



# PRESEK



- KAKO NAPOLNITI PROSTOR?
- DOLGI TELESKOPI
- ZBIRKA VAJ ESA/ESO
- HUFFMANOVO KODIRANJE

ISSN 0351-6652



9 770351 665937

# Vzdrževanje oskrbovalne verige



→ Že v običajnih okoliščinah je včasih težko priti do točke *A* do točke *B*. V primeru nesreč pa lahko dostava hrane, vode in oblek ljudem, ki pomoč nujno potrebujejo, postane skoraj nemogoča. Nov matematični model, ki temelji na metodah verjetnostnega računa in nelinearnega programiranja, omogoča načrtovanje oskrbovalnih poti, ki bi bile z veliko verjetnostjo prehodne tudi v primeru katastrof. Model za posamično območje ali državo načrtuje oskrbovalne poti, ki jih lahko prilagajamo glede na prekinitve v omrežju in povečane potrebe prebivalstva.

Z matematiko si pomagajo tudi zdravstvene organizacije pri učinkovitem obvladovanju takojšnjih nujnih dogodkov, na primer epidemij. S pomočjo dinamike fluidov in kombinatorične optimizacije načrtujejo razpored oskrbovalnih enot in epidemološke modele, tako da najdejo primerne vire, izboljšajo delovanje in hkrati zmanjšajo razširjanje infekcije na območju svojega delovanja. Tako si pomagajo pri hitri in učinkoviti rabi cepiv in drugih zdravil. Hitre rešitve omogočajo, da lahko najnovejše informacije zelo hitro preusmerijo trenutne razporeditve virov in osebja.

Tisti, ki jih ta tema zanima, si lahko preberejo še več v leta 2006 izdani knjigi Anne Nagurney, *Supply Chain network Economics: Dynamics of Prices, Flaws, and Profits* in na spletni strani

■ <http://supernet.som.umass.edu/articles/CriticalNeedsSupplyChainNetworkDesign.pdf>. ——— × × ×

**POJASNILO:** Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani [www.ams.org/mathmoments](http://www.ams.org/mathmoments).



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
letnik 39, šolsko leto 2011/2012, številka 3

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domažnjak, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

**Dopisi in naročnine:** DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2011/2012 je za posamezne naročnike 16,69 EUR–posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

**List sofinancirata** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

**Založilo** DMFA–založništvo

**Tehnična urednica** Tadeja Šekoranja

**Oblikovanje in ilustracija** Polona Šterk Košir, Ines Kristan

**Tisk** Tiskarna Pleško, Ljubljana

**Naklada** 1600 izvodov

© 2011 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1856

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Vzdrževanje oskrbovalne verige

## MATEMATIKA

- 4-7** Kako napolniti prostor?  
(*Ivan Lisac*)
- 8-11** Arhimed, Cavalieri in Cardano  
ali problem delitve krogle  
(*Dejan Širaj*)

## FIZIKA

- 13-14** Dolgi teleskopi  
(*Janez Strnad*)
- 15,18** Kako razložiti relativnost?  
(*Andrej Likar*)
- 18-19** Razmisli in poskusi –  
Opis barv s tremi  
barvnimi koordinatami  
(*Mitja Rosina*)

## ASTRONOMIJA

- 21-25** Zbirka vaj ESA/ESO  
(*Andrej Guštin*)

## RAČUNALNIŠTVO

- 26-29** Huffmanovo kodiranje  
(*Tim Kos*)

## RAZVEDRILLO

- 31** Naravoslovna fotografija –  
Megleni slap  
(*Aleš Mohorič*)
- 16-17** Nagradna križanka  
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 39/2  
(*Marko Bokalič*)
- 8** Barvni sudoku
- 20** Križne vsote

## TEKMOVANJA

- 11-12** Mednarodni matematični  
kenguru 2011 (*Gregor Dolinar*)
- 12** Tekmovanje srednješolcev v znanju  
matematike za Vegova priznanja  
(*Darjo Felda*)
- 19-20** 42. fizikalna olimpijada v Bangkoku,  
Tajska (*Ciril Dominko*)
- priloga** Naloge z regijskega fizikalnega  
tekmovanja srednješolcev Slovenije  
v šolskem letu 2010/11
- priloga** Naloge z državnega fizikalnega  
tekmovanja srednješolcev Slovenije  
v šolskem letu 2010/11
- priloga** Mednarodni matematični kenguru 2010

**SLIKA NA NASLOVNICI:** Preostanki 12-metrskega zrcalnega teleskopa, ki so ga zgradili za astronoma William Herschla. Najdemo jih pred Kraljevim observatorijem v Greenwichu pri Londonu. Naredili so ga leta 1789. Teleskop ni bil veliko v uporabi, ker je bil neroden. Večino cevi je uničilo drevo, ki se je podrlo na teleskop leta 1870. fotografija: Aleš Mohorič

# Kako napolniti prostor?



IVAN LISAC

→ Nekega dopustniškega dne. Francka bere knjigo, Tone riše v zvezek.

T: A veš, da nam pa tega niso omenili v osnovni šoli?

F: Česa?

T: Da je mogoče z vsemi liki, ki jih obravnavamo v osnovni šoli, tlakovati ravnino.<sup>1</sup>

F: S katerimi?

T: No, saj veš, s kvadrati, s pravokotniki, s trapezi, s paralelogrami, z rombi in tudi z deltoidi.<sup>2</sup>

F: Aha, najbrž zato niso povedali, ker se o tlakovanjih v osnovni šoli nismo učili.

T: Ja, res. Veš, da je mogoče ravnino tlakovati samo s tremi pravilnimi večkotniki?

F: Ja, to si mi že povedal. S trikotnikom, kvadratom in šestkotnikom.

T: In veš...

F: ..., da čebele izdelajo satovje v obliki šestkotnikov? Vem, vem.<sup>3</sup>

T: Dobro. Me pa zanima, kako je s tem v treh razsežnostih. To, kar je v ravnini trikotnik, je v prostoru četrlec.

<sup>1</sup>Tlakovati ravnino pomeni prekriti ravnino s paroma skladnimi liki.

<sup>2</sup>Bralec lahko to preveri za vajo.

<sup>3</sup>Več v začetku knjige Oslovski most avtorja Milana Vidmarja.



F: In enakostraničnemu trikotniku ustreza pravilni četverec?

T: Ja. Me zanima, če je mogoče z lepljenjem četvercev napolniti prostor.

F: Kako!?

Čez štirinajst dni. Francka kuha, Tone hodi po stanovanju.

T: Imava kaj lepenke?

F: Zakaj?

T: Rad bi si narisal mrežo trikotnikov.

F: A, še vedno ti grejo četverci po glavi. Bom poiškala. (Odide po lepenko.)

F: Tukaj je.

T: Hvala, aha, tudi ravnilo in svinčnik sta na mizi. Veš kaj, narisal si bom mrežo trikotnikov in sestavil nekaj četvercev, da si bom lažje predstavljal. Lepenka je formata A3, četverci ne smejo biti premajhni, stranica naj meri na primer 7 centimetrov.

F: Grem naprej kuhat. (Odide kuhat.)

Istega dne, po kosilu.

F: Si narisal mrežo?

T: Tu je.

F: Zdaj pa tudi mene zanima, kako je s tem. Daj mi papir. (Vzame škarje in prične rezati kose, sestavljene iz štirih sosednjih trikotnikov.)

Sedaj pa samo še lepilni trak, pa bo.

T: Aha, sestavljaš četverce! Kako pa boš četverce sestavila skupaj?

F: Tudi z lepilnim trakom. Samo upogniti ga je treba, da lepljiva stran gleda navzven.

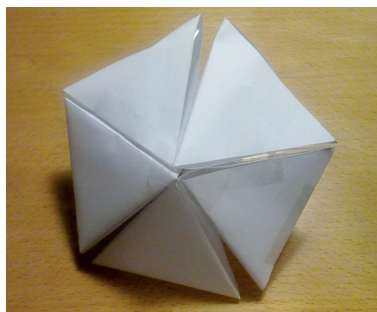
T: Prav, poskusiva sestaviti. Aha, stranske ploskve četverca so skladne, saj so enakostranični trikotniki s stranico 7 centimetrov. Dva četverca lahko zlepiš vzdolž dveh njunih stranskih ploskev – trikotnikov – to je mogoče pravzaprav samo na en način.

F: Čakaj malo, bom zalepila, ..., to lahko kar nadaljujem, še tretji, ... (Francka zlepi telo na sliki 1.)

T: Aha, koti stranskih ploskev so  $60^\circ$ , dobila sva šest četvercev, šestkrat šestdeset je tristo šestdeset, se pravi, da se šest četvercev ovije okoli skupnega roba.<sup>4</sup>

F: Samo pet jih je!

T: Uuu, pa res. Samo pet, čakaj, ...

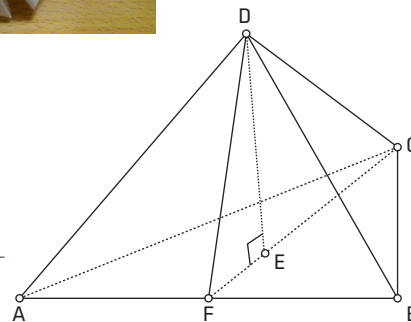


SLIKA 1.

Sestavljanje pravilnih četvercev

SLIKA 2.

Koliko meri kot EFD?



F: Potem pa koti ne merijo  $60^\circ$ , meriti morajo  $72^\circ$ , ne? <sup>5</sup>

T: Čakaj malo, saj so stranske ploskve enakostranični trikotniki, kot v njih pa je vedno  $60^\circ$ .

F: Aja, pa res, kot med stranicama je  $60^\circ$ . Kako pa je to sploh mogoče?

T: Veš kaj, ne moreva seštevati kotov stranskih ploskev – trikotnikov – saj ti koti ne ležijo v skupni ravnini.

F: Pa res. Kaj pa lahko potem seštevava?

T: A, glej, četverci se stikajo s ploskvami, izračunati morava kot med dvema ploskvama četverca.

F: Točno, ta mora biti  $72^\circ$ .<sup>6</sup>

T: Aha, kar izračunajva. Se pravi, imava pravilni četverec ABCD na sliki 2 z enakimi robovi. Osnovna ploskev je, deniva, trikotnik  $\triangle ABC$ .

F: Prav.

T: Sedaj pa pravokotno projicirajva točko D na  $\triangle ABC$ . Dobiva nožišče višine četverca, reciva tej točki E.

F: Prav.

T: Zdaj pa naprej. Na stranici AB lahko izbereva razpolovišče stranice in ga poimenujemo F.

F: Prav.

T: Potem je CF težiščnica osnovnega trikotnika  $\triangle ABC$ , ki jo točka E deli v razmerju 2:1.

F: Aha, E je tudi težišče trikotnika  $\triangle ABC$ . Prav.

T: Zanima naju kot  $\angle EFD$ , to je kot med ploskvijo  $\triangle ABC$  in ploskvijo  $\triangle ABD$ .

F: Prav.

<sup>4</sup>Preuranjen zaključek.

<sup>5</sup>Tudi tukaj.

<sup>6</sup>Še enkrat.



T: Aha, najprej je

$$\blacksquare \overline{EF} = \frac{1}{3} \overline{CF},$$

in ker je še

$$\blacksquare \overline{CF} = \overline{DF},$$

mora biti razmerje teh dveh stranic

$$\blacksquare \cos(\angle EFD) = \frac{1}{3}.$$

F: Prav. Bom vzela računalnik.

T: Prav. Izračunaj  $\arccos(\frac{1}{3})$  in dobiš  $72^\circ$ .

F: Ni prav.

T: Ne?!!?

F: Ne. Računalnik pravi, da je

$$\blacksquare \angle EFD = 70,52877937^\circ.$$

T: Uuu, čakaj, potem pa ...

F: Aaa, teh pet četrcev sploh ne napolni polnega kota  $360^\circ$ !

T: U, pa res. Kako sva sploh prišla na to idejo?<sup>7</sup>

F: Vem kako, poglej ta lepilni trak, ta je pokril nekaj vmesnega prostora.

T: Pa res, glej, in napake je pri enem kotu ravno za kako stopinjo in pol, ki jo pokrijejo vmesni lepilni trakovi. Mislim, da se ne da na tak enostaven način napolniti prostora s pravilnimi četrerci. Verjetno je tu drugače, kot je pri tlakovanju ravnine s trikotniki.

F: Ah, škoda.

T: Ja, res.

Isti kraj, isti dan, zvečer. Tone se obuva, Francka počiva.

T: Grem na sprehod.

F: Prav, se vidiva.

T: Živjo.

(Zapre vrata in odide.)

(Po petih sekundah se vrata odprejo.)

T: Francka, da se! Da se!

F: Kaj se da? Ja?

T: Prostor se da napolniti s četrerci! Grem na sprehod! Živjo!

(Zapre vrata in odide.)

Pol ure kasneje.

F: Kaj si odkril? Se res da?

T: Da se, da; s pravilnimi verjetno ne, z nekim drugim četrcem pa se da.

F: Kako? Povej še meni.

T: Vzemiva kocko.

F: Kocko?!?

T: Ja, kocko. Gotovo vidiš, da je mogoče prostor napolniti s skladnimi kockami, postavljaš jih pač eno poleg druge.

F: Ja, to je precej očitno, to zna vsak, ki se je kdaj igral z legovkami. Ampak kje so tu četrerci?

T: Pogledva najprej kocko. Če nama uspe razrezati kocko na skladne četrce, bo problem rešen. Je res?

F: Aha, res bo, ker lahko potem vse kocke, ki napolnjujejo prostor, razrežemo na skladne četrce in dobimo prostor, napolnjen s četrerci. Drži. In kako bi razrezal kocko na skladne četrce?

T: A, tu je pa neka zvijača.

F: Povej.

T: Vzemiva kocko z robom 1 in jo postaviva v prostorski koordinatni sistem.

F: Prav.

T: Sedaj se pa vprašajva, kako izbereva točko znotraj kocke.

F: Hm, izbereva koordinate  $(x, y, z)$  med 0 in 1 pa je.

T: Tako je. Sedaj pa pogledava ta tri števila in jih urediva po velikosti.

F: Saj ne veva, kakšna so?

