



PRESEK



- KONSTRUKCIJE TRIKOTNIKOV
PRI DANIH TREH TOČKAH
- PLAVAJOČE JABOLKO
- POIŠČIMO ANDROMEDINO
GALAKSIJO
- ISKANJE NIZOV V BESEDILU

Zbiranje v gorišču



→ Parabole in elipse so dobro znane krivulje, ki jih poznamo že iz antične Grčije. So enostavne in izjemno uporabne.

Izkoriščanje sončne energije večinoma temelji na odbojni lastnosti parabol. Ogledala parabolne oblike odbijajo svetlobo, ki vstopa vzporedno z osjo parabole v parabolino gorišče, kjer se pretvori v uporabno energijo.

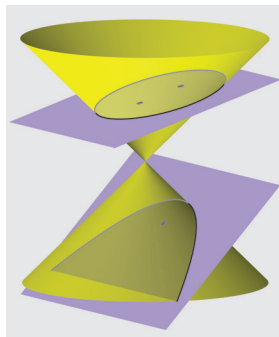
Podobno odbojno lastnost elips, ki imajo dve gorišči, uporabijo za neboleče neinvazivno razbijanje ledvičnih in žolčnih kamnov. Bolnike namestijo v kad, ki ima obliko polovice elipse tako, da se kamni nahajajo v enem od gorišč. Zvočni valovi, ki izvirajo v drugem gorišču, se koncentrirajo v gorišču s kamni in jih tako razbijejo.

Parabole in elipse so sestavni del večje družine stožnic, ki jim dobimo kot preseke ravnin z neskončnim dvojnimi stožcem. Med stožnice spadajo tudi hiperbole, s katerimi si lahko pomagamo pri razlagi strukture vesolja. V ravninski geometriji se točke, ki so enako oddaljene od izbrane točke, nahajajo na krožnici. V štirirazsežnem prostoru času, ki združuje običajni trirazsežni prostor in čas, pa takšne točke ležijo na eni od vej hiperbole. Ta rezultat sledi iz enačb, ki so matematični zapis uskladitve načel relativnosti z našim pojmovanjem razdalje in vzročnosti.

Čeprav je od odkritja stožnic minilo že zelo veliko časa, še danes vedno znova odkrivamo nove načine njihove koristne uporabe.

Radovedni bralec si lahko prebere več v leta 2010 izdani knjigi J. W. Downsa z naslovom *Practical Conic Sections: The Geometric Properties of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas*.

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 39, šolsko leto 2011/2012, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domažnjak, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2011/2012 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir, Ines Kristan

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1500 izvodov

© 2011 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1854

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevi naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Zbiranje v gorišču

MATEMATIKA

- 4-10** Konstrukcije trikotnikov pri danih treh točkah
(*Lea Števanec in Bojan Hvala*)
- 11** Aleksej B. Sosinski – Vozli
(*Bojan Gornik*)

FIZIKA

- 13-15,18** Plavajoče jabolko
(*Nada Razpet*)
- 19** Še o plinih –
Poizkuševalnica v kuhinji
(*Mojca Čepič*)
- 20** Razmisli in poskusi –
Guncanje
(*Mitja Rosina*)

ASTRONOMIJA

- 22-26** Poiščimo Andromedino galaksijo
(*Bojan Kambič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 27-29** Iskanje nizov v besedilu
(*Igor Pesek*)

RAZVEDRILO

- 31** Naravoslovna fotografija –
Barvita pajčevina
(*avtor?*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 39/1
(*Marko Bokalič*)
- 18, 30** Barvni sudoku

TEKMOVANJA

- 12** 47. tekmovanje za zalto Vegovo priznanje
(*Klavdija Mlinšek*)
- 20-21** 49. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije
(*Ciril Dominko*)
- priloga** 31. tekmovanje iz fizike za Stefanovo priznanje 2010/11

SLIKA NA NASLOVNICI: Španija je dežela Sonca, kjer se ljudje ne samo pražijo na peščenih plažah, temveč so v zadnjih letih zgradili veliko sončnih elektrarn. Predvsem jugozahodna dežela Andaluzija je posejana s tovrstnimi elektrarnami, ki sončno energijo izkoriščajo na različne načine. Ob Južni avtocesti v bližini kraja Ecija stoji 17 MW elektrarna Solar Tres. 2590 heliostatskih zrcal s skupno površino 298.000 kvadratnih metrov sledi gibanju Sonca po nebu in sončno svetlobo usmerja v osrednji stolp. Tam svetloba segreva staljene nitratsne soli, ki dosežejo temperaturo 565 stopinj Celzija. Segreta sol potuje v zbiralnik, od tam pa v uparjalnik, kjer odda toploto pari. Para žene turbine, te pa generatorje električne energije. Akumulacija toplote v zbiralniku staljene soli elektrarni omogoča 15-urno delovanje, tudi ko ni sonca. Pogled na elektrarno je zares osupljiv. Besedilo in fotografija: Andrej Guštin

Konstrukcije trikotnikov pri danih treh točkah

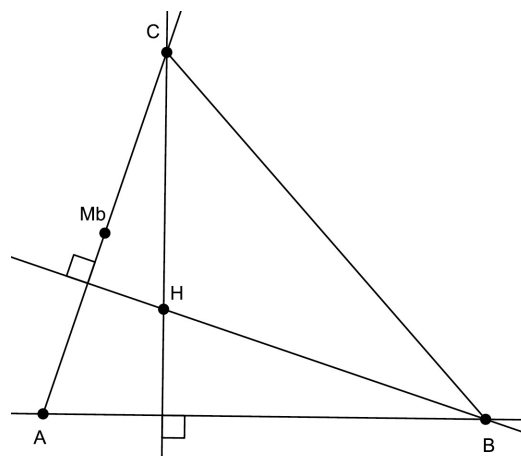


LEA ŠTEVANEC IN BOJAN HVALA

→ V Preseku smo že govorili o konstrukcijah trikotnikov pri danih treh podatkih [1]. Tedaj smo obljubili, da se k tej tematiki še vrnemo, in sicer s predstavitvijo konstrukcijskih nalog, kjer trikotnike konstruiramo pri danih treh točkah v ravnini. Svojo obljubo izpolnjujemo s tem člankom.

Za uvod si oglejmo naslednji preprost primer:

Primer 1. Konstruiraj trikotnik ABC pri danem oglišču A , višinski točki H in razpolovišču M_b stranice b .



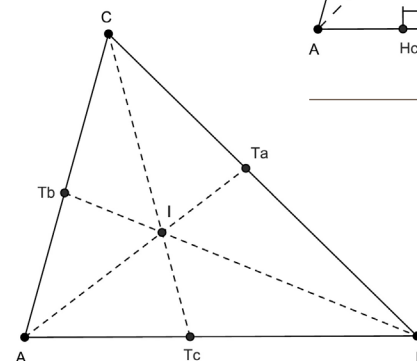
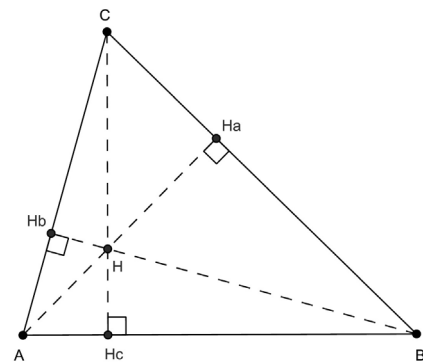
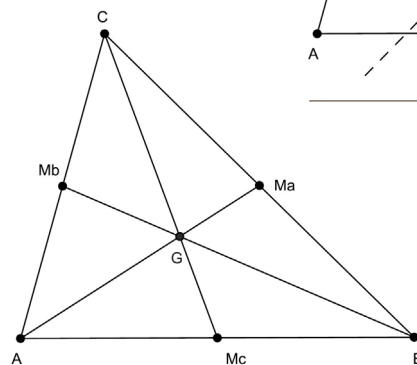
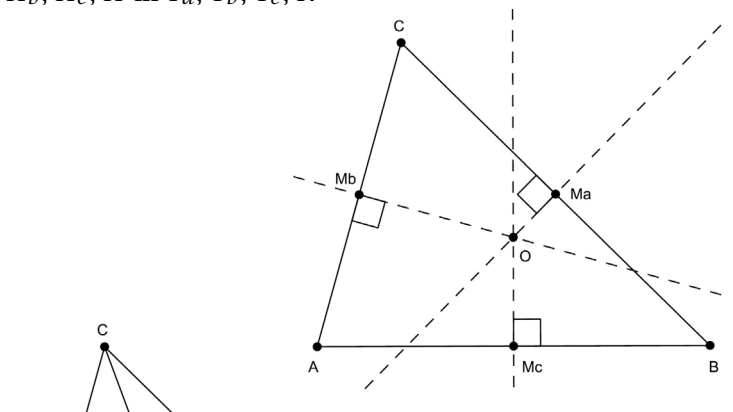
Oglejmo si skico. Pri danih točkah A in M_b lahko takoj določimo točko C . Ker imamo podano višinsko točko H , lahko narišemo premico CH . To je nosilka višine na stranico c . Če nanjo potegnemo pravokotnico iz točke A , dobimo nosilko stranice c . Iz točke H potegnemo pravokotnico na nosilko daljice AC , to je nosilka višine na stranico b . Kjer se zadnji dve premici sekata, je točka B . Točke ABC povežemo in trikotnik je konstruiran. Tako smo rešili konstrukcijski problem (A, M_b, H) .

K obravnavi tovrstnih konstrukcij bomo sedaj pristopili sistematično. Najprej se moramo odločiti, iz katerega nabora možnih točk bomo izbirali tri točke, ki bodo določale konstrukcijsko nalogo. Vsekakor bomo v ta nabor vključili oglišča A, B, C trikotnika ABC . Vključili bomo tudi štiri najbolj znane značilne točke trikotnika: težišče G , višinsko točko H , središče očrtanega kroga O in središče včrtanega kroga I .

Poleg teh bi v nabor lahko vključili še katero od manj znanih značilnih točk trikotnika. Na tem mestu se naravno pojavi vprašanje, kaj *značilna točka trikotnika* sploh je in koliko jih že poznamo. Žal bi kolikor toliko spodoben odgovor na to vprašanje terjal kar nekaj časa in bi zmotil glavno nit naše pripovedi. Zato zaenkrat omenimo le, da se je z značilnimi točkami trikotnika sistematično ukvarjal ameriški matematik Clark Kimberling, ki je pojem tudi natančno definiral. Osnoval je tudi *Enciklopedijo značilnih točk trikotnika*, ki je dostopna na spletni stran [2] in na kateri objavlja vedno nove in nove značilne točke trikotnika. Točke v tej enciklopediji so označene z $X(n)$, kjer je n naravno število. Tako so točke $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$ po vrsti ravno središče včrtanega kroga, težišče, središče očrtanega kroga in višinska točka. Tem potem sledijo točke z nadaljnjimi indeksi. Nekatere od njih spoznajo študentje matematike na dodiplomskih predavanjih. Take so npr. središče krožnice devetih točk $X(5)$, Gergonova $X(7)$, Nagelova $X(8)$, Lemoynova $X(6)$ in Fermatova točka $X(13)$ ter prva in druga Napoleonova točka $X(17)$ in $X(18)$. Spisek značilnih točk trikotnika v Kimberlingovi enciklopediji se potem nadaljuje in je že presegel številko 3600.

