stranic a , b in c so naravna števila, zato je tudi

srednjica s naravno število ali kvečjemu ulomek z imenovalcem 2. Take oblike so potem tudi števila $s-a$, $s-b$ in $s-c$, zato zanje vpeljimo oznake

$$s-a = m/2, \quad s-b = n/2, \quad s-c = k/2$$

pri čemer so m , n in k naravna števila. Kaj očitno je potem: $(m+n+k)/2 = 3s - 2s = s$. Kvadrirajmo našo enačbo in vpeljimo vanjo zgornja števila. Če jo še okrajšamo in uredimo, dobimo

$$16(m+n+k) = \lambda^2 kmn$$

Vsaka rešitev te enačbe v naravnih številih pri nekem izbranem λ nam bo preko zgornjih zvez dala iskane dolžine stranic a , b in c . (Sam se prepričaj, da iz pogojev $m, n, k > 0$ sledi, da so a , b in c res stranice nekega trikotnika). Dogovorimo se še, da bomo iskano rešitev pisali v obliki (a, b, c) . Če kakšni od teh treh števil zamenjamo med seboj, bomo šteli novo trojico za isto, saj je trikotnik tvorjen iz istih treh daljic. Domenimo se, da bomo vsak odlikovani trikotnik pisali v obliki urejene trojice (a, b, c) , pri čemer bo $a \leq b \leq c$. Hitro se tedaj prepričamo, da bo potem $k \leq n \leq m$. Iz zgornje enačbe dobimo oceno:

$mnk = 16(m+n+k)/\lambda^2 \leq 16(m+m+m)/\lambda^2 = 48m/\lambda^2$, odtod pa po krajšanju z m oceno: $nk \leq 48/\lambda^2$. Upoštevajmo še $k^2 = k \cdot k \leq k \cdot n$ in dobimo: $k^2 \leq 48/\lambda^2$. Ker je $a = s-m/2 = (n+k)/2$, $b = (m+k)/2$, $c = (m+n)/2$, so števila m , n in k očitno vsa hkrati soda ali vsa liha.

Naše ugotovitve še enkrat strnimo: Pri danem parametru $\lambda > 0$ dobimo vse odlikovane trikotnike, če zadostimo z naravnimi števili m , n in k naslednje zahteve:

$$16(m+n+k) = \lambda^2 mnk$$

$$nk \leq 48/\lambda^2, \quad k^2 \leq 48/\lambda^2$$

$$k \leq n \leq m \text{ in } m, n \text{ in } k \text{ so iste parnosti}$$

Sedaj nam ne bo težko najti obljubljene trikotnike. Vzemimo najprej $\lambda = 1$. Ker je sedaj $16(m+n+k) = mnk$, so očitno m , n in k soda števila in iz ocene $k^2 \leq 48$ sledi $k = 2, 4$ ali 6 . Če upoštevamo še $nk \leq 48$, dobimo naslednje možnosti:

$$k = 2; \quad n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \text{ ali } 24$$

$$k = 4; \quad n = 4, 6, 8, 10 \text{ ali } 12$$

$$k = 6; \quad n = 6 \text{ ali } 8$$

pri tem smo seveda upoštevali neenačbo $n \geq k$. Če iz naše enačbe izračunamo $m = 16(k+n)/(kn-16)$, vidimo, da mora biti najprej $kn > 16$ in nam odpadejo možnosti $k = 2, n = 2, 4, 6, 8$ in tudi $k = 4, n = 4$. Ostane nam še 14 možnosti za k in n , ki jih vstavimo v enačbo za m in ker mora biti tudi to sodo število, ne manjše od k ali n , dobimo le pet dobrih trojic, ki jih z izračunanimi stranicami zapišimo v tabelo

k	n	m	a	b	c
2	10	48	6	25	29
2	12	28	7	15	20
2	16	18	9	10	17
4	6	20	5	12	13
4	8	12	6	8	10

Primer $\lambda = 2$, kar pomeni, da je obseg številsko dvakrat večji od ploščine, še hitreje obdelamo. Enačba ima sedaj obliko $4(k+m+n) = kmn$ in spet ugotovimo, da morajo biti k, m in n vsi sodi. Iz druge neenačbe $k^2 \leq 48/4 = 12$ dobimo edino rešitev $k = 2$ ter iz zahteve $kn \leq 12$ le tri možnosti za n : 2, 4 ali 6. Izrazimo še število m , pri čemer že upoštevajmo $k = 2$: $m = 2(n+2)/(n-2)$. Z nič ne smemo deliti, torej $n \neq 2$, odpade pa tudi $n = 6$, ker bi tedaj bil $m = 4 < n$. Edina rešitev je $k = 2, n = 4, m = 6$ in iskani odlikovani trikotnik je (3,4,5).