T: Nič ne de, obstaja šest možnosti, ki jih lahko naštejemo:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare x \leq y \leq z, & (1) \\ \blacksquare y \leq x \leq z, & (2) \\ \blacksquare z \leq x \leq y, & (3) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \blacksquare x \leq z \leq y, & (4) \\ \blacksquare y \leq z \leq x, & (5) \\ \blacksquare z \leq y \leq x. & (6) \end{array}$$

F: Aha, in kaj zdaj?

T: Najprej lahko ugotoviva, da teh šest možnosti določa šest podmnožic kocke, ki so paroma skladne.

F: Skladne? To pomeni, da lahko na primer prvo množico z nekim gibanjem prostora prevedemo na drugo množico. Drži?

T: Točno tako. In ker si že izbrala prvo in drugo množico: če je točka  $A(x, y, z)$  iz množice (1), naj bo njena slika točka  $A'(x, z, y)$  iz množice (2). Ta predpis torej med seboj zamenja ordinato in absciso, absciso pusti pri miru, preslika množico (1) na

<sup>7</sup>Bojda se je podobno uštel sam Aristotel.

množico (2) in je povrhu še gibanje.

F: Kako veš?

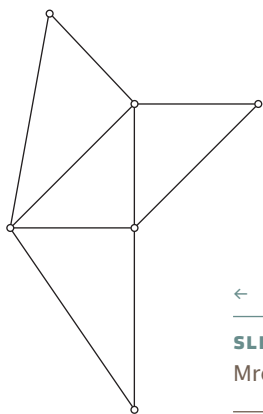
T: Vem, gre namreč za zrcaljenje preko ravnine določene z enačbo  $y = z$ .

F: V redu, verjamem. In naprej?

T: Podobno ugotoviva za ostale množice od (1) do (6). Ko veva, da so paroma skladne, zadošča le še narisati množico (1).<sup>8</sup> Ti bom narisal. (Vzame svinčnik in nariše.)

→

**SLIKA 3.**  
Četverec v kocki



←

**SLIKA 4.**  
Mreža četverca

Takole. Opaziš, da je množica (1) na sliki 3 četverec v kocki?

F: Aaa, ja, ja, in ostali so potem tudi četverci, ki skupaj sestavljajo kocko. Torej je mogoče s skladnimi četverci napolniti kocko, s skladnimi kockami pa prostor.

T: Tako je!

F: Poskusiva narisati mrežo in sestaviti te četverce. Prav zanima me, kako bo.

T: Nekaj lepenke še imava, skočim po škarje, tukaj so.

F: Aha, najprej narišem mrežo enega četverca, potem jih bom narisala še pet enakih. Takole izgleda ena, poglej!

T: Vidim na sliki 4. Nariši, prosim, še ostale, jaz pa bom izrezal in zlepil že narejene.



**SLIKA 5.**

Šest četvercev  
sestavlja kocko

Čez deset minut.

F: Končano.

T: Še jaz zlepi zadnjega pa bo. Takole, sedaj jih bova pa sestavila skupaj v kocko. Enega sem, še enega tja, še malo ...

Čez petnajst minut.

T: Tega postavim takole, dodam tega, in še onega, ne, ne, ne gre, tu je pa nekaj narobe.

F: Kaj? Se ne da sestaviti?

T: Ne gre. Ne razumem. Pa saj sva vzela skladne četverce, ..., ti napolnijo kocko, ..., ne vem ...

F: Aaa, že vem.

T: Kaj veš?

F: No, ugotovi če moreš. Vem, zakaj se ne da sestaviti.

T: No, zakaj?

F: Kaj že pomeni, da so četverci skladni?

T: Ja, da obstaja gibanje, ki preslika eno množico na ..., uuu, čakaj, za zrcaljenje gre, seveda!

F: Aha, že vidim, da vidiš.

T: Seveda, vseh šest mrež četvercev, ki si mi jih izrezala, sem zlepil na isti način. Že prej pa sem med gibanja prištel tudi zrcaljenje, ki pa četverec preslika v njemu zrcalni četverec. Se pravi, da moram mreže nekaterih četvercev zlepliti navzven, ne navznoter. Takoj se bom lotil.

F: Koliko?

T: Hm, kar tri<sup>9</sup> bom vzel, jih razrezal in zlepil navzven.

F: Prav.

Čez deset minut.

T: Takole.

F: Bravo, uspelo je!

× × ×

<sup>8</sup>Naštete množice so tudi skoraj paroma tuje, saj je presek dveh poljubnih množica manjše razsežnosti.

<sup>9</sup>V ozadju: četverci predstavljajo permutacije spremenljivk  $x, y$  in  $z$ , tri sode in tri lihe.

# Barvni sudoku

↓↓↓

→ V  $8 \times 8$  kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih  $2 \times 4$ ) nastopalo vseh 8 števil.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   | 5 |   | 6 |   |
|   |   |   |   |   |   | 8 |   |
|   | 5 | 6 | 7 |   |   | 2 | 8 |
| 8 |   |   |   | 3 |   |   | 6 |
| 7 | 4 |   |   |   |   |   |   |
| 1 |   | 2 |   |   | 8 |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   | 7 |   |
|   |   | 1 |   | 6 |   |   | 3 |

REŠITEV BARVNI SUDOKU

→  
→  
→

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 2 | 9 | 8 | 1 | 7 | 5 |
| 1 | 7 | 5 | 8 | 6 | 3 | 2 | 4 |
| 7 | 3 | 8 | 4 | 5 | 2 | 9 | 1 |
| 5 | 1 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 7 |
| 6 | 5 | 7 | 3 | 2 | 4 | 1 | 8 |
| 8 | 2 | 4 | 1 | 7 | 9 | 5 | 3 |
| 2 | 8 | 1 | 7 | 4 | 5 | 3 | 6 |
| 4 | 6 | 3 | 5 | 1 | 7 | 8 | 2 |

×××

# Arhimed, Cavalieri in Cardano ali problem delitve krogla

↓↓↓

DEJAN ŠIRAJ

→ Problem, ki povezuje vélike može iz naslova, pravi: *Na kateri višini je potrebno prerezati kroglo, da bosta prostornini dobljenih delov v razmerju dva proti ena?* Problem si je zastavil že slavni Arhimed in ga menda tudi rešil (čeprav ne tako eksaktno, kot to počnemo danes). Do rešitve bomo poskušali priti z elementarnimi prijemi tudi v pričujočem članku, pri čemer si bomo bistveno pomagali z metodami, ki (upravičeno ali pa tudi ne) nosijo ime po omenjenih dveh italijanskih matematikih.

Naj omenimo, da do rezultata (oz. do kubične enačbe) lahko pridemo vsaj še na en način, in sicer z večkratnimi integrali. A ta pot presega gimnazijski nivo znanja matematike, poleg tega pa ni v duhu Arhimedovega časa. Arhimed je živel približno devetnajst stoletij pred sijajnim izumom infinitezimalnega računa, ki pa se mu je genialni znanstvenik s svojimi metodami izčrpavanja idejno precej približal.

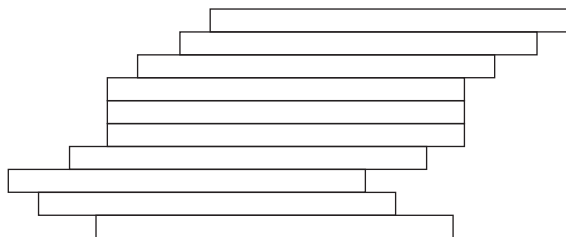
## Cavalierijevo načelo

Če za teles  $A$  in  $B$  lahko najdemo tako ravnino  $\psi$ , da imata preseka teh dveh teles s poljubno ravnino,





SLIKA 1.



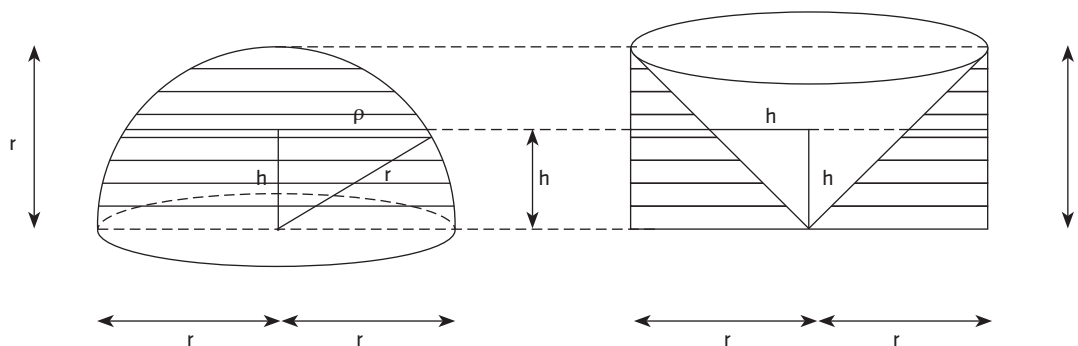
vzporedno  $\psi$ , enako ploščino, potem sta prostornini teles  $A$  in  $B$  enaki.

Načelo dokažemo z uporabo infinitezimalnega računa (kar ni presenetljivo, ker je prostornina definirana z integralom). Lahko si ga predstavljamo, če telesi postavimo drugo poleg drugega in ju razrežemo na zelo tanke rezine, vzporedne ravnini  $\psi$ , kot kaže slika 1.

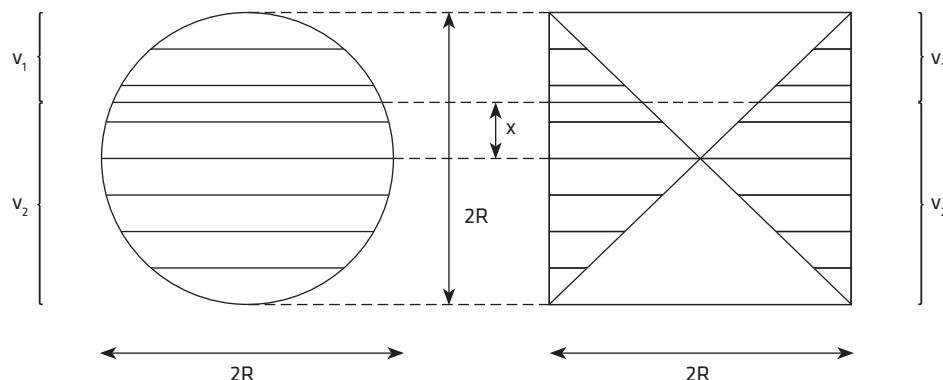
Tako npr. z lahkoto dobimo prostornino poševne prizme (ki je seveda enaka prostornini pokončne prizme z enako osnovno ploskvijo in višino), mi pa bomo pravilo najprej uporabili za izračun prostornine krogle.

Postavimo polkroglo (s polmerom  $r$ ) ter valj (s polmerom  $r$  in višino  $r$ ), ki mu je izrezan stožec (s polmerom  $r$  in višino  $r$ ), kot kaže slika 2. Presek polkroglo z ravnino na višini  $h$  ( $0 \leq h \leq r$ ) je krog s polmerom  $\rho$ , ki ga izračunamo po Pitagorovem izreku:  $\rho^2 = r^2 - h^2$ . Zato je ploščina tega preseka enaka  $\pi \rho^2 = \pi(r^2 - h^2)$ . Poglejmo si še drugo telo. Njegov presek z ravnino na višini  $h$  je krožni kolobar z večjim polmerom  $r$  in manjšim polmerom  $h$  (to sledi iz podobnosti), zato je ploščina tega preseka enaka  $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$ .

Ker se ploščini presekov ujemata na poljubni višini, je po Cavalierijevem načelu prostornina polkroglo enaka prostornini drugega telesa. To telo pa ni nič drugega kot valj z izrezanim stožcem, zato je njegova prostornina enaka  $\pi r^2 r - \pi r^2 r / 3 = 2\pi r^3 / 3$ . Prostornina celotne krogle potem znaša  $4\pi r^3 / 3$ .



SLIKA 2.



SLIKA 3.

## → Uporaba na Arhimedovem problemu

Vrnimo se k začetnemu, tj. Arhimedovemu problemu. Dana je krogla s polmerom  $R$ . Denimo, da bomo iskano višino merili od sredine krogle. Označimo rešitev z  $x$ , prostornino zgornjega dela z  $V_1$ , prostornino spodnjega dela pa z  $V_2$ . Postavimo poleg vsake polkrogle enako telo kot prej, tako kot kaže slika 3. Zdaj že vemo, da imata telesi na poljubni višini enako velik presek z ravnino na tej višini, zato lahko uporabimo Cavalierijevo načelo. Posebej ga uporabimo za spodnji in za zgornji del krogle. Dobimo:

$$\begin{aligned} \blacksquare V_1 &= \left( \pi R^2 R - \pi R^2 \frac{R}{3} \right) - \left( \pi R^2 x - \pi x^2 \frac{x}{3} \right) = \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} - \pi R^2 x + \frac{\pi x^3}{3}, \\ \blacksquare V_2 &= \left( \pi R^2 R - \pi R^2 \frac{R}{3} \right) + \left( \pi R^2 x - \pi x^2 \frac{x}{3} \right) = \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} + \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{3}. \end{aligned}$$

Enkrat smo polovici prostornine telesa na desni prišteli, drugič pa odšteli prostornino tistega vmesnega dela z višino  $x$ , ki ni spet nič drugega kot valj z izrezanim stožcem.

Višina  $x$  je po predpostavki taka, da velja

$$\blacksquare V_2 = 2V_1,$$

iz česar dobimo

$$\blacksquare \frac{2\pi R^3}{3} + \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{3} = 2 \left( \frac{2\pi R^3}{3} - \pi R^2 x + \frac{\pi x^3}{3} \right)$$

kar preoblikujemo v

$$\blacksquare \frac{2\pi R^3}{3} - 3\pi R^2 x + \pi x^3 = 0$$

in nato še v

$$\blacksquare 3x^3 - 9R^2x + 2R^3 = 0. \quad (1)$$

Dobili smo kubično enačbo za  $x$ . Če jo delimo z  $R^3$ , dobimo

$$\blacksquare 3 \left( \frac{x}{R} \right)^3 - 9 \frac{x}{R} + 2 = 0$$

in vidimo, da je dovolj rešiti enačbo

$$\blacksquare 3x^3 - 9x + 2 = 0, \quad (2)$$

tj. enačbo (1) pri  $R = 1$ , saj je očitno  $x_0$  rešitev enačbe (2) natanko tedaj, ko je  $Rx_0$  rešitev enačbe (1).

Tako smo začetni problem prevedli na reševanje kubične enačbe (2).

## Cardanove formule

Znano je, da je mogoče enačbe do vključno četrte stopnje v splošnem eksaktno rešiti. Rešitev kubične enačbe predstavljajo t. i. Cardanove formule, ki vsebujejo precej računanja s kompleksnimi števili. Iz njih so izpeljane še formule, ki prav tako predstavljajo rešitev kubične enačbe, vsebujejo pa kotne in hiperbolične funkcije. Le-teh se bomo poslužili tudi mi, pri čemer jih ne bomo niti dokazovali niti v vsej splošnosti navedli, saj niso naš primarni cilj.

Najprej splošno kubično enačbo  $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$  preoblikujemo v  $x^3 + 3px + 2q = 0$ . (To storimo tako, da prvotno enačbo delimo z  $a$  in vpeljemo novo spremenljivko  $x = y + b/3a$ .) Naša enačba se glasi  $3x^3 - 9x + 2 = 0$  oz.  $x^3 + 3(-1)x + 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$ , zato je  $p = -1$  in  $q = \frac{1}{3}$ . Nato vpeljemo  $D = q^2 + p^3$  in  $s = \pm\sqrt{|p|}$ , pri čemer se morata predznaka  $s$  in  $q$  ujemati, kar v našem primeru pride  $D = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$  in  $s = +\sqrt{-1} = 1$ . Nato v odvisnosti od predznaka  $p$  in  $D$  določimo še pomožno količino  $\phi$  in končno zapišemo rešitve enačbe. V našem primeru je  $p < 0$  in  $D < 0$ , zato se  $\phi$  uvede z enačbo  $\cos(\phi) = q/s^3$  oz.  $\phi = \arccos(q/s^3) = \arccos(1/3)$ , po obrazcu pa so sedaj rešitve naslednje:

$$\begin{aligned} \blacksquare x_1 &= -2s \cos\left(\frac{\phi}{3}\right), \\ \blacksquare x_2 &= 2s \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right), \\ \blacksquare x_3 &= 2s \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right). \end{aligned}$$

Če upoštevamo še, koliko sta  $s$  in  $\phi$ , dobimo:

$$\begin{aligned} \blacksquare x_1 &= -2 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \doteq -1,8340, \\ \blacksquare x_2 &= 2 \cos\left(\frac{1}{3} \left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \doteq 1,6079, \\ \blacksquare x_3 &= 2 \cos\left(\frac{1}{3} \left(\pi + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \doteq 0,2261. \end{aligned}$$

## Rešitev problema

Prvi rezultat odpade, ker je negativen, drugi ni dober zato, ker je večji od 1 (ne pozabimo, da je polmer naše krogle 1 in da merimo višino od sredine), torej je pravilen tretji. Zato je rešitev zastavljenega problema pri  $R = 1$  višina

$$\blacksquare x = 2 \cos \left( \frac{\pi + \arccos \left( \frac{1}{3} \right)}{3} \right) \doteq 0,2261,$$

pri poljubnem polmeru krogle  $R$  pa dobimo

$$\blacksquare x = 2R \cos \left( \frac{\pi + \arccos \left( \frac{1}{3} \right)}{3} \right) \doteq 0,2261R.$$

Tako smo prišli do rešitve enega od tistih problemov, ki so zelo lahko razumljivi, njihova pot do rešitve pa ni tako preprosta, sploh če se ne domislimo pravih pripomočkov.

Povejmo rešitev z besedami še enkrat: Če želimo kroglo s polmerom  $R$  z ravnim rezom razdeliti na dva taka dela, da bosta prostornini nastalih delov v razmerju dva proti ena, potem moramo to storiti na višini  $0,2261R$  (zaokroženo na štiri decimalke), merjeno od ravnine, ki poteka skozi središče krogle.

Nadobudne bralce vabimo, da poskusijo sami rešiti problem pri kakšnem drugem (ali pa poljubnem) razmerju prostornin delov krogle.

## Literatura

- [1] P. Legiša. *Matematika: drugi letnik. Kompleksna števila, eksponentna funkcija in logaritem, merjenje v geometriji*, DZS, 1995.
- [2] J. N. Bronštejn in K. A. Semendjajev. *Matematični priročnik: za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol*, Tehniška založba Slovenije, 1984.
- [3] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes.html> (Citirano: 2. 11. 2010)

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

[www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)

# Mednarodni matematični kenguru 2011



GREGOR DOLINAR

→ Tekmovanje Mednarodni matematični kenguru, ki poteka vsak tretji četrtek v marcu, je najštevilčnejše mednarodno matematično tekmovanje. Leta 2011 se ga je udeležilo že več kot šest milijonov tekmovalcev iz 48 držav sveta. Priprave na tekmovanje so se začele že veliko pred 17. marcem 2011. Konec avgusta 2010 je bilo potrebno poslati predloge nalog, sledilo je njihovo ocenjevanje in predizbor, končni izbor nalog za tekmovanje pa smo naredili predstavniki 46-ih držav od 13. do 16. oktobra na 18. rednem letnem sestanku organizacije Kangourou Sans Frontieres (KSF) v Tbilisiju v Gruziji. Tokratni sestanek so sicer v veliki meri zaznamovale težave organizatorjev zaradi pomanjkanja finančnih sredstev in pa volitve za predsednika organizacije KSF. Na volitvah sta kandidirala dva kandidata, dolgoletni predsednik Andre Deledicq iz Francije in Gregor Dolinar iz Slovenije. Slednji je prejel 28 od 46 glasov in tako postal novi predsednik mednarodne organizacije KSF. V prihodnjih letih se bo ta zaradi hitrega naraščanja števila sodelujočih držav in vedno večjega števila tekmovalcev soočila z velikimi izzivi.



→ V Sloveniji je Mednarodni matematični kenguru prva stopnja tekmovanja za Vegova priznanja in je hkrati najštevilčnejše tekmovanje v preverjanju znanja. Letos se ga je udeležilo 94122 učencev, dijakov in študentov iz več kot 500 osnovnih šol, več kot 260 srednjih šol in štirih fakultet. V okviru Komisije za tekmovanje Mednarodni matematični kenguru smo pripravili 12 različnih tekmovalnih pol za različne starostne skupine. Poseben izbor nalog je bil narejen za dijake srednjih tehničnih in strokovnih šol (kategorija B), za dijake srednjih poklicnih šol (kategorija C) in za študente. Naloge za osnovno šolo smo tako kot vsako leto pripravili tudi v italijanskem in madžarskem jeziku za narodnostni manjšini ter v angleškem jeziku za učence mednarodnih šol. Ob zaključku šolskega leta, 3. junija 2011, smo na tradicionalni nagradni izlet povabili 122 najboljših tekmovalcev zadnjih treh razredov devetletke. Tokrat smo si ogledali avstrijsko prestolnico. Vsi prvošolci so za udeležbo na tekmovanju prejeli darilce Veselo kocko. Naslednje tekmovanje Mednarodni matematični kenguru bo v četrtek, 15. marca 2012.

× × ×

→ Tretji četrtek v marcu smo se s šolskim tekmovanjem vključili v tekmovanje Mednarodni matematični kenguru, ki je tekmovanje z nalogami izbirnega tipa, namenjeno najširšemu krogu tekmovalcev. Naloge so bile dosegljive vsem srednjim šolam, po zbranih podatkih je v tej kategoriji tekmovalo 6659 dijakov, bronasta priznanja pa je prejelo 2155 tekmovalcev. Konec marca se je 1357 dijakov z 78 srednjih šol udeležilo regijskega tekmovanja, ki je potekalo v 13-ih regijah. Srebrna priznanja je prejelo 783 dijakov. Na državni ravni 55. tekmovanja srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja, ki je bilo izvedeno 16. aprila na Gimnaziji Nova Gorica, je sodelovalo 153 dijakov. Tekmovalna komisija je skrbno pregledala vse izdelke in objavila neuradne rezultate. Po

# Tekmovanje srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja

↓ ↓ ↓

DARJO FELDA

pregledu prispelih ugovorov je objavila uradne rezultate. Zlata priznanja je prejelo 109 dijakov.

Prvo nagrado so prejeli Juan Gabriel Kostelec iz 1. letnika ter Matjaž Leonardis in Venko Mramor iz 3. letnika (vsi Gimnazija Bežigrad, Ljubljana). Drugo nagrado so prejeli Juš Kosmač (Gimnazija Jesenice), Aleksander Rajhard (Gimnazija Škofja Loka) in Ajda Remškar (Gimnazija Kranj) iz 1. letnika, Mihaela Pušnik in Maruša Pečovnik (obe I. gimnazija v Celju) iz 2. letnika, Nik Jazbinšek (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), in Neža Žager-Korenjak (I. gimnazija v Celju) iz 4. letnika. Tretjo nagrado so prejeli Jan Geršak in Taja Kuzman (I. gimnazija v Celju) in Aljoša Krstič Horvat (II. gimnazija Maribor) iz 1. letnika, Sara Pia Marinček (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) in Rok Havlas (II. Gimnazija Maribor) iz 2. letnika, Žiga Gregorin in Vid Jazbec (oba Šolski center Velenje, Gimnazija) iz 3. letnika ter Marion Antonia van Midden (Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica) in Aleš Omerzel (I. gimnazija v Celju) iz 4. letnika.

× × ×

# Dolgi teleskopi



JANEZ STRNAD

→ Na začetku 17. stoletja je teleskop omogočil nagel razvoj astronomije. Ob tem so teleskope nenehno izboljševali. Nekaj časa so uporabljali tudi zelo dolge teleskope. Med prvimi je zelo dolg teleskop uporabil Jan Hevelij (1661–1687), ki je sestavil tudi enega prvih atlasov ozvezdij.

Na prehodu iz 16. v 17. stoletje so na Nizozemskem zbiralno in razpršilno lečo sestavili v daljnogled. Galileo Galilei je leta 1609 izvedel za nizozemski izum in je sam začel izdelovati boljše daljnogleda ter z njimi načrtno opazovati nebo. (Ob štiristoletnici izuma so leto 2009 razglasili za mednarodno leto astronomije.) Leta 1611 so si v Galileijevem krogu izmislili ime teleskop.

Jan Hevelij je leta 1649 v Gdansku podedoval pivovarno. Potem je prevzel vodstvo ceha pivovarnarjev in leta 1651 postal mestni svetnik. Hevelij ni samo varil piva in v mestu opravljal pomembnih služb, ampak se je zanimal tudi za zvezde. Zgradil si je zvezdarno in načrtno opazoval nebo. Njegova zvezdarna je veljala za najbolje opremljeno na svetu do leta 1671, ko so ustanovili zvezdarno v Greenwichu. Hevelij je naredil tudi načrt za napravo za brušenje leč in z njo zbrusil velike leče z goriščno razdaljo od 8 m do 42 metrov. Največja leča je imela premer 20 centimetrov. Te leče je uporabil kot objektivne v svojih teleskopih.

Teleskop z večjim objektivom je zajel večji del neba in razkril več podrobnosti. Poleg večje povečave je imel še prednost, da so predmeti imeli manj izrazit mavrični rob. Velika goriščna razdalja objektivna pa je zahtevala veliko razdaljo med objektivom in okularjem. Daljšo in težjo cev je bilo težje vpeti in usmerjati.

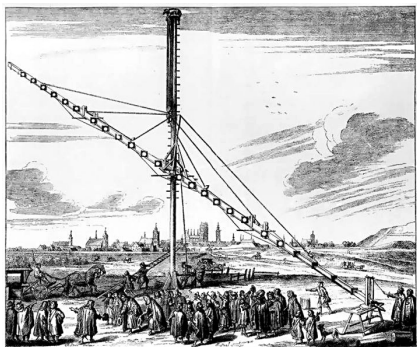






V nizozemskem ali Galileijevem daljnogledu, ki ima za objektiv zbiralno lečo z goriščno razdaljo  $f$  in za okular razpršilno lečo z goriščno razdaljo  $-f_1$ , je razdalja med lečama  $f - f_1$ . V astronomskem daljnogledu, ki ima za objektiv zbiralno lečo z goriščno razdaljo  $f$  in za okular zbiralno lečo z goriščno razdaljo  $f_1$ , je razdalja med lečama  $f + f_1$ . Za oba je geometrijska povečava enaka  $f/f_1$ . Goriščne razdalje astronomskih okularjev so po absolutni vrednosti majhne in razdaljo med lečama v teleskopu lahko ocenimo kar z goriščno razdaljo objektiva.

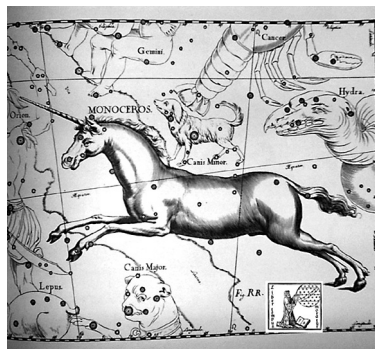
Leta 1673 je Hevelij uporabil svoj objektiv z največjo goriščno razdaljo v teleskopu, ki je imel namesto cevi leseno ogrodje v obliki žleba. Ogrodje je bilo pritrjeno na 25 metrov visokem drogu, ki so ga pomočniki usmerjali z vrvmi preko škripcev (slika 1). Motila je svetloba iz okolice. Opazovali so le v jasnih nočeh brez Lune. Poleg tega je veter majal žleb in so dolžino vrvi morali prilagajati vlažnosti zraka. Zaradi tega so dolgi teleskop le poredko uporabili.



**SLIKA 1.**  
Veliki teleskop Hevelija na sliki iz tistega časa

Drugi astronomi so šli še korak dalje in so začeli uporabljati *zračne teleskope* brez cevi in brez žleba. Opazovalec je stal na tleh in držal v roki okular, ki je bil z napeto vrvjo ali drogom povezan z objektivom na visoki stavbi ali steburu. Okular je obračal, dokler ni zadel zelenega dela neba. To je bilo dokaj težavno opravilo.