Odločimo se, da z vključevanjem značilnih točk trikotnika v nabor ne bomo pretiravali in se bomo omejili le na začetne štiri. Poleg teh bomo vključili še nekatere točke, ki ne zadoščajo Kimberlingovi definiciji značilne točke trikotnika. To so razpolovišča stranic M_a, M_b, M_c , nožišča višin H_a, H_b, H_c in pre-

sečišča stranic s simetralami notranjih kotov T_a, T_b, T_c . Na ta način dobimo 16 točk, ki jih razdelimo v štiri tematske sklope: A, B, C, O ; M_a, M_b, M_c, G ; H_a, H_b, H_c, H in T_a, T_b, T_c, I .





Iz množice 16 točk zdaj izbiramo po tri točke, ki bodo definirale konstrukcijski problem. To lahko storimo na $C_{16}^3 = \binom{16}{3} = 560$ načinov. To pomeni, da dobimo 560 možnih trojic točk. Seveda pa je bistveno različnih konstrukcijskih nalog precej manj. Tako je zgoraj predstavljena naloga (A, M_b, H) povsem analogna nalogam (A, M_c, H) , (B, M_a, H) , (B, M_c, H) , (C, M_a, H) in (C, M_b, H) . Če konstrukcijske naloge nanizamo sistematično in izločimo analogne verzije, pridemo do naslednje tabele 140-ih bistveno različnih konstrukcij. Trivialno konstrukcijo (A, B, C) smo namenoma navedli kot zadnjo; v literaturi jo običajno celo izpustijo in govorijo o 139-ih konstrukcijskih problemih. Tovrstni seznam je v članku [3] predstavil W. Wernick in se po njem imenuje Wernickov seznam.

	TOČKE			TIP
1.	A	B	O	L
2.	A	B	M _a	R
3.	A	B	M _c	O
4.	A	B	G	R
5.	A	B	H _a	L
6.	A	B	H _c	L
7.	A	B	H	R
8.	A	B	T _a	R
9.	A	B	T _c	L
10.	A	B	I	R
11.	A	O	M _a	R
12.	A	O	M _b	L
13.	A	O	G	R
14.	A	O	H _a	R
15.	A	O	H _b	R
16.	A	O	H	R
17.	A	O	T _a	R
18.	A	O	T _b	R
19.	A	O	I	R
20.	A	M _a	M _b	R
21.	A	M _a	G	O
22.	A	M _a	H _a	L
23.	A	M _a	H _b	R
24.	A	M _a	H	R
25.	A	M _a	T _a	R
26.	A	M _a	T _b	N
27.	A	M _a	I	R
28.	A	M _b	M _c	R
29.	A	M _b	G	R
30.	A	M _b	H _a	L



31.	A	M _b	H _b	L
32.	A	M _b	H _c	L
33.	A	M _b	H	R
34.	A	M _b	T _a	R
35.	A	M _b	T _b	L
36.	A	M _b	T _c	R
37.	A	M _b	I	R
38.	A	G	H _a	L
39.	A	G	H _b	R
40.	A	G	H	R
41.	A	G	T _a	R
42.	A	G	T _b	N
43.	A	G	I	R
44.	A	H _a	H _b	R
45.	A	H _a	H	L
46.	A	H _a	T _a	L
47.	A	H _a	T _b	R
48.	A	H _a	I	R
49.	A	H _b	H _c	R
50.	A	H _b	H	L
51.	A	H _b	T _a	R
52.	A	H _b	T _b	L
53.	A	H _b	T _c	R
54.	A	H _b	I	R
55.	A	H	T _a	R
56.	A	H	T _b	N
57.	A	H	I	R
58.	A	T _a	T _b	R
59.	A	T _a	I	L
60.	A	T _b	T _c	R



61.	A	T _b	I	R
62.	O	M _a	M _b	R
63.	O	M _a	G	R
64.	O	M _a	H _a	L
65.	O	M _a	H _b	R
66.	O	M _a	H	R
67.	O	M _a	T _a	L
68.	O	M _a	T _b	N
69.	O	M _a	I	R
70.	O	G	H _a	R
71.	O	G	H	O
72.	O	G	T _a	N
73.	O	G	I	N
74.	O	H _a	H _b	N
75.	O	H _a	H	R
76.	O	H _a	T _a	R
77.	O	H _a	T _b	V
78.	O	H _a	I	V
79.	O	H	T _a	N
80.	O	H	I	N
81.	O	T _a	T _b	V
82.	O	T _a	I	R
83.	M _a	M _b	M _c	R
84.	M _a	M _b	G	R
85.	M _a	M _b	H _a	R
86.	M _a	M _b	H _c	R
87.	M _a	M _b	H	R
88.	M _a	M _b	T _a	N
89.	M _a	M _b	T _c	N
90.	M _a	M _b	I	N
91.	M _a	G	H _a	L
92.	M _a	G	H _b	R
93.	M _a	G	H	R
94.	M _a	G	T _a	R
95.	M _a	G	T _b	N
96.	M _a	G	I	R
97.	M _a	H _a	H _b	R
98.	M _a	H _a	H	L
99.	M _a	H _a	T _a	L
100.	M _a	H _a	T _b	N



101.	M _a	H _a	I	R
102.	M _a	H _b	H _c	L
103.	M _a	H _b	H	R
104.	M _a	H _b	T _a	R
105.	M _a	H _b	T _b	R
106.	M _a	H _b	T _c	N
107.	M _a	H _b	I	N
108.	M _a	H	T _a	N
109.	M _a	H	T _b	N
110.	M _a	H	I	N
111.	M _a	T _a	T _b	N
112.	M _a	T _a	I	R
113.	M _a	T _b	T _c	V
114.	M _a	T _b	I	N
115.	G	H _a	H _b	N
116.	G	H _a	H	R
117.	G	H _a	T _a	R
118.	G	H _a	T _b	V
119.	G	H _a	I	V
120.	G	H	T _a	N
121.	G	H	I	N
122.	G	T _a	T _b	V
123.	G	T _a	I	V
124.	H _a	H _b	H _c	R
125.	H _a	H _b	G	R
126.	H _a	H _b	T _a	R
127.	H _a	H _b	T _c	V
128.	H _a	H _b	I	V
129.	H _a	H	T _a	L
130.	H _a	H	T _b	N
131.	H _a	H	I	R
132.	H _a	T _a	T _b	V
133.	H _a	T _a	I	R
134.	H _a	T _b	T _c	V
135.	H _a	T _b	I	V
136.	H	T _a	T _b	V
137.	H	T _a	I	V
138.	T _a	T _b	T _c	N
139.	T _a	T _b	I	R
140.	A	B	C	R

Klasifikacija problemov

V tem razdelku bomo spoznali, da omenjenih 139 konstrukcijskih nalog lahko razvrstimo v nekaj skupin. Oglejmo si jih s pomočjo njihovih tipičnih predstavnikov.

1. Konstrukcijski problem 3: (A, B, M_C)

Podane imamo torej tri točke v ravnini in želimo konstruirati trikotnik ABC . Točka M_C označuje razpolovišče stranice AB . V primeru, ko tretja od podanih točk ni razpolovišče daljice, določene s prvima dvema, iskani trikotnik ne obstaja. Če pa tretja točka je razpolovišče daljice, lahko za oglišče C trikotnika ABC izberemo katerokoli točko v ravnini, razen točk na premici AB .

Obravnavano konstrukcijo uvrščamo v **skupino konstrukcijskih problemov z oznako O**. Zanje je značilno, da je eden od podatkov povsem odveč. Pri danih dveh točkah je tretja točka natančno določena in njeno podajanje je nepotrebno zapravljjanje tretje informacije. V tem primeru rešitev bodisi ni bodisi jih je neskončno mnogo. Tovrstne konstrukcije so na seznamu v tabeli tri. Bralca vabimo, da sam premisli, če v skupino O sodi tudi konstrukcijski problem 21: (A, M_a, G) .

2. Konstrukcijski problem 1: (A, B, O)

Spomnimo se, da je središče očrtane krožnice O presečišče vseh treh simetral stranic trikotnika. Zato mora točka O med drugim ležati tudi na simetrali stranice AB . Če so torej podane tri točke, kjer točka O ne leži na simetrali stranice AB , potem ustrezne rešitve naloge ni. V primeru, ko pa točka O leži na simetrali stranice AB , lahko narišemo očrtano krožnico s središčem O in polmerom $|OA|$. Ker drugih zahtev nimamo, lahko oglišče C poljubno izberemo na tej očrtani krožnici. To pomeni, da imamo neskončno mnogo ustreznih rešitev.

Obravnavano konstrukcijo uvrščamo v **skupino konstrukcijskih problemov z oznako L**. Zanje je značilno, da je pri danih dveh točkah lega tretje točke iz trojice omejena (v našem primeru mora ležati na simetrali daljice), vendar pa ta za razliko od skupine O ni povsem določena. To pomeni, da tretja točka trojice prinaša določeno informacijo in torej le ni povsem odveč. Tudi v tem primeru rešitve bodisi ni (če tretja točka ne zadošča omejitvi) bodisi je rešitev neskončno mnogo. Na seznamu v tabeli je takih konstrukcij 23.

Bralca vabimo, da sam premisli, da v to skupino sodi tudi konstrukcijska naloga 5 (A, B, H_a) . Omenimo še, da v to kategorijo sodi tudi konstrukcijska naloga 9 (A, B, T_c) . S to nalogo se bomo ukvarjali v

razdelku o prepogibanju papirja.

3. Konstrukcijski problem 80: (O, H, I)

Čeprav to na prvi pogled ni videti posebej težka naloga, se izkaže za kar trd oreh. S to nalogo se je ukvarjal že znani matematik Leonhard Euler (1707–1783) v članku [7] z naslovom *Preprosta rešitev nekaterih zelo težkih geometrijskih problemov*. Pri reševanju konstrukcijskega problema (O, H, I) je Euler mimogrede odkril, da točke O , G in H v poljubnem trikotniku ležijo na isti premici, ki jo danes imenujemo Eulerjeva premica trikotnika ABC . Še več, odkril je, da točka G vedno leži na tretjini daljice OH . Čeprav to danes dojemamo kot pomemben rezultat, je bil Euler toliko zaposlen s centralnim problemom, da odkritju ni pripisal posebne pozornosti. Je pa odkril, kako se z razdaljami med podanimi točkami O , H , I izražajo stranice a , b , c trikotnika ABC . Iz teh računov današnji matematik hitro razbere, da čeprav pri danih točkah O , H , I trikotnik ABC obstaja, njegovih oglišč ne moremo vedno konstruirati samo z uporabo šestila in ravnila.

Konstrukcije, za katere je dokazano, da jih pri določenih legah podanih točk ne moremo izvesti le s šestilom in ravnilom, tvorijo **skupino z oznako N**. Takih je na seznamu 26.

Tako smo spoznali tri posebne skupine konstrukcijskih problemov. Poleg teh obstaja še običajna, največja skupina problemov, ki jo **označimo z R** in vsebuje konstrukcije, ki so izvedljive s šestilom in ravnilom. Tak je npr. konstrukcijski problem 33 (A, M_p, H) , ki smo ga navedli v uvodu. Na seznamu v tabeli je takih problemov 73.

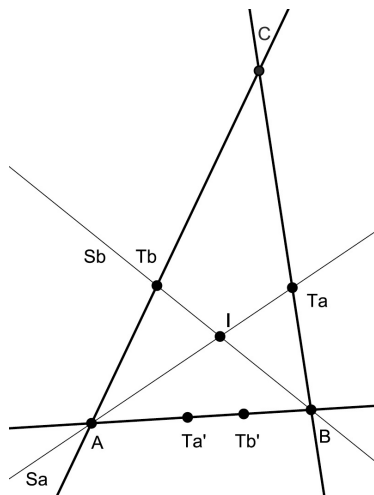
Ostanejo nam še konstrukcijski problemi, za katere še ni znano, v katero skupino sodijo. Ti so na seznamu **označeni z V**. V prvotnem Wernickovem seznamu iz leta 1982 je bilo takih 50. V članku [4] iz leta 1996 je L. F. Meyers sporočil, da je bilo medtem 30 od teh odprtih problemov razrešenih, torej razvrščenih v skupini R oz. N. Odprtih je tako ostalo še 20 problemov. V članku [5] iz leta 2009 A. V. Ustinov dokaže, da konstrukcija 138 sodi v skupino N. Spletna stran [6] navaja napredek pri nadaljnjih štirih problemih: 90, 109, 110 in 111 naj bi sodili v skupino N. Vsebinska dopolnila na tej spletni strani se zaključijo avgusta 2009.

Tako je po avtorjema znanih podatkih danes še vedno odprtih 15 problemov.

→ Nadaljni primeri konstrukcij

V tem razdelku bomo spoznali nekaj nadaljnjih konstrukcij iz skupine R.

Primer 2. Konstrukcijski problem 139: (T_a, T_b, I)

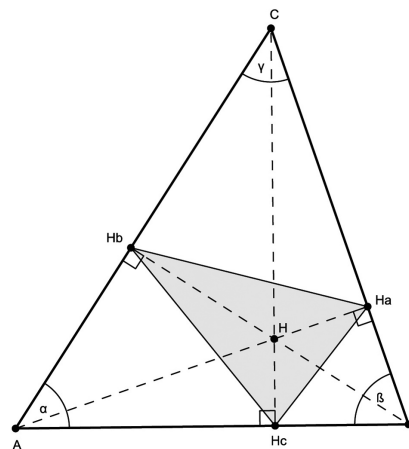


Dane so tri nekolinearne točke: središče vrtane krožnice I , točka T_a , ki je presečišče simetrale kota α s stranico BC , in točka T_b , ki je presečišče simetrale kota β s stranico AC . Za začetek narišimo premici sa skozi točki I in T_a ter sb skozi točki I in T_b ; to sta simetrali kotov α in β . Če točko T_a prezrcalimo čez premico s_b , dobimo točko T'_a , za katero vemo, da se nahaja na premici AB . Analogno točko T_b prezrcalimo čez premico s_a in njeno sliko označimo s T'_b . Tudi točka T'_b leži na nosilki stranice AB . Zato je premica $T'_a T'_b$ nosilka stranice AB . Vemo, da se premici AB in IT_a sekata v točki A , premici AB in IT_b pa v točki B . Oglišče C dobimo kot presečišče premic AT_b in BT_a . Navidez brezupen primer je torej imel preprosto in elegantno rešitev.

Nadaljujmo z nekaj zahtevnejšimi konstrukcijami.

Primer 3. Konstrukcijski problem 124: (H_a, H_b, H_c)

Točke H_a, H_b in H_c so oglišča tako imenovanega višinsko – nožiščnega trikotnika $H_a H_b H_c$ trikotnika ABC . Na kratko si oglejmo nekaj njegovih lastnosti. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Najprej opazimo, da so štirikotniki $AH_c H H_b$, $BH_a H H_c$, $CH_b H H_a$ in $ABH_a H_b$ tetivni. Premisljmo to za štirikotnik $AH_c H H_b$, pri drugih razmislek poteka podobno. Tri-



kotnik $AH_c H$ je pravokotni, zato je središče njegove očrtane krožnice v razpolovišču hipotenuze. Še več; očrtana krožnica tega trikotnika je krožnica s premerom AH . Isto velja tudi za pravokotni trikotnik AHH_b . Torej je krožnica s premerom AH očrtana krožnica štirikotnika $AH_c H H_b$.

Zdaj pa analizirajmo kote na sliki 7. Iz tetivnosti omenjenih štirikotnikov sledi, da sta $\angle HH_c H_b$ in $\angle HAH_b$ obodna kota nad istim lokom in zato enaka. Podobno sta enaka kota $\angle HH_c H_a$ in $\angle HBB_h$. Ker pa velja $\angle HBB_h = \angle HBB_h = 90^\circ - \alpha$, sta kota $\angle HH_c H_b$ in $\angle HH_c H_a$ enaka, kar pomeni, da je premica HH_c simetrala kota $\angle H_a H_c H_b$. Podobno velja za premici $H_a H$ in $H_b H$. Nosilke višin osnovnega trikotnika ABC so torej simetrale kotov trikotnika $H_a H_b H_c$. Od tod sledi, da je točka H središče vrtanega kroga trikotnika $H_a H_b H_c$.

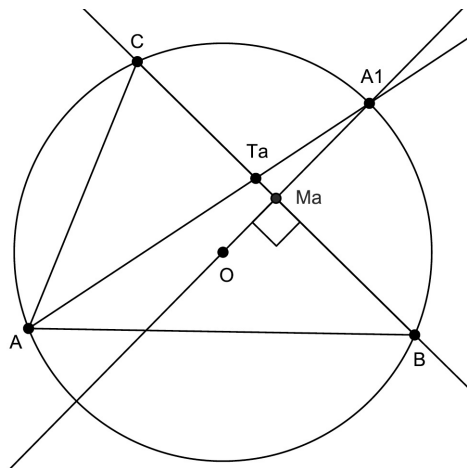
Zdaj pa se znova vrnimo k naši konstrukciji. Pri danih nekolinearnih točkah H_a, H_b in H_c narišemo trikotnik $H_a H_b H_c$, konstruirajmo simetrale njegovih notranjih kotov in dobimo središče vrtanega kroga I' trikotnika $H_a H_b H_c$. Zgoraj smo ugotovili, da je $I' = H$. Pravokotnice iz točke H_a na premico HH_a , iz točke H_b na premico HH_b in iz točke H_c na premico HH_c , so zato nosilke stranic trikotnika ABC . Označimo njihova presečišča z A, B, C in naloga je rešena.

Omenimo še, da v primeru, ko je osnovni trikotnik ABC topokotni, točka H ni središče trikotniku $H_a H_b H_c$ vrtane krožnice, pač pa središče ene od njegovih pričrtanih krožnic. Na tej podlagi bi z izbiro vsakega od središč treh pričrtanih krožnic za točko H , nalogo lahko rešili tudi v tem primeru. Pri danih točkah H_a, H_b, H_c torej v splošnem dobimo štiri rešitve, eno ostrokotno in tri topokotne. Dejansko so topokotne rešitve posebej preproste. Bralce,

ki že poznajo najpomembnejše o trikotniku pričrtanih krožnicah, vabimo, da o njih natančneje razmislijo. Morda si topokotne rešitve najprej pozorno ogledate na primerni sliki v enem od progamov za dinamično geometrijo, npr. v GeoGebri.

Zaključimo naše raziskovanje s še enim zanimivim primerom.

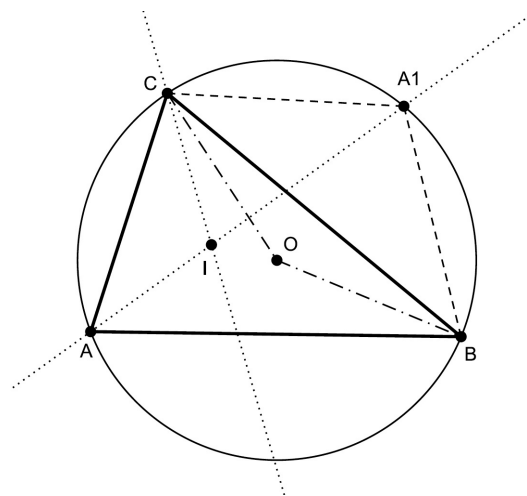
Primer 4. Konstrukcija (A, O, T_a)



Dane so tri nekolinearne točke: oglišče A , središče očrtane krožnice O in presečišče T_a simetrale kota α s stranico BC . Takoj lahko konstruiramo trikotniku ABC očrtano krožnico s središčem O in polmerom $|OA|$. Nato narišemo poltrak AT_a . Drugo presečišče poltraka in krožnice označimo z A_1 (slika 8). Točka A_1 bo v tej in sorodnih konstrukcijah igrala odločilno vlogo, zato o njej dokažimo naslednjo lemo:

Lema. Naj bo A_1 drugo presečišče simetrale kota z očrtano krožnico trikotnika ABC . Potem točka A_1 leži na simetrali stranice BC . Poleg tega je točka A_1 središče krožnice, na kateri ležijo točke B , C in I .

Dokaz: Najprej opazimo (slika 9), da je trikotnik OBC enakokraki, njegov kot pri oglišču O pa je središčni kot nad lokom BC in zato meri 2α (slika 9). Ker je tudi kot COA_1 središčni in je AA_1 simetrala kota α , velja $\angle COA_1 = \alpha$. To pomeni, da je premica OA_1 simetrala kota COB v enakokrakem trikotniku, kar pomeni, da je tudi simetrala nasprotnne stranice. Točka A_1 torej res leži na simetrali stranice BC . Od tod takoj sledi $|A_1B| = |A_1C|$. Dokažimo še, da je ta razdalja enaka tudi $|A_1I|$. Oglejmo si trikotnik CIA_1 in izračunajmo njegove kote. Kot pri oglišču A_1 je obo-



dni kot nad lokom AC in zato meri β . Kot pri oglišču I je zunanji kot trikotnika A_1IC in je zato enak vsoti nepriležnih notranjih kotov, torej $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Zdaj poznamo dva kota trikotnika in lahko izračunamo tretjega, ki tudi meri $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. To pomeni, da je trikotnik CIA_1 enakokraki. Zato je $|A_1I| = |A_1C|$. S tem je lema dokazana.

Vrnimo se k naši konstrukciji. Narišimo premico skozi točki A_1 in O . Iz pravkar dokazane leme sledi, da je to simetrala daljice BC . Zato je pravokotnica iz točke T_a na premico A_1O nosilka stranice a , njeno nožišče pa je točka M_a . Oglišči B in C sta presečišči te pravokotnice in očrtane krožnice. Povežimo oglišči B in C z ogliščem A in trikotnik je konstruiran.

Pozoren bralec bo mimogrede opazil, da v primeru $|OA| < |OT_a|$ trikotnik ne obstaja.

Na podoben način razrešimo tudi konstrukcije (A, O, T_b) , (A, O, I) , (A, G, T_a) in (A, H, T_a) .

Prepogibanje papirja

Že v članku [1] smo omenili, da v literaturi zasledimo izvedbo geometrijskih konstrukcij z uporabo različnih orodij. Doslej smo izvajali konstrukcije s šestilom in ravnilom, zdaj pa se za hip pomudimo še pri konstrukcijah s prepogibanjem papirja.

Vzemimo list prosojnega papirja in nanj narišimo točko A ter premico p , ki ne poteka skozi točko A . Prepognimo list papirja po premici p . Sled točke A označimo z A' . Razgrnimo list in ugotovimo, da je točka A' slika točke A pri zrcaljenju čez premico p . Vzemimo znova list papirja in narišimo točki A ter S . Najprej list prepognimo tako, da bosta točki



A in S hkrati ležali na pregibu, nato list razgrnemo in ga še enkrat prepognimo, tokrat tako, da bo nov pregib vseboval točko S , hkrati pa bo polovica starega pregiba prekrila drugo polovico starega pregiba. Sled točke A označimo z A' in razgrnemo. Opazimo, da sta prepogiba pravokotna in da je točka A' slika točke A pri zrcaljenju čez točko S .

Tako smo spoznali, da lahko s prepogibanjem papirja lepo izvajamo zrcaljenja čez točko in čez premico. Podobno lahko npr. „prepognemo“ pravokotnico na dano premico skozi dano točko.

Zdaj pa si oglejmo, kako bi s prepogibanjem papirja rešili eno od konstrukcijskih nalog z našega seznama.

Primer 4. Konstrukcija (A, B, T_c) .

Naloga sodi v skupino L, saj je lega točke T_c omejena: ležati mora na daljici AB . Vzemimo list prosojnega papirja in označimo točke A , B in T_c . Točka T_c naj leži na daljici AB , vendar naj je ne razpolavlja. Prepognimo list papirja tako, da bo točka T_c na pregibu in razgrnemo. Pravkar nastala premica, imenujmo jo q , bo simetrala kota γ v končni rešitvi trikotniku ABC . Če bo temu res tako, bo slika premice BC pri zrcaljenju preko premice q premica AC . Točko B zato prezrcalimo preko premice q , kar s prepogibanjem papirja lahko storimo, in dobimo točko B' , ki leži na premici AC . Pregib skozi točki A in B' nam torej izriše nosilko stranice b ; kjer ta seka premico q , je točka C . Tako pri poljubno izbrani premici q dobimo eno rešitev, en trikotnik ABC .

Če bi točka T_c razpolajljala daljico AB , pa rešitev na ta način ne bi dobili. V tem primeru bi bili namreč premici AB' in q vzporedni, saj bi bila v tem primeru premica q nosilka srednjice v trikotniku ABB' . Vendar pa tudi v tem primeru dobimo neskončno mnogo rešitev. Simetrala kota γ namreč razpolavlja stranico AB natanko tedaj, ko je trikotnik enakokraki z osnovnico AB . V tem primeru simetrala kota γ sovpada s simetralo osnovnice AB . Papir prepognemo tako, da se točki A in B prekrijeta; razgrnemo in dobimo simetralo stranice. Če na njej kjerkoli izberemo točko C , dobimo rešitev konstrukcijskega problema.

Konstrukcijo (A, B, T_c) bi seveda – namesto s prepogibanjem papirja – zelo podobno lahko izvedli tudi s šestilom in ravnilom. Pristop s prepogibanjem papirja smo v tem kontekstu predstavili z razlogom. Izkaže se namreč, da konstrukcij s prepogibanjem

papirja ne gre podcenjevati. Velja izrek, ki trdi, da lahko vsako konstrukcijo, ki je izvedljiva s šestilom in ravnilom, izvedete tudi s prepogibanjem papirja. Izkaže pa se še nekaj veliko bolj nenavadnega. Obstajajo konstrukcije, ki s šestilom in ravnilom niso izvedljive, s prepogibanjem papirja pa so. Ena takih je npr. tudi zgoraj omenjeni konstrukcijski problem 80 (O, H, I), s katerim se je ubadal Euler. Več o tem si lahko ogledate v članku [8].

Literatura

- [1] M. Trost, B. Hvala, *Konstrukcije trikotnikov z danimi tremi podatki*, Presek 37 (2009/2010), št. 5, str. 4–9.
- [2] C. Kimberling: Encyclopedia of triangle centers (ETC), dostopno na spletu: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> Povzeto dne 17.5.2011.
- [3] W. Wernick, *Triangle constructions with three located points*, Math. Magazine, 55 (1982) str. 227–230.
- [4] L. F. Meyers, *Update on William Wernick's „Triangle constructions with three located points“*, Math. Magazine, 69 (1996) str. 46–49.
- [5] A. V. Ustinov, *On the construction of a triangle from the feet of its angle bisectors*, Forum Geometricorum, 9 (2009), str. 279–280.
- [6] Wernicks liste von Dreieckskonstruktionen, spletna stran Eckarda Spechta z Univerze v Magdeburgu, Nemčija, <http://hydra.nat.unimagdeburg.de/wernick/>. Povzeto 21. 5. 2011.
- [7] Leonhard Euler, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 11 (1765) str. 103–123. Dostopno kot članek s številko 325 na spletni strani: <http://www.math.dartmouth.edu/euler/>
- [8] B. Scimemi, *Paper – folding and Euler's Theorem Revisited*, Forum Geometricorum, 2 (2002), str. 93–104.

× × ×

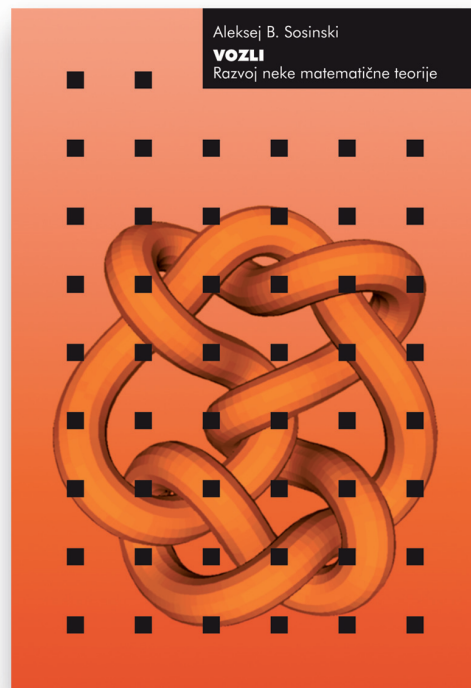
Aleksej B. Sosinski: Vozli



BOJAN GORNIK

→ Vzameš vrv, jo zavozlaš in stakneš oba konca vrvi. Tako dobljeni sklenjeni zavozlani vrvi v matematiki pravimo vozel. Za dva vozla pravimo, da sta ekvivalentna, če je moč enega s premikanjem sklenjene vrvi (ne da bi vrv pri tem prerezali in ob predpostavki idealne skrčljivosti/razteznjivosti vrvi) postaviti v lego drugega. Ali je ta kos vrvi zavozlan?, je tako poseben primer vprašanja o ekvivalentnosti vozlov. Študij lastnosti vozlov in prepoznavanje ekvivalentnih vozlov sta osrednji nalogi teorije vozlov.

Knjiga Vozli avtorja Alekseja B. Sosinskega v prevodu Jožeta Vrabca v kronološkem vrstnem redu oriše nekatere mejnike v razvoju teorije vozlov. Povsem se ogne uporabi zahtevnejših matematičnih orodij za študij vozlov in temo predstavi popolnoma kombinatorno. Zaradi te lastnosti in ker knjiga ne predpostavlja kakršnegakoli predznanja o temi, je povsem primerna za matematično navdahnjenega bralca s srednješolskim znanjem matematike in lahko služi kot prvo srečanje z zanimivim svetom vozlov. Pisana je v sproščenem, neformalnem slogu, avtor pogosto na novo uvedene ideje in nekatere dokaze poda povsem intuitivno in jih poskuša vizualizirati s slikami. Knjiga vsebuje celo nekaj avtorjevih povsem osebnih izkušenj s teorijo vozlov. Nikoli pa na račun tega, bralcu prijaznega tona, ne trpi natanč-



nost, kar je v znatni meri zasluga prevajalca, ki je odpravil mnoge napake originala.

Za predstavo o temah, ki so obravnavane v knjigi, za pokušino izpostavimo šesto poglavje, ki opisuje Jonesov polinom. To poglavje bralcu s srednješolskim znanjem omogoča popolnoma matematično korektno dokazati, da kak vozel ni ekvivalenten drugemu vozlu. Jonesov polinom je namreč predpis, ki vsakemu vozlu priredi polinom in ima lastnost, da ekvivalentnim vozlom priredi enak polinom. Takemu predpisu pravimo invarianta vozla in služi prepoznavanju neekvivalentnih vozlov. Predstavljajmo si, da nam nekdo v roke potisne navidezno zavozlan kos vrvi in nas vpraša, če je vrv res zavozlana ali ne. V praksi bi v takem primeru verjetno prijeli za oba konca vrvi, ju potegnili narazen in opazovali, če se bo vrv razvozlala ali ne. V matematiki, ko imamo vozel narisane na kosu papirja, še zlasti, če je vozel zelo zapleten, takega načina prepoznavanja zavozlanosti ne moremo uporabiti. Zato bi izračunali Jonesov polinom danega vozla in ga primerjali z Jonesovim polinomom nezavozlanega vozla; če bi dobili različni vrednosti, bi vedeli, da je naš vozel zavozlan.

× × ×

47. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje



KLAVDIJA MLINŠEK

→ Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 16. aprila 2011, pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1% vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 64, v osmem 65 in v devetem 65 zlatih Vegovih priznanj. Najboljših 20 devetošolcev se je udeležilo Poletne šole matematike, ki je bila od 24. do 28. junija 2011 v Bohinju. V poletni šoli so učenci poslušali naslednja predavanja: Osnovni izrek deljenja, Geometrijske naloge in Dokazovanja v matematiki, Astronomija in nočno opazovanje, Matematični triki, Geometrija nekoliko drugače. Poleg predavanj so imeli udeleženci poletne šole tudi pester športno-rekreativni program in animirane večere. Svoje moči so lahko nabirali tudi z veslanjem po Bohinjskem jezeru, pohodu k slapu Savica, z igranjem odbojke in taroka. Nagrade, ki so bile podeljene v Koloseju, so prejeli najboljši tekmovalci, in sicer:

7. RAZRED

I. nagrada

- ALEKSEJ JURCA, OŠ Ledina, Ljubljana

II. nagrada

- LUCIJA BOGATAJ, OŠ Poljane
- EVGENIJA BURGER, OŠ Brusnice

III. nagrada

- MATIC ERNOŽNIK, OŠ Žiri
- LUCIJA ŽUPEVC, OŠ Koprivnica

8. RAZRED

I. nagrada

- UROŠ PREŠERN, OŠ Otočec
- JAKOB JURIJ SNOJ, OŠ Belokranjskega odreda Semič

II. nagrada

- KATARINA ČERNAČ, OŠ Miroslava Vilharja

Postojna

III. nagrada

- MIHAEL RAJH, OŠ Polzela
- ERIKA STANKOVIČ, OŠ Danila Lokarja Ajdovščina

9. RAZRED

I. nagrada

- URBAN STANIČ, OŠ Vodmat, Ljubljana

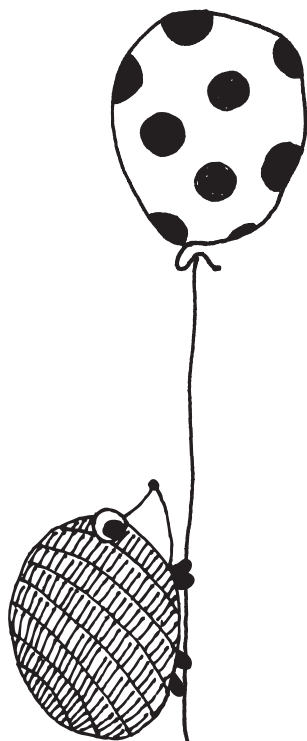
II. nagrada

- LUKA MEDIC, OŠ Mladika, Ptuj

III. nagrada

- ULA ARKAR, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- MARUŠA LEKŠE, OŠ Trnovo, Ljubljana
- ALENKA KRIŽAN, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- PETRA PAVŠIČ, OŠ Danile Kumer, Ljubljana

× × ×



Plavajoče jabolko

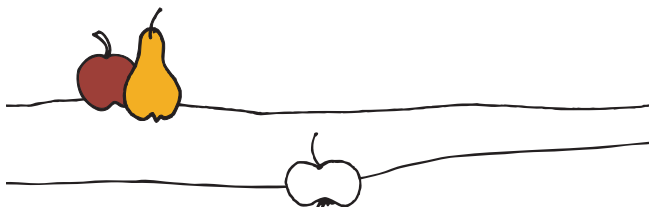


NADA RAZPET

→ V kroglasto stekleno posodo smo nalili vodo in vanjo položili jabolko. Jabolko na vodi plava. Del jabolka, ki gleda iz vode, vidimo v naravni velikosti. Del, ki je potopljen, pa je povečan. Povečava je odvisna od lege jabolka. Navedli bomo le tiste značilnosti, ki so bistvene za razlago pojava.

Leče

Kdor slabo vidi, potrebuje očala. Ta imajo lahko zbiralne leče (daljnovidno oko) ali razpršilne leče (kratkovidno oko). V šoli z zbiralnimi lečami (lupami) preslikujemo plamen sveče na zaslon. Rečemo, da na zaslonu nastane realna slika predmeta (sekajo se lomljeni žarki). Drobnno tiskano besedilo beremo skozi lupo (gledamo navidezno sliko, ki nastane tam, kjer se sekajo podaljški lomljenih žarkov). Lupe so navadno steklene ali plastične. Lupo si lahko izdelamo tudi sami.



SLIKA 1.

V polkroglo smo nalili vodo. Ko jo držimo v primerni razdalji od besedila, vidimo povečano sliko.





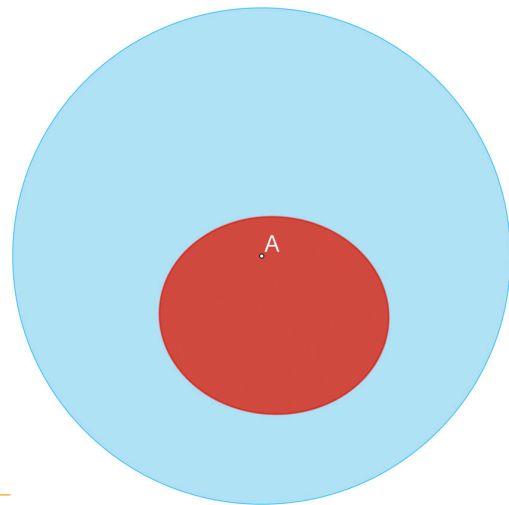
V prozorno plastično polkroglo nalijemo vodo. Polkroglo, ki jo držimo v roki, postavimo v primerno razdaljo od besedila in opazimo, da so črke povečane. Slika je nekoliko popačena. Tu smo imeli predmet izven leče. Kaj pa če je predmet v „sami lupi“? To je primer, ko jabolko gledamo skozi steno posode. Posoda z vodo deluje kot lupa. Del jabolka je v sami lupi.



SLIKA 2.

Jabolko plava na vodi. Levo v kroglasti posodi, desno v valjasti posodi. Potopljeni del jabolka je videti večji.

Privzemimo, da so stene posode tanke, da loma svetlobe skozi steklo ne upoštevamo, in da ima presek jabolka obliko zelo malo sploščene elipse. Preseki posode z vodoravno ravnino so krogi. Narišimo enega izmed teh presekov.



SLIKA 3.

Vodoravni presek posode z vodo in jabolkom (rdeče). Središče kroga je označeno z A.

Zapišimo lomni zakon in lomna količnika za obe snovi: vodo in zrak.

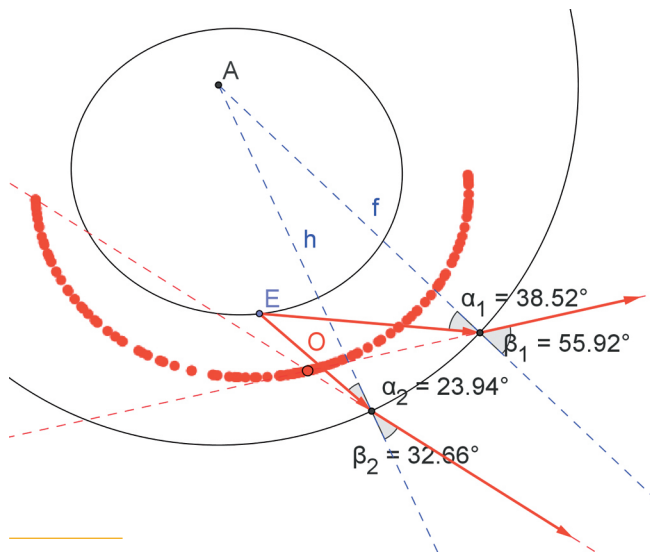
$$\blacksquare \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad n_1 = 1,33 \quad n_2 = 1.$$

Svetloba, ki se odbije od jabolka, se na meji med vodo in zrakom lomi. Ker prehaja svetloba iz optično gostejšega sredstva v optično redkejšo sredstvo, se lomi stran od vpadne pravokotnice, to pomeni, da je kot β večji od kota α . Kot β je lahko največ 90° , saj se sicer žarek odbije nazaj v vodo. Največji kot α (mejni kot) lahko izračunamo:

$$\blacksquare \quad \sin \beta = 1 \quad \sin \alpha_m = \frac{1}{n_1} = 0,75 \quad \alpha_m \approx 49^\circ.$$

Vidimo lahko torej le tiste svetlobne žarke, ki padejo na steno posode pod kotom, manjšim od 49° , in po prehodu v zrak padejo v oko. Zopet si pomagamo s sliko. S programom GeoGebra izberemo točko E na obodu jabolka, izberemo dva žarka, ki izhajata iz te točke, narišemo vpadni pravokotnici, izmerimo vpadna kota, izračunamo lomna kota in poiščemo presečišča podaljškov lomljenih žarkov (točka O). Z drsenjem izbrane točke E po obodu jabolka program nariše sliko teh točk. Ker se sekajo podaljški žarkov je slika navidezna.

Z risanjem vodoravnih presekov bi lahko narisali celo ploskev tistega dela jabolka, ki je pod vodno gladino. Presečni krogi kroglaste posode imajo različne polmere. Če ima posoda obliko valja, so ti polmeri

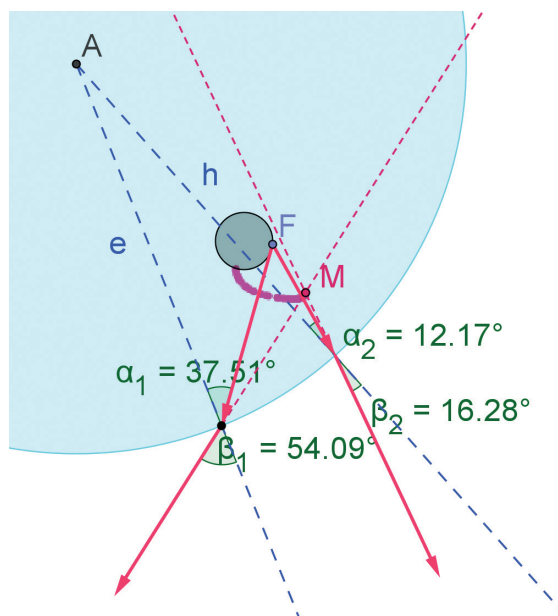


SLIKA 4.

A je središče leče. Poltraka f in h sta vpadni pravokotnici, z rdečimi puščicami so označeni svetlobni žarki. Podaljški lomljenih žarkov so označeni z rdečo črtkano črto. Del slike jabolka je označen z debelo rdečo krivuljo.



Narišimo še ta primer. Tako kot prej uporabimo program GeoGebra. Iz slike je razvidno, zakaj vidimo palico „premaknjeno“ in debelejšo.



SLIKA 6.

Podobno kot pri sliki 4 je tudi tu debela rdeča krivulja slika prereza palice.

Kam se preslika točka P na sliki 7? Upoštevali bomo le tiste žarke, ki so blizu optične osi. To je blizu premice skozi točki A in B. Žarek, ki gre skozi

med seboj enaki.

Podrobneje pogledjmo še, kakšna je v isti posodi videti navpično postavljena palica. Kako jo vidimo, je tako kot prej odvisno od tega, od kod in iz kakšne razdalje gledamo palico, in seveda od lege palice v posodi.



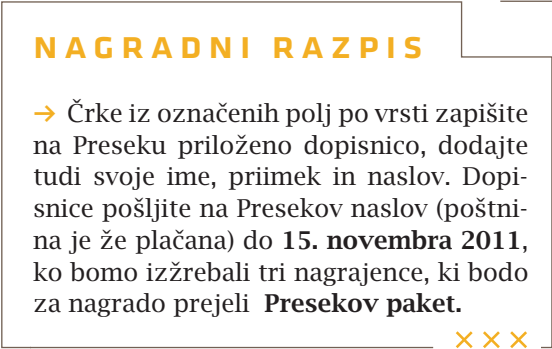
SLIKA 5.



Nagradna križanka



				FILM FRANCETA ŠTIGLICA IZ LETA 1966 Z BORISOM KRALJEM V GLAVNI VLOGI	JUŽNO-AFRIŠKI DRŽAVNIK (NELSON)	ZELO HLAPNA TEKOČA ORGANSKA SPOJINA	FILMSKI REŽISER PEVEC	SOSEDI CRKE N	MODEL OBJEKTA V ZMANJŠANEM MERILU	SKLADBA, NAMENJENA VADBI	STOŽČAST SOTOR PRERJUSKIH INDIJANCEV	GOSPODARSTVENIK
				MERILNIK HITROSTI VETRA								
				TEME LJINA NARAVOSLOVNA VEDA								
				FR.ŠVIC. PISATELJ (CLAUDE) AM. PISAT. (CONRAD P.)	3				DEL LISTINE, KI SE ODRGA METRIČNA DOBA			
				GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIC	FRANC. PISATELJ (ANDRE)		IMETJE NEVESTE MONGOLSKI VLADAR V IRANU				ČRKI, KI OKLEPATA CRKO P	
				VREČASTE RAZŠIRITVE MEMBRANE MITOHONDRIJEV	INTERNET						ČUTNA LJUBEZEN	
						2		RADLJ		REKA V SZ. NEMČIJI ROJ. KRAJ DRAGOTINA KETTEJA		
				BALETKA				ENOTA ZA SVE-TILNOST				
										UČINKOVANJE S SILO DOTIKA POLJSKA		
				STARA KULTURNA RASTLINA		FORDOV MALČEK			ŠOLSTVO NORVEŠKI SMUČAR (KJETIL ANDRE)			
				"KONEC" ZAČETKA AMERIŠKI PROGRAMSKI JEZIK		ITAL. SLIKARJA (ANTONIO IN BERNARDO) KONCEN-TRIRANA SNOV	SMUČAR. TEKAČICA VIŠNAR		5			
AVTOR MARKO BOKALIC	S TRTO ZASAJENA POVRŠINA	STANOVSKO ZDRUŽENJE	ENOTA ZA ELEKTR. DELO GLASBENA USPEŠNICA							DO, RE, ?		LONČENA POŠODA Z ROČAJEM
		12								ENAJSTI GLASBENI INTERVAL		
ORIENT					BAVARSKA REKA, KI TEČE SKOZI MÜNCHEN			AVSTRAL. PTIČ TEKAČ			PEKOVSKO SREDSTVO DŽINGISKANOV DRUGI SIN	
ŠPANSKI OTOK					DOMNEVNO HIMALAJ. BITJE NAŠ FIZIK (JOŽEF)			IZDELOVANJE POŠOD IZ ŽGANE GLINE				
ZNAKI ZA ZAPIS MELODIJE				DOŽIVETJA MED SPANJEM ŽIVAL Z ROKAMI		6		NAJVEČJI PRITOK PADA V ITALIJI			IZREDNA LEPOTA	
			KOVINSKA UTEŽ NA VRVICI				GRŠKA ČRKA (SIMBOL ZA GOSTOTO)	KANADSKI POPEVKAR (PAUL)	SILA VLEČENJA	8		HRIBOVIT PORTUGAL. OTOK V ATLANTIKU, ZNAN PO ISTO-IMENSKEM VINU
			UBOJ		KALCIJ VIDNE MOTAJE V ATMOSFERI SONCA				GRAD NAD DRAVO			
KRAVJA ANTILOPA			PUJSA IZ OTROŠKE RISANKE			KVAR- NERSKI OTOK IGRALKA WEST			KALCIJ GIBANJE TELESA PO ZRAKU			
PRES- TOLNICA OB TIBERI			STARO JORUBSKO MESTO V NIGERIJI NEODIM			IZDELEK IZ ENEGA KAMNA "SREDINA" ŽULJA						
NAJVIŠJI VRH JUŽNE AMERIKE						13		MAZAVA SNOV				
PRELIV MED AZIJO IN EVROPO, HELES- PONT							GOROVJE NA RUSKO- MONGOLSKI MEJI				7	

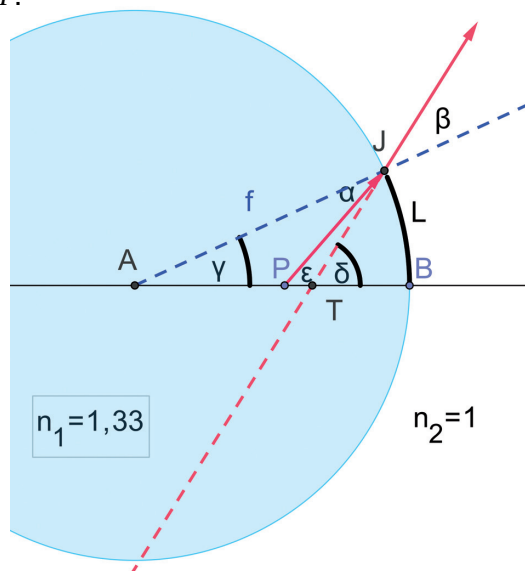




15

nadaljevanje
s strani

točko P se lomi tako, da gre njegov podaljšek skozi točko T .



SLIKA 7.

Točka P , ki leži znotraj leče, se preslika v točko T .

Vpeljimo oznake:

$$\blacksquare d(A, B) = r \quad d(P, B) = p \quad d(T, B) = k.$$

Poiščimo še povezave med koti:

$$\blacksquare \alpha = \varepsilon - \gamma \quad \beta = \delta - \gamma.$$

Označimo lok $\widehat{JB}$ z L . Kote izrazimo vadianih. Za kot γ vedno velja:

$$\blacksquare \gamma = \frac{L}{r}.$$

Če je kot γ majhen, približno velja tudi:

$$\blacksquare \varepsilon = \frac{L}{p} \quad \delta = \frac{L}{k}.$$

Privzeli smo, da pripada lok L trem krožnicam: krožnici s središčem v A , krožnici s središčem P in krožnici s središčem T .

Zapišimo lomni zakon in upoštevajmo, da za majhne kote lahko sinuse nadomestimo kar s koti, merjenimi seveda v radianih. Iz

$$\blacksquare n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

sledi

$$\blacksquare \Rightarrow n_1 \alpha = n_2 \beta.$$

Z vstavljanjem gornjih približkov dobimo

$$\blacksquare n_1 \left(\frac{L}{p} - \frac{L}{r} \right) = n_2 \left(\frac{L}{k} - \frac{L}{r} \right)$$

in od tu končno

$$\blacksquare \frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{k} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Vsi primeri so postavljeni tako, da ležijo pred „središčem“ leče. Kaj pa če so postavljeni bližje zadnjega dela posode? Te primere naj bralci Preseka rešijo sami.

Samo z poznavanjem osnovnih zakonov o lomu svetlobe smo torej razložili, zakaj je del jabolka v vodi povečan.

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

					1	7	4
					8		
			4		6		3
8							
5		3		8			
6		7		1			
2	8				3		
	5			2			

xxx

Še o plinih



MOJCA ČEPIČ

→ Danes bomo poskusili upihnniti svečo. To seveda vsi znamo, a morda bo vsaj ena od metod, kako to storiti, za vas nova. Poglejmo najprej, kaj za poskuse potrebujemo:

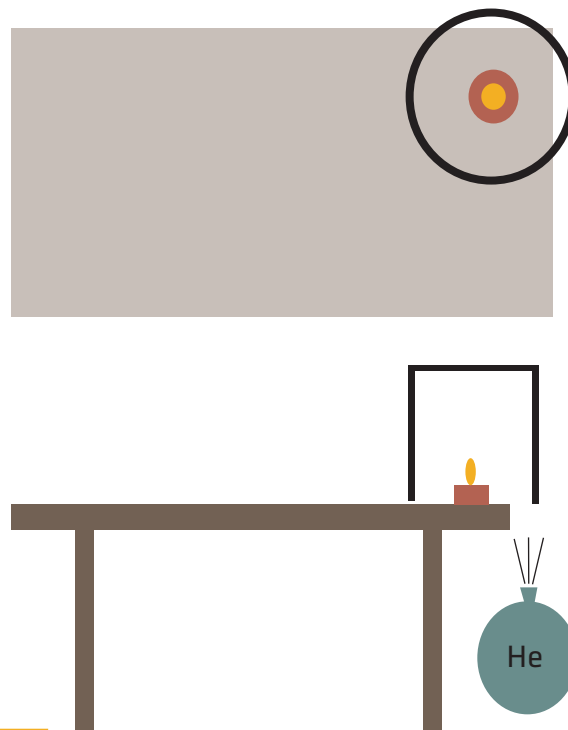
- manjšo svečo ali dve, lahko tudi čajno svečko;
- dve prozorni posodi, lahko večji plastenki z odrezanim gornjim delom, ali dva velika kozarca za vlaganje;
- če imate eno samo večjo posodo, lahko eno zamenjate z običajnim loncem za kuhanje (vsaj 2 l);
- steklenico koka kole ali šumečo tabletko z manjšim kozarčkom;
- helijev balon;
- vžigalice.



SLIKA 1.

Potrebščine za izvedbo poskusa

Storimo nekaj podobnega kot v prejšnji poizkuševalnici [1]. V posodo postavimo steklenico koka kole in jo v posodi odpremo. Lahko jo tudi malo potresemo, da mehurčki izhajajo bolj burno. Namesto koka kole lahko uporabimo kozarček z nekaj vode, ga posta-



SLIKA 2.

(a) S prozorno posodo pokrijemo svečo tako, da se plini lahko izmenjujejo na dveh mestih. (b) Helijev balon od posode nekoliko odmaknemo, da plamena sveče ne upihnemo neposredno s curkom plina iz balona.

vimo v posodo in vanj vržemo šumečo tabletko. Počakamo, da se tableta raztopi.

V prozorno posodo na dno postavimo svečko in jo prižgemo. Steklenico koka kole ali kozarček vzamemo iz posode. Predstavljajmo si, da je v posodi voda in želimo z njo pogasiti gorečo svečo. Čeprav v posodi ne vidimo ničesar, nagnimo posodo nad posodo z gorečo svečo in pogledamo, kaj se zgodi.

Poskusimo narediti še nekaj drugega. Na vogal mize postavimo svečko, lahko jo damo tudi na podstavek. Čeznjo poveznemo prozorno posodo tako, da je mogoč dotok zraka pod posodo (slika 2, postavitev poskusa v tlorisu in narisu). Sveča pod posodo mirno gori dalje. Sedaj pod rob mize in posode prislonimo balon, napolnjen s helijem, in ga prav počasi praznimo tako, da se vsaj del plina iz balona ujame pod poveznjeno posodo. Kaj se zgodi tokrat?

Poskusa lahko ponovite z dvema svečama hkrati, ki pa ju postavite na različni višini v posodi. Kaj se zgodi s svečama?

XXX

Razmisli in poskusi – Guncanje

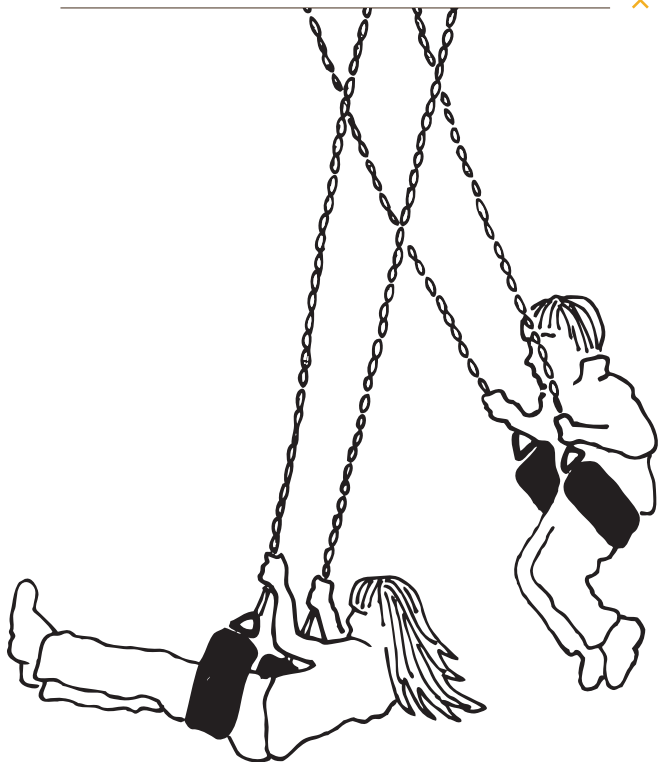


MITJA ROSINA



44. Guncanje Gotovo si se kot otrok rad gugal na gugalnici. Kmalu si se naučil, da je treba pri gibanju naprej noge stegniti, pri gibanju nazaj pa skrčiti. Le zakaj? Otroci o tem ne razmišljajo, ti pa boš morda znal razložiti ta pogon.

Privošči si še enkrat guncanje in opazuj, kaj se dogaja. Preveri, ali deluješ s silo, da lahko stegneš oziroma skrčiš noge. Zakaj se s tem odrineš naprej oziroma nazaj? Ali opraviš pri tem delo? Čemu?



49. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije



CIRIL DOMINKO

→ **Regijsko tekmovanje** je bilo izvedeno 25. marca 2011 istočasno na osmih srednjih šolah v posameznih regijah: Šolski center Velenje, Gimnazija; Srednja šola Črnomelj; Tehniški šolski center Kranj; Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana; Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana; Dvojezična srednja šola Lendava; Gimnazija Piran in Gimnazija Jurija Vege Idrija. Izvedeno je bilo v treh tekmovalnih skupinah – I, II in III, ki so se razlikovale po snovi. Na tekmovanju je sodelovalo 784 dijakov iz 53-ih srednjih šol. Izdelke je ocenjevalo osem regijskih komisij, v katerih je sodelovalo 88 učiteljev fizike iz sodelujočih šol. Na tekmovanju je bilo podeljenih 289 bronastih priznanj. Komisije iz posameznih regij so predlagale skupno 127 tekmovalcev za državno tekmovanje.

Državno tekmovanje je bilo 9. aprila 2011 na Gimnaziji Ptuj. Tekmovanja se je izmed predlaganih z regijskega tekmovanja udeležilo 126 tekmovalcev iz 34-ih srednjih šol. Tekmovanje je tako kot vsako leto doslej izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa so krili *Društvo, Ministrstvo za šolstvo in šport* ter soorganizator državnega tekmovanja – *Gimnazija Ptuj*. Pri izvedbi tekmovanja in

ocenitvi izdelkov so sodelovali študentje, sodelavci FMF, Oddelek za fiziko in sodelavci Inštituta Jožef Stefan. Na tekmovanju je komisija razglasila tri prve nagrade, sedem drugih in 16 tretjih. Zlato priznanje je prejelo 22 tekmovalcev. Svečana podelitev nagrad je bila 18. maja 2011 na prireditvi v Koloseju v Ljubljani.

Podeljene nagrade in zlata priznanja

I. SKUPINA

I. nagrada

- Ni bila podeljena.

II. nagrada in zlato priznanje

- SAMO CURK, II. gimnazija Maribor
- JERNEJ VAJDA, Gimnazija Ptuj
- TIMOTEJ KAPUS, Gimnazija Kranj

III. nagrada in zlato priznanje

- ŽIGA KRAJNIK, Gimnazija Škofja Loka
- JASMINA SIMONIČ, Škofijska gimnazija Vipava
- PATRIK GUBELJAK, II. gimnazija Maribor
- BINE BRANK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

II. SKUPINA

I. nagrada in zlato priznanje

- JAN ROZMAN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

II. nagrada in zlato priznanje

- JAN ŠUNTAJS, Gimnazija Bežigrad, Mednarodna šola
- MICHEL ADAMIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

III. nagrada in zlato priznanje

- OMAR ALHADY, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ŽIGA NOSAR, Gimnazija Vič, Ljubljana
- ŽIGA GREGORIN, Šolski center Velenje, Gimnazija
- LUKA BENČAN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

III. SKUPINA

I. nagrada

- PAVEL KOS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- KRISTIJAN KUCHAR, Šolski center Velenje, Gimnazija

II. nagrada in zlato priznanje

- MITJA ZIDAR, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica
- DOMEN IPAVEC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

III. nagrada in zlato priznanje

- MARKO LJUBOTINA, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica
- VENO MRAMOR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MAJA PETEK, II. gimnazija Maribor

III. nagrada

- LENART GREGORIČ, Srednja šola Slovenjska Bistrica
- MARION ANTONIA VAN MIDDEN, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica
- MIHA KERN, Gimnazija Kranj
- ŽIGA PERKO, II. gimnazija Maribor

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 6. maja 2011 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Povabljenih je bilo 11 najboljših tekmovalcev iz III. tekmovalne skupine. Pavel Kos z Gimnazije Bežigrad je bil uvršen na olimpijado avtomatsko, ker je na predhodni olimpijadi prejel medaljo. Poleg njega so se na 42. mednarodno fizikalno olimpijado, ki je bila od 10. do 18. julija 2011 v Bangkoku, Tajska, uvrstili še: Domen Ipavec z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Kristijan Kuhar s Šolskega centra Velenje, Gimnazija in Mitja Zidar ter Marko Ljubotina, oba s Srednje šole Josipa Jurčiča Ivančna Gorica.

× × ×

www.presek.si

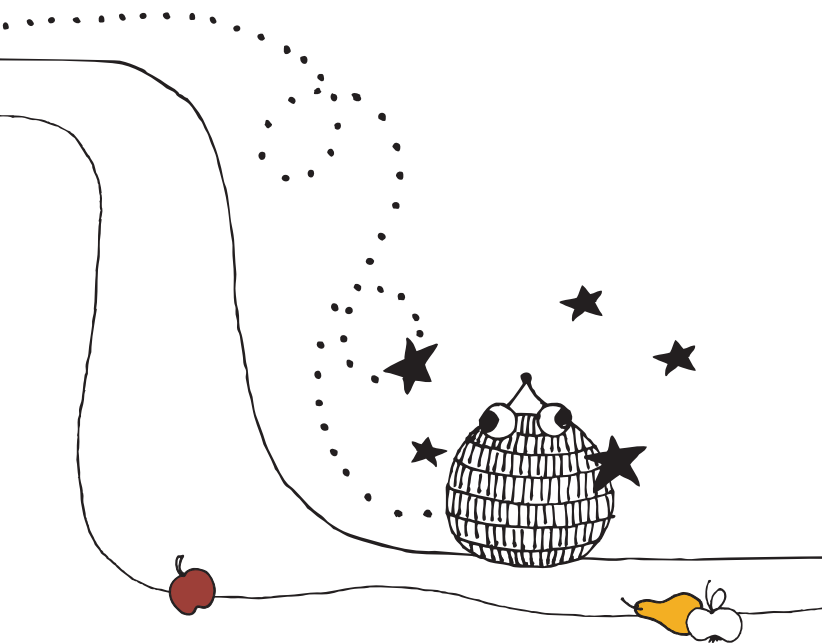
www.dmfa.si

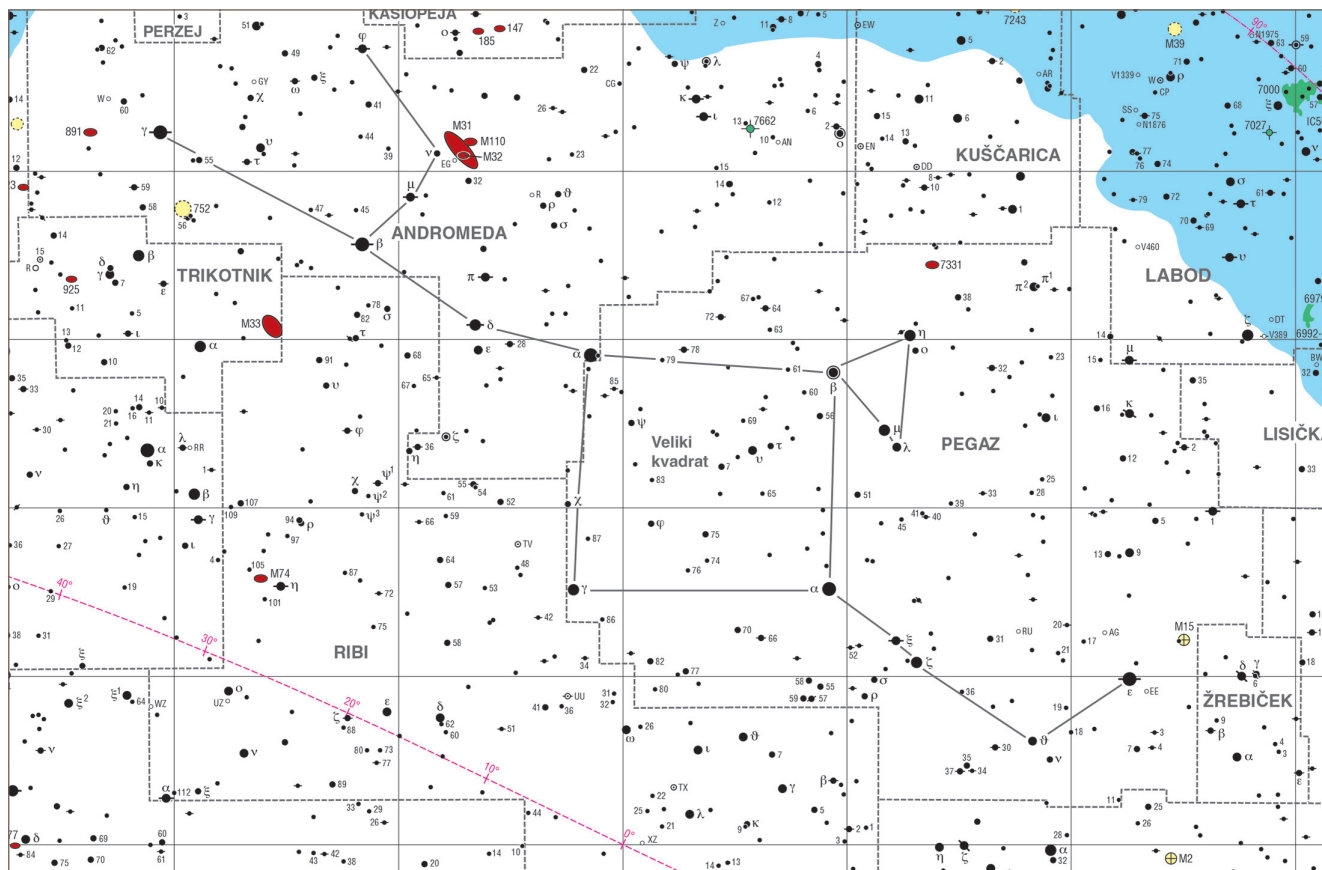
Poiščimo Andromedino galaksijo



BOJAN KAMBIČ

→ V mednarodnem letu astronomije 2009 je večina slovenskih osnovnih in srednjih šol dobila teleskop. A pokazalo se je, da obstaja velika nevarnost, da bo to čudovito darilo Ministrstva za šolstvo in šport ostalo zaprašeno v kabinetih kot del obveznega inventarja, namesto da bi učenci in učitelji spoznavali lepote nočnega neba. Vzroka za to sta predvsem dva: nevednost dela s teleskopom in težave pri iskanju nebesnih objektov. Prvo težavo mora rešiti vsak učitelj sam, tako da zbrano prebere navodila, ki so priložena k vsakemu teleskopu, ga odnese domov, in se sam, v miru spozna z napravo. Kako jo sestavimo, nastavimo na severni nebesni pol, kako jo usmerjamo k izbranim objektom ... Druga težava je resnejša. Iskanje nebesnih objektov je brez dobrih iskalnih kart Sizi-fovo delo. Majhno zorno polje teleskopa vse skupaj še dodatno otežuje. A tudi ta težava je hitro rešljiva, če bi učitelji imeli dober priročnik za opazovalce z majhnimi teleskopi, kakršen je na primer *Opazujmo ozvezdja z daljnogledom 10 times50*. Kot primer si pogledjmo slavno Andromedino galaksijo, ki je v teh zimskih večerih najvišje na nebu in torej v najugodejši legi za opazovanje.





Ozvezdje Andromeda

Andromeda je veliko in pomembno jesensko ozvezdje severnega neba. Razteza se od Pegaza v smeri proti Kapeli (Alfa Voznika). Najsvetlejše zvezde so Alfa ali Sirah, oranžnordeča Beta ali Mirah in zlatorumena Gama (vse 2^m 1) ter rumenooranžna Delta (3^m 3).

Alfe na nebu prav gotovo ne moremo zgrešiti. Zvezdatlikava zvezda, katere izsev je kar 800-krat manjši od Sončevega. Zvezdi sta gravitacijsko vezani in predstavljata pravo dvozvezdje. Gama je 61. najsvetlejša zvezda na našem nebu. Je čudovita dvojna zvezda, ena najlepših, kar jih lahko vidimo v manjših teleskopih. Svetlejša zvezda (2^m 3) je zlatorumene barve (nekateri opazovalci so jo opisali kot rahlo oranžno), šibkejša (5^m 0) pa je zelenomodra. Barvni kontrast je izrazit in ga še poudarimo, če okular pomaknemo nekoliko izven gorišča, da sliki zvezd nista ostri, temveč rahlo razmazani. Zvezdi sta navidezno razmaknjeni 10 ločnih sekund,

SLIKA 1.

Jesenski ozvezdji Pegaz in Andromeda na karti z zvezdami do 6,5 magnitude. Karta je iz Zvezdnega atlasa za epoho 2000,0.

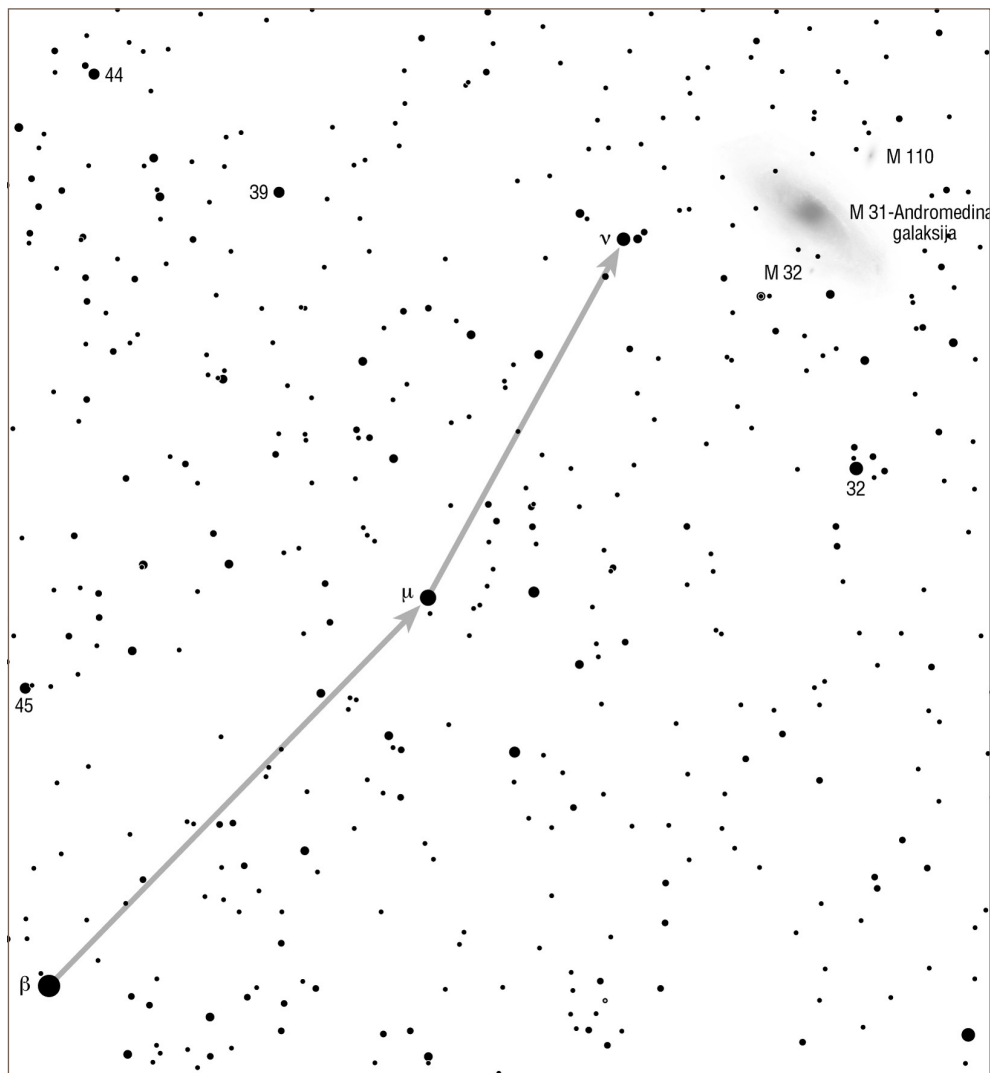
Sonca. Je dvojna zvezda. Spremljevalka 14. magnitude je 28 ločnih sekund oddaljena od Bete in je pri čudovita dvojna zvezda, ena najlepših, kar jih lahko vidimo v manjših teleskopih. Svetlejša zvezda (2^m 3) je zlatorumene barve (nekateri opazovalci so jo opisali kot rahlo oranžno), šibkejša (5^m 0) pa je zelenomodra. Barvni kontrast je izrazit in ga še poudarimo, če okular pomaknemo nekoliko izven gorišča, da sliki zvezd nista ostri, temveč rahlo razmazani. Zvezdi sta navidezno razmaknjeni 10 ločnih sekund,

Alfe na nebu prav gotovo ne moremo zgrešiti. Zvezdatlikava zvezda, katere izsev je kar 800-krat manjši od Sončevega. Zvezdi sta gravitacijsko vezani in predstavljata pravo dvozvezdje. Gama je 61. najsvetlejša zvezda na našem nebu. Je čudovita dvojna zvezda, ena najlepših, kar jih lahko vidimo v manjših teleskopih. Svetlejša zvezda (2^m 3) je zlatorumene barve (nekateri opazovalci so jo opisali kot rahlo oranžno), šibkejša (5^m 0) pa je zelenomodra. Barvni kontrast je izrazit in ga še poudarimo, če okular pomaknemo nekoliko izven gorišča, da sliki zvezd nista ostri, temveč rahlo razmazani. Zvezdi sta navidezno razmaknjeni 10 ločnih sekund,



SLIKA 2.

Podrobna iskalna karta za Andromedino galaksijo. Štar-tna zvezda za lov na gala-ksijo je kar svetla Beta, ki je dobro vidna s prostim očesom in je tudi s teleskopom ni težko najti. Od nje se pomikamo proti severozahodu prek zvezd Mi in Ni Andromede h galaksiji. Na karti so zvezde do 9,5 magnitude, pokriva pa približno 7 x 7 stopinj veliko območje neba. To je le malo več od zornega polja boljšega lovskega daljnogleda 10 x 50!



njuna medsebojna lega pa se zadnjih 200 let ni prav veliko spremenila. Gama Andromede je v resnici četrtozvezdje, saj je vsaka od obeh zvezd tudi sama dvojna. To zanimivo večzvezdje je od nas oddaljeno 356 svetlobnih let, skupni izsev zvezd pa prekaša Sončevega za kar 1250-krat.

Andromedina galaksija

Ko smo s pomočjo Pegaza našli Andromedo (glej sliko 1), se lahko lotimo iskanja Andromedine galaksije (M 31), ki je zagotovo najlepši objekt v ozvezdju. Je najsvetlejša in najbližja od vseh velikih galaksij in edina druga galaksija, ki jo lahko brez težav vidimo s

prostim očesom. Leži približno stopinjo zahodno od zvezde Ni, v jasni, brezmesčni noči pa je videti kot majhen, podolgovat oblaček nežne svetlobe (seveda velja to le v krajih z malo svetlobnega onesnaženja). Galaksija je videti podolgovata zato, ker jo vidimo skoraj z roba. Le za 15 stopinj je nagnjena na ekvatorialno ravnino. Le z žalostjo v srcih si lahko predstavljamo, kakšen čudovit nebesni objekt bi bila, če bi jo lahko videli v vsej njeni velikosti, torej v smeri njene vrtilne osi. Bila bi skoraj okrogla, njeni spiralni rokavi pa bi se ovijali okrog svetlega, gostejšega jedra. In na našem nebu bi bila seveda veliko večja in svetlejša.

Ob odličnih opazovalnih razmerah se bo v manj-

**SLIKA 3.**

Andromedina Galaksija Fotografija: Bill Schoening, Vanessa Harvey/REU program/NOAO/AURA/NSF

šem teleskopu galaksija raztegnila v približno 4 stopinje dolgo ovalno liso svetlobe z dobro vidno svetlejšo središčno zgoštevijo – pogled, ki zagotovo razočara marsikaterega opazovalca na začetku kariere, ki galaksijo vidi prvič. Vzrok za to je v njeni razvpitosti. Ko beremo o Andromedini galaksiji, so zraven vedno pridevniki kot najsvetlejša, največja, najbližja, čudovita, spektakularna ... Kljub temu, da je najbližja, je še vedno zelo, zelo daleč, predaleč, da bi lahko z manjšim daljnogledom videli kaj več! Na robu galaksije ne moremo ločiti posameznih zvezd, pa če je teleskop še tako velik in opazovalne razmere še tako idealne. V večjih amaterskih teleskopih je vidnih nekaj temnih prog plinov in prahu, nekaj naj-

svetlejših kroglastih kopic in morda ena ali dve svetli plinski meglici. Vse drugo, kar krasi slike Andromedine galaksije, pa se pokaže le na fotografijah, posnetih z dolgimi časi osvetlitve. Pri gledanju „v živo“ nas Andromedina galaksija očara le, če vemo, kaj gledamo! Ko galaksijo občudujemo na nočnem nebu, ne gledamo le najbolj oddaljenega objekta v vesolju, ki ga še vidimo s prostim očesom, temveč gledamo tudi najdlje v preteklost (s prostim očesom). Svetloba, ki ta trenutek prihaja v naše oko, je galaksijo zapustila pred 2,93 milijona leti, torej v času, ko so po Zemlji hodili prvi človečnjaki!

Andromedina galaksija se je pojavila na zvezdnih kartah veliko prej, kot so se pojavili prvi teleskopi.



→ Poznamo jo vsaj od leta 964. Takrat jo v svoji knjigi Knjiga zvezd stalnic prvič omenja perzijski astronom Abd-al-Rahman Al Sufi. Imenoval jo je Mali oblak. S teleskopom pa si je Mali oblak prvi ogledal Simon Marius leta 1611 ali 1612.

Andromedina galaksija je članica naše Lokalne jate in je največja v tej skupini galaksij, v katero sodijo tudi naša Galaksija, spiralna M 33 v Trikotniku in še cel kup manjših pritlikavk. S prvimi meritvami velikosti Andromedine galaksije so dobili za njen premer 110 000 svetlobnih let. Novejše ocene, dobljene na podlagi občutljivejših meritev, so pokazale, da je galaksija skoraj dvakrat večja. Njen premer je malo manjši od 200 000 svetlobnih let in sodi med največje znane spiralne galaksije! Naša Galaksija meri v premeru približno 130 000 svetlobnih let. Andromedina galaksija je povsem normalna galaksija. V središčni odebelitvi prevladujejo stare zvezde – rdeče in rumene orjakinje, zelo malo je medzvezdnega plina in prahu. Podobno kot v naši Galaksiji pa je v spiralnih rokavih veliko plinov in prahu, modrih, vročih, mladih orjakinj kot sta naša Rigel ali Deneb, meglic kot je naša Orionova meglica, planetarnih meglic in kroglastih ter razsutih kopic. Vse to in še več lahko povemo učencem, da popestrimo opazovanje. Poskusite!

Tekmovanje v znanju astronomije za osnovne in srednje šole

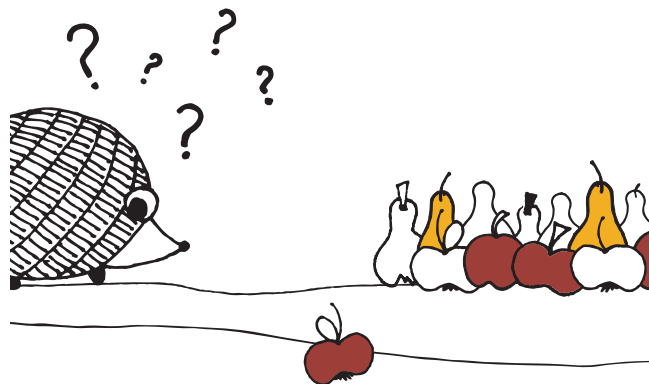
Učenci, dijaki in mentorji ne pozabite, da je letošnje šolsko tekmovanje v znanju astronomije 1. decembra, državno tekmovanje pa 17. decembra.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si



Učenci, dijaki in mentorji ne pozabite, da je letošnje šolsko tekmovanje v znanju astronomije 1. decembra, državno tekmovanje pa 17. decembra.

Iskanje nizov v besedilu



IGOR PESEK

→V tem prispevku si bomo poglobljeje ogledali iskanje nizov v poljubnem besedilu. Običajno ob tem pomislimo na iskanje besed v besedilu, ki ga najdemo v kakšni elektronski knjigi, spletni strani ali drugem dokumentu. Vendar je iskanje besedila zelo uporabno tudi na drugih področjih. Pred nekaj leti so znanstveniki uspeli zapisati celoten zapis DNK človeškega genoma, