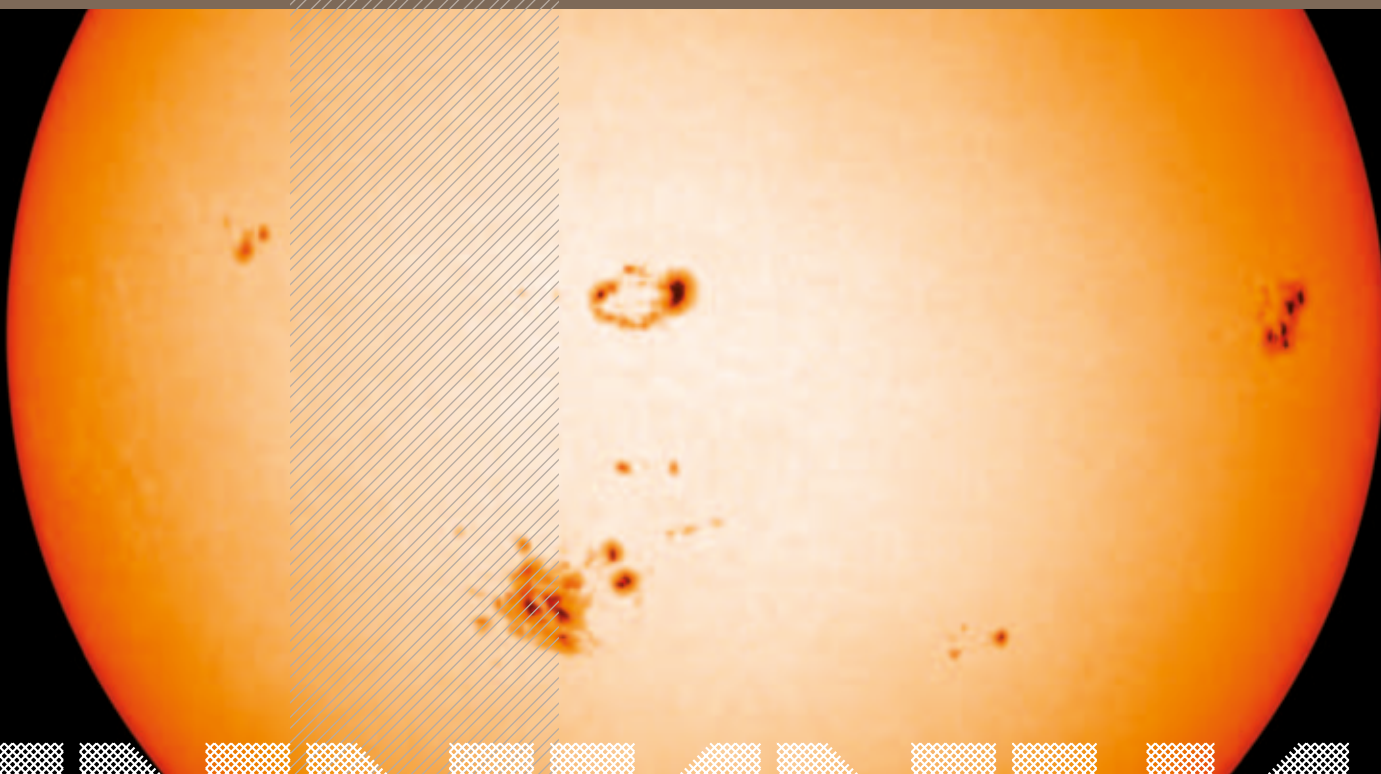




PRESEK



- MODEL PAJČEVINE
- KAKO RAZLOŽITI RELATIVNOST?
- PREHOD VENERE ČEZ SONCE
IN ZGODOVINA MERITEV
ASTRONOMSKE ENOTE
- PREDSTAVITEV GRAFA S SEZNAMOM
SOSEDOV IN PREGLED V ŠIRINO

Ugotavljanje resnice



→ Pri raziskovanju več pomembnih primerov kršitev človekovih pravic in volitvenih prevar so si preiskovalci pomagali z matematiko. Poglejmo jih nekaj:

Volitve v Iranu leta 2009

Benfordov zakon pravi, da prve številke naključnih števil, v nasprotju z našimi pričakovanji, niso porazdeljene enakomerno. Manjše številke, na primer 1, se pojavljajo na prvem mestu naključnih števil veliko bolj pogosto kot večje, npr. 9. Tako so Benfordov zakon in dodatni statistični testi pokazali, da so rezultati volitev v Iranu leta 2009 zelo verjetno ponarejeni.

Etnično čiščenje

Slobodan Milošević je na sojenju v Haagu trdil, da je množičen izgon Albancev iz Kosova posledica NATO-vega bombardiranja in dejavnosti Albanske vojske za osvoboditev Kosova, ne pa njegovih ukazov. Skupina strokovnjakov je zbrala podatke o tokovih beguncev, testirala te hipoteze in z rezultati v celoti ovrgla Miloševićeve trditve.

Izginotja v Gvatemali

S statistiko so si pomagali tudi pri zbiranju informacij o približno 200 000 mrtvih in izginulih ter pri analizi več kot 80 milijonov strani dokumentov v arhivu državne policije. Metode vzorčenja so raziskovalcem, brez natančnega branja vsake posamezne strani številnih dokumentov, omogočile precej natančen vpogled v dogajanje samo. Družine pogrešanih so tako končno prišle do dolgo zelenih dokazov o usodi svojih najbližjih, raziskovalci pa so odkrili vzorce in motive za ugrabitve in umore nedolžnih. Tragično je, da so izginili ljudje, a so vsaj dejstva o njihovem izginotju sedaj razkrita in ostajajo na očeh javnosti za vedno.

Več o tej temi si lahko preberete v: *Killings and Refugee Flow in Kosovo*, March-June 1999, Ball et al., 2002. ✕ ✕ ✕



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 39, šolsko leto 2011/2012, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2011/2012 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1600 izvodov

© 2012 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1867

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Ugotavljanje resnice

MATEMATIKA

- 4-11** Model pajčevine
(*Janko Marovt*)

FIZIKA

- 12-15** Kako razložiti relativnost?
(*Andrej Likar*)
- 15** Poizkuševalnica za mizo –
Kdaj se škatlica vžigalic
prevrne in kdaj ne?
(*Gorazd Planinšič*)
- 18-20** Poizkuševalnica v sobi –
odgovor naloge – Akvarij?
(*Mojca Čepič*)
- 21** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)

ASTRONOMIJA

- 22-26** Prehod Venere čez Sonce in
zgodovina meritev astronomske enote
(*Andrej Guštin*)
- 26** Astronomske delavnice za
šolsko leto 2012/2013

RAČUNALNIŠTVO

- 27-30** Predstavitev grafa s seznamom
sosedov in pregled v širino
(*Andrej Taranenko*)

RAZVEDRILO

- 31** Naravoslovna fotografija –
Globinska ostrina
(*Aleš Mohorič*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 39/5
(*Marko Bokalič*)
- 11,26** Barvni sudoku
- 21** Sudoku
- 11** Križne vsote

TEKMOVANJA

- priloga** 21. šolsko tekmovanje iz razvedrilne
matematike
- priloga** 21. državno tekmovanje iz razvedrilne
matematike

dobo od nekaj ur do več tednov. Za hlajenje plazme v območju peg je krivo sorazmerno močno magnetno polje. Temperatura v pegi je približno 1500 K nižja kot v okolici, zato tudi manj sije (Stefanov zakon) in je zaradi velikega kontrasta z okolico videti črna. Cikel med dvema maksimuma v povprečju traja nekaj več kot enajst let. Naslednji maksimum aktivnosti pričakujemo sredi prihodnjega leta, po napovedih pa bo peg nekoliko manj kot med leti 2000 in 2003. Kljub temu pa je letos bilo mogoče na Soncu videti že znatno več. S povečano Sončevo aktivnostjo so povezani še številni drugi pojavi, med katerimi so izbruhi v Sončevi koroni, ki lahko ob trku z ozračjem priredijo pravo optično predstavo – polarne sije, o čemer ste v Preseku lahko že brali. Jeseni in prihodnjo zimo ter pomlad se lahko zgodi, da bo polarni sij občasno viden tudi v Sloveniji. Foto: ESO/NASA

SLIKA NA NASLOVNICI: Januarja 2008 se je ob minimumu Sončeve aktivnosti začel 24 cikel aktivnosti. Ta se v vidni svetlobi kaže v periodičnem večanju in manjšanju povprečnega števila peg v fotosferi Sonca. Pege so hladnejša območja v fotosferi, ki imajo življenjsko

Model pajčevine



JANKO MAROVT

→ Predstavili bomo model pajčevine in v okvirih tega modela analizirali obnašanje zaporedja cen enote izdelka, blaga ali storitve za primer linearnih funkcij ponudbe in povpraševanja.

Matematična obravnava ekonomskih zakonitosti je v sodobni literaturi nepogrešljiva. Ekonomska stroka se namreč ukvarja z merljivimi količinami, med katerimi so določene medsebojne odvisnosti. Njihove vrednosti so seveda odvisne tudi od časa. Matematični modeli, ki bolj ali manj natančno opisujejo in ponazarjajo te odvisnosti, omogočajo po eni strani analizo teh odnosov, po drugi strani pa nudijo možnost, da predvidimo, kako se bodo, ob izbranih predpostavkah, vrednosti spremenljivk obnašale v prihodnosti.

Eden najbolj preprostih modelov, ki pa je hkrati eden najbolj uporabnih, je „model“, ki opisuje povpraševanje in ponudbo po nekem blagu, storitvi ali izdelku na trgu. „Model“ zanima odnos med samo dvema spremenljivkama:

- ceno enote izdelka, ki jo ponavadi označujemo s črko p ,
- količino izdelka na trgu, ki jo ponavadi označujemo s črko q .

„Matematični model“ temelji na preprosti ideji po-nazoritve odnosa med ceno p in količino q z grafom funkcije v pravokotnem koordinatnem sistemu. Pri tem ločimo dve funkciji: funkcijo povpraševanja in funkcijo ponudbe.

Funkciji povpraševanja in ponudbe

Povpraševanje (ang. demand) po nekem blagu, iz-



delku ali storitvi v določenem časovnem intervalu je odvisno od številnih dejavnikov, ki vladajo na trgu. Če se omejimo le na odvisnost od cene, dobimo funkcijo, ki ji pravimo funkcija povpraševanja. To funkcijo bomo označevali s $q_D(p)$. Vrednost funkcije povpraševanja nam pove, koliko enot izdelkov q bo (ali bi vsaj lahko bilo) na trgu prodanih v nekem obdobju pri ceni enote izdelka p . Na odnos med količino povpraševanja q in ceno izdelka p lahko gledamo tudi drugače. Denimo, da poznamo količino q in da iščemo ceno p . Gre za ceno, ki bi jo bili pripravljeni za enoto izdelka plačati potrošniki, če bi bilo na voljo q enot izdelka, ali drugače, če en potrošnik kupi največ en izdelek, potem nam vrednost spremenjivke p pove, kakšna je cena enote izdelka, ki bi jo bilo pripravljeno za izdelek plačati q potrošnikov. Tako dobimo (inverzno) funkcijo povpraševanja $p_D(q)$, kjer je cena izražena v odvisnosti od količine. V ekonomskih učbenikih je običajno (po dogovoru) količina povpraševanja q prikazana v pravokotnem koordinatnem sistemu na abscisni osi, cena p pa na ordinatni osi.

Z večanjem cene se v normalnih tržnih razmerah povpraševanje po izdelku manjša. Izjema so npr. prestižni izdelki, kot so dragi avtomobili ali nakit, kjer se lahko zgodi, da se z večanjem cene povpraševanje celo poveča. V normalnih tržnih razmerah je torej funkcija povpraševanja strogo padajoča funkcija, npr. $q_D(p) = 30 \cdot e^{-p/5}$. Z vprašanji prilagajanja izbrane krivulje dejanskim podatkom se ukvarjata statistika in ekonometrija.

Tudi količina ponudbe (ang. supply) nekega izdelka, ki ga proizvajalci v danem časovnem intervalu ponudijo na trgu, je odvisna od mnogih dejavnikov. Če se omejimo le na odvisnost količine ponudbe od cene, dobimo funkcijo ponudbe, ki jo bomo označevali s $q_S(p)$. Vrednost funkcije ponudbe nam torej pove, kakšna je količina q izdelkov, ki jo proizvajalci ponudijo na trgu, če je cena enote izdelka enaka p . V normalnih tržnih razmerah je funkcija ponudbe strogo naraščajoča funkcija, npr. $q_S(p) = 10 \cdot p - 2$.

Pri risanju grafov funkcij ponudbe in povpraševanja se moramo zavedati, da imamo opravka z realnimi, nenegativnimi ekonomskimi količinami, kar pomeni, da smo pri risanju vedno omejeni le na prvi kvadrant. V ekonomskih učbenikih je navada, da graf funkcije povpraševanja označimo s črko D , graf funkcije ponudbe pa s črko S .

Zgled 1

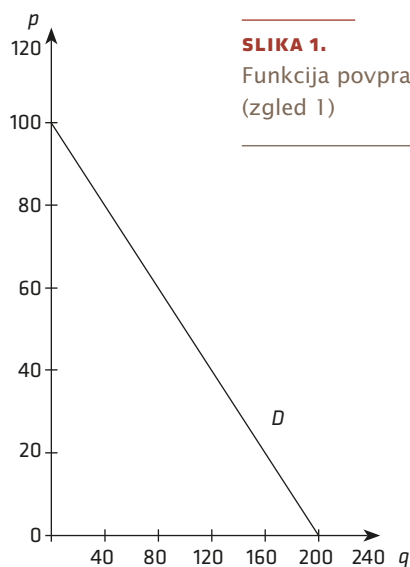
Denimo, da na nekem trgu (npr. v Celju) ne bo nihče pripravljen kupiti video igrice Super Mario, če bo cena ene enote te igrice 100 denarnih enot ali več. Privzemimo tudi, da smo z raziskavo ugotovili, da se povpraševanje po tej igrici spreminja linearno (funkcija $q_D(p)$ je linearna) in da bo v primeru, če je cena enote igrice 40 denarnih enot, prodanih 120 enot igrice. Na grafu funkcije povpraševanja $q_D(p)$ (premici) torej ležita točki $T_1(100, 0)$ in $T_2(40, 120)$. Smerni koeficient je tako enak

$$\blacksquare k = \frac{120 - 0}{40 - 100} = -2.$$

Če upoštevamo smerni koeficient k in (na primer) točko T_1 , bo poljubna točka (p, q) , ki leži na grafu funkcije $q_D(p)$, zadoščala enačbi: $q - 0 = -2 \cdot (p - 100)$. Tako je

$$\blacksquare q_D(p) = -2p + 200$$

funkcija povpraševanja. Narišimo funkcijo $p_D(q)$. Ker je $q = -2p + 200$, je $2p = 200 - q$ in zato $p_D(q) = 100 - \frac{1}{2}q$. Upoštevamo, da je $p_D(0) = 100$ in $p_D(200) = 0$.



SLIKA 1.
Funkcija povpraševanja
(zgled 1)

Zgled 2

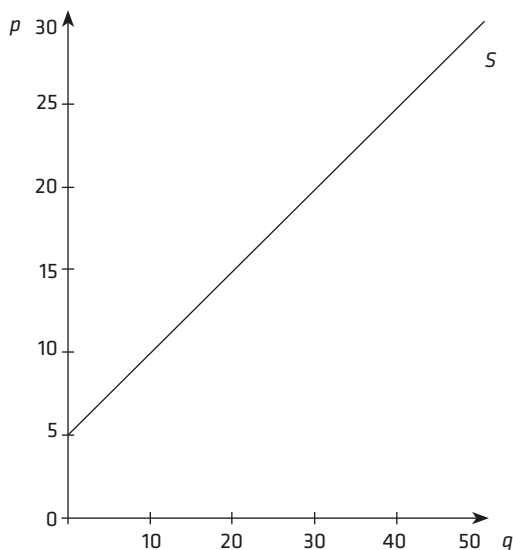
Denimo, da je funkcija ponudbe $q_S(p)$ športnih



→ majic v nekem trgovskem centru linearna in bo proizvajalec pripravljen ponuditi majice samo v primeru, če bo cena ene majice večja kot pet denarnih enot. Zadnji podatek nam pove, da na iskani premici leži točka $T_1(5,0)$. Predpostavimo še, da smo ugotovili, da bo pri ceni desetih denarnih enot proizvajalec pripravljen ponuditi deset enot izdelka (deset majic). Ne premici leži torej tudi točka $T_2(10,10)$. Bralec lahko sedaj sam ugotovi, da je funkcija ponudbe naslednje oblike:

■ $q_S(p) = 2p - 10$.

Vidimo lahko, da bo v primeru, če cena ene majice naraste na 11 denarnih enot, proizvajalec priskrbel $q_S(11) = 12$ majic. Za vsako povečanje cene za eno denarno enoto, bo proizvajalec ponudil dve majici več. Narišimo funkcijo $p_S(q)$. Iz $q = 2p - 10$ sledi, da je $2p = q + 10$ in zato $p_S(q) = \frac{1}{2}q + 5$. Upoštevamo, da je $p_S(0) = 5$ in $p_S(10) = 10$.

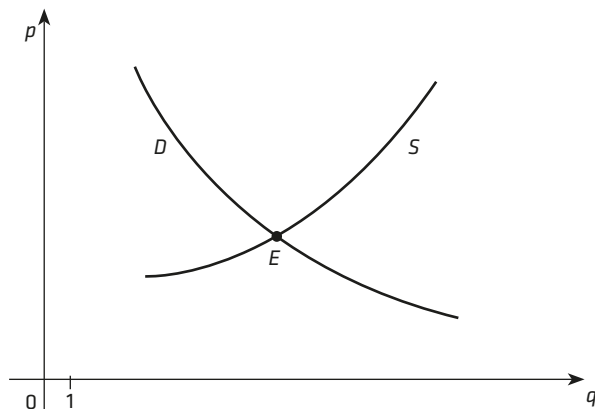


SLIKA 2.
Funkcija ponudbe (zgled 2)

Tržno ravnoesje

Denimo, da poznamo vse dejavnike, ki vplivajo na povpraševanje in ponudbo nekega izdelka na trgu. Z drugimi besedami, predpostavimo, da poznamo funkciji povpraševanja in ponudbe. Najpomembnej-

še vprašanje, s katerim se ukvarja „matematični model“ povpraševanja in ponudbe, je sledeče. Kolikšni vrednosti količine q in cene p bosta na trgu dejansko doseženi? Trg uravna ceno enote izdelka tako, da se ponudba izdelka na trgu izenači s povpraševanjem [1]. Stanju na trgu, ko se to zgodi, pravimo tržno ravnoesje. Ceno p_* , pri kateri je doseženo tržno ravnoesje, imenujemo ravnotežna cena, količino q_* pa ravnotežna količina. Matematično gledano moramo torej poiskati presečišče krivulj povpraševanja in ponudbe. Na sliki 3 je tržno ravnoesje doseženo v točki E .



SLIKA 3.
Tržno ravnoesje

Zgled 3

Naj bosta funkciji povpraševanja in ponudbe naslednji linearni funkciji:

■ $q_D(p) = -2 \cdot p + 20$

in

■ $q_S(p) = \frac{2}{3} \cdot p - 4$.

Izračunajmo ravnotežno ceno in količino. Poiskati moramo točko, kjer se premici sekata. Iz $q_D(p) = q_S(p)$ dobimo enačbo

■ $-2 \cdot p + 20 = \frac{2}{3} \cdot p - 4$.

Sledi, da je $\frac{8}{3} \cdot p = 24$ in zato $p = 9$. Ravnotežna cena

je $p_* = 9$ denarnih enot. Poiščimo še ravnotežno količino. Iz

$$\blacksquare q_D(9) = -2 \cdot 9 + 20 = 2$$

lahko zaključimo, da je $q_* = 2$ ravnotežna količina. Bralec lahko preveri dobljeni rezultat, tako da v isti koordinatni sistem nariše funkciji povpraševanja in ponudbe.

Posplošimo naše razmisleke na splošni linearni zgled.

Zgled 4

Naj bosta funkciji povpraševanja in ponudbe linearni:

$$\blacksquare q_D(p) = -k_D \cdot p + n_D$$

in

$$\blacksquare q_S(p) = k_S \cdot p + n_S.$$

Pri tem so $k_D, k_S, n_D > 0$. Izračunajmo ravnotežno ceno p_* .

Iz

$$\blacksquare -k_D \cdot p + n_D = k_S \cdot p + n_S$$

sledi, da je iskana cena enaka $p_* = \frac{n_D - n_S}{k_D + k_S}$.

Omenimo, da koeficient k_D določa „občutljivost“ potrošnikov na ceno izdelka. Večji kot je ta koeficient, močnejše bo ob danem povečanju cene zmanjšanje povpraševanja.

Zgled 5

Vzemimo funkcijo povpraševanja iz zgleda 3: $q_D(p) = -2 \cdot p + 20$. Tako je $k_D = 2$. Denimo, da je cena izdelka $p = 8$ denarnih enot in predpostavimo, da to ceno povečamo na $p = 9$ denarnih enot. Povpraševanje pri ceni $p = 8$ je $q_D(8) = 4$, pri ceni $p = 9$ pa $q_D(9) = 2$. Povpraševanje pade ob povečanju cene iz $p = 8$ na $p = 9$ za dve enoti.

Vzemimo sedaj funkcijo povpraševanja $q_D(p) = -p + 20$. Tokrat je $k_D = 1$. Sledi, da je $q_D(8) = 12$ in $q_D(9) = 11$. Povpraševanje se tokrat pri povečanju

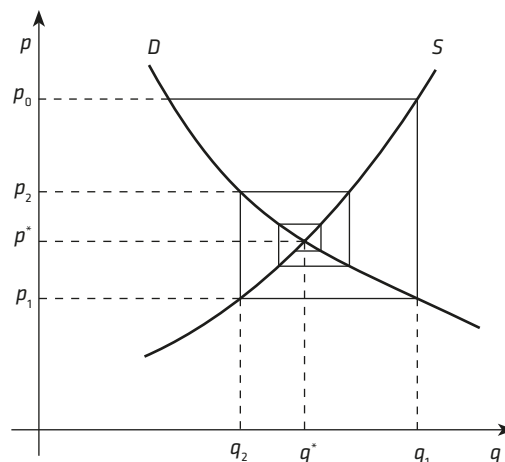
cene iz osem na devet denarnih enot zmanjša le za eno enoto.

Podoben koeficient k_S določa „občutljivost“ proizvajalcev na ceno: večji kot bo ta koeficient, močnejše bo ob danem povečanju cene povečanje ponudbe.

Kljub znani funkciji povpraševanja in ponudbe se v praksi pogosto zgodi, da na trgu v nekem obdobju cena izdelka ni enaka ravnotežni ceni. Na ponudbo izdelka na trgu lahko namreč vplivajo tudi številni zunanji dejavniki kot so npr. vremenske ujme.

Model pajčevine

Vzemimo kmetijski pridelek (npr. pšenico ali hmelj) in denimo, da za ta pridelek poznamo funkciji povpraševanja in ponudbe, ki sta prikazani na sliki 4. V primeru, da ni zunanjih motenj, bosta na trgu doseženi ravnotežna cena p_* in ravnotežna količina q_* . Denimo, da je zaradi zunanjih dejavnikov, kot je npr. suša, pomanjkanje pridelka na trgu. Zaradi tega pomanjkanja zraste na trgu cena (enote) pridelka iz p_* na p_0 . Kmetje pozimi načrtujejo količino proizvodnje pridelka za prihajajoče leto. Svoje načrte delajo na osnovi višje cene pridelka p_0 , zato se v naslednjem letu na trgu pojavi večja količina pridelka: $q_1 = q_S(p_0)$. Ker pa je sedaj količina pridelka na trgu večja, pade cena, ki jo za enoto pridelka plačujejo potrošniki. Nova cena znaša $p_1 = p_D(q_1)$. Zaključimo lahko, da je zaradi zunanjih motenj cena na trgu najprej narasla iz p_* na p_0 , nato pa padla na od ravnotežne cene p_* na nižjo ceno p_1 .



SLIKA 4.
Model pajčevine



Proces se ponovi v naslednjem letu. Nižja cena p_1 privede do zmanjšanja proizvodnje pridelka. Količina proizvodnje pade na q_2 , kar porodi višjo ceno p_2 . Z nadaljevanjem procesa dobimo zaporedji cen $p_0, p_1, p_2, \dots$ in količin $q_0, q_1, q_2, \dots$. Iz slike 4 lahko vidimo, zakaj je ta model napovedovanja prihodnjih cen in količin dobil ime „model pajčevine“ (ang. cobweb model).

Čas je v modelu pajčevine obravnavan kot diskretna spremenljivka, kar pomeni, da čas razdelimo na posamezna obdobja (npr. leta): $t = 0, 1, 2, \dots$. Na sliki 4 cene p_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, nihajo okrog ravnotežne cene p_* . Slika 4 nakazuje tudi, da se cene s časom vse bolj „približujejo“ ravnotežni ceni; matematiki bomo rekli, da zaporedje cen p_t s časom konvergira proti ravnotežni ceni p_* . V splošnem temu ni nujno tako. Lastnosti zaporedja cen so odvisne od začetne cene p_0 , funkcije ponudbe q_S in od (inverzne) funkcije povpraševanja p_D . Če posplošimo, cena p_t v obdobju t določa količino ponudbe q_{t+1} v obdobju $t + 1$, ki nato določa ceno p_{t+1} :

$$\blacksquare \quad q_{t+1} = q_S(p_t), \quad p_{t+1} = p_D(q_{t+1}). \quad (1)$$

Ceno p_{t+1} v obdobju $t + 1$ določimo s pomočjo funkcije p_D in pri tem upoštevamo temeljno načelo, po katerem bo trg v ravnovesju, če bo količina ponudbe v vsakem obdobju enaka količini povpraševanja.

Splošni linearni primer

Naj bosta funkciji povpraševanja in ponudbe linearni funkciji

$$\blacksquare \quad q_D(p) = -k_D \cdot p + n_D \quad (2)$$

in

$$\blacksquare \quad q_S(p) = k_S \cdot p + n_S,$$

$k_D, k_S, n_D > 0$. Izrazimo iz (2) ceno p . Iz $q = -k_D \cdot p + n_D$, sledi, da je $k_D \cdot p = -q + n_D$ in zato $p_D(q) = -\frac{1}{k_D} \cdot q + \frac{n_D}{k_D}$. Iz (1) dobimo

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= -\frac{1}{k_D} \cdot q_{t+1} + \frac{n_D}{k_D} \\ &= -\frac{1}{k_D} \cdot (k_S \cdot p_t + n_S) + \frac{n_D}{k_D} \\ &= -\frac{k_S}{k_D} \cdot p_t + \frac{n_D - n_S}{k_D}. \end{aligned}$$

Označimo $a = -\frac{k_S}{k_D}$ in $b = \frac{n_D - n_S}{k_D}$, da dobimo enačbo

$$\blacksquare \quad p_{t+1} - a \cdot p_t = b. \quad (3)$$

Naš cilj je poiskati vse rešitve te enačbe. Bralec lahko opazi, da ne gre za „običajno“ enačbo, katere rešitev je neko število. Rešitev so namreč vsa zaporedja p_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, ki ustrezajo enačbi (3).