Našli smo torej pet celoštevilskih trikotnikov, katerih obseg je številsko enak njegovi ploščini in le en tak trikotnik, čigar obseg je številsko dvakrat večji od njegove ploščine. Prihodnjič bomo poiskali še nekatere odlikovane trikotnike pri večjih parametrih λ .

Edvard Kramar

NALOGE



DOKAŽI, da je vsako naravno število $n \geq 3$ lahko dolžina katete celoštevilskega pravokotnega trikotnika! Glej članek "Kako dobimo nekatere celoštevilčne trikotnike" P III/2 str. 82

Edvard Kramar

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA SAME OSTROKOTNE TRIKOTNIKE

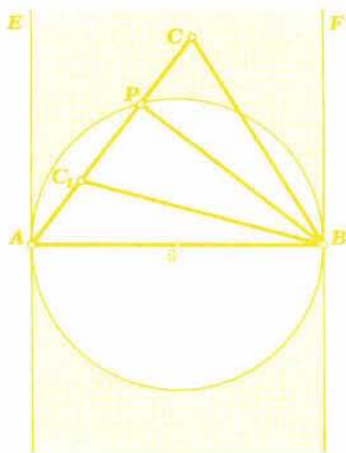
Pogosto naletimo v matematiki na probleme, ki so razumljivi brez posebnega znanja matematike, rešitev pa ni tako preprosta, kakor se zdi na prvi pogled. Takšno je npr. vprašanje, ki smo ga navedli v naslovu. Pri tem povejmo, da imenujemo trikotnik ostrokoten, če so vsi njegovi notranji koti ostri.

Nalogo lahko zastavimo tudi takole:

Sestavi iz samih ostrokotnih trikotnikov kvadrat!

Rekli bi, da pač ne more biti posebno težko razrezati kvadrat na ostrokatne trikotnike. Vsak bralec pa se lahko sam s poskušanjem prepriča, da videz vara in da naloga ni tako preprosta, ker pravokotnih trikotnikov ne štejemo za ostrokatne.

Preden navedemo rešitev, si zastavimo tole vprašanje: Dana je osnovnica trikotnika AB . Kje mora ležati vrh C , da bo trikotnik ABC ostrokoten? Narišimo krog s premerom AB , v krajiščih A in B pa postavimo pravokotnici AE in BF (glej sliko 1). Trikotnik ABC je ostrokoten natanko tedaj, kadar leži vrh C med pravokotnicama AE in BF , toda zunaj kroga s premerom AB (na sliki 1 je to polje osenčeno).



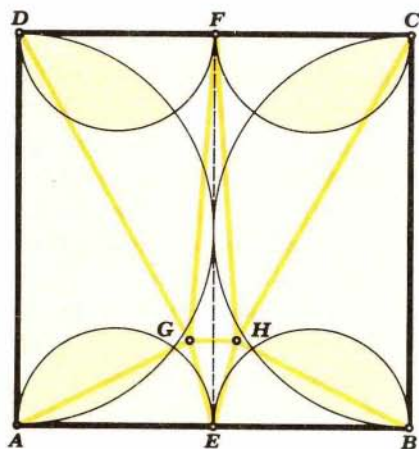
če leži namreč vrh C na pravokotnici AE ali na njeni levi strani, je kot pri A pravi ali top; če leži vrh C na BF ali na desni te pravokotnice, je kot pri B pravi ali top. Naj bo zdaj vrh C med pravokotnicama, toda zunaj kroga. V tem primeru sta očitno kota pri A in B ostra. Kaj pa pri C ? Če je P presečišče kroga s stranico

AC , je kot APB kot v polkrogu, torej pravi kot. Kot pri C pa je oster, ker je manjši od pravega kota APB , ki je nepriležni zunanji kot kota pri C v trikotniku BPC . Podobno se prepričamo, da je v trikotniku ABC_1 kot pri C_1 top, če leži vrh C_1 v notranjosti kroga.

Denimo, da smo kvadrat razrezali na ostrokatne trikotnike. Oglišča teh trikotnikov so bodisi oglišča kvadrata, bodisi točke na straneh kvadrata ali pa notranje točke. V vsakem notranjem oglišču T se stika najmanj pet izmed teh trikotnikov. Vsota kotov z vrhom v T - vsi ti koti so ostri - je namreč enaka polnemu kotu 360° ; vsota štirih ali treh ostrih kotov pa je manjša od 360° . Podobno ugotovimo, da se v oglišču P , ki leži na kaki stranici kvadrata, stikajo najmanj trije trikotniki.

Rešitev naloge dobimo takole: Naj bo dan kvadrat $ABCD$. Označimo središči stranic AB in CD z E in F (glej sliko 2). Narišimo v notranjosti kvadrata polkroge s premeri AD , BC , AE , BE , CF in

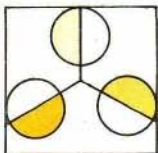
DF . Te polkrožne plošče ne pokrijejo vsega kvadrata. Na nepokritem delu v spodnji ali zgornji polovici kvadrata si izberemo točki G in H in sicer tako, da ležita simetrično glede na daljico EF . Zvežimo točko G s točkami A , E , F in D , točko H pa s točkami E , B , C in F . Tako smo razrezali kvadrat $ABCD$ na osem ostrokatnih trikotnikov. Trikotnika GHE in GHF sta namreč enakokraka. V enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici vedno ostra, kot ob vrhu pa je tudi oster,



če je osnovnica dovolj majhna v primerjavi z višino. To je v našem primeru očitno res. (Osnovnico GH si lahko izberemo poljubno majhno.) Drugi trikotniki pa so ostrokatni iz razloga, ki smo ga navedli v začetku: Vrh G trikotnika AEG je med pravokotnicama AD in EF in zunaj kroga s premerom AE . Podobno ugotovimo, da so ostali trikotniki ostrokatni.

Brez dokaza naj povemo, da kvadrata ni mogoče razrezati na manj kakor osem ostrokatnih trikotnikov.

Bralec, ki ga to veseli, naj poskuša razrezati na same ostrokatne trikotnike enakokrak pravokoten trikotnik (to je polovico kvadrata). Naloga je rešljiva s sedmimi trikotniki.



STALNA RAZSTAVA V VEGOVI DOMU

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je v letošnjem letu dodatno in na novo opremilo sobo v domu slovenskega matematika Jurija Vege v Zagorici. Že leta 1968 je društvo organiziralo slovesno otvoritev opremljene sobe. Od takrat pa do danes je bilo nabranega toliko novega slikovnega gradiva in Vegovih del, da je bilo mogoče stalno razstavo na novo preurediti in izpopolniti. Postavljeni so - z materialno pomočjo skupščine občine Ljubljana Moste-Polje - trije stenski panoji s fotografijami iz Vegovega življenja ter dve vitrini z njegovimi deli. Med slikami, ki dokumentirajo življenje in delo velikega znanstvenika, so posnetki naslovnih strani prvih izdaj njegovih knjig, nekatere listine, podobe iz bojev, v katerih je Vega sodeloval, reproducirani Vegovi portreti in spomeniki. V vitrinah pa je razstavljenih 10 njegovih del, med drugimi tudi prva izdaja Thesaurusa. Razstava je lepo in pregledno urejena ter nudi



NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE TOMVS IX.

FRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNYM MDCCXC.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCV.

DÉTERMINATION DE LA DEMI-CIRCONFÉRENCE D'UN CERCLE, DONT LE DIAMÈTRE EST = 1, EXPRIMÉE EN 140 FIGURES DÉCIMALES.

Par
M. GÉORGE VEGA.

Présenté à l'Académie le 20 Août, 1789.

L'Académie croit pouvoir se dispenser d'insérer ici tout le calcul long & pénible par lequel l'auteur est parvenu à la valeur de π , ou de la demi-circonférence d'un cercle dont le diamètre est = 1; il suffit de transcrire ici la double série infinie dont il s'est servi pour cet objet, & qui est (*)

(*) Ces deux séries sont extrêmement convergentes, mais tant les numérateurs que les dénominateurs des fractions qui les composent, sont des nombres peu commodes pour le calcul. Feu M. Euler a donné, dans un mémoire que nous insérerons au volume X de nos Actes, une double série qui, à la vérité, n'est pas si convergente que celles de M. le Major Vega, mais dont la loi de progression est bien plus évidente & qui, étant beaucoup plus commodes, abrégeroient infiniment le travail à celui qui s'en servirait pour calculer la valeur de π . Voici cette double série:

$$\pi = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{2}{100} \right)^4 + \frac{1}{4^2} \left(\frac{2}{100} \right)^6 + \frac{1}{5^2} \left(\frac{2}{100} \right)^8 + \dots \right) \\ + \frac{1}{10000} \left(1 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{11}{10000} \right)^2 + \frac{1}{5^2} \left(\frac{11}{10000} \right)^4 + \frac{1}{7^2} \left(\frac{11}{10000} \right)^6 + \dots \right)$$

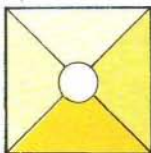
Histoire de 1795.

Prva stran spisa J. Vege v časopisu petrograjske akademije, v katerem je prvi objavil število π na 140 decimalk

obiskovalcu dovolj zanimivega. V hiši je mogoče dobiti prospekt z motivi Zagorice in razglednice J. Vege.

Vegovo ime je že dolgo živo v slovenski kulturni zavesti in dobro znano našim ljudem. Njegov dom je bil že pred prvo in pred drugo svetovno vojno zelo obiskan, kar dokazuje stara spominska knjiga. Leta 1944 so Nemci požgali vas in Vegova rojstna hiša je popolnoma pogorela. Društvo pa je z ureditvijo spominskih obeležij posvečenih Vegovemu spominu v novi hiši poskrbelo, da bo kraj lahko postal pomembna izletniška točka, saj je imel že do zdaj vsako leto več obiskovalcev. Vas Zagorica je dostopna tudi z avtomobilom in z avtobusom ob vsakem vremenu po lepo urejeni cesti, ki se odcepi v Dolskem od ceste iz Ljubljane proti Litiji.

Jože Povšič



PISMA BRALCEV

Ivanka Agriž iz Globokega nam je med drugim napisala:

"Naročena sem na vašo priljubljeno revijo Presek in mi je všeč. Zelo rada jo prebiram. Iz nje se naučim marsikaj in kdaj rešim tudi kakšno nalogo, ki je primerna meni kot učenki osnovne šole."

Hvala Ti, draga Ivanka, za prijazno pismo. Pri reševanju nalog Ti želimo vedno več uspeha.

- - -

Od Tatjane Harlander iz Sevnice pa je prispelo tako pismo:

"Hodim v 8. razred in imam Presek letos prvič v rokah. Navdušena sem nad to revijo in z veseljem rešujem naloge, ki jih zastavljate. Ker se rada ukvarjam z matematiko in sem tudi že uspešno tekmovala, sem se odločila, da vam pišem in pošljem rešitev zastavljene naloge iz rubrike Premisli in reši. Upam, da je naloga pravilna, saj bi potem še z večjim veseljem reševala naloge iz Preseka. Želim vam še mnogo uspehov pri urejanju revije, ki me je zelo navdušila."

Kako lepo, da si občutila veselje ob rešitvah matematičnih nalog. Le tako nadaljuj in nam še piši. Hvala Ti, Tatjana.

- - -

Zdenki Jelenc z osnovne šole Zvonka Runka v Ljubljani se lepo zahvalimo za pismo, v katerem nam je zaupala, da so ji všeč predvsem naloge iz Bistroidca. Želela bi pa več nalog, primernih za 6. in 7. razred. Tej Tvoji želji, ki pa je hkrati želja še mnogih, bomo poskušali ustreči.

- - -

Poleg rešitve nam je Peter Pazlar iz Sp. Gorij pri Bledu napisal takole:

"Ker se oglašam prvič, moram pohvaliti Presek. Nanj sem naročen že tri leta in sem ugotovil, da je iz leta v leto bolj pester. Vendar v njem pogrešam take vrste ugank, kot so kriptogram, anagram, logogriף itd. Rad bi tudi, da bi pisali o tem, kako se te uganke rešujejo. Želim vam mnogo uspeha pri nadaljnem urejanju Preseka."

Peter, hvala za pismo in lepe želje. Kriptogram si našel na naslovni strani 1. številke, članek pa je tudi že na poti v Presek.

- - -

Iz osnovne šole Zvonka Runka nam je pisala tudi Polona Novak, ki pravi:

"Ko sem prejela tretjo številko Preseka, sem se kar oddahnila, ker je bila nekoliko debelejša in v uvodniku je bila razveseljiva novica, da Preseku ne grozi več, da ne bi mogel izhajati še v naslednjih letih. Že tretje leto prejemanj Presek in mi je zelo všeč."

Draga Polonca, hvala za zaupanje.

- - -

Roman Červ - GPS v Ljubljani nam piše:

"Na Presek sem naročen že od začetka in mi zelo, zelo ugaja. Že dolgo se odločam, da bi vam pisal, no, odložil sem se. V vsaki številki Preseka najdem veliko zanimivega, kot npr. v astronomiji in še posebno v matematiki. Presek me je toliko navdušil, da sem še jaz prispeval za njegovo obogatitev. Revijo bom še dolgo rad prebiral, zato vam pri urejanju Preseka želim obilo sreče."

Tvoje pismo nas je posebej razveselilo. Upamo, da se bodo tudi mnogi bralci, ki se ne morejo pripraviti k pisanju, odločili prispevati v Presek kaj zanimivega. Tako bo Presek postal lastnina nas vseh, ki ga imamo radi.

Zlatko Rek iz Vuzenice nam je poslal poleg rešitve še tele vrstice:

"Ko sem dobil v roke 3. številko, sem jo prelistal in videl tudi nalogo kriptaritem, ki pa me ni zanimala. Čez kakšen mesec sem zopet prelistal Presek, pa me je začela zanimati naloga in sem jo rešil."

Vidiš Zlatko, na tak način se dostikrat srečujemo z zanimivimi nalogami in problemi, ki jih rešimo, če se večkrat povrnemo k njim. Želimo Ti uspeha pri reševanju vseh nalog.

- - -

Ob rešeni nalogi nam je poslal Bojan Rajšek iz Kleka pri Trbovljah naslednje misli:

"Revija se mi zdi zelo zanimiva. Predlagal bi le, da bi bilo v njej tudi malo več humorja."

Vesel človek je povsod dobrodošel - tudi v matematiki. Torejboljšati se bomo morali in poskrbeti za zdrav matematični humor. Bojan, hvala, da si nas na to spomnil.

- - -

Tončku Markoviču iz Trbovelj, hvala za pismo. Praviš, da Ti je Presek všeč in da najdeš veliko nalog za reševanje. Veš, ob reševanju matematičnih nalog boš odkril skrivnost veselja v delu. Želimo Ti vztrajnost pri reševanju!

- - -

Anita Katanec iz Maribora je napisala tudi lepo pismo:

"Presek mi je zelo všeč. Zdi se mi, da je premalo nalog za 6. in 7. razred. Žal mi je, da ne izhaja več številke, saj je Presek zelo koristen pri razumevanju matematike, fizike in astronomije. Posebno všeč so mi bile slike velikih matematikov, fizikov in astronomov. Včasih rešujemo nekatere naloge iz Preseka tudi pri matematičnem krožku."

Lepo, Anita. Krožek je res primeren, da se privadimo takega

branja, ki nas pogloblja v znanosti. Želimo Ti še dosti veselja ob reševanju nalog.

- - -

Katarini Brčan se prav lepo zahvalimo za zaupne vrstice, priložene poslani rešitvi. Važno je, da si nam pisala, ker le tako lahko najdemo stik. Kajti "vzorno ostajanje v ozadju" ni vzorno, ker naše stoletje daje veliko vrednost komunikaciji in želja vsakega je, da bi bil sodoben. Srečni smo, da Ti Presek nudi večkrat veselje. Hvala, Katarina.

- - -

"Presek mi je zelo všeč", pravi Lidija Vidljinič iz Novega mesta, "kajti vsebuje veliko nalog, pri katerih je treba samo logično misliti. Naloge rešujem sama, včasih pa jih rešujemo tudi pri matematičnem krožku."

Hvala Lidija, da sodeluješ z nami pri reševanju nalog. Vse člane vašega krožka lepo pozdravljamo in vam želimo uspeha.

- - -

"Prvič vam pošiljam rešitev naloge iz Preseka. Kriptaritem je na pogled precej težak. Ko pa sem se lotila dela, je šlo kar samo od sebe. Rađa bi videla, da bi bilo v Preseku še dosti zanimivih nalog, ki bi jih reševala z veseljem."

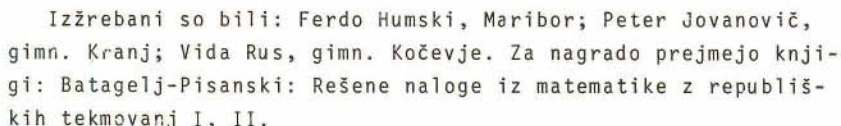
Tako nam je pisala Marija Sodja iz Dobrave pri Jesenicah. Upamo, da boš našla v Preseku še dosti veselja ob reševanju nalog. Piši nam še!

Matilda Lenarčič





Objavljamo rešitev, ki nam jo je poslal Primož Trampe:



Jožica pove: "Stara sem 22 let. Dve leti sem mlajša kot Alenka in leto dni starejša od Marinke."

Marinka reče: "Mlajša sem kot Jožica, ki je stara 23 let. Alenka je tri leta starejša kot Jožica."

Koliko so stare, če vemo, da je vsaka povedala samo eno neresnico in dve resnični trditvi?

Zlatko Novak

Kot vidite, tudi v tej številki - ravno tako kot v prejšnji - ni kupona. V uredništvu smo se namreč odločili, da kupon opustimo. Rešitve nam pošljite do 20. januarja 1977.

Jože Dover

PET VOLNENIH KAP TETE AMALIJE

Tomaž, Jožica in Polonca so obiskali teto Amalijo. Ko so se pozdravili in spili vsak svojo limonado, jih je teta presenetila. Prinesla je pet volnenih kap, ki jih je napletla odkar se niso videli, in rekla:

"Glejte, tuje imam pet kap, tri so rdeče in dve sta modri. Sedli boste na stopnice, Tomaž na zgornjo, Jožica pod njim in Polonca na spodnjo stopnico. Zamižali boste, jaz pa vam bom posadila na glave tri od petih kap. Ostali dve bom skrila. Potem boste odprli oči in poskušali uganiti, kakšne barve kapo imate na glavi. Saj se v šoli učite "novo matematiko", je dodala.

Otroci so bili navdušeni. Posedli so po stopnicah in teta jim je posadila kape na glave.

Tomaž, ki je sedel na vrhu in videl kapi na Jožičini in Polončini glavi, se je prvi oglasil:

"Ne, ne vem".

Tudi Jožica ni mogla uganiti: "Tudi jaz ne."

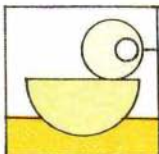
Polonca pa, ki ni videla nobene kape, je uganila:

"Veš, teta, rdečo kapo si mi dala na glavo".

"Pa ste res modrijani, vsi trije," je vzkliknila teta.

Dragi bralec, ali bi mogel tudi ti slediti toku njihovih misli? Kakšne logične sklepe so morali napraviti?

Peter Petek

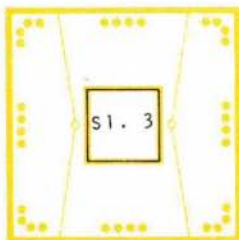
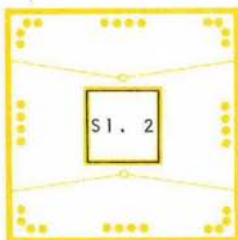
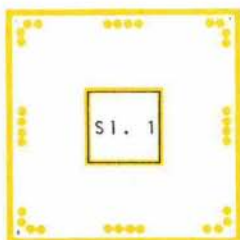


BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

UGANKA S SODI

Pred mnogimi leti je živel graščak, ki je imel v kleti 32 sodov najzlahtnejšega vina. Na sredi kleti je stal pravokoten podporni steber. Sodi so bili razporejeni kot kaže slika 1 v skupinah po 4.

In glej: če si se postavil pravokotno na steno ob stebru (sl. 2, sl. 3), si videl 12 sodov.



Graščak je svojemu slugi obljubil svobodo, če reši dokaj zapleteno uganko. Rekel mu je: "V kleti je 32 sodov. Tu imaš še štiri. Postavi jih v klet, da boš ob stebru stoječ še vedno videl vsakič po 12 sodov. Mislite, da slugi ni uspelo postaviti sodov v klet poleg drugih tako, da so ustrezali pogoju? O, pa je! In to kaj hitro! Graščak pa ni hotel kar tako izgubiti služe, zato mu je naročil, da iz kleti, kjer je bilo zdaj 36 sodov, odvzame 8 sodov tako, da bo pogoj spet izpolnjen. Za nagrado mu je obljubil teh 8 sodov vina in še svobodo povrhu.

In veste, kaj se je zgodilo? Sluga je odšel domov svoboden in še sode je odpeljal s seboj.

Vaša naloga je, dragi bralci, da ugotovite položaj sodov najprej po dodanih štirih, nato še po odvzetih osmih sodih.

Ne pozabite: 32, 36, 28!

Roman Červ

ZABAVNA ŠTEVILA

Nekatera cela števila imajo prav zabavne lastnosti, če jih primerno mrcvarimo z računskimi operacijami. Oglejmo si na primer nekatere zmnožke s številom 7 6 9 2 3 :

76923 . 1 = 0 7 6 9 2 3	76923 . 2 = 1 5 3 8 4 6
76923 . 10 = 7 6 9 2 3 0	76923 . 7 = 5 3 8 4 6 1
76923 . 9 = 6 9 2 3 0 7	76923 . 5 = 3 8 4 6 1 5
76923 . 12 = 9 2 3 0 7 6	76923 . 11 = 8 4 6 1 5 3
76923 . 3 = 2 3 0 7 6 9	76923 . 6 = 4 6 1 5 3 8
76923 . 4 = 3 0 7 6 9 2	76923 . 8 = 6 1 5 3 8 4

Vidimo, da se številke v zgornjih zmnožkih ciklično zamenjujejo.

Zabavno utegne postati tudi množenje z 8:

$$\begin{aligned}
 1 \times 8 + 1 &= 9 \\
 12 \times 8 + 2 &= 98 \\
 123 \times 8 + 3 &= 987 \\
 1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
 12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
 123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\
 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\
 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\
 123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
 \end{aligned}$$

Ali pa množenje z 9 :

$$\begin{aligned}
 0 \times 9 + 1 &= 1 \\
 1 \times 9 + 2 &= 11 \\
 12 \times 9 + 3 &= 111 \\
 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\
 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\
 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\
 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\
 1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\
 12345678 \times 9 + 9 &= 111111111
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \times 9 + 7 &= 88 \\
98 \times 9 + 6 &= 888 \\
987 \times 9 + 5 &= 8888 \\
9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\
98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\
987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\
9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\
98765432 \times 9 + 0 &= 888888888 \\
987654321 \times 9 - 1 &= 8888888888
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \times 12345679 &= 111111111 \\
99 \times 12345679 &= 122222221 \\
999 \times 12345679 &= 1233333321 \\
9999 \times 12345679 &= 12344444321 \\
99999 \times 12345679 &= 123455554321 \\
999999 \times 12345679 &= 1234566654321 \\
9999999 \times 12345679 &= 12345677654321 \\
99999999 \times 12345679 &= 1234567887654321 \\
999999999 \times 12345679 &= 12345678987654321
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \times 1122334455667789 &= 10101010101010101 \\
99 \times 1122334455667789 &= 111111111111111111 \\
999 \times 1122334455667789 &= 112121212121212121 \\
9999 \times 1122334455667789 &= 1122222222222222211 \\
99999 \times 1122334455667789 &= 1122323232323232211 \\
999999 \times 1122334455667789 &= 11223333333333332211 \\
9999999 \times 1122334455667789 &= 112233434343434332211
\end{aligned}$$

Roman Rojko

MED CIFRE ... - rešitev iz
P 4 (1976/77)1, str. 44

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 34 + 56 + 7 &= 100 \\
1 + 23 + 4 + 5 + 67 &= 100 \\
7 + 65 + 4 + 3 + 21 &= 100 \\
7 + 6 + 54 + 32 + 1 &= 100
\end{aligned}$$

Zlatko Novak

SKRITA ŠTEVILA - rešitev iz
P 4 (1976/77)1, str. 37

Rešitev: sto, dva, nič, tri,
ena, nič, osem, sto,
ena, pet.
Končna rešitev: aritmetika.

Pavel Gregorc

DOMINO MALO DRUGAČE

Priljubljeno družinsko igro "domino" lahko igramo na različne načine. Prav gotovo jih že nekaj poznate. Naša nova pravila se le v majhni podrobnosti razlikujejo od znane stare igre, pa vendar bo igra tako prav gotovo bolj zanimiva, saj zahteva več zbranosti in daje zato več zadovoljstva. Naj napišem celotno pravilo: Ko vse domine zmešate, kupi vsak igralec 7 (sedem) domin, ki jih lahko tudi pogleda. Po določenem vrstnem redu odlagajo igralci domine v vrsto tako, da ima zadnja domina prejšnjega igralca na prostem koncu isto število pik, kot prva polovica prve domine naslednjega igralca. Novo je pri tem le to, da mora vsak igralec hkrati odložiti na mizo k začetni vrsti po tri domine, za katere velja isto pravilo, kot za sestavljanje cele vrste. Pravilo sem spremenil še toliko, da mora vsak igralec, ko pride na vrsto, kupiti le eno domino, ne glede na to, ali lahko s prejšnjimi dominami sestavi potrebno trojko. Ko igralci pokupijo vse domine in nihče ne more sestaviti potrebne trojke, zmaga tisti, pri katerem je vsota pik najmanjša.

Ciril Velkovrh

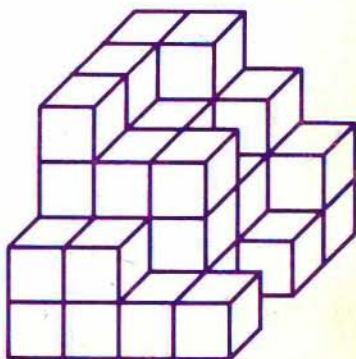


BISTROVIDEOC

KOCKE

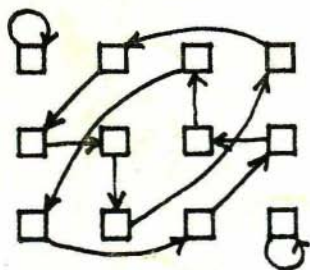
Koliko kock je v kupčku?

Dušan Repovš

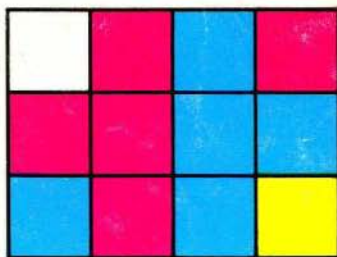


MOZAIK - REŠITEV IZ ČETRTE ŠTEVILKE

Na sliki 1 kaže puščica, kako se med transformacijo premaknejo posamezne ploščice mozaika. Ploščici, ki sta povezani s puščico, morata biti enako pobarvani, če s prelaganjem ploščic mozaika ne smemo spremeniti. Množica vseh ploščic v mozaiku tako razpade v štiri podmnožice, v vsaki od teh podmnožic pa morajo biti vse ploščice enako pobarvane. Če za vsako od štirih podmnožic izberemo po eno barvo, dobimo najsplošnejši mozaik, ki ga transformacija ohranja: glej sliko 2. Tako spoznamo tudi naslednje: vsak mozaik, v katerem bo vsaj pet ploščic med seboj različno pobarvanih, se bo s transformacijo zanesljivo spremenil.



Slika 1



Slika 2

France Dacar