Prva naj bi zračni teleskop uporabila Christiaan Huygens in njegov brat Constantijn, ki sta leta 1675 opazovala z objektivom z goriščno razdaljo 43 metrov. Leta 1684 je Giovanni Domenico Cassini z objektivom z goriščno razdaljo 45 metrov odkril Saturnovi luni Diono in Tetido. Še leta 1722 je James



**SLIKA 2.**  
Ozvezdje Samorog iz Hevelijevega atlasa

Bradley z objektivom z goriščno razdaljo 65 metrov izmeril kotni premer Venere. Adrien Auzout je uporabljal objektiv z goriščno razdaljo do 180 metrov. Načrtoval je teleskop z goriščno razdaljo več kot 300 metrov, da bi z njim „opazoval živali na Luni“.

Gradnjo zračnih teleskopov so opustili, ko so prišli v rabo objektiv iz dveh leč. Z lečama iz stekla z različnima lomnima količnikoma so močno zmanjšali mavrični rob. Teleskopi z zrcali so v tem pogledu še veliko boljši, ker se pri njih mavrični rob sploh ne pojavi.

Čeprav je opazoval s teleskopi, je Hevelij lego zvezd na nebu ugotavljal brez njih, najbrž zaradi težav pri vpenjanju in usmerjanju teleskopa. To se je Robertu Hooku zdelo nedopustno. Prišlo je do spora, ki ga je londonska Kraljeva družba rešila tako, da je leta 1679 v Gdansk poslala triindvajsetletnega Edmunda Halleya. Halley je Hevelija opazoval pri delu in nazadnje potrdil, da „meri natančno in dosledno“.

Po Hevelijevi smrti je njegova vdova leta 1690 izdala atlas ozvezdij *Nebesni svod Sobieskega ali uranometrija*. (Poljski kralj Jan III. Sobieski je obiskal Hevelija v zvezdarni in podpiral njegovo delo. Uranometrija je pomenila merjenje neba.) To je bil eden od prvih takih atlasov. V njem je Hevelij poleg 48-ih Ptolemajevih ozvezdij uvedel enajst novih. Od teh se jih je šest obdržalo do danes, ko so ozvezdja in meje med njimi določene z mednarodnim dogovorom. Med njimi je bil Ščit Sobieskega, danes Ščit, s katerim je Hevelij počastil zmago Sobieskega nad Turki, ki so leta 1683 oblegali Dunaj. Atlas kaže ozvezdja na nebesni krogli, kakor bi jih videl opazovalec iz zunanosti krogle (slika 2). Poznejši atlasi ozvezdij so slikali nebesno kroglo iz notranjosti.

× × ×

[www.dmfa-zaloznistvo.si](http://www.dmfa-zaloznistvo.si)

# Kako razložiti relativnost?



ANDREJ LIKAR

→ Onidan sva s prijateljem Bogdanom razpravljala o posebni teoriji relativnosti. Bogdan je inženir strojništva, z moderno fiziko se med študijem ni seznanil. Seveda sem takoj ubral že nič kolikokrat ponovljene strune in začel dopovedovati, da je hitrost svetlobe v vseh nepospešenih opazovalnih sistemih enaka. Če torej dva opazovalca, ki se medsebojno gibljeta, opazujeta blisk iz iste luči, bosta oba namerila enako hitrost svetlobe. In spet tisto obrabljeno: če se še tako podvizaš in podiš za svetlobo, ta vedno beži od tebe z enako hitrostjo. „To sicer ni čisto res; tako hitrost izmeriš, ko se ne giblješ več pospešeno“, sem še dodal in se zadovoljno zleknil na stolu ter opazoval prijateljev nejeverni obraz.

„To seveda ni mogoče,“ sem dobil odgovor. „Le kako naj svetloba ve, kako naj se giblje? Enemu opazovalcu še lahko morda ustreže, dvema ali večim pa prav gotovo ne. Sploh pa, svetloba gotovo nič ne „ve“. To je pač pojav, ki obstaja ne glede na opazovalce in njihove prazne marnje.“ Brihten možak, ni kaj. In ne pusti se kar tako pretentati. Seveda sem moral stopiti v bran z argumenti, ki bi Bogdana prepričali. Takoj sem uvidel, da mi še tako lepe enačbe ne bodo v prid. Torej sem moral izumiti nov pedagoški prijem.

In sem začel. „Saj poznaš tisto Borovo partizansko pesem:

*Jutri gremo v napad.*

*Glej, kako globoko je nebo!*

*Sneg naš beli brat, razlij se v temo, temo!*

*Veter potepuh, podaj nam roko!*

*Mesec lenuh, hitreje za nami!*

*Mi gremo, gremo s puško na rami!*

*V napad za svobodo, za kruh!“*

„Kako da ne! In kje je tu fizika?“ je vprašal Bogdan. „V vrstici *Mesec lenuh, hitreje za nami!* Res, če hodiš v mesečni noči, gre Mesec s teboj. Ko greš hitro, so podviza tudi Mesec. Ko se ustaviš, se ustavi tudi Mesec; ko se obrneš in greš nazaj, od koder si prišel, se obrne tudi Mesec. Le kako Mesec „ve“, kako se mora gibati? In, zanimivo, vsak hodec bo izjavil enako, seveda, če hodi v isto smer kot ti.“

Tu se je Bogdan v hipu znašel: „To se nam samo zdi, saj je Mesec zelo zelo daleč, ti pa si ga prikoval na nebo na oddaljenosti kakih 20 metrov, kot stari Egipčani Sonce. Mesec vidijo hodci, ki gredo v isto smer, ves čas pod praktično enakom kotom, pokrajine, ki beži mimo njih, pa ne. Zato se jim le zdi, da se Mesec giblje z njimi. Če so pozorni in opazujejo dlje časa, pa vidijo, da se Mesec tudi sam prav počasi premika po nebu.“

„No, ker se le tako zdi, pa si zamisli takle poskus. Opazovalca, ki se drug glede na drugega gibljeta, merita hitrost svetlobe. Vzameta vsak svojo uro, ki ju morata še umeriti. Uri sta narejeni tako, da enakomerno tiktakata, dolžino tika in taka pa nastavimo tako, da v nekem trenutku pošljemo proti oddaljenemu mirujočemu zrcalu kratek svetlobni sunek. Ko prestrežemo odbito svetlobo, naj ura naredi tik, potem pa enako za tak. Tako oba opazovalca umerita svoji uri. Oba izbereta enako oddaljenost  $L/2$  zanju mirujočega zrcala od ure. Ker oba uravnata uri na enak način, je seveda hitrost svetlobe za oba opazovalca enaka:  $L$  na tik. Opazovalcev je lahko kolikor hočeš, in vsi bodo trdili isto: hitrost svetlobe je  $L$  na tik.“

„To je gotovo goljufija. Vsi bi morali imeti povsem identične ure, ki tečejo neodvisno od opazovalca, ne pa, da ima vsak svojo in po svoje naravnano. Kar pomisli! Zame je moje zrcalo pri miru, opazovalčevo pa se giblje. Uri pač nista enako naravnani. Če meriš tako bedasto, ugotoviš, da so vse hitrosti na tem

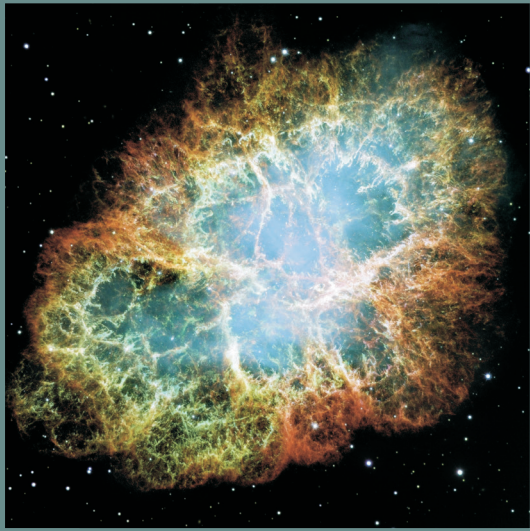
18

nadaljevanje  
na strani





# Nagradna križanka



|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | AVTOR MARKO BOKALIČ                   | SVETO-PISEMSKI OČAK               | PRIPADNIK ZAHODNO-SLOVAN. NARODA         | ZAKONČEV OČE                        | SPIRALAST ZLEB V CEVI STRELNEGA OROŽJA         | UPAD ČLANSTVA       | NEON                                   | EKSTREMI NA ELIPTIČNIH TIRIH VESOLJ. TELES | KANTON NA ZAHODU ŠVICE                   | TOMAŽ SLIVNIK                           | TELICA (NAREČNO)      |
|-------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | VEDA O POLETIH V VESOLJE              |                                   |                                          |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | FR. MATEMATIK (PO NJEM ENOTA ZA TLAK) |                                   |                                          | 2                                   |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | ITAL. MOTORIST (VALENTINO)            |                                   |                                          |                                     |                                                |                     | STANE UREK                             |                                            |                                          | CITROŠNOV OLD-TAJMER                    |                       |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | POLJE IZVEN IGRISČA                   |                                   |                                          |                                     | KORIST                                         | 7                   | BOŽJE-POTNIK                           |                                            |                                          | DANSKI OTOK ZELO BLIZU CELINE           | NIKALNICA             |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | HEKTAR                                |                                   |                                          | ODVZEM POMEMBNE JAVNE FUNKCIJE      | MLADINSKI PISATELJ MAL                         | PREDLOG             |                                        |                                            | AMONI-JAKOVA SPOJINA IT. ZNAMKA MOTORJEV |                                         | ŠANSO-NJERKA ŽNIDARIČ |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | ŽGANA PIJAČA                          |                                   |                                          |                                     |                                                | RIMSKI BOG LJUBEZNI |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | NJENA "MATI" JE PREVIDNOST         | BEBKA                                  | POKOJNI POLITIK IZ ZIM-BABVEJA (JOSHUA) | PISATELJICA VAŠTE                       | DOMNEVA ENOTA ZA MNOŽINO SNOVI V KEMIJI |                                       |                                   | TEMNO SI-VA KRAVA NAŠ PISATELJ (FRAN)    |                                     |                                                |                     |                                        | FIZIK NEWTON ALPSKA REKA V FRANCIJI        |                                          |                                         |                       |
| SPODNJI EKSTREM FUNKCIJE            |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         |                                       | PORTUG. DIRKALISČE FI             |                                          |                                     |                                                |                     |                                        | 13                                         |                                          | MESTO OB ISTOIMEN. MORJU V JUŽNI RUSIJI | NEKDANJI DIRKAČ LAUDA |
| PREKINITEV DOVAJANJA ENERGIJE       |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         |                                       | HROŠČ TRTNI SVALIKAR PAS, OBMOČJE | 15                                       |                                     |                                                |                     |                                        | IGRALEC CONNERY                            |                                          |                                         |                       |
| RIMSKI CESAR S PALAČO V SPLITU      |                                    |                                        | 4                                       |                                         |                                         |                                       |                                   |                                          |                                     |                                                |                     | PERZIJSKO KRZNO NASPRO-TJE PRE-VENTIVE |                                            |                                          | 5                                       |                       |
| ITAL. IME ZA RIM                    |                                    |                                        |                                         |                                         | STRANSKA REČNA STRUGA IMETNIK ABONMAJA  | 8                                     |                                   |                                          |                                     | PETJE OB POŠNETKU NEKD. RUS. HOKEJIST CIGANKOV |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| PEVEC PESTNER                       |                                    |                                        |                                         | IGRALKI MARGRET IN JILLIAN URANOVA LUNA |                                         |                                       |                                   | VOLNENA ČESANKA IZ RAZNO-BARVNIH VLAKEN  |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          | NAŠ MATEMATIK (IVAN)                    |                       |
| SLOVAŠKA                            |                                    |                                        | VRSTA PIHALA MANJŠA STOJEČA VODA        |                                         |                                         |                                       |                                   | ORGANSKO TOPILO SPORTNI NOVINAR (ANDREJ) |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| RUSKO MESTO 500 km JV. OD MOSKVE    | 12                                 |                                        |                                         |                                         |                                         |                                       |                                   | ODRSKI PRIZOR                            |                                     |                                                |                     | 6                                      |                                            |                                          |                                         |                       |
|                                     | ORIEN-TALSKA MERA ZA MASO, 1,28 kg | SREDIŠČE SLOVEN. GORIC ASTRONOM. POJAV |                                         |                                         |                                         |                                       |                                   | REBRASTA TKANINA                         |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| VELIKI KOŠI POHIŠTVA                |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         |                                       |                                   |                                          | ENOTA ZA MOČ NEVTRAL ZA SEŠTE-VANJE |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| DVOŽIVKA                            |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | AVSTRAL. PLAVALEC THORPE              | 11                                |                                          |                                     | RIMSKA 501 NARAVNI LOGA-RITEM                  |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
| SREDO-ZEMSKA OKRASNA RASTLINA       |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | DOTOK DENARJA NA RAČUN                | 16                                |                                          |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |
|                                     |                                    |                                        |                                         |                                         |                                         | SEKANJE                               |                                   |                                          |                                     |                                                |                     |                                        |                                            |                                          |                                         |                       |



## NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **30. decembra 2011**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.



15

nadaljevanje  
s strani

svetu enake, saj pri opazovanju kakršnegakoli gibanja ustrezno nastaviš dolžino tika in vedno lahko dobiš hitrost  $L$  na tik!!! “

„Ko si uro enkrat nastavil, je pač ne boš kvaril za vsako gibanje posebej. A vidim, da si dojel bistvo. Sedaj pa pazi! Ko opazovalca s po svoje naravnanimi urama prideta skupaj in se drug glede na drugega ne gibljeta več, se zgodi nekaj, kar je povsem nepričakovano. Uri, kjub temu, da sta prej tekli vsaka po svoje, sedaj tečeta povsem ubrano, ne da bi ju morali ponovno nastavljeni.“

„Glej no glej... Sedaj pa se mi je posvetilo! To je nenadoma tudi povsem pričakovano. Če namreč ni sredstva, po katerem bi potovala svetloba, sta opazovalca glede ur na povsem istem kot prej, ko sta bila vsaksebi. In ker se lahko en opazovalec priključi drugemu tako, da se zavre ali pospeši, drugi pa ne ukrene nič, se mora tek pospešene ure nekako sam naravnati na tek ure drugega opazovalca. Torej pospešek spremeni tek ure?“

„Tako je. To je osnovna lastnost ur in merjenja časa. Vse to pa opazimo le pri poskusu s svetlobo. Če bi poskušal kaj takega z zvokom, bi bili uri po snidenju še vedno razglašeni. Seveda zato, kot bi končno ugotovila eksperimentatorja, ker hitrost zvoka pač ni enaka za vse opazovalce, ki se gibljejo glede na zrak z različnimi hitrostmi.“

„Torej lahko rečeš, da se nam le zdi, da ima hitrost svetlobe enako vrednost v vseh opazovalnih sistemih, kot se nam je tudi zdelo, da Mesec vedno potuje z nami?“

„Lastnosti prostora in časa so pač take, da celo lahko tako rečemo. A ker pri tem ne najdemo očitne napake, kot smo jo naredili pri Mesecu, se spriznamo s konstantnostjo svetlobne hitrosti kot z osnovnim zakonom o naravi svetlobe, prostora in časa.“

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)
[www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)
[www.dmfa-zaloznistvo.si](http://www.dmfa-zaloznistvo.si)

× × ×

# Razmisli in poskusi – Opis barv s tremi barvnimi koordinatami



MITJA ROSINA



## 45. Opis barv s tremi barvnimi koordinatami

Ljudje (in nekatere živali) imamo v očesu tri vrste čutilnic za svetlobo, ki zaznavajo tri različna spektralna območja svetlobe. Ene zaznavajo pretežno rdeče območje, druge zeleno, tretje pa modro. Zato se je izkazalo, da lahko pustvarimo večino barv s seštevanjem svetlobe treh „svetilk“ (recimo pikslov na televizijskem in računalniškem zaslonu). Jakost posameznih komponent označimo s t. i. barvnimi koordinatami  $R, G$  in  $B$  (*red, green, blue* – rdeče, zeleno, modro). Pri tem ustreza vsota koordinat celotni jakosti svetlobe, njihova razmerja pa barvnemu vtisu (prevladujočemu spektralnemu območju ter čistosti barve). Nekoč je bilo določanje barvnih koordinat ter sestavljanje nove zaželenne barve zamudno; potrebovali so tri projektorje z ustreznimi filtri. Danes pa je to s pomočjo računalnika in zaslona čisto preprosto in zabavno. Vzamemo program, ki dopušča našo izbiro barvnih koordinat, recimo PowerPoint (napravi „text box“, napiši kak tekst, pritisni „Font color“, „more colors“, „customs“). Enako pa leto ponujajo tudi drugi programi, npr. Paint, Irfanview.



## Naloge

1.) Vzemi različne barvaste predmete (papir, knjiga, blago, vaza) in poskusi najti na zaslonu enako barvo. Določi tudi „napako“ (za koliko smeš spremeniti koordinate, da bo primerjava še sprejemljiva). Če imaš več računalniških programov, preveri, ali dajo vsi enak rezultat.

2.) Poišči barve, ki so ti posebno všeč, in zabeleži njihove koordinate. Ali imaš raje barve bližje spektralnim ali pastelne mešanice?

3.) Ali je vtis barve res odvisen samo od razmerij  $R, G, B$ ? Zmanjšaj sorazmerno vse tri vrednosti in preveri. Dobil boš enak vtis, če je barvasta ploskev velika in okolica ne moti. Če je ploskva svetlejša od okolice, se nam zdi barva zelo živa, če pa je ploskva temnejša od okolice, dobimo vtis sive, rjave, sivomodre, sivozelene ali umazane barve. Zabeleži območja za te odtenke.

Odgovor na vprašanje iz prejšnje številke Preseka

**44. Guncanje.** Kmalu si se kot otrok naučil, da je treba pri gibanju naprej noge stegniti, pri gibanju nazaj pa skrčiti. Razloži, zakaj! Ali deluješ pri tem s silo? Ali opravljaš delo? Čemu?

**ODGOVOR.** Če ne steguješ in krčiš nog, je nihanje dušeno in se počasi ustavljaš. Za stalno amplitudo nihanja torej moraš opravljati delo, da nadoknadiš izgube zaradi trenja v ležajih in zračnega upora. Pri stegovanju nog spodnji del noge odrineš s silo naprej. Telo torej čuti silo nazaj – v obratni smeri, kot se giblje, torej opravlja delo, ki ga podaja ležajem in okoliškemu zraku. Ko pa spodnji del noge skrčiš, potegneš spodnji del noge k sebi, telo pa k spodnjemu delu noge – v obratni smeri gibanja telesa. Spet ti opravljaš delo.

Zakaj pa je treba pri stegovanju spodnji del noge odrivati in ne pritegovati? Ker moramo spodnji del noge pospešiti, saj se pri stegovanju giblje hitreje od telesa. Pri krčenju pri gibanju nazaj pa dobi spodnji del noge pospešek v smeri nazaj, saj spet prehiteva telo in potrebuje silo v smeri telesa (v smeri krčenja).

Za odriv je seveda važno osišče (ležaj), ki po zakonu o akciji in reakciji prevzame odrivni sunek. Poleg stegovanja in krčenja nog pomaga tudi gibanje telesa (usločenje hrbta), ki lahko prispeva tudi polovico odriva. × × ×

# 42. fizikalna olimpijada v Bangkoku, Tajska



CIRIL DOMINKO

→ Slovenijo so na olimpijadi zastopali: Pavel Kos in Domen Ipavec z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana; Mitja Zidar in Marko Ljubotina iz srednje šole Josipa Jurčiča Ivančna Gorica ter Kristijan Kuhar iz Šolskega centra Velenje, Gimnazija. Izbrani so bili na izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo, na katerega so se uvrstili po regijskem in državnem tekmovanju srednješolcev iz fizike. Tako kot v prejšnjih letih je vse stopnje tekmovanja tudi v šolskem letu 2010/11 organiziralo in izvedlo *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije)*.

Olimpijada je potekala med 10. in 18. julijem 2011 v Bangkoku na Tajskem. Sodelovalo je 393 tekmovalcev iz 84-ih držav. Naši tekmovalci so osvojili **eno bronasto medaljo in štiri pohvale**. Bronasto medaljo je osvojil **Pavel Kos**, ostali štirje iz ekipe pa pohvale. Neuradna primerjava doseženega števila in vrste medalj ter pohval sodelujočih držav (države ne tekmujejo ekipno) nas uvršča na delitev 41. mesta, med 40-imi evropskimi državami pa na delitev 20. mesta.

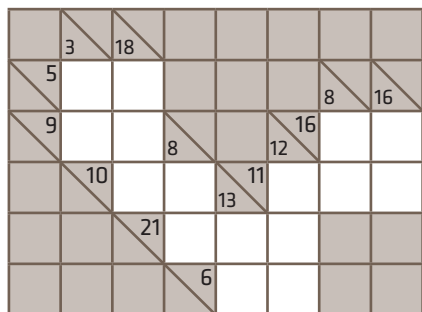
Slovenska olimpijska ekipa po svečani podelitvi priznanj. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Kristijan Kuhar (pohvala), Domen Ipavec (pohvala), Pavel Kos (bronasta medalja), Marko Ljubotina (pohvala), Mitja Zidar (pohvala) in Jurij Bajc (vodja).

Naslednja, 43. mednarodna fizikalna olimpijada bo od 15. do 24. julija 2012 v mestih Talin in Tartu v Estoniji. xxx

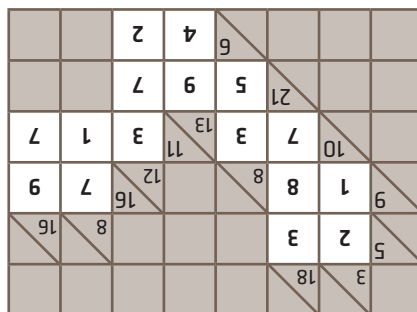
# Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9, tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



# ↓ ↓ ↓ REŠITEV



# Zbirka vaj ESA/ESO



ANDREJ GUŠTIN

→ Na spletni strani evropskega južnega observatorija ESO je izšla zbirka zanimivih nalog, ki predvsem dijake in študente nižjih letnikov fizikalno-astrofizične usmeritve uvajajo v osnove astronomске metodologije obdelave opazovanj. Naloge so nastale v okviru sodelovanja evropske vesoljske agencije ESA oz. njenega odseka za vesoljski teleskop Hubble in ESO. V tokratnem Preseku objavljamo nekaj nalog, sicer pa bodo v slovenskem prevodu izhajale na spletnem naslovu Portal v vesolje – [www.portalvesolje.si](http://www.portalvesolje.si).

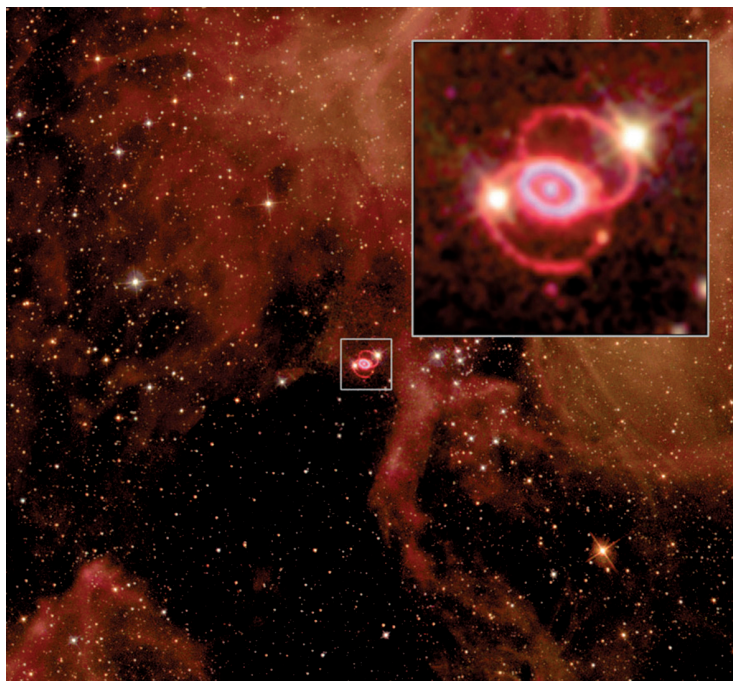
## Meritev oddaljenosti supernove SN1987A na osnovi opazovanj vesoljskega teleskopa Hubble

SN 1987A je oznaka znamenite supernove. Prvi del imena se nanaša na vrsto vesoljskega pojava – supernovo, temu sledi leto odkritja (1987), A pa označuje, da je bila to prvoodkrita supernova tistega leta.

### Supernove

Supernova je eksplozija, ki zaznamuje smrt določenega tipa zvezd. Poznamo dve osnovni vrsti supernov, toda na tem mestu se bomo ukvarjali le s t. i. supernovami tipa II, ki zaznamujejo smrt masivnih zvezd. SN 1987A je bila eksplozija take masivne zvezde.

Zvezda velike mase (tipično več kot pet Sončevih mas) živi vsega nekaj milijonov let, nato pa se pod lastno težo sesede, pri tem sproščeno energijo pa vidimo kot eksplozijo supernove. Med eksplozijo se večina snovi zvezde razleti v okoliški prostor. Ta snov lahko doseže hitrost  $10^7$  m/s (3 % hitrosti sve-

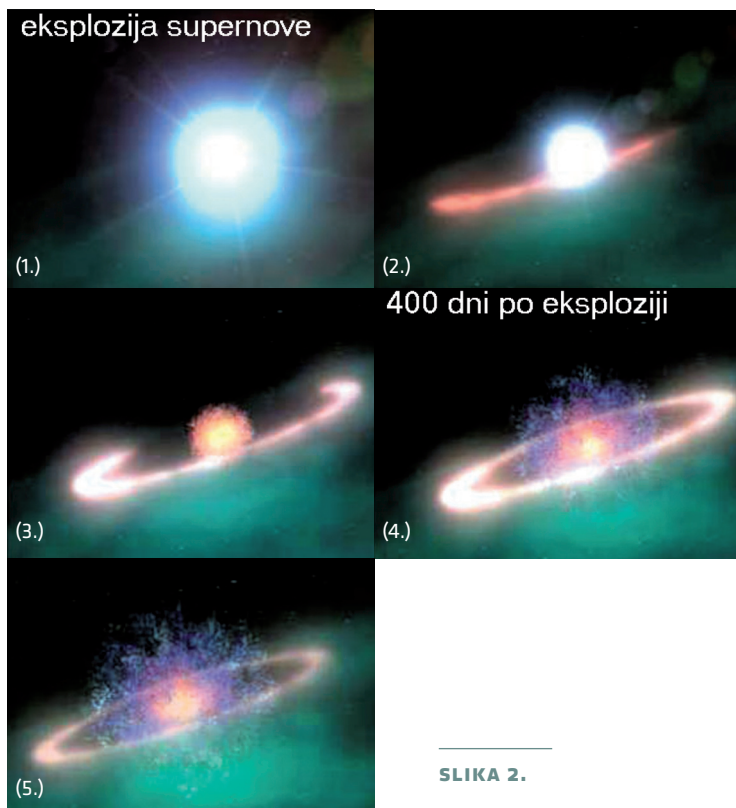


SLIKA 1.

tlobe). Razširjajoča se lupina ostankov zvezde ostane vidna v medzvezdnem prostoru še tisoče let, dokler se ne porazgubi. Tej vidni ostalini eksplozije pravimo ostanek supernove. V središču ostanka se nahaja osrednji del nekdanje zvezde, ki se je sesedel v nevtronsko zvezdo.

Vse supernove so zelo svetle. Njihov izsev je primerljiv z energijo, ki jo odda več milijard Soncu podobnih zvezd. Sodijo med najsvetlejšje pojave v vesolju. Prav zaradi tega jih je mogoče videti na velikih razdaljah. Supernov je sorazmerno malo, zato nebo ne žari neprestano od svetlobe umrlih zvezd. Po ocenah naj bi v posamezni galaksiji eksplodiralo le nekaj supernov na stoletje.

23. februarja 1987 se je v Velikem Magellanovem oblaku (VMO) pojavila supernova, ki je bila vidna s prostim očesom. VMO je ena od najbližjih satelitskih galaksij naše Galaksije. To je bil med najbolj vznemirljivimi dogodki sodobne astronomije. SN 1987A je bila prva, s prostim očesom vidna supernova po 400 letih. SN 1987A je za seboj pustila ostanek (na sliki 1 označen z okvirčkom in povečan v zgornjem desnem kotu), ki ga sestavljajo trije svetleči plinasti prstani. V vaji je za določanje oddaljenosti supernove, in s tem tudi VMO, izbran manjši osrednji prstan.



SLIKA 2.

### Oddaljenost Velikega Magellanovega oblaka

Določanje oddaljenosti vesoljskih teles je ena od temeljnih nalog astronomije. Natančno meritev oddaljenosti SN 1987A lahko uporabimo za določitev razdalje do VMO.

Ker je VMO zelo daleč v primerjavi z razdaljami med zvezdami v njem, lahko privzamemo, da so zvezde v VMO približno enako oddaljene od nas. Če torej določimo oddaljenost SN 1987A, s tem določimo tudi oddaljenost drugih zvezd v VMO. To pa lahko izkoristimo tudi kot odskočno desko za določanje oddaljenosti bolj oddaljenih galaksij. To naredimo tako, da v galaksijah poiščemo zvezde določene tipa in njihov navidezni sij primerjamo z navideznim sijem istovrstnih zvezd v VMO. Ko poznamo oddaljenost VMO, iz te primerjave neposredno izračunamo oddaljenost drugih galaksij.

### Prstan

Vesoljski teleskop Hubble je prve posnetke SN 1987A naredil z Esino kamero FOC (Faint Object Camera) 1278 dni po eksploziji supernove. Teleskop Hubble

so v orbito okoli Zemlje izstrelili leta 1990, potem pa je trajalo še nekaj časa, da so ga popravili, zato posnetkov ni bilo mogoče narediti prej. Na posnetkih SN 1987A so vidne tri krožne meglice – notranji prstan in dva zunanja prstana, ki se pnejo okoli mesta eksplozije. V vaji bomo uporabili le notranji prstan. Prstan je preveč oddaljen od supernove, da bi bil iz snovi, ki je v okoliški prostor poletela ob eksploziji. Gotovo je nastal pred tem dogodkom; verjetno ga je oblikovala snov umirajoče zvezde, ki jo je v zadnjih nekaj tisočletjih življenja zvezde ta odpihnili v okolico. Ni povsem znano, kako se je snov zbrala v tako ostro zarisan in tanek prstan, toda potem, ko ga je dosegla ultravijolična svetloba eksplozije supernove SN 1987A, je začel svetiti.

Pomembno je, da je prstan nastal pred eksplozijo supernove. Predpostavili bomo, da ima prstan popolno okroglo obliko, a je nagnjen glede na zveznico med opazovalcem na Zemlji in supernovo ter ga zato vidimo kot elipso. Če bi bil prstan viden od zgoraj, bi ga videli kot krožnico. Svetloba bi v tem primeru iz različnih delov prstana do nas prišla sočasno. Ker pa prstan vidimo pod kotom, je bilo najprej videti, kot bi zažareli deli, ki so nam bližje, z zakasnitvijo pa bolj oddaljeni deli. To je posledica končne hitrosti svetlobe (glej sliko 2).

Plinasti prstan je zasvetil, ko ga je dosegla svetloba supernove, nato pa je njegov sij postopoma slabel. Sij je bil največji, ko je zasvetil ves prstan. Prav to pa je mogoče izkoristiti za izračun oddaljenosti SN 1987A.

### Prstan zasveti.

Zaporedje ilustracij prikazuje, kako je prstan snovi zasvetil, ko ga je dosegla svetloba SN 1987A. Prstan je največji sij dosegel 400 dni po eksploziji supernove. Čeprav je svetloba dosegla vse dele prstana sočasno, so navidezno najprej zasvetili tisti deli, ki so nam najbližje. To se zgodi zato, ker je svetloba z bolj oddaljenih delov prstana prepotovala daljšo pot do nas. Z merjenjem te zakasnitve je mogoče določiti oddaljenost SN 1987A. Ilustracije so iz računalniške simulacije, ki so jo naredili pri STScI/NASA.

### 1. naloga

Najprej moramo izračunati kotni premer prstana, torej njegov navidezni premer v kotnih sekundah  $\alpha$ ,



| razdalja med  | oddaljenost<br>(mm) | oddaljenost<br>(kotne sekunde) | merilo na sliki<br>(kotne sekunde/mm) |
|---------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| zvezdo 1 in 2 |                     | 3,0                            |                                       |
| zvezdo 1 in 3 |                     | 1,4                            |                                       |
| zvezdo 2 in 3 |                     | 4,3                            |                                       |

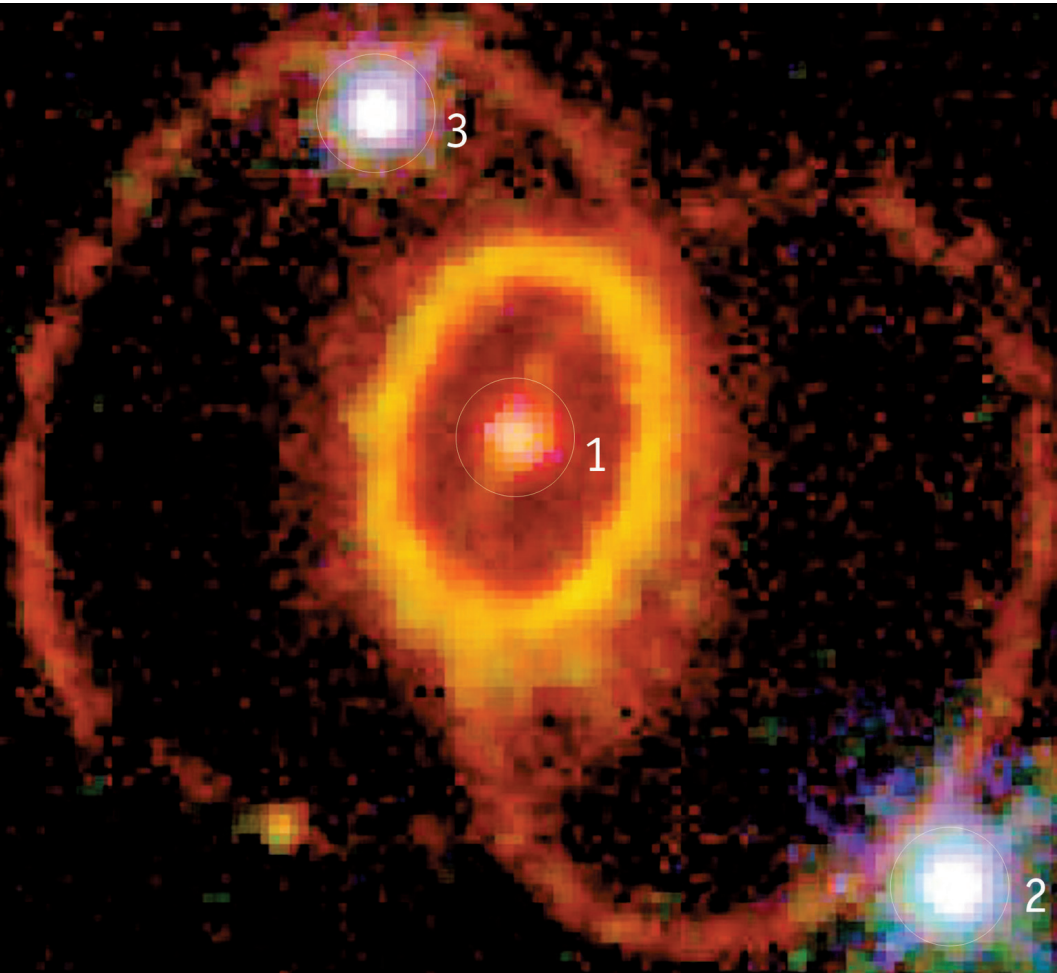
PREGLEDNICA 1.

kot ga vidimo z Zemlje.  
Navidezne razdalje med referenčnimi zvezdami 1, 2 in 3 na sliki 3 so v preglednici podane v kotnih sekundah.  
Na sliki izmeri razdalje med njimi v milimetrih in jih zapiši v prvi stolpec preglednice. Za vsako določi še merilo na sliki (kotne sekunde/mm).

2. naloga

Predpostavimo, da je prstan okoli SN 1987A popol-

noma okrogel. Videti je eliptičen, ker ga vidimo pod kotom oz. s strani.  
Kotni premer prstana na sliki lahko izmerimo, ne da bi poznali njegov naklon. Za nekatere je to povsem logično, drugi pa boste morali razmisliti, zakaj je tako. V vsakem primeru na kratko razložite, zakaj zgornja trditev drži. Pomagajte si s sliko 4.  
Na sliki 3 izmeri premer prstana v milimetrih in s podatki za referenčne zvezde meritev pretvori v kotne sekunde.



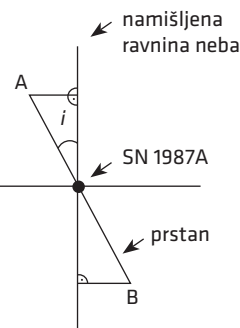
SLIKA 3.



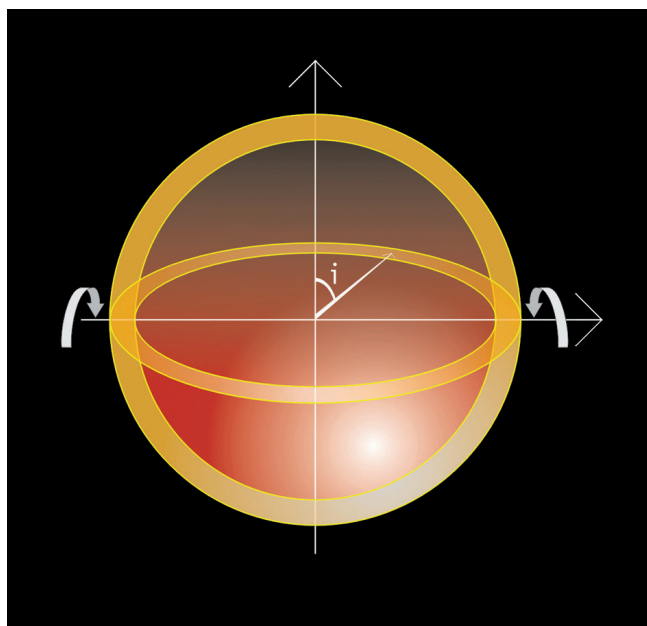




opazovalec



SLIKA 5.



SLIKA 4.

Naklonski kot  $i$  označuje kot med navidezno ravnino neba in ravnino, v kateri leži prstan.

### 3. naloga

Naklonski kot prstana označimo z  $i$ . Če je  $i = 0$  ali 180 stopinj, potem prstan vidimo kot krog. Če je  $i = 90$  stopinj, potem ga vidimo kot črto. Za  $i$  med 0 in 180 stopinj obroč vidimo kot elipso.

**Kako bi določili  $i$  z meritvami velikosti male in velike osi elipse? V pomoč sta sliki 4 in 5.**

Zamisli si, da prstan opazuješ s strani in ga zaradi tega vidiš pod kotom  $i$  glede na namišljeno ravnino neba. Namišljena ravnina neba je pravokotna

na smer gledanja. Naklonski kot  $i$  je mogoče določiti kar z razmerjem med malo in veliko osjo elipse.  $A$  označuje najbližjo točko,  $B$  pa najbolj oddaljeno prstana.

**Izmeri največji in najmanjši kotni premer elipse in izračunaj naklonski kot  $i$ .**

### 4. naloga

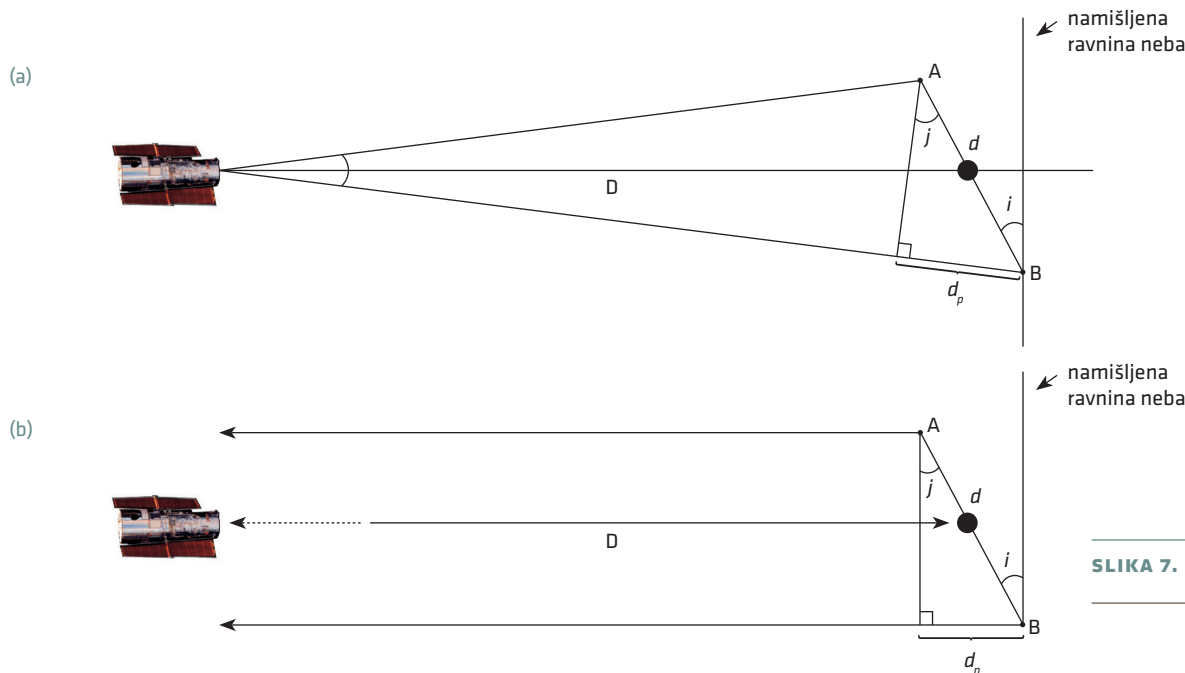
Ko izračunamo kotni premer prstana in njegov naklon, moramo izračunati še njegov dejanski premer na ravnini neba  $d$ , da lahko nato ocenimo tudi njegovo oddaljenost.

Dejanski premer prstana dobimo s pomočjo hitrosti svetlobe. Ko supernova eksplodira, odda zelo svetel blisk svetlobe, ki se v okoliški prostor širi s svetlobno hitrostjo  $c$ . Svetloba osvetli prstan v času  $t$  po eksploziji. Ker smo predpostavili, da je prstan krožen in njegovo središče sovpada s supernovo, bo svetloba vse dele prstana dosegla sočasno.

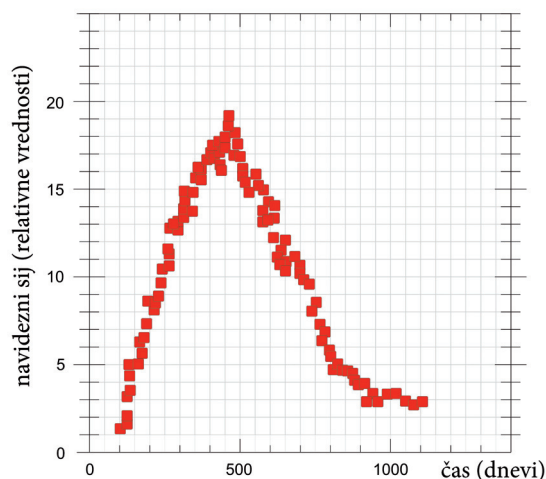
Razmislimo, kako je to videti z Zemlje. Čeprav so vsi deli prstana osvetljeni sočasno, je z Zemlje videti, da eni deli zasvetijo prej kot drugi. To je posledica dejstva, da je prstan nagnjen in svetloba z nam bližjih delov prstana prepotuje krajšo pot do nas. Če merimo sij prstana, bo ta dosegel višek šele tedaj, ko bo do nas prišla svetloba z vseh delov prstana. Razliko oddaljenosti najbližjega  $A$  in najbolj oddaljenega dela prstana  $B$  dobimo iz časovnega intervala med trenutoma zaznave prve svetlobe in trenutkom maksimuma sija. To svetlobno krivuljo prstana prikazuje slika 6.

**Na svetlobni krivulji izmeri časovni interval  $t$  med prvo svetlobo, ki je prišla do nas s prstana SN 1987A, in maksimumom sija.**

**Če bi bil naklonski kot prstana  $i = 90$  stopinj, bi bilo ta čas zelo enostavno povezati s premerom prstana. Zakaj?**



SLIKA 7.



SLIKA 6.

## 5. naloga

Da bi lahko izvedli naslednji račun, moramo narediti še eno poenostavitev (glej sliki 7a in 7b). Privzeli bomo, da sta premici, ki gresta skozi Zemljo in točki A ter B, vzporedni. To lahko naredimo, saj je premer prstana zelo majhen v primerjavi z njegovo oddaljenostjo od Zemlje. Sledi, da sta kota  $i$  in  $j$  enaka.

S pomočjo slik 7 poišči:

- razliko poti svetlobe  $d_p$  med točkama A in B;
- dejanski premer  $d$  prstana.

Nato najdi zvezo med razliko poti svetlobe  $d_p$ , hitrostjo svetlobe  $c$  in intervalom zakasnitve osvetljenosti prstana  $t$ , kakor jo vidimo z Zemlje. Iz te zveze in prej izmerjenih oz. izračunanih podatkov izračunaj še dejanski premer prstana ( $d$ ).

## 6. naloga

Sedaj si pripravljen za veliki finale!

Iz izračunanih vrednosti za premer prstana ( $d$ ) in kot  $a$  (2. naloga) izračunaj oddaljenost supernove  $D$ . Vrednost  $D$  izrazi v kiloparsekih (kpc) in svetlobnih letih.

1 parsek (pc) je razdalja, na kateri bi bila polos Zemljinega tira (1 astronomska enota) vidna pot kotom 1 kotne sekunde.

Astronomi so iz originalnih podatkov za oddaljenost supernove SN 1987A dobili vrednost  $D = 51,2 \pm 3,1$  kpc in za naklonski kot prstana  $i = 42,8 \pm 2,6$  stopinje. Če tvoja rezultata ne odstopata za več kot 20 % od teh vrednosti, si zelo dobro izvedel nalogo.

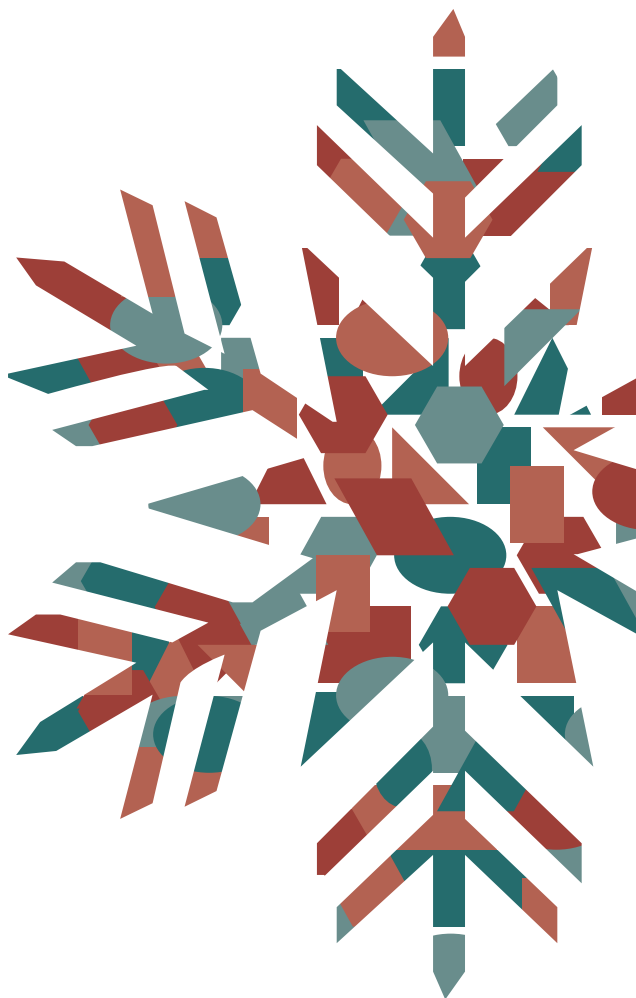
× × ×

# Huffmanovo kodiranje



TIM KOS

→ Računalniki in ostale digitalne naprave v večini uporabljajo dvojiški številski sistem [2], kar pomeni, da poznajo samo dve stanji – to sta 0 in 1. Enemu takšnemu stanju pravimo bit. Tak sistem najdemo v elektronskih vezjih digitalnih naprav. Vezje ponazori signal z 1, če po njem teče električni tok, ter z 0, če električnega toka ni. Zato je bilo potrebno razviti postopke (algoritme), ki vsakodnevne znake pretvorijo v zaporedje ničel ter enic (zaporedje bitov). Takšnemu postopku pravimo kodiranje. Poznamo več vrst kodiranj, ki jih ločimo na dve skupini. V prvo skupino spadajo tista kodiranja, ki za vse pretvorjene znake uporabijo enako število bitov. Med najbolj znane spadata kodiranje ASCII (ASCII je kratica za American Standard Code for Information Interchange), ki v razširjeni različici uporablja osem bitov za vsak znak, ter v zadnjem času vedno bolj uporabljeno kodiranje UNICODE. V drugo skupino pa spadajo tista kodiranja, ki za znake uporabijo različno število bitov in s tem porabijo manj pomnilniškega prostora. Ena izmed teh metod je tudi Huffmanov algoritem oz. Huffmanovo kodiranje. To metodo je leta 1952 izumil David Huffman [1].



## Huffmanovo kodiranje

Huffmanovo kodiranje nam iz množice znakov in njihovih frekvenc pojavitve v besedilu ustvari najkrajšo možno kodo za vsak znak. Ob tem nam zagotavlja, da so dobljene kode znakov prefiksne kode, kar pomeni, da ni nobena koda posameznega znaka začetek kode drugega znaka. S tem si zagotovimo enoličnost pri dekodiranju. Izkaže se, da Huffmanovo kodiranje ustvari v povprečju najkrajšo kodo in ga zato uporabljamo za stiskanje podatkov; večinoma gre za stiskanje besedila.

Huffmanovo kodiranje poteka tako, da iz znakov tvorimo dvojiško drevo, čigar listi predstavljajo podane znake. Nato na podlagi položaja v drevesu posameznemu znaku določimo kodo.

Dvojiško drevo je podatkovna struktura, ki je sestavljena iz vozlišč. Vozlišče lahko vsebuje ključ (podatke) ter levega in desnega otroka (povezavi na levo in desno poddrevo). Vozlišče brez levega in desnega otroka imenujemo list. Vozlišče, ki ni otrok nobenega drugega vozlišča v drevesu, pa imenujemo koren drevesa.

Huffmanovo dvojiško drevo tvorimo z naslednjim postopkom:

1. Znake si predstavimo kot vozlišča dvojiškega drevesa, katerih ključa sta znak, ki ga vozlišče predstavlja, ter njegovo število ponovitev v besedilu. Ker bomo iz teh vozlišč tvorili dvojiško drevo, si že sedaj vozlišča z znaki predstavljamo kot drevesa z enim samim vozliščem. Razporedimo jih v seznam takšnih dreves.
2. Dokler je število dreves v seznamu večje od 1, ponavljaj:
  - (a) Izberi dve drevesi z najmanjšim številom ponovitev v korenu.
  - (b) Izbrani drevesi združi v novo drevo, pri čemer v koren novega drevesa daj novo vozlišče, katerega število ponovitev je vsota števil ponovitev korenov izbranih dreves.
  - (c) Iz seznama izbrišemo izbrani drevesi in v seznam dodamo novo nastalo drevo.
3. Drevo, ki nam ostane, predstavlja (dvojiško) Huffmanovo kodirno drevo. Sedaj lahko določimo kodo posameznim znakom. To naredimo

tako, da se sprehodimo po drevesu, od korena drevesa pa vse do zelenega znaka. Če se v nekem vozlišču premaknemo na levega otroka, dodamo kodi vrednost 0, sicer vrednost 1. Postopek ponovimo za vsak znak.

### Primer

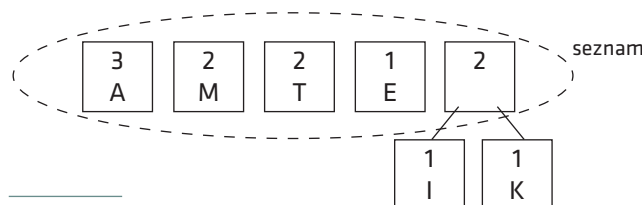
Najlažje je postopek kodiranja predstaviti s pomočjo primera. Recimo, da želimo zakodirati besedo *MATEMATIKA*. Črke, ki se pojavijo v besedilu, razporedimo v seznam dreves in jim pripišemo število ponovitev v besedilu. Zaradi preglednosti jih bomo uredili nenaraščajoče glede na to število, postopek ostane enak ne glede na vrstni red dreves v seznamu. Tako za naš primer dobimo seznam prikazan na sliki 1.



SLIKA 1.

Seznam črk besede *MATEMATIKA*

Huffmanov algoritem se nadaljuje tako, da iz seznama izbira po dve drevesi z najmanjšima številoma ponovitev v korenu. V našem primeru lahko izbiramo med vozlišči s črkami *E*, *I* in *K*. Recimo, da izberemo črki *I* in *K* ter ju povežemo v eno drevo z novo narejenim vozliščem. V to vozlišče shranimo vrednost 2, saj je to vsota števil ponovitev v vozliščih s črkami *I* in *K*. Tako dobimo nov seznam s črkami *A*, *M*, *T*, *E* in drevesom s številom 2 v korenu.

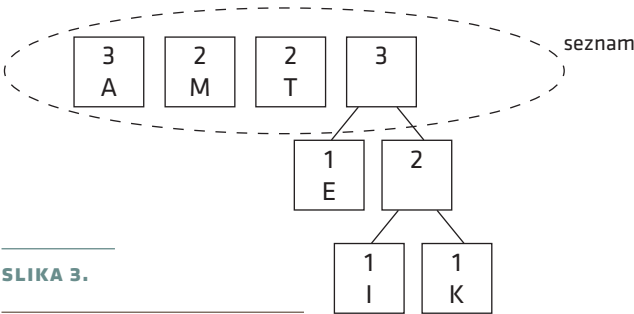


SLIKA 2.

Huffmanovo kodirno drevo za besedo *MATEMATIKA*

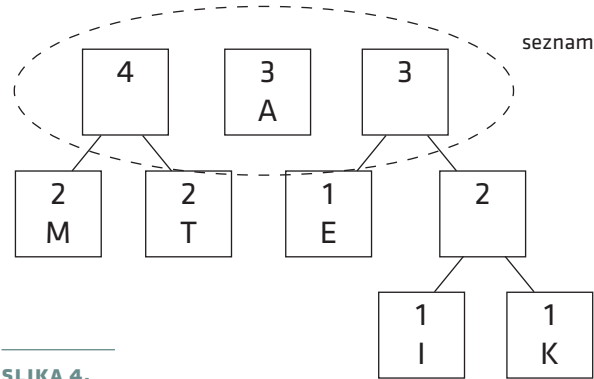
Ponovno iz seznama izberemo dve drevesi z najmanjšima številoma v korenu. Zato izberemo vozlišče s črko *E* ter še enega izmed vozlišč s črkama *M*, *T* ter drevesom s številom 2 v korenu. Recimo, da

→ izberemo drevo s številom 2 ter ga združimo v novo drevo z vozliščem s črko *E*. Tako ima novo drevo v korenu število 3. Novo nastalo drevo dodamo v seznam (seveda nadomesti izbrani drevesi).



SLIKA 3.

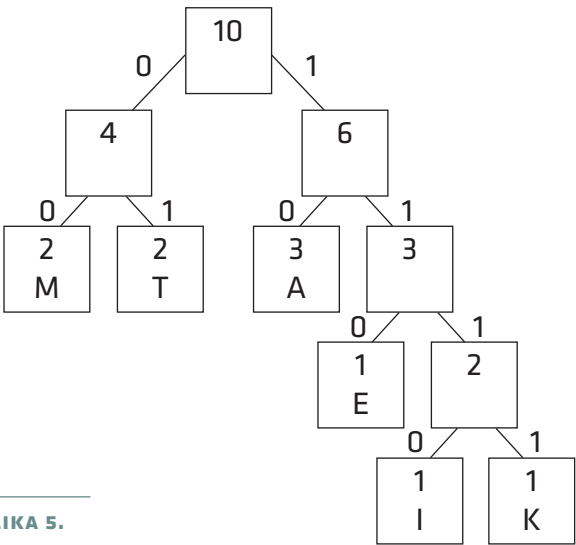
Ta postopek ponavljamo, dokler nam v seznamu ne ostane eno samo drevo. Torej v našem primeru izberemo vozlišči s črkama *M* in *T* ter ju povežemo z novim vozliščem s številom 4.



SLIKA 4.

Nato povežemo še drevesi s številom 3 v korenu, tako nastane novo drevo s številom 6 v korenu. Na koncu izberemo še preostali dve drevesi v seznamu in ju povežemo v drevo s številom 10 v korenu. Ker je v seznamu ostalo eno samo drevo, postopek zaključimo.

Nastali strukturi pravimo Huffmanovo kodirno drevo (glej sliko 5). S pomočjo tega drevesa bomo za vsako črko posebej določili Huffmanovo kodo. Najprej bomo določili Huffmanovo kodo črki *M*. Začnemo v korenu drevesa (vozlišče s številom 10). Ker do vozlišča s črko *M* pridemo tako, da se premaknemo dvakrat levo, je Huffmanova koda črke *M* enaka 00. Isto naredimo za preostale črke. Iz korena



SLIKA 5.

drevesa se premaknemo levo in nato desno do vozlišča s črko *T*, zato dobi črka *T* kodo 01. Za določitev kode črke *A* se premaknemo najprej desno in nato levo, zato je iskana koda 10. Za črko *E* se prestavimo dvakrat desno in nato levo, zato ima kodo 110. Če se premaknemo iz vrha trikrat desno in enkrat levo, pridemo do črke *I*, ki ima kodo 1110. Na koncu se še iz korena drevesa sprehodimo štirikrat desno, zato določimo črki *K* kodo 1111.

| črka | št. ponovitev | Huffmanova koda |
|------|---------------|-----------------|
| A    | 3             | 10              |
| M    | 2             | 00              |
| T    | 2             | 01              |
| E    | 1             | 110             |
| I    | 1             | 1110            |
| K    | 1             | 1111            |

TABELA 1.  
Huffmanovo kode črk

Tako smo določili Huffmanove kode za vse znake, ki nastopajo v besedi *MATEMATIKA*; le-to lahko zato tudi zakodiramo. To naredimo preprosto tako, da namesto vsake črke zapišemo pripadajočo Huffmanovo kodo. V našem primeru dobimo:

■ 0010011100010011110111110.



Dobljena Huffmanova koda ni enolična. Če imajo npr. tri drevesa v seznamu enako število ponovitev v korenu, je vseeno, kateri dve izberemo. Nikjer tudi ni določeno, katero izbrano vozlišče dodamo na levo in katero na desno stran. Za dano besedilo torej obstaja več Huffmanovih kod. Seveda bi lahko namesto črk kodirali poljubne znake in bi bil postopek popolnoma enak. Iz primera je tudi razvidno, da imajo tiste črke, ki se v besedilu pojavijo večkrat, krajšo Huffmanovo kodo. To je prednost Huffmanovega kodiranja, saj s tem tekstovna datoteka zasede veliko manj prostora na pomnilniku.

### Naloga

Ustvari Huffmanovo kodirno drevo za besedo *ABRAKADABRA* in določi Huffmanove kode posameznim znakom.

### Huffmanovo dekodiranje

Dekodiranje je obraten proces od kodiranja. Podano imamo Huffmanovo kodo, ki jo želimo pretvoriti nazaj v besedilo. Da lahko kodo dekodiramo, moramo poznati kode posameznih znakov oz. jih najprej določiti. Zato moramo vedno kodi, ki smo jo zakodirali, dodati še znake z njihovim številom ponovitev ali kar Huffmanovo kodirno drevo, ki smo ga pri kodiranju ustvarili.

Ko imamo Huffmanovo kodirno drevo, lahko začnemo z dekodiranjem podane kode, ki poteka po naslednjem algoritmu:

1. Postavi se na koren Huffmanovega kodirnega drevesa.
2. Dokler ne prispeš do lista (vozlišča z znakom), ponavljaj:
  - (a) preberi naslednji bit,
  - (b) če je bit enak 0, se v drevesu premaknemo na levega otroka,
  - (c) če je bit enak 1, se v drevesu premaknemo na desnega otroka.

Po končanem algoritmu se nahajamo na vozlišču z znakom, ki ga iščemo. Naslednji znak poiščemo tako, da se ponovno postavimo na vrh drevesa in ponovimo algoritem z začetkom v naslednjem, še ne-

prebranem bitu.

### Primer

Poglejmo si primer kode 0111010 in uporabimo kodirno drevo (glej sliko 5), ki smo ga ustvarili za besedo *MATEMATIKA*. Postavimo se na koren drevesa (vozlišče s številom 10), in ker je vrednost prvega bita kode 0, se premaknemo levo in prispemo na vozlišče s številom 4. Ker še nismo prispeli do lista, preberemo naslednji bit. Naslednji bit je 1, zato se premaknemo na desno. Prišli smo do lista (črke *T*), zato je prvi iskani znak črka *T*. Dekodiranje nadaljujemo v korenu drevesa. Preberemo naslednji še neprebrani bit, ki ima vrednost 1, zato se prestavimo na desnega otroka, ki vsebuje število 6. Ker vozlišče ne vsebuje znaka, preberemo naslednji bit z vrednostjo 1 in se ponovno premaknemo desno. Prispeli smo na vozlišče s številom 3. Ker še vedno nismo prispeli do znaka, nadaljujemo z branjem bitov. Naslednji bit je 0, kar pomeni, da se po drevesu premaknemo levo. Prispeli smo do črke *E*, ki predstavlja naslednji iskani znak. Ponovno se prestavimo v koren drevesa in preberemo naslednji bit, ki ima vrednost 1, ter se premaknemo desno. Ker še nismo prispeli do znaka, preberemo zadnji bit v kodi. Vrednost bita je 0 in zato se premaknemo na levega otroka in pridemo do zadnjega iskanega znaka črke *A*. Torej, naša koda 0111010 predstavlja besedo *TEA*.

Navadno Huffmanovo dekodiranje je zelo počasno, saj moramo kodo brati bit za bitom ter se za vsak znak sprehoditi navzdol po celem Huffmanovem kodirnem drevesu. Zato je leta 1985 Choueka [1] iznašel hitro Huffmanovo dekodiranje, ki s pomočjo delnih dekodirnih tabel hitreje najde rešitev. Ena izmed metod, ki pospeši dekodiranje, je tudi preblikovanje navadne Huffmanove kode v kanonično Huffmanovo kodo, ki jo lahko zaradi njenih lastnosti hitro in enostavno uporabimo oz. dekodiramo. A več o tem kdaj drugič.

### Literatura

- [1] D. Salomon, *A Concise Introduction to Data Compression*, Springer, 2008.
- [2] [http://sl.wikipedia.org/wiki/Dvojiški\\_številski\\_sistem](http://sl.wikipedia.org/wiki/Dvojiški_številski_sistem) (Citirano: 4. 11. 2011)

× × ×

# Astronomska literatura

Ob lanskem mednarodnem letu astronomije 2009 smo na enem mestu zbrali vse publikacije s področja astronomije, ki so na voljo pri DMFA-založništvo.



## Pavla Ranzinger:

## PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA 2000,0

format 54 × 58 cm  
plastificirana, zložena  
3,34 EUR



Pavla Ranzinger, Bojan Dintinjana in  
Herman Mikuž:

## NAŠE NEBO 2011

### Astronomske efemeride

56 strani formata 16 × 23 cm  
mehka vezava

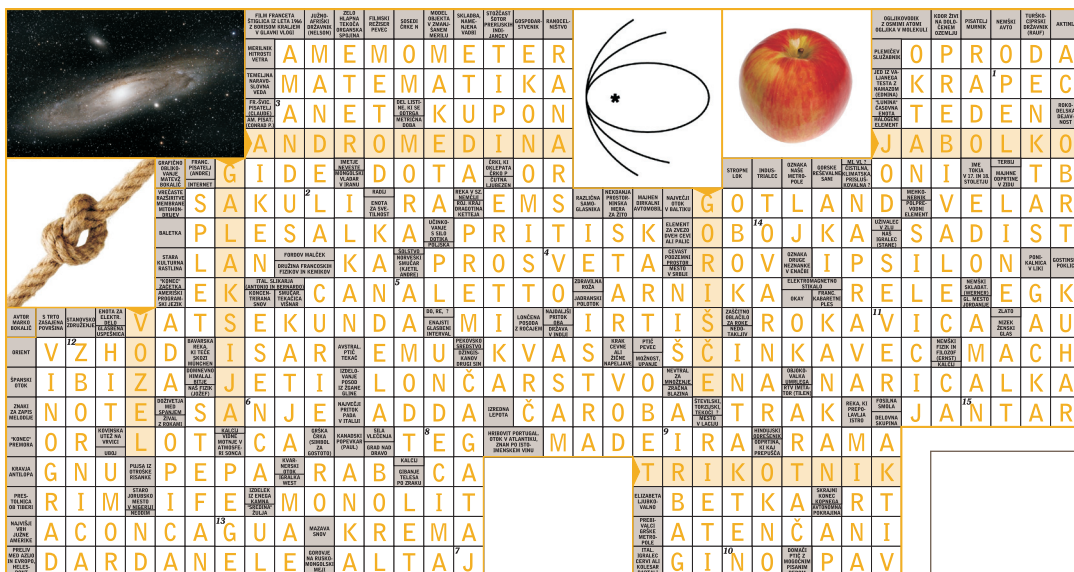
9,36 EUR

Poleg omenjenih dveh ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo **20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!**

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.



REŠITEV  
NAGRADNE  
KRIŽANKE  
PRESEK 39/2

→ Pravilna rešitev nagra-  
dne križanke iz druge šte-  
vilke 39. letnika Preseka  
je **Plavanje in vzgon**. Iz-  
med pravih rešitev smo  
izžrebali, ANKO ĐUDARIĆ  
iz Celja, JOŽETA JARCA iz  
Domžal in VESNO IRŠIČ iz  
Ljubljane, ki so razpisane  
nagrade prejeli po pošti.

× × ×

# Megleni slap

↓ ↓ ↓

ALEŠ MOHORIČ

→ V prejšnji številki Preseka smo se v poizkuševalnici naučili, da pline lahko pretakamo podobno kot kapljevine. Zato tudi spadajo med tekočine. Pretakanje plinov težko opazujemo, saj je plin običajno prozoren. Lepo pa vidimo tok drobnih vodnih kapljic,

ki nastanejo v oblakih ali megli in jih zračne mase – plin v katrih lebdi – nosijo s seboj. Na sliki lepo vidimo, kako se jutranja megla razliva čez rob Jelovice pri Jamniku. Občutek imamo, da bo cerkev Sv. Primoža in Felicijana kar odplavilo. Jelovica je dokaj izpostavljena in se ponoči zaradi sevanja lahko precej ohladi. Ko se zrak shladi, vodna para v zraku kondenzira v drobne kapljice. Ta hladen megleni zrak se nato preko roba planote kot slap preliva v dolino.



foto: Franc Erce

× × ×

## Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti.





# Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

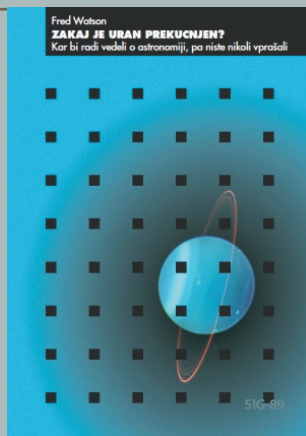
**Fred Watson:**

## **ZAKAJ JE URAN PREKUCNJEN?**

Kar bi radi vedeli o  
astronomiji, pa niste  
nikoli vprašali

200 strani  
format 14 × 20 cm  
mehka vezava

22,39 EUR

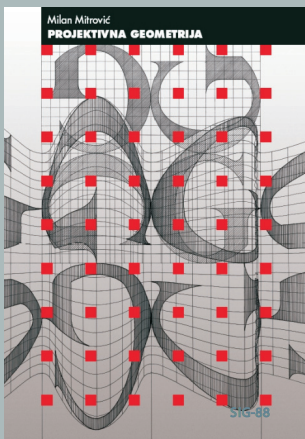
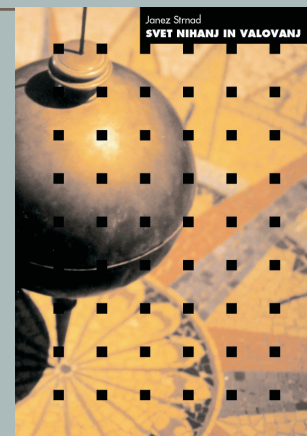


**Janez Strnad:**

## **SVET NIHANJ IN VALOVANJ**

200 strani  
format 14 x 20 cm  
mehka vezava

19,99 EUR

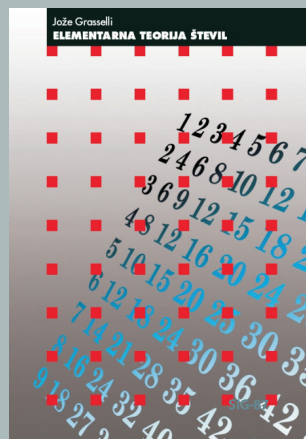


**Milan Mitrović:**

## **PROJEKTIVNA GEOMETRIJA**

158 strani  
format 14 × 20 cm  
mehka vezava

20,99 EUR



**Jože Grasselli:**

**Jože Grasselli:**

## **ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL**

168 strani  
format 14 × 20 cm  
mehka vezava

14,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.