Preverimo najprej, če obstaja konstantno zaporedje $p_t = F$, ki ustreza tej enačbi. (Za mlajše bralce omenimo, da pod pojmom konstantno zaporedje mislimo na zaporedje enakih števil: $F, F, F, \dots$.) Ker je $p_t = F$ za vsak t , je tudi $p_{t+1} = F$ in zato $F - a \cdot F = b$. Sledi, da je $F \cdot (1 - a) = b$. Enačbo delimo z $(1 - a)$, kar lahko storimo, saj je a negativna konstanta in zato $a \neq 1$. Tako je $F = \frac{b}{1-a}$. Zaporedje $p_t = \frac{b}{1-a}$ ustreza zgornji enačbi. Da bomo našli vse rešitve enačbe (3) si bomo pomagali s preprostim trikom. Vpeljimo novo neznanko z_t na naslednji način:

$$\blacksquare \quad p_t = \frac{b}{1-a} + z_t. \quad (4)$$

Sledi, da je $p_{t+1} = \frac{b}{1-a} + z_{t+1}$. Iz enačbe (3) sledi, da je

$$\blacksquare \quad \frac{b}{1-a} + z_{t+1} - a \cdot \left(\frac{b}{1-a} + z_t \right) = b,$$

kar prevede enačbo (3) na preprostejšo obliko:

$$\blacksquare \quad z_{t+1} = a \cdot z_t. \quad (5)$$

Denimo, da poznamo prvi člen z_0 zaporedja z_t . Po (5) je $z_1 = a \cdot z_0$, $z_2 = a \cdot z_1$ in zato $z_2 = a^2 \cdot z_0$. Podobno je $z_3 = a^3 \cdot z_0$. Zaključimo lahko, da je

$$\blacksquare \quad z_t = a^t \cdot z_0.$$

Dobljena enakost velja za poljubno izbiro vrednosti z_0 . Iz enačbe (4) sledi, da je $z_0 = p_0 - \frac{b}{1-a}$, zato je $z_t = \left(p_0 - \frac{b}{1-a} \right) \cdot a^t$. Sledi (glej enačbo (4), da je vsako zaporedje, ki ustreza enačbi (3), naslednje oblike:

$$\blacksquare \quad p_t = \left(p_0 - \frac{b}{1-a} \right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}. \quad (6)$$

Spomnimo se, da je $b = \frac{n_D - n_S}{k_D}$. V zgledu 4 smo ugotovili, da je ravnotežna cena enaka $p_* = \frac{n_D - n_S}{k_D + k_S}$. Bralec lahko preveri, da je $p_* = \frac{b}{1-a}$. To ni presenetljivo, saj v primeru, če se proces začne (brez „zuna-

njih motenj“) pri ravnotežni ceni $p_0 = p_*$, pričakujemo, da bodo tudi vse prihodnje cene p_t enake ceni p_* . Zaključimo lahko, da se cena v modelu pajčevine pri linearnih funkcijah povpraševanja $q_D(p) = -k_D \cdot p + n_D$ in ponudbe $q_S(p) = k_S \cdot p + n_S$ s časom spreminja po naslednjem predpisu:

$$p_t = (p_0 - p_*) \cdot \left(-\frac{k_S}{k_D}\right)^t + p_*, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Konvergenca zaporedja cen

Z modelom napovedujemo prihodnje cene p_t . Na sliki 4 se cene s časom vse bolj „približujejo“ ravnotežni ceni. Zastavlja se vprašanje, če je vedno tako. Še naprej naj bo $a = -\frac{k_S}{k_D}$. Analizirajmo spreminjanje cene p_t v odvisnosti od a . V ta namen ločimo tri primere:

- (a) $-1 < a < 0$,
- (b) $a = -1$,
- (c) $a < -1$.

Preden bomo preučili vse tri primere, si zastavimo naslednjo nalogo.

Naloga

Analizirajmo zaporedje $(-1/2)^t$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Gre za zaporedje

$$(-1/2)^0, (-1/2)^1, (-1/2)^2, (-1/2)^3, (-1/2)^4, \dots$$

oz.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

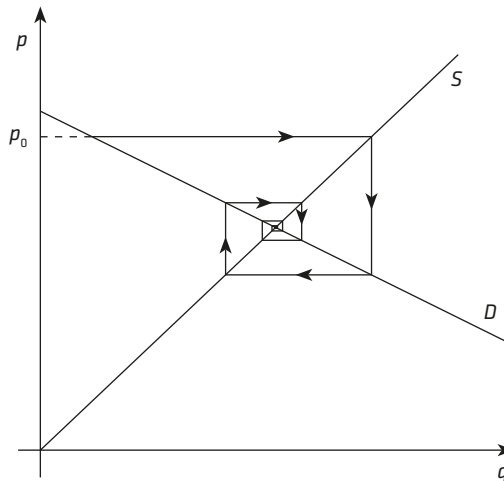
Bralec lahko (tudi brez predznanja o zaporedjih) ugotovi, da se členi zaporedja z večanjem t „bližajo“ številu 0. Zaporedje $(-1/2)^t$ konvergira proti 0. Ugotovimo lahko tudi, da pozitivnemu členu zaporedja sledi negativni člen. Pravimo, da členi zaporedja „nihajo“ okrog števila 0 dušeno (s pojemajočo amplitudo).

Ker je v primeru (a) $-1 < a < 0$, lahko na enak način kot pri prejšnji nalogi ugotovimo, da zaporedje a^t (in s tem tudi zaporedje $(p_0 - p_*) \cdot a^t$) niha du-

šeno (s pojemajočo amplitudo) okrog 0. Ker je (glej predpis (7))

$$p_t = (p_0 - p_*) \cdot a^t + p_*,$$

lahko zaključimo, da zaporedje cen p_t niha dušeno (s pojemajočo amplitudo) okrog ravnotežne cene p_* . Pravimo, da je v tem primeru ravnotežna cena asimptotsko stabilna (glej sliko 5). Opozoriti velja, da ekonomisti pogosto za ta primer uporabljajo krajši iz-



SLIKA 5.

Asimptotsko stabilna ravnotežna cena

raz „stabilna“ ravnotežna cena in pravijo, da je trg stabilen.

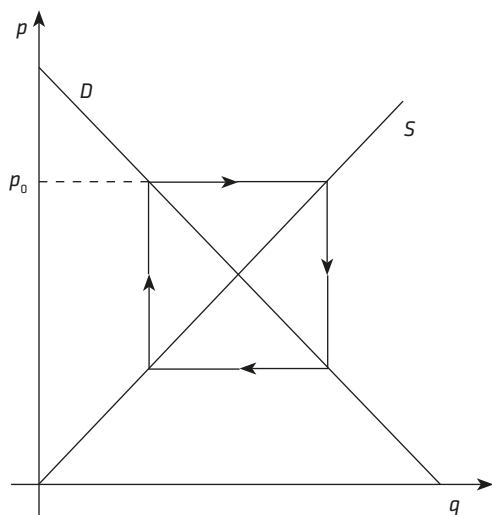
Na podoben način analiziramo primera (b) in (c). V primeru (b) je

$$p_t = \begin{cases} p_0, & \text{če je } t \text{ sodo število} \\ 2p_* - p_0, & \text{če je } t \text{ liho število.} \end{cases}$$

Cene nihajo enakomerno okrog ravnotežne cene med dvema fiksnima vrednostima: p_0 in $2p_* - p_0$. Pravimo, da je ravnotežna cena p_* v tem primeru stabilna (slika 6).

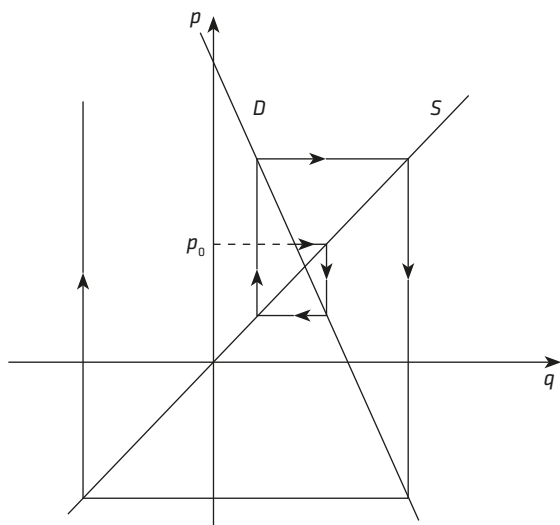
V primeru (c) cene spet nihajo okrog ravnotežne cene, a z naraščajočo amplitudo. Ravnotežna cena je nestabilna (slika 7). Ekonomisti pravijo, da je v tem primeru trg nestabilen.

Ugotovitve lahko povzamemo v naslednji trditvi, ki je v ekonomiji znana kot cobweb izrek [2].



SLIKA 6.

Stabilna ravnotežna cena



SLIKA 7.

Nestabilna ravnotežna cena

Trditev

Če so proizvajalci manj občutljivi na ceno kot potrošniki (i. e. $k_S < k_D$), potem bo trg (asimptotsko) stabilen. Če so proizvajalci bolj občutljivi na ceno kot

potrošniki (i. e. $k_S > k_D$), bo trg nestabilen.

Zgled 6

Naj bosta funkciji povpraševanja in ponudbe naslednje oblike:

$$\blacksquare q_S(p) = 3p - 21500$$

in

$$\blacksquare q_D(p) = 8500 - p.$$

Če je začetna cena $p_0 = 7501$, preverimo, kako se obnaša zaporedje cen.

Iz enačb (1) dobimo naslednji enačbi:

$$\blacksquare q_{t+1} = 3p_t - 21500, \quad p_{t+1} = 8500 - q_{t+1}.$$

Sledi, da je

$$\blacksquare p_{t+1} = 8500 - (3p_t - 21500)$$

in zato

$$\blacksquare p_{t+1} + 3p_t = 30000.$$

Ob upoštevanju, da je $p_0 = 7501$, $a = -3$ in $b = 30000$, sledi iz predpisa (6), da je:

$$\blacksquare p_t = \left(7501 - \frac{30000}{1+3}\right) \cdot (-3)^t + \frac{30000}{1+3} \\ = (-3)^t + 7500.$$

Ker je $a < -1$, gre za primer (c). Ravnotežno cena je enaka

$$\blacksquare p_* = \frac{b}{1-a} = \frac{30000}{1-(-3)} = 7500.$$

S časom nihajo cene p_t okrog ravnotežne cene $p_* = 7500$ z naraščajočo amplitudo. Pri tem je na mestu vprašanje, če je tako obnašanje zaporedja cen sploh mogoče v realnem svetu ekonomije. Model namreč napoveduje, da bodo za dovolj velike vrednosti t nekatere cene celo negativne (glej sliko 7). V tem primeru lahko na model pajčevine gledamo le kot na začasni model napovedovanja prihodnjih cen: v resnici (glej [3]) proizvajalci in potrošniki slej kot prej ugo-

točilo, kaj se dogaja, in spremenijo svoja ravnanja tako, da le-ta niso več v skladu z napovedmi modela.

Literatura

- [1] M. Anthony in N. Biggs, *Mathematics for economics and finance: methods and modeling*, Cambridge University press, Cambridge (1996).
- [2] S. N. Elaydi, *An introduction to difference equations*, Springer-Verlag, New York (1999).
- [3] C. P. Wellford, *A laboratory analysis of price dynamics and expectations in the cobweb model*, Discussion paper 89-15, University of Arizona (1989).

× × ×

Barvni sudoku

↓ ↓ ↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

		5	7		6		3
8						7	
				4			2
			2		6		1
4	1						
				3			
			6				
		2	5		4		

× × ×

Križne vsote

↓ ↓ ↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9, tako da je vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	8	19					
8						7	16
16			9		15		
	5			17			
		21		11			
			4				

↓ ↓ ↓

REŠITEV

		1	3	4			
		9	8	7	21		
7	1	6	11	2	3	5	
9	9	15	16	9	6	7	16
16	7				7	1	8
					19	8	

× × ×

Kako razložiti relativnost?



ANDREJ LIKAR

→ V prejšnjem zapisu sem ob pogovoru s prijateljem Bogdanom poskušal osvetliti nekaj ključnih dejstev teorije relativnosti. Seveda se pogovor ni zaključil tam, kjer se je končal zapis. Nadaljevala sva nekako takole.

„Lastnosti prostora in časa, lastnosti prostora in časa,“ je nezadovoljno brundal Bogdan. „A tu sta še zdrava pamet in logika. Če moja ura in opazovalčeva nista ubrani, ena vedno prehiteva drugo ali pa ena vedno zaostaja za drugo, ali ne? Kako potem lahko trdiš, da sta opazovalca enakopravna? Tisti, deniva, s počasnejšo uro je, spet deniva, na boljšem.“

Takoj mi je bilo jasno, da zadeve nisem dobro razložil. To o drugačnem teku ur v različnih opazovalnih sistemih ni tako preprosto, kot je Bogdan dojel. Moral sem izostriti razlago: „Deniva, da merim čas, ki poteče od oddaje svetlobnega bliska proti zame mirujočemu zrcalu do sprejema odbitega bliska. Rečiva temu lastni čas bliska. Potem pa merim to isto, le da me zanima čas od oddaje bliska do trenutka, ko ti sprejmeš ta blisk. Ti pa se giblješ vzporedno z zrcalom in si v trenutku, ko sprožim blisk, tik ob meni. Ker svetloba opravi daljšo pot, (tu sem narisal sliko 1), namerim tudi daljši čas kot prej. Ti pa seveda izmeriš krajši čas bliska, saj si glede tega na istem kot jaz pri prvi meritvi. Ob teh izidih sicer lahko rečem, da tvoja ura zaostaja, a ti ne bom svetoval, da jo popraviš. Oba sva namreč povsem na istem, in če sedaj ti meriš čas, ki ga potrebuje od tebe oddan blisk proti zrcalu in ki po odboju prispe do mene, boš ugotovil prav isto kot jaz: moja ura, kako nenadejano, zaostaja za tvojo.“

„No, to pa je že od sile. Obe uri sta hkrati hitrejši



in počasnejši. Sicer je vsaj v tem logika, da postavi oba opazovalca v enakopraven položaj. A kako je sedaj z merjenjem časa? Enkrat je čas daljši, drugič spet krajši, situacija pa je za oba enaka, saj oba opazujeva oddajo in sprejem istega bliska. Moja ura zate zaostaja, zame pa zaostaja tvoja ura. Priznaj, da to res ni logično.“

„Seveda ni v obliki, ki si jo povedal,“ sem mu moral priznati. „A med mojim sprejemom bliska in tvojim, gledano z mojimi očmi, je bistvena razlika. Jaz sem svojo uro pognal v trenutku, ko sem blisk oddal, in jo ustavil, ko sem ga prejel, sicer prav tako kot ti, a oboje se je zgodilo v zame isti točki prostora. Ko pa sem meril čas, ki ga blisk porabi do tebe, se oddaja in sprejem nista zgodila v isti točki prostora. In prav to je odločilo o presoji, katera ura zaostaja. Bolje rečeno, namerjeni čas je najkrajši v sistemu, kjer se dogodka, ki sproži in ustavi uro, zgodita na istem mestu. Takemu času pravimo *lastni čas*, za razliko od *koordinatnega časa*, ki je vedno daljši od lastnega časa.“

Bogdanu je zadeva počasi začela presedati. Preprostih odgovorov ni bilo več, vse se je začelo preveč zapletati. Nič trdnega, jasnega, absolutnega. Resignirano je povedal: „Navajen sem, da če ura zaostaja, pač zaostaja, ne glede na okoliščine.“ Že sva se začela meniti o nečem drugem, ko se je Bogdan nenadoma domislil. „Vse se pa le ne more zgoditi na istem mestu, pomisli na merjenje dolžine palice. Imam ribiško palico, en konec je tik ob meni, drugi pa za razdaljo L od mene v smeri gibanja. Kako boš izmeril njeno dolžino, saj se zate palica premika?“

„Preprosto! V trenutku, ko je en konec palice tik ob meni, bom sprožil uro. Ko pa pripotuješ k meni še ti z drugim koncem palice, pa bom uro ustavil. In dolžina je hitrost najinega medsebojnega gibanja krat izmerjeni čas.“

Bogdan je zasijal: „Čudovito, pa sem te ujel. Če tako merim tudi jaz, in tega mi ne moreš preprečiti, bo pa vse narobe! Kajti moj čas bo drugačen, ker moja start in stop zame nista na istem mestu, in palica bo zame daljša. Medsebojno hitrost pa oba vidiva enako veliko, sicer spet ne bi bila enakopravna. A ker sem palico izmeril tudi z metrom, o moji meritvi ne more biti dvoma, ure gor ali dol. Denimo,

da je dolga točno en meter, ti boš pa nameril krajšo palico. To pa ni logično, saj bi morala palica v tem primeru biti stisnjena, o kakih silah pa ne jaz ne ti nič ne vea.“

Pravilen sklep, ni kaj. A Bogdan ne ve, da ima teorija relativnosti še eno presenečenje. Ne le, da gredo ure po svoje, tudi dolžine niso povsod to, kar naj bi bile. Mirno sem odvrnil: „Palico le vidim krajšo, ni pa zato stisnjena.“

„To pa ne gre. Meter je meter, pa naj ga gledaš od koderkoli. Bo pa že kaj narobe s teorijo relativnosti!“

Spet napad. Sledi obramba: „Le kaj je tu narobe? Sicer pa, kako pa bi ti izmeril dolžino gibajoče se palice?“

„Tekel bi za njo in, ko se ne bi več gibala, bi jo izmeril z metrom.“

„No, to bi bila meritev v nekem drugem sistemu, saj si se moral pospešiti, da si lahko tako meril.“

„No, potem pa tako, da bi hkrati naredil oznako obeh koncev palice na tla in potem izmeril dolžino.“

„Bravo, tako je edino prav. A kleč je prav tu. Razlika med najinima meritvama je ravno v tem, da kar je zate hkrati, ni vedno hkrati tudi zame. Od tod pride razlika v dolžinah. Spet lahko govoriva o *lastni dolžini*, ki je vedno daljša od *koordinatne dolžine*.“

Tu je Bogdan pritrdil. Spomnil se je najinega pogovora pred časom, ko je beseda tekla o istočasnosti. Spomnil se je: „O tem sva pa res že govorila. Če se prav spomnim, si mi povedal primer potnikov na drvečem vlaku in potnika, ki čaka na postaji. Tam se dobro vidi, da istočasnost ni absolutna, če privzamemo, da se svetloba za vse tri giblje z enako hitrostjo. Kar vidita potnika na vlaku kot istočasno, ni tako za potnika na postaji.“ Kljub temu je še napeto premišljeval. Spet ni bil povsem zadovoljen: „A pomisli, da bi imel v roki metrsko palico, postavljeno prečno na najino medsebojno gibanje, ti pa ravno tako. V tem primeru pa bi morala nameriti enaki dolžini, saj sva glede na tako postavljeni palici povsem enakopravna, če pa bi izmerila različni dolžini, pa ne bi bila?“





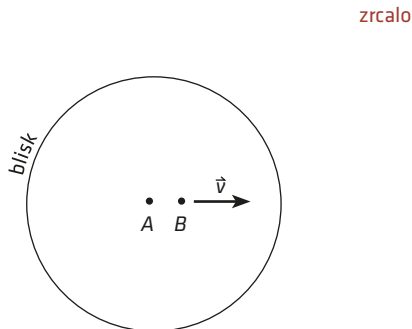
„Točno, dolžine prečno postavljenih palic so enake za oba.“

„No, kaže, da imaš odgovor na vsako zagato,“ je zaključil Bogdan.

Pa sem le nekoga prepričal, da teorija relativnosti ni povsem nerazumljiva. „Seveda, relativnost pač nima notranjih neskladnosti, kot je to davno tega pokazal Albert Einstein, takrat še mladenič pri šestindvajsetih.“

Bogdan končno: “Sedaj mi je jasno, zakaj te teorije niso mogli kar tako sprejeti tudi izkušeni fiziki na začetku 20. stoletja.”

„In še danes se najde kak dvomljivec, ki bi rad sesul relativnost, ne vedoč, da je podprta z brez števila poskusov.“

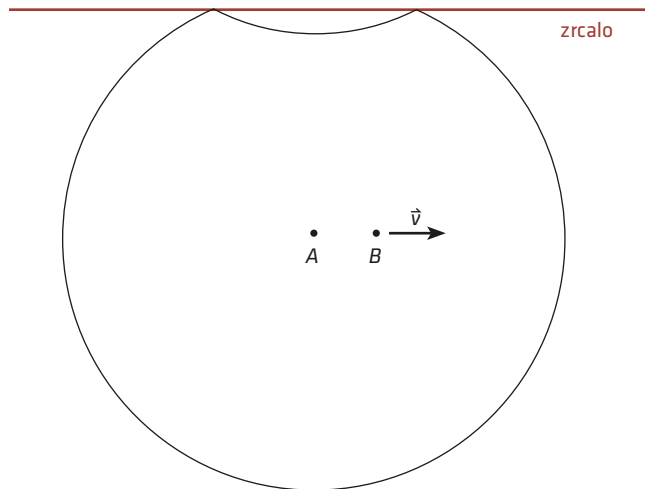


SLIKA 1A.

V trenutku, ko se opazovalca A in B srečata, začne od tam potovati svetlobni blisk proti zrcalu na vrhu slike, kot ga vidi na sliki mirujoči opazovalec A. Na sliki se B giblje vzporedno z zrcalom.

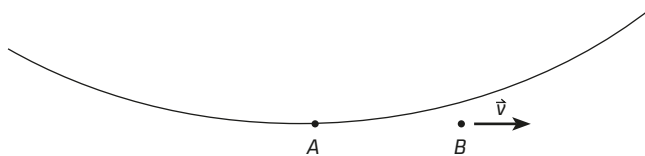
Dodatek k članku

Vlak se po ravni progi pelje s hitrostjo v . Sedite v zadnjem vagonu, v prvem pa sedi vaš prijatelj. V smeri proti prvemu vagonu izsevate svetlobni blisk. Vi in prijatelj ugotovita, da blisk potuje s hitrostjo svetlobe v praznem prostoru c . Na postaji je ostal znanec, ki se za vas oddaljuje s hitrostjo v . Za znanca se vlak giblje s hitrostjo v v smeri od za-



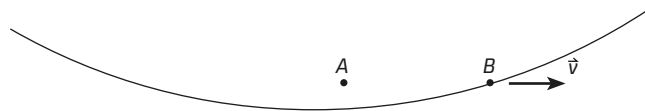
SLIKA 1B.

Svetlobni blisk se od zrcala odbije in potuje proti opazovalcema A in B.



SLIKA 1C.

Odbiti blisk najprej doseže opazovalca A



SLIKA 1Č.

in nato še opazovalca B.

dnjega vagona proti prvemu. Če se za nekega opazovalca gibljete s hitrostjo v , se opazovalec za vas giblje z enako veliko hitrostjo v nasprotni smeri. Za znanca potuje blisk s hitrostjo c v isti smeri. To zagotavlja *načelo relativnosti*, po katerem so vsi nepospešeni koordinatni sistemi enako pripravljeni za opis naravnih pojavov. Če ima svetloba v praznem prostoru v enem od njih hitrost c , ima hitrost c tudi v vseh drugih. Ali bi bilo mogoče, da bi se za znanca oddaljevali s hitrostjo, ki bi preseгла c ? Ne! Če bi se, blisk nikoli ne bi dosegel vašega prijatelja. To pa bi bil popolnoma drugačen pojav od opisanega. Nasprotoval bi načelu relativnosti, ker vaš in znančev koordinatni sistem ne bi bila enako pripravna za opis pojava. Če naj svetloba potuje naprej in če naj velja načelo relativnosti, hitrost vlaka v ne more preseči hitrosti c .

Misel je posneta po članku Edwina F. Taylorja *Why does nothing move faster than light? Because ahead is ahead* v American Journal of Physics 58 (1998) 889–90. Taylor je z Johnom A. Wheelerjem napisal znano knjigo *Fizika prostor-časa*. (Janez Strnad)

× × ×

Kdaj se škatlica vžigalic prevrne in kdaj ne?

↓ ↓ ↓

GORAZD PLANINŠIČ

→ Za poskus potrebujete škatlico vžigalic, mizo in nekaj potrpljenja. Najprej naredite naslednji poskus (1): Zaprto škatlico držite v pokončni legi in jo spustite na mizo z višine približno 20 cm (slika 1a). Poskus večkrat ponovite.

Opazili boste, da se škatlica po dotiku z mizo skoraj vedno prevrne. Nato škatlico nekoliko odprite in jo spustite na mizo z enake višine kot prej (slika 1b). Pri tem naj bo odprti del škatlice obrnjen navzgor. Tudi tokrat poskus večkrat ponovite. Opazili boste, da bo škatlica tokrat skoraj vedno pristala na mizi, ne da bi se prevrnila. Zakaj se je škatlica v prvem poskusu prevrnila, v drugem pa ne? Predlagajte več razlag in razmislite, kako bi jih preverili. Raziščite, kako vpliva na izid poskusa višina, s katere spustite škatlico, in kako število vžigalic v škatlici. Kaj pa, če damo v škatlico kakšen drug predmet, npr. radirko? Več o tem boste lahko prebrali v naslednji številki Preseka.

Opisani poskus in preprosto razlago lahko najdete tudi v knjižici M. Kos, B. Kos, L. Vidic in G. Planinšič, *Znanstveni stalaktiti*, KOSKOS, Ljubljana, 2006.

←

SLIKA 1.

Spuščanje zaprte a) in odprte škatlice b) na mizo.



A painting of a forest scene with tall, thin trees and a small hut in the foreground. The style is somewhat abstract and expressive, with visible brushstrokes. The colors are muted, with greens, browns, and a hint of blue in the sky. The foreground shows a small hut and some foliage.

[illegible]

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **30. junija 2012**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

Akvarij?

ODGOVOR NALOGE



MOJCA ČEPIČ

→ Ste kaj kukali v akvarije? Ste si ogledovali steklene posode od spodaj navzgor? Kaj ste opazili?

Morda najbolj pomenljivo je opažanje, da se večina vodne gladine, ki jo opazujemo od spodaj navzgor, spremeni v zrcalo. V vodni gladini vidimo predmete na dnu posode, vidimo spodnje dele predmetov, ki so delno v vodi in delno nad njo (slika 1 in 2). Zakaj tako?

Spomnimo se preteklih poizkuševalnic, v katerih smo že kar nekajkrat raziskovali, kako so videti predmeti, če jih opazujemo skozi vodo in če jih opazujemo v vodi. Ključno za razumevanje videnega je zavedanje, da oko zazna informacijo o smeri, iz katere pada svetloba vanj, o njeni barvni sestavi oz. spektru in o njeni intenziteti oz. jakosti svetlobnega toka. Danes se bomo pogovarjali o prvih dveh, za jakost svetlobnega toka pa se bomo zgolj strinjali, da je dovolj velika za vidni vtis. Drugače tega, kar opazujemo, sploh ne bi videli.

Pojdimo najprej pred akvarij in si pogledjmo dvojce. Na slikah 1 in 2 vidimo pogled od spodaj za dve okoliščini. Slika 1 kaže običajno opazovanje akvarija, ki je nekoliko privzdignjen nad nivo oči. Ob opazovanju vidimo tudi gladino od spodaj. Vodna gladina deluje kot zrcalo in v njej vidimo zrcalne, na glavo postavljene slike vodnih rastlin. Videti je, kot da rastline rastejo od zgoraj navzdol, vendar so to seveda rastline z dna akvarija. Zrcalne slike rastlin in živali v akvariju lahko vidimo le, če je gladina mirna in gladka. Podobno lahko opazujemo tudi v stekleni posodi z vodo. Če vanjo vržemo predmet, ki potone, ga, od spodaj gledano, vidimo v površini vode; predmetu, ki je delno pod vodo, delno pa nad njo (slika 2 a), vidimo prezrcaljen le del, ki je pod vodo (slika 2 b). Videti je, kot da bi predmet zlezal delno v zrcalo. Zakaj tako?



SLIKA 1.

Če pogledamo v akvarij od spodaj, vidimo v vodni površini zrcalno sliko rastlin v akvariju. Opazimo še svetlo polkrožno del, ki ga od „zrcala“ loči mavrični lok.

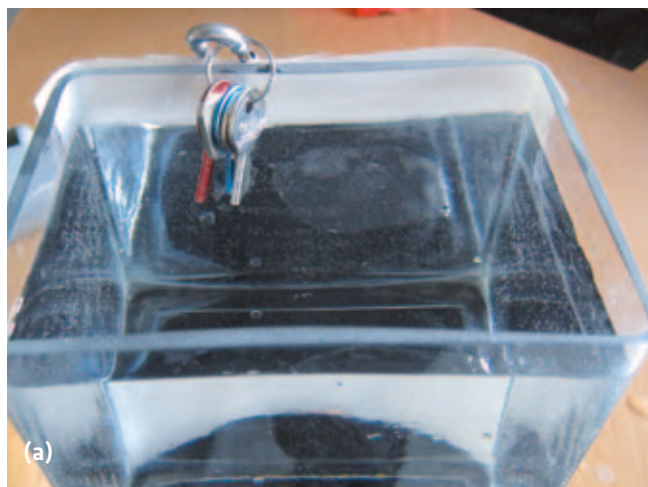
Če se spomnimo ene od prejšnjih poizkuševalnic, se svetloba pri prehodu med dvema sredstvom lomi in predmete zaradi spremenjene smeri vidimo v drugih smereh, kot se dejansko nahajajo.

Lomni zakon za prehod svetlobe iz snovi 1 v snov 2 pravi naslednje:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{oziroma} \quad \sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \quad (1)$$

V enačbi (1) predstavljata α in β vpadni in lomni kot, n_1 in n_2 pa lomna količnika snovi 1 in 2. Medtem ko pri prehodu svetlobe iz snovi 1 v snov 2 z rešitvijo enačbe na desni strani (1) ni nikoli težav, saj je razmerje lomnih količnikov manjše od 1, se pri prehodu svetlobe v obratni smeri lahko zgodi, da enačba nima rešitve. Tedaj ostane svetloba ujeta v snovi in se na površini odbije. Natanko to se zgodi s svetlobo, ki se odbija od predmetov v vodi. Ta svetloba se odbije od vodne površine in pade v naše oči iz druge smeri, kot se nahaja predmet (slika 3). Zdi se nam, da se dvojniki predmetov v vodi nahajajo tudi nad gladino.

Svetloba, ki vpada na vodno površino s spodnje strani, se za vpadne kote, večje od določenega kota, *totalno odbije*. Zakaj totalno? Pri odboju na zrcalu

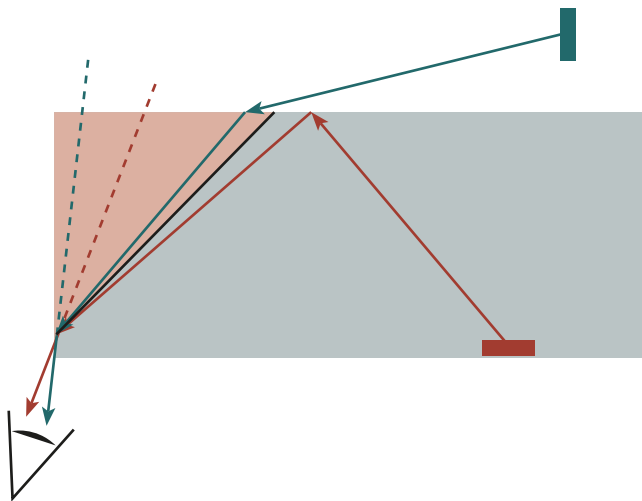
**SLIKA 2.**

V vodo od zunaj lahko gledamo; ključ, ki prebadajo vodno gladino, so vidni v celoti. (b) Površina vode, opazovana od spodaj, deluje kot zrcalo. Vidimo le spodnji del ključev in njihovo zrcalno sliko.

se del svetlobe vedno absorbira, na vodni gladini se v območjih kotov, večjih od mejnega kota totalnega odboja, odbije v celoti. Jakost svetlobnega toka je po odboju popolnoma enaka kot pred njim. Kolikšen je ta kot za vodo? Pri mejnem vpadnem kotu bi se svetloba lomila tako, da bi se po lomu širila neposredno ob površini – torej pod lomnim kotom 90° :

$$\beta = \arcsin \frac{n_1}{n_2} = \arcsin \frac{1.00}{1.33} = 48.7^\circ. \quad (2)$$

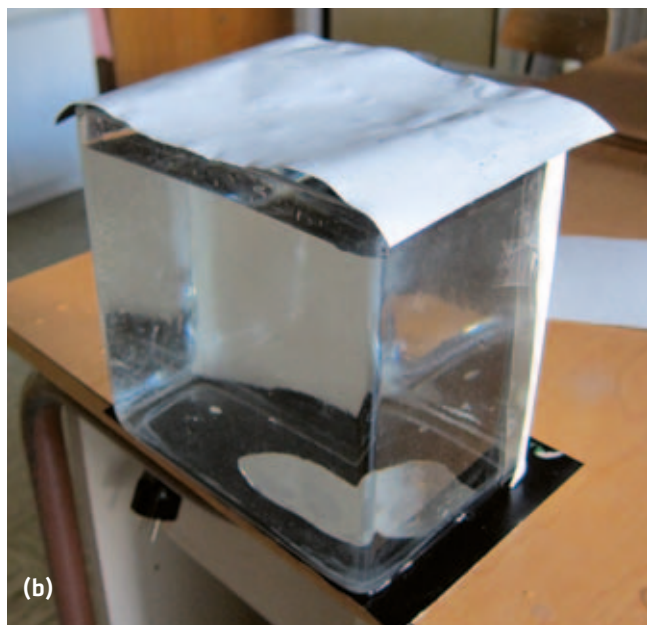
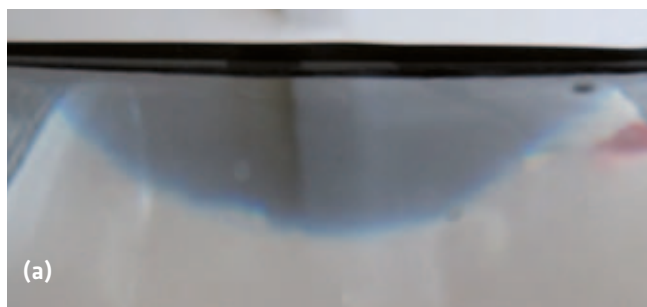
Kot lomni količnik zraka smo upoštevali $n_1 = 1.00$. Vsa svetloba, ki pade na vodno površino z vodne strani pod večjim vpadnim kotom, se totalno odbije. Svetloba, ki pade pod manjšim vpadnim kotom, se odbije zgolj deloma, nekaj svetlobe pa se razširi v prostor na vodo. Zato predmete pod vodo sploh vidimo.

**SLIKA 3.**

Ko opazujemo predmete skozi vodo iz spodnjega levega kota, označenega s stiliziranim očesom ob posodi, vidimo oba predmeta v smeri črtkanih črt. Predmete nad vodo vidimo v smereh levo od črne črte, predmete z dna posode pa v smereh desno od črne črte. Simbolično sta ločeni tudi področji v vodi, skozi katero prehaja svetloba, ki pade v naše oči.

Sedaj pa si podrobneje ogledjmo, kaj se dogaja na robu med področjema, kjer svetloba vodno površino še prehaja in kjer se že totalno odbija. Na sliki 1 vidimo, da celotna vodna gladina ni zrcalo, temveč v delu vodne površine, ki ga od zrcala loči mavrica, vidimo zgolj svetlo liso. To je področje, kjer lahko pogledamo skozi površino v prostor nad vodno gladino. Svetla lisa pa je tam zato, ker je nad akvarijem luč. Na spodnji sliki 3 vidimo, kako svetloba pada v oči opazovalca. Ko gledamo v različnih smereh, vidimo različna območja prostora. Pri opazovanju vodne gladine v akvariju ali posodi z vodo iz večjih oddaljenosti (bolj pravokotno) vidimo vodno povr-

šino kot zrcalo. Pri opazovanju vodne gladine skoraj vzporedno z navpično steno posode pa vidimo skozi površino v prostor. Skozi majhno svetlo območje si lahko teoretično ogledamo (skoraj) celoten prostor nad površino vode. Pri tem svetloba iz prostora nad vodno gladino, ki pade v naše oko označeno na sliki, prehaja skozi osenčeno področje posode na sliki 3. Svetloba, ki se najprej odbije na predmetih ali rastlinah pod vodo, nato pa še od vodne površine, prehaja skozi neosenčeno področje na sliki 3.



SLIKA 4.

(a) Pogled od spodaj skozi posodo z vodo. Modrikasti rob ločuje področji, kjer neposredno opazujemo črn papir, s katerim je posoda pokrita, kot vidimo na (b) in področje, kjer se svetloba od površine odbija.

Če sliko 1 pogledamo podrobneje, vidimo na robu med obema področjema še barvni pas, podoben mavrici. Mavrične barve vidimo v akvariju, medtem ko je pas v posodi s čisto vodo bolj modrikaste ali včasih bolj rdečkaste barve (slika 4). Zakaj tako? Podrobnostim tega pojava lahko v prihodnje posvetimo še eno poizkuševalnico. Sedaj poskusimo razloge povedati le v grobem. Lomni količnik vode je odvisen od frekvence oz. valovne dolžine, ki določa barvo svetlobe. Pravimo, da ima disperzijo. Za valovne dolžine v vidnem področju lahko lomni količnik v odvisnosti od valovne dolžine zapišemo z naslednjo enačbo:

$$\blacksquare \quad n(\lambda) = n_0 - k(\lambda - \lambda_0). \quad (3)$$

V enačbi je $n_0 = 1,331$ pri valovni dolžini rdeče svetlobe $\lambda_0 = 656 \text{ nm}$. Koeficient, ki pove spreminjanje lomnega količnika z valovno dolžino, pa je $k = 4 \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1}$. Enačba pove, da se svetloba rdeče barve lomi manj kot svetloba modre barve. Enako velja tudi za kote totalnega odboja. Svetloba modre barve se bo totalno odbijala pri manjšem vpadnem kotu kot svetloba rdeče barve.

Sedaj lahko razumemo vzrok za obarvano mejo. Iz določene smeri pada v oko svetloba, ki bodisi prehaja površino bodisi se odbija od nje. Ker se lomni količniki za svetlobe različnih barv razlikujejo, se okoli smeri, ki jo na sliki 3 označuje črna mejna črta, dogaja oboje. V oko v isti smeri pada rdeča svetloba, ki prehaja vodno površino, saj za rdečo svetlobo pogoj totalnega odboja še ni izpolnjen, ter modra svetloba, ki se od vodne površine odbija, saj se zaradi večjega lomnega količnika že totalno odbija. Kaj bomo videli, je odvisno od tega, kakšne barvne sestavine ima svetloba, ki preseva vodno površino, in kakšne svetloba, ki se odbija od predmetov pod vodo. Na sliki 4a lahko vidimo, da je rob modrikast, saj smo pokrili površino nad vodo s črnim kartonom (slika 4b) in tako zmanjšali svetlobni tok od zgoraj. V akvariju je bilo mnogo zelenja, na katerem se je odbijala svetloba zelene barve, zato na sliki akvarija vidimo več barv.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

Razmisli in poskusi

↓↓↓

MITJA ROSINA

→

48. Prevroč čaj

Čaj je prevroč, da bi ga spili, a ne moremo predolgo čakati, da se ohladi do primerne temperature. Kaj lahko storiš? Lahko ga preliješ v drugo skodelico, ki prevzame nekaj toplote, vendar ne dovolj. Kdaj boš manj čakal, če najprej preliješ in potem počakaš, ali če najprej počakaš in potem preliješ? Poizkusi! Razloži, zakaj!



ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

Bralce vabimo, da nam pošljejo odgovore tudi o *varčnih žarnicah* (Presek 38, št. 6), o *stopinjah in tračnicah v snegu* (Presek 39, št. 4) in o *preprostem kompasu* (Presek 39, št. 5). Poleti boste imeli dovolj časa, da o tem in še o marsičem razmislite ter se pozabavate s poskusi.

xxx

Sudoku

↓↓↓

→ V 9×9 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 9, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih nastopalo vseh 9 števil.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A		4						9	
B	7	1		3					
C			9	1		2			
D						4			5
E			8		6		2		
F	5			8					
G				5		3	9		
H						1		4	7
I		2						3	

↓↓↓ REŠITEV

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	9	8	4	7	2	6	1
2	4	8	1	2	6	5	9	3	7
3	2	6	3	7	5	4	8	1	9
4	6	3	9	1	8	2	7	5	4
5	1	2	5	6	7	8	3	4	9
6	8	7	4	3	2	1	6	9	5
7	7	9	2	4	1	6	5	8	3
8	5	4	8	6	3	9	1	7	2
9	9	1	7	5	6	3	4	2	8
10	4	8	5	9	7	2	1	6	3

Prehod Venere čez Sonce in zgodovina meritev astronomske enote

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ 6. junija v zgodnjih jutranjih urah bo iz naših krajev viden prehod Venere čez Sončevo ploskev. Pojava sicer ne bo mogoče spremljati v celoti, saj se prehod Venere po našem času začne nekaj čez polnoč. Videli bomo le zadnji del prehoda tik po vzidu Sonca. Za opazovanje nebesnega pojava bo potrebno zato vstati zgodaj, a naslednji prehod Venere bo šele 11. decembra 2117.

V današnjem svetu merimo skoraj vse. Merimo prostor in čas, maso in hitrost, Merimo vse; od kilograma solate do stotink pri slalomu. Zdi se, da je merjenje bistvo spoznanja o naši okolici. S fizikalnega stališča to prav gotovo drži. Fizika je neločljivo povezana z merjenjem in teorije je mogoče potrditi ali ovreči le na podlagi natančnih poskusov, pri katerih merimo to ali ono količino. Kako pa je z vesoljem? Če bi dobili nalogo izmeriti višino stavbe, bi se že nekako znašli. Kako pa bi izmerili oddaljenost Lune, Sonca, planetov in zvezd? Na prvi pogled se nam tako merjenje zdi skoraj nemogoče. Vprašanje o oddaljenosti vesoljskih teles so si postavili prvi zvezdogledi, če ne že kar prvi ljudje, ki so zamaknjeno zrlj v nebo. Gotovo se jim je to zdelo kot



nekakšna polkrogla, v katerem središču je Zemlja, na obodu pa so pritrjene zvezde, planeti. Tudi nam se tako zdi, če stopimo pod jasno nočno nebo. Nikakor ne moremo dojeti trirazsežnosti neba. Seveda je to zaradi velikih razdalj, ki nas ločijo do vesoljskih teles. To je tako, kot bi opazovali oddaljeno pogorje na obzorju ter poskušali ugotoviti razdaljo in višino posameznih gora. Brez znane reference bi težko karkoli rekli o njihovi višini. Toda pri gorah nam pomaga izkušnja; zeleni griči so nižji od zasneženih vršacev in meglica, ki nam daje občutek perspektive, zračna perspektiva. Z vesoljem pa nimamo nikakršnih oprijemljivih izkušenj.

Kako daleč je Sonce?

Že starogrški astronomi so naredili prve ocene oddaljenosti nebesnih teles. S svojimi preprostimi pripomočki, a z dobrim poznavanjem geometrije in bistroumnimi zamislimi, nas še danes presenečajo. Tako se je v tretjem stoletju pred našim štetjem Aristarh s Samosa spopadel s problemom oddaljenosti Sonca in Lune. Pri tem si je pomagal z elementarno trigonometrijo in starim dobrim Pitagorovim izrekom. Spoznal je, da če ob prvem ali zadnjem Luninem kraju izmeri kot med Soncem in Luno na nebu, lahko enostavno pride do razmerja med oddaljenostma Zemlja-Sonce in Zemlja-Luna. Žal pa astronomske naprave starega veka niso omogočile dovolj natančne meritve tega kota, zato je Aristarh menil, da je Sonce 19-krat dlje kot Luna. To je precejšnja napaka, saj je prava vrednost približno 15-krat večja, a zamisel meritve je bila prava. Grki pa se niso ustavili pri tem. Eratosten je z znamenitim vodnjakom in senco zelo dobro ocenil premer Zemlje. To je bila odlična osnova, da so razmerja med oddaljenostmi v vesolju zamenjale številke. Hiparh (190–120 pr. n. št.) je bil brez dvoma največji astronom antike in ga imamo lahko za utemeljitelja sistematskih astronomskih opazovanj. Izdelal je prvi katalog 1080 zvezd, odkril je precesijo enakonočja, med drugim pa se je pozabaval tudi z meritvijo oddaljenosti Lune. V ta namen je izkoristil Lunine mrke in opazoval prehod naše spremljevalke skozi Zemljino senco. Z enostavnim računom je tako ugotovil, da je Luna oddaljena za 59 polmerov Zemlje, kar se dobro ujema s pravo vrednostjo. S tem podatkom Hiparhu ni bilo težko izračunati še oddaljenosti Sonca. Žal pa se je naslonil na staro Aristarhovo oceno, ki pa

je bila slaba, ter tako dobil mnogo premajhno vrednost. Res škoda, sicer bi že pred več kot dva tisoč leti zelo dobro poznali velikosti v Osončju. Tako pa je še v Keplerjevih časih veljalo, da je Sonce približno 7-krat bližje, kot v resnici je. V prvi polovici 17. stoletja je Kepler izdelal Rudolfove tablice o napovedih gibanja planetov, iz katerih je izhajalo, da Merkur in Venera občasno prečkata Sončevo ploskvico. To pomeni, da sta tedaj planeta natanko med Zemljo in Soncem in ju je mogoče kot temni pegici videti na svetlem ozadju naše zvezde. In res se je leta 1631 Merkur navidezno sprehodil čez Sonce. Keplerja žal ni bilo več med živimi, pojav pa je opazoval francoski astronom Pierre Gassendi, ki je tako postal prvi očividec takemu dogodku. O prehodu Venere, ki naj bi se zgodil mesec kasneje, ni bilo ne duha ne sluha, vsaj v Evropi ne. Kepler je poleg tega izračunal, da se bo naslednji prehod Venere zgodil šele sto let kasneje, a se je na srečo uštel. Angleški amaterski astronom Horrocks pa je pravilno izračunal, da bo se bo Venera zapeljala čez Sonce že leta 1639. Toda to mu je uspelo le mesec pred dogodkom. Ker tedaj ni bilo interneta, ni mogel obvestiti drugih astronomov, s prijateljem sta bila prva in edina, ki sta pojav opazovala.

Pomen prehodov Venere

Pomen teh prehodov se je pokazal šele pol stoletja kasneje. Angleški astronom Edmond Halley je v javnosti znan predvsem po znamenitem kometu, ki se vrne v bližino Zemlje približno vsakih 76 let. V zgodovino znanosti pa je zapisan kot najpomembnejši astronom svoje dobe in človek, ki je bistveno pripomogel k izdaji Newtonovega najpomembnejšega dela *Principia* ter k uporabi gravitacijskega zakona.

V drugi polovici 17. stoletja je Halley na otoku Svete Helene opazoval zvezde in izpopolnjeval katalog južnega neba. Leta 1677 je videl tudi prehod Merkurja čez Sonce. Pri tem se je zavedel, da bi z opazovanjem takih dogodkov lahko zelo natančno izmerili oddaljenost Sonca od Zemlje ali t. i. astronomske enote. V njegovem času so bile ocene astronomske enote še vedno zelo nezanesljive in so se od prave vrednosti razlikovale tudi za faktor 10. Zelo pomembno pa bi bilo imeti pravo vrednost, s katero bi lahko določili vse velikosti v Osončju. Iz Keplerjevih zakonov in iz kasneje zapisanega Newtonovega gravitacijskega zakona je namreč mogoče izračunati





oddaljenost vseh planetov od Sonca, če je znana oddaljenost Zemlje od naše zvezde. Halleyeva ugotovitev je bila načeloma enostavna. Če bi prehod opazovali na dveh različnih zemljepisnih širinah, npr. v Evropi in Južni Afriki, potem bi bilo mogoče izračunati oddaljenost Zemlje od Sonca. Morali bi le izmeriti čas začetka in konca prehoda ter zarisati pot Venere čez Sončevo ploskvico. Za tem razmislekom se skriva t. i. paralaksa. Najlažje si princip paralakse ogledamo z enostavnim primerom. Kazalec iztegnjene roke postavimo pokonci, z drugo roko si zakrijemo najprej eno, nato pa drugo oko. Opazimo, da je položaj prsta glede na okoliški prostor drugačen, ko gledamo z enim ali drugim očesom. Če primaknemo prst bližje, vidimo, da je navidezni premik še večji. To je posledica razmika med očesoma, saj vidimo prst z vsakim očesom pod različnim kotom. Nekaj podobnega moramo opaziti, če opazujemo Venero na različnih zemljepisnih širinah. V tem primeru razdaljo med očesoma nadomesti razdalja med krajema. Zaradi tega opazovalca na različnih koncih sveta vidita prehod Venere na različnih mestih ploskvice Sonca. Z malo trigonometrije pa je iz tega mogoče izračunati oddaljenosti med Zemljo, Venero in Soncem. Leta 1716 je Halley izdal zelo pomemben članek, v katerem je opisal meritve razdalje Zemlja-Sonca ob prehodu Venere. Venero je izbral zato, ker nam je bližje in so zato meritve ob njenem prehodu zanesljivejše kot ob prehodu Merkurja. Žal pa se Venera čez Sonce sprehodi le poredko, v intervalih približno 120 let. Po tem daljšem premoru sta dva prehoda osem let narazen, potem pa približno 120 let ni nobenega. V osemnajstem stoletju sta bila prehoda napovedana za leto 1761 in 1769. Tudi tokrat, kot v primeru napovedanega povratka „njegovga“ kometa, ki ga je Halley napovedal, a je pred prihodom umrl, je pripravil pot novim generacijam astronomov, saj sta bila prehoda več kot sto let po njegovem rojstvu.

Prve meritve

In res so astronomi sprejeli Halleyev izziv. Večinoma so bili to Angleži in Francozi, tedaj nosilci astronomskih opazovanj in raziskovanja. Tudi če pozabimo na težave, s katerimi so se morali opazovalci soočiti na potovanjih v zelo oddaljene kraje, da bi videli prehod Venere, tudi politične razmere okoli leta 1761 niso bile najboljše. Ravno tedaj je divjala

sedemletna vojna med Francijo in Anglijo, ki je bila prava svetovna vojna, saj je praktično zajela vse kontinente. Kljub sovražnosti pa so astronomi dobili „prepustnice“, s katerimi so lahko potovali po vojnih krajinih. Tako so se razkropili po vsej zemeljski obli, od Svete Helene sredi Atlantika, Sumatre, Madagaskarja, severa Norveške, Amerike. Že prva opazovanja so dala dobre rezultate in spodbudo za opazovanja osem let kasneje, torej leta 1769, ko je bilo tudi manj rožljanja z orožjem. Pri drugi opazovalni kampanji je sodeloval tudi znameniti pomorščak James Cook. Iz Anglije je z ladjo Endeavor odplul leta 1768, da bi obplul Zemljo, se ob prehodu Venere ustavil še na Tahitiju in opravil astronomske meritve. Po sedmih mesecih je Endeavor srečno pristala na mistično lepem otoku sredi Pacifika. Astronomi so na otoku postavili observatorij, kraj se še danes imenuje Point Venus. Prav Cookove meritve prehoda Venere čez Sonce so bistveno pripomogle k skupnemu svetovnemu uspehu določanja velikosti Osončja. Tedanje meritve odstopajo vsega odstotek od današnjih pravih vrednosti.

Pripravimo se na opazovanje

Prehodi Venere med Soncem in Zemljo si sledijo v intervalih po osem let, 105,5 leta in 121,5 leta. Tako sta bila zaporedna prehoda leta 1874 in 1882, nato pa je bil naslednji leta 2004, ki mu sledi letošnji prehod Venere. Naslednji prehod bo leta 2117, naslednji še osem let kasneje, zato je to verjetno vaša zadnja priložnost, da pojav lahko opazujete.

Za opazovalca v Ljubljani se bo Venerina ploskvica navidežno dotaknila roba Sončeve ploskvice nekaj minut čez polnoč. Tedaj bo Sonce še globoko pod obzorjem in tega ne bo mogoče videti. Sonce v Ljubljani vzide ob 5 uri in 11 minut, ko bo Venera že dobro zakoračila čez njegovo ploskvico. Venera bo vidna kot temna pika, velika približno $1/32$ ploskvice Sonca, ki bo počasi lezla čez Sonce. Prehod bo trajal približno do 6 ure in 55 minut.

Časi vzhoda Sonca so odvisni od geografske lege in se za druge kraje po Sloveniji nekoliko razlikujejo od navedenih. V veliko pomoč je brezplačna mobilna aplikacija *VenusTransit*, ki so jo astronomi razvili za Appleove naprave in Android.

Več podatkov in zanimivosti najdete tudi na spletnih naslovih

■ www.transitofvenus.org

in

▪ eclipse.gsfc.nasa.gov.

Nasveti za opazovanje

Prehod Venere čez Sonce je viden že s prostim očesom. Venera je vidna kot temna pika na ploskvi Sonca. Kljub temu, da bo Sonce še nizko nad obzorjem, moramo oči primerno zaščititi pred njegovo svetlobo. To lahko naredimo s posebno folijo mylar za opazovanje Sonca ali z varilskim steklom gostote 12 ali več. Še lepše je pojav mogoče spremljati z lovskim dvogledom ali teleskopom. Toda, pozor! Nikoli ne smemo v Sonce pogledati skozi daljnogled, saj lahko v trenutku oslepimo! Pomagamo si tako, da Sonce projiciramo na svetel zaslon, na katerem lahko varno opazujemo dogajanje. Neizkušeni opazovalci naj raje počakajo na javna opazovanja, ki jih bodo organizirala astronomska društva po Sloveniji.

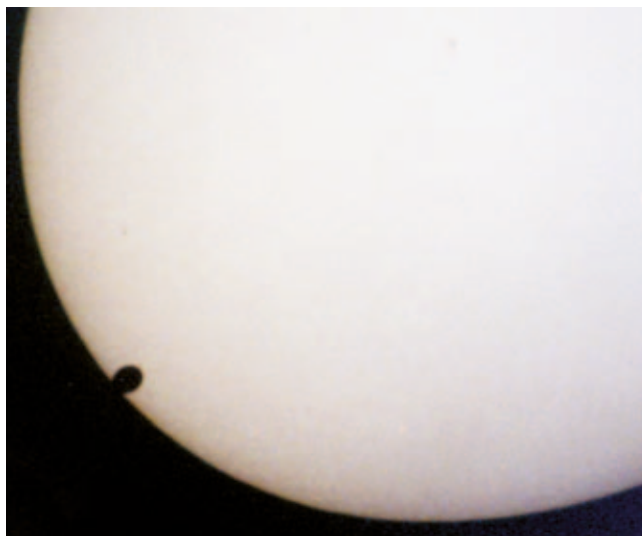
Kdor bi želeli podrobneje spoznati matematično ozadje meritve astronomske enote ob prehodu Venere čez Sonce, lahko primerne materiale v slovenščini najde na spletnem naslovu

▪ <http://www.fiz.uni-lj.si/venera2004/>.



SLIKA 1.

Varno opazovanje s teleskopom in projekcijo na bel papir. Svetel krog v sredini je Sončeva ploskva, Venera pa je na njej vidna kot črna pika, ki je označena s puščico.



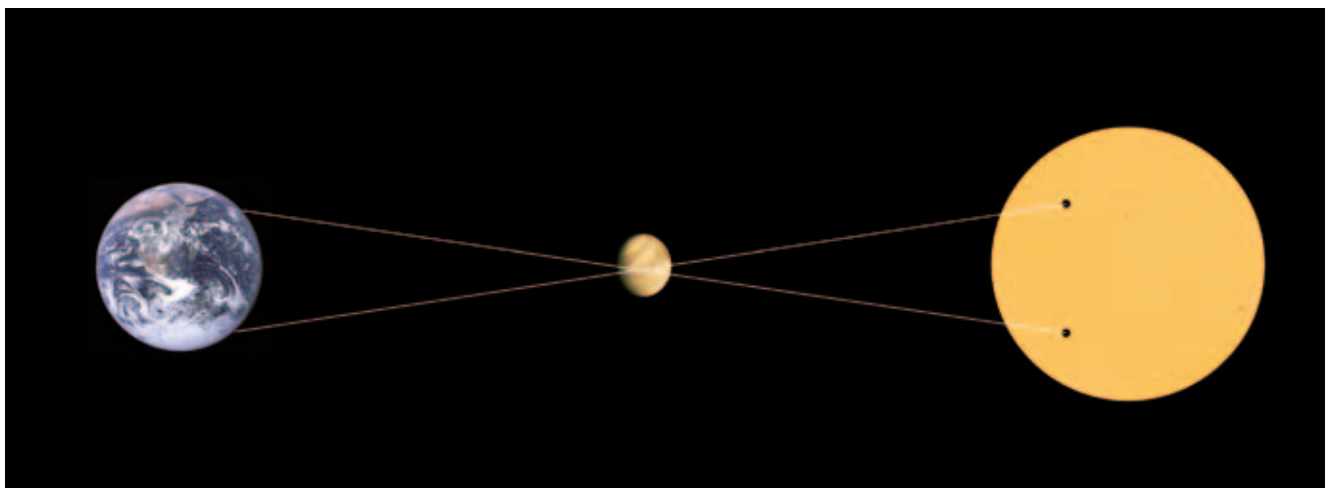
SLIKA 2.

Prehod Venere čez Sonce leta 2004

Opozorila in navodila za opazovanje

Pri opazovanju prehoda Venere in Sonca na sploh moramo poskrbeti za primerno zaščito oči, sicer lahko pride do nepopravljivih okvar oči.

- Nikoli ne uporabljajmo doma narejenih in improviziranih filtrov, kot so s svečo potemnjena stekla, počrnjeni fotografski filmi in podobno!
- Primerna filtra sta le folija mylar in varilska stekla z gostoto 12 ali več!
- V Sonce ne smemo neposredno gledati skozi nobeno optično napravo (daljnogled, fotoaparat), ki ni opremljena s primernimi filtri, saj lahko v hipu oslepimo!
- Otroci naj vedno opazujejo v spremstvu staršev ali drugih odraslih oseb.

**SLIKA 3.**

Do navideznega prehoda Venere čez Sončevo ploskvico pride tedaj, ko je Venera med Zemljo in Soncem. Opazovalca na različnih zemljepisnih širinah vidita prehod na različnem mestu ploskvice Sonca, iz česar je mogoče izračunati medsebojne oddaljenosti. Slika ni v merilu.

xxx

↓↓↓

**REŠITEV BARVNI SUDOKU
S STRANI 11**

1	2	5	7	8	6	4	3
8	6	3	4	2	1	7	5
6	7	8	1	4	3	5	2
5	3	4	2	7	8	6	1
4	1	7	3	6	5	2	8
2	5	6	8	3	7	1	4
3	4	1	6	5	2	8	7
7	8	2	5	1	4	3	6

Astronomske delavnice za šolsko leto 2012/2013

↓↓↓

→ DMFA Slovenije bo septembra in oktobra 2012 organiziralo delavnice za učitelje, ki poučujejo astronomijo, in za mentorje tekmovalcev iz znanja astronomije.

Delavnice bodo organizirane regijsko.

O datumih in načinu prijave boste obveščeni na spletni strani DMFA, v revijah Spika in Presek.

Več informacij in predprijave na

■ gustinvesolje@gmail.com.

xxx

Predstavitev grafa s seznamom sosedov in pregled v širino



ANDREJ TARANENKO

→ Predstavitev grafov

Graf G je definiran z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$. Pravimo, da sta vozlišči v_i in v_j grafa G *sosednji*, če v grafu obstaja povezava $v_i v_j \in E(G)$. Povezavi, ki ima za eno krajišče vozlišče v_i , pravimo, da je *incidenčna* z v_i . Zaporedju povezav $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{k-2} v_{k-1}, v_{k-1} v_k$, kjer so vsa vozlišča različna, pravimo *pot* (v tem primeru dolžine $k - 1$, ker imamo $k - 1$ povezav). Graf G je *povezan*, če med poljubnima dvema vozliščema obstaja pot. Število povezav v najkrajši poti med vozliščema v_i in v_j imenujemo *razdalja* med tema dvema vozliščema. Označimo jo z $d_G(v_i, v_j)$ ali kar $d(v_i, v_j)$, če je očitno, o katerem grafu govorimo.

Primer grafa lahko vidimo na sliki 1. Ta graf je definiran z $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ in $E(G) = \{v_1 v_2,$



→ $v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5v_6\}$.

Sosedi vozlišča v_3 sta vozlišči v_2 in v_5 . Povezava v_1v_2 je incidenčna z v_1 in z v_2 , z v_2 sta incidenčni tudi povezavi v_2v_3 in v_2v_4 . Zaporedje povezav v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4 tvori pot dolžine 3 med vozliščema v_2 in v_4 . To seveda ni najkrajša pot med tema dvema vozliščema, saj sta vozlišči sosednji, torej je pot v_2v_4 najkrajša pot med njima, in sta zato na razdalji 1. Graf G na sliki 1 je povezan, saj med poljubnima dvema vozliščema obstaja pot.

Podatkovnih struktur, s katerimi lahko v računalniku predstavimo graf, je več. Najbolj znani sta predstavitvi z matriko sosednosti ali s seznamom sosedov. Pri različnih predstavitvah grafa se na podlagi hitrosti izvajanja osnovnih operacij nad grafom (seznam le-teh bomo podali v nadaljevanju) odločamo, katero predstavitev izberemo. Je pa sama izbira pogojena tudi s problemom, ki ga za dani graf rešujemo. V tem prispevku si bomo pogledali učinkovito predstavitev grafa s seznamom sosedov.

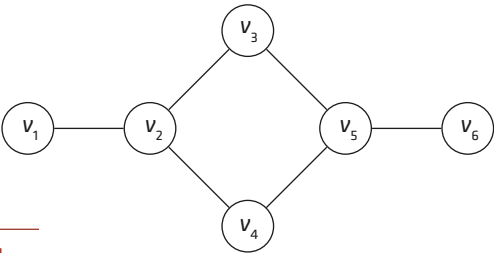
Predstavitev s seznamom sosedov

Pri predstavitvi grafa s seznamom sosedov za vsako vozlišče v potrebujemo seznam S_v , v katerem so našteti vsa vozlišča, ki z vozliščem v tvorijo povezavo grafa.

Takšno predstavitev grafa si bomo ogledali na primeru grafa s slike 1. Graf G na sliki 1 lahko predstavimo z naslednjim seznamom sosedov:

Seznam	Vsebina
S_1	v_2
S_2	v_1, v_3, v_4
S_3	v_2, v_5
S_4	v_2, v_5
S_5	v_3, v_4, v_6
S_6	v_5

TABELA 1.
Seznam sosedov grafa s slike 1



SLIKA 1.
Primer grafa G

Pri predstavitvi bomo predpostavili, da so vozlišča grafa oštevilčena z naravnimi števili. Torej si lahko vozlišče v_i predstavimo kar s številom i .

Vse sezname sosedov bomo shranili v polje seznamov P . Ker moramo za vsako vozlišče hraniti seznam sosedov, je velikost polja P enaka številu vozlišč grafa, torej $n = |V(G)|$. Kot smo že omenili, seznam S_i predstavlja vozlišče v_i . Polje izberemo zato, ker lahko do seznama S_i preprosto dostopamo, saj vemo, da je v polju shranjen na indeksu $i - 1$ (predpostavljamo, da so elementi polja indeksirani od 0 naprej).

Za posamezni seznam S_i bomo uporabili podatkovno strukturo dinamični seznam, ki omogoča hitro dodajanje novih elementov (na konec ali začetek seznama) ter hitro brisanje elementa, ko smo element že poiskali.

Za graf G z n vozlišči in m povezavami je prostorska zahtevnost takšne predstavitve za povezan graf $O(m)$, saj je skupno vsaka povezava shranjena dvakrat (v vsakem seznamu obeh krajišč povezave).

Osnovne operacije, ki jih običajno izvajamo nad grafi, so naslednje:

- preveri, ali obstaja povezava v_iv_j ,
- označi vse sosede vozlišča v_i ,
- označi vse povezave,
- dodaj povezavo v_iv_j ,
- odstrani povezavo v_iv_j ,
- odstrani vse povezave incidentne z v_i .

Časovne zahtevnosti naštetih osnovnih operacij v

predstavitvi s seznamom sosedov so, kot sledi. Da preverimo, ali obstaja povezava $v_i v_j$, moramo v najslabšem primeru pregledati celoten seznam S_i , v katerem so shranjeni vsi sosedi vozlišča v_i . Velikost takšnega seznama je število sosedov vozlišča v_i , ki ga imenujemo stopnja vozlišča v_i in ga označimo z $d(v_i)$. Torej je časovna zahtevnost te operacije $O(d(v_i))$. Enako časovno zahtevnost imamo pri označevanju vseh sosedov danega vozlišča.

Za označevanje vseh povezav grafa se moramo sprehoditi skozi vse sezname. Ker je v vseh seznamih vsaka povezava shranjena dvakrat, je časovna zahtevnost te operacije $O(m)$, če je m število povezav grafa.

Če predpostavimo, da za dodajanje nove povezave ni potrebno preverjati, ali je povezava že v seznamu, je hitrost izvedbe te operacije konstantna, torej $O(1)$. Za odstranjevanje povezave $v_i v_j$ iz strukture moramo v obeh seznamih poiskati ustrezeni element. Samo brisanje lahko nato izvedemo v konstantnem času. Torej je časovna zahtevnost operacije odvisna od iskanja elementa, kar je za dano povezavo $O(d(v_i) + d(v_j))$.

Za zadnjo operacijo, da odstranimo vse povezave incidenčne z vozliščem v_i , moramo izbrisati celotni seznam v_i . Še več, v vseh seznamih moramo poiskati in izbrisati vozlišče v_i , kar pomeni, da moramo v najslabšem primeru pregledati vse povezave. Torej je časovna zahtevnost te operacije $O(m)$.

Pregled grafa v širino

Pregled grafa v širino (*angl. Breadth-first Search - BFS*) je postopek, s katerim obiščemo (in obdelamo) vsa vozlišča grafa v vrstnem redu glede na njihovo razdaljo od podanega vozlišča v_0 . Tak pregled lahko izvedemo s postopkom, prikazanim z algoritmom 1. V algoritmu vozlišče x označimo z vrednostjo $\ell(x)$, ki je enaka razdalji med x in v_0 .

Algoritem 1 označi vsa vozlišča grafa G , saj je vsako označeno vozlišče dodano v seznam L . Ko vozlišče odstranimo iz L , označimo vse sosedje tega vozlišča. Ker je graf G povezan, z danim postopkom označimo vsa vozlišča grafa.

Glede na dejstvo, da algoritem 1 vsako povezavo grafa pregleda največ dvakrat, vidimo, da je časovna zahtevnost algoritma $O(m)$, kjer je $m = |E(G)|$.

V splošnem lahko korak 5 v algoritmu 1 nadomestimo s poljubnim postopkom, ki mora obdelati vo-

Vhod: Seznam sosedov povezanega grafa G in vozlišče v_0

Izhod: Označitev vozlišč v grafa G s celimi števili $\ell(v) = d(v_0, v)$

```

1 Prični s seznamom  $L$ , ki vsebuje samo vozlišče  $v_0$ 
  in določi  $\ell(v_0) = 0$ .
2 while  $L \neq \emptyset$  do
3   Vzemi in odstrani prvo vozlišče  $w$  iz  $L$ .
   // Naj bo  $S_w$  seznam sosedov
   // vozlišča  $w$ .
4   for all  $v \in S_w$ , za katere je  $\ell(v)$  nedoločen do
5     Določi  $\ell(v) = \ell(w) + 1$ .
6     Dodaj vozlišče  $v$  na konec seznama  $L$ .
7   end
8 end
```

ALGORITEM 1.

Pregled danega grafa v širino – BFS algoritem

zlišče. Seveda je časovna zahtevnost celotnega algoritma odvisna od tega koraka. Natančneje, če ima korak 5 časovno zahtevnost $O(\kappa)$, je časovna zahtevnost celotnega algoritma $O(m + n\kappa)$.

Primer izvajanja BFS algoritma

Poglejmo si primer poteka BFS algoritma na primeru grafa s slike 1, pri čemer postopek izvajamo glede na vozlišče v_2 .

Na prvem koraku v seznam L damo vozlišče v_2 in to vozlišče označimo z 0. Sledi izvajanje zanke koraka 2. Ker L ni prazen, izberemo (in odstranimo) prvo vozlišče iz seznama L in ga označimo z w , v našem primeru je $w = v_2$.

For zanka koraka 4 pravi: Preglej celoten seznam S_2 in vsa neoznačena vozlišča v seznamu označi s številom, ki je za ena večje od oznake vozlišča w . Vsako tako vozlišče dodaj na konec seznama L .

V našem konkretnem primeru je $S_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$. Vsi elementi seznama so neoznačeni, zato jih označimo z 1 (saj ima vozlišče s_2 oznako 0) in jih dodamo v L . Po končanem izvajanju for zanke je $L = \{v_1, v_3, v_4\}$, $\ell(v_1) = \ell(v_3) = \ell(v_4) = 1$.

Ker L ni prazen, ponovno izvedemo while zanko. V tem primeru je $w = v_1$, spomnimo se oznaka vozlišča v_1 je 1. Pregledamo vsa neoznačena vozlišča v



→ seznamu S_1 ; ker takih vozlišč ni (v_2 je že označeno vozlišče), nadaljujemo na začetku while zanke.

Ker $L = \{v_3, v_4\}$ ni prazen, ponovimo postopek za $w = v_3$. Edino neoznačeno vozlišče seznama S_3 je v_5 , ki mu določimo oznako 2 in ga dodamo na konec seznama L . Vrnemo se na začetek while zanke.

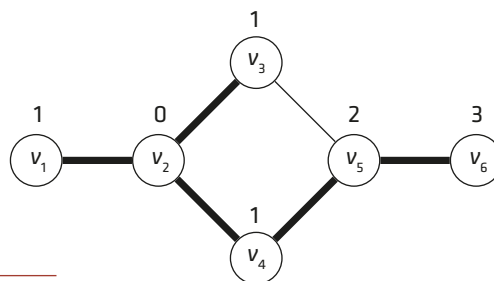
Ker $L = \{v_4, v_5\}$ ni prazen, ponovimo postopek za $w = v_4$. V seznamu S_4 ni neoznačenih vozlišč, zato se vrnemo kar na začetek while zanke.

Sedaj je $L = \{v_5\}$ in ni prazen, zato ponovimo postopek za $w = v_5$. Oznaka v_5 je 2, edino neoznačeno vozlišče v S_5 je v_6 , zato ga označimo s 3 in ga dodamo v L . Vrnemo se na začetek while zanke.

Na tem koraku je $L = \{v_6\}$ in ni prazen, zato ponovimo postopek za $w = v_6$. Ker v seznamu S_6 ni neoznačenih vozlišč, se ponovno vrnemo na začetek while zanke. V tem primeru je seznam L prazen in se algoritem zaključi. Tako smo označili vsa vozlišča grafa G glede na razdaljo do vozlišča v_2 . Dobljeno označitev lahko vidimo na sliki 2, kjer so oznake določene z algoritmom zapisane nad posameznim vozliščem.

Če neki poti $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-2}v_{k-1}, v_{k-1}v_k$ damo še povezavo v_kv_1 , dobimo *cikel*. Povezanemu grafu brez ciklov rečemo *drevo*. Drevesu, ki zavzame vsa vozlišča danega grafa, rečemo *vpeto drevo*.

Včasih nas za podano vozlišče v_0 povezanega gra-



SLIKA 2.
BFS označitev grafa glede na vozlišče v_2

fa G zanima vpeto drevo T , za katerega je $d_T(v_0, v) = d_G(v_0, v)$, za vsako vozlišče $v \in V(G)$. Tako drevo imenujemo *BFS-drevo*. BFS algoritem lahko enostavno prilagodimo, da poiščemo BFS-drevo grafa. Na sliki 2 je s krepkimi povezavami prikazano eno izmed možnih dobljenih BFS-dreves grafa G glede na vozlišče v_2 .

Literatura

- [1] R. Hammack, W. Imrich in S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs, second edition*, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Adjacency_list (pogledano 25. 3. 2012)

↓↓↓

										OPREMA: SNEŽIŠČE LOPARČEK AVON VOHTAT OKTAGON ROVENICA ODLIKOVANJE FARAON IPSEN ENGEL GOB ŽAFRAN									
										AFELIJ NOVARA ATOMSKA KORAKI SVARIL IOCMOKI MLEKAR ATIH NASA DIAPO EKCEM RAKLA ODLIKOVANJE FAKON IPSEN ENGEL GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN									
										AFELIJ NOVARA ATOMSKA KORAKI SVARIL IOCMOKI MLEKAR ATIH NASA DIAPO EKCEM RAKLA ODLIKOVANJE FAKON IPSEN ENGEL GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN									
										AFELIJ NOVARA ATOMSKA KORAKI SVARIL IOCMOKI MLEKAR ATIH NASA DIAPO EKCEM RAKLA ODLIKOVANJE FAKON IPSEN ENGEL GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN GOB ŽAFRAN									

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 39/5

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz pete šte-
vilke 39. letnika Preseka
je **Pravilni petnajstko-
tnik**. Izmed pravilnih re-
šitev smo izžrebali, BO-
RISA KOŽLINA iz Dobrov
v Brdih, TATJANO GOSAR
iz Tržiča in MATJAŽA CI-
GLARJA iz Vranskega, ki
so razpisane nagrade pre-
jeli po pošti.

Globinska ostrina



ALEŠ MOHORIČ

→ Fotografija kaže vejo, polno trnja. Veja je obrnjena proti fotografskemu objektivu. Da je bila zaslonka na fotoaparatu dovolj odprta, nam pove podatek zaslonko število ($z = 6,3$). Zaslonko število je enako razmerju med goriščno razdaljo objektivu in premerom zaslonke odprtine. Na posnetku je oster samo ožji del veje, globinska ostrina posnetka je torej majhna, slika na robovih ni ostra.



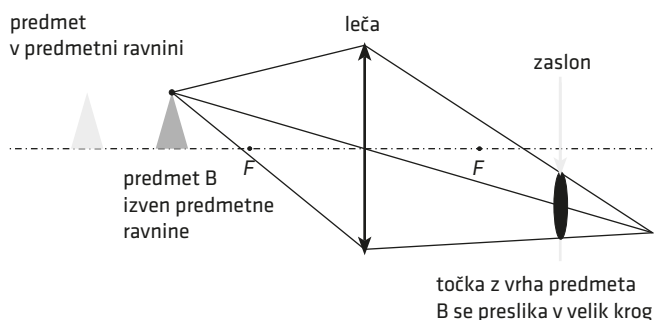
Globinska ostrina je pojem, s katerim opišemo območje prostora, ki ga z lečo zadovoljivo ostro preslikamo na zaslon (ali na tipalo digitalnega fotografskega aparata). Jasno je, da z idealno lečo ostro preslikamo ravnino, ki je za a stran od leče, če je goriščna razdalja leče f in razdalja od leče do zaslona b . To zvezo opiše enačba leče $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Vendar pa zadovoljivo ostro preslikamo tudi točke, ki ležijo pred ali za to ravnino; koliko ostro, pa je odvisno od zaslonke. Bolj ko je zaslonka zastrta (manjša zenica in manjše zaslonko število), večja je ta razdalja. Pravimo, da je globinska ostrina velika. Povejmo še, kaj mislimo, ko pravimo, da je slika zadovoljivo ostra. Preslikava je ostra, ko se točka preslika v točko. Če preslikava ni ostra, na sliki iz točke nastane krogec. Z očmi ne ločimo krogec od točke, če so le-ti dovolj majhni. To je povezano z uklonom svetlobe na zenici očesa. Mejni zorni kot je podan z Reyleighovim kriterijem: $\alpha_0 = 0,61\lambda/R$. Ločljivost

očesa lahko ocenimo s polmerom zenice $R = 1$ mm in $\lambda = 600$ nm na $\alpha_0 = 1'$. Če torej opazujemo standardno fotografijo formata $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ na normalni vidni razdalji $a_0 = 25$ cm, bomo med seboj ločili točki, ki sta $\alpha_0 a_0 = 0,07$ mm narazen. Če to razdaljo pomanjšamo za toliko, kot je maloslikovni Leica format filma $24\text{ mm} \times 36\text{ mm}$ manjši od fotografije (približno štirikrat), ugotovimo, da je slika še vedno videti ostra tudi, če je pika na filmu enaka krogu s premerom $0,02$ mm. To običajno ustreza nekaj desetim slikovnim elementom na tipalu. Če s h označimo premer kroga, ki ga še vidimo kot piko, potem z nekaj računanja pridemo do izrazov za spodnjo in zgornjo mejo območja globinske ostrine, ki ga preslikamo navidezno ostro:

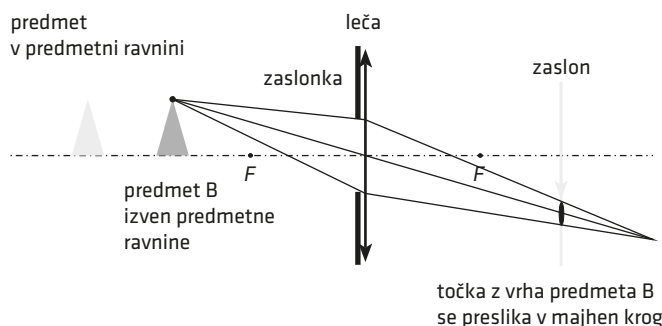
$$\blacksquare \quad a' = \frac{af^2}{f^2 + zh(a-f)}; \quad a'' = \frac{af^2}{f^2 - zh(a-f)}.$$

a' je najmanjša, a'' pa največja razdalja predmeta, ki se še preslika ostro. Vpliv premera zaslonke odprtine na ostrino slike prikazujeta žarkovna diagrama.

preslikava z majhnim zaslonkim številom in globinsko ostrino



preslikava z majhnim zaslonkim številom in globinsko ostrino



× × ×

Knjižnica Sigma

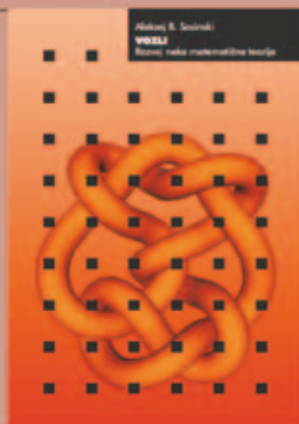
Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Aleksej B. Sosinski:

VOZLI
Razvoj neke
matematične teorije

160 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR

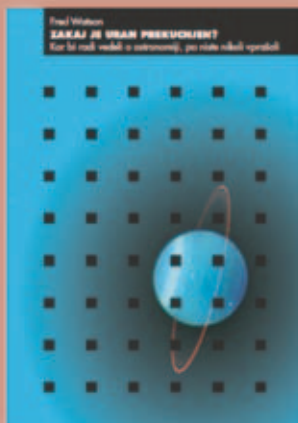
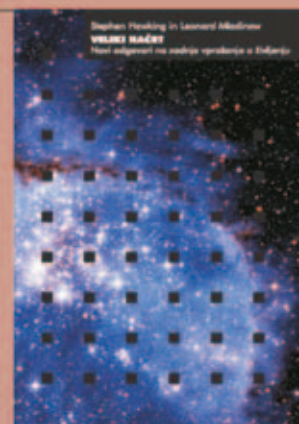


**Stephen Hawking in
Leonard Mlodinow:**

VELIKI NAČRT
Novi odgovori na zadnja
vprašanja o življenju

164 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR



Fred Watson:

**ZAKAJ JE URAN
PREKUCNEN?**
Kar bi radi vedeli o
astronomiji, pa niste
nikoli vprašali

200 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

22,39 EUR



Janez Strnad:

**SVET NIHANJ IN
VALOVANJ**

200 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

19,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižnice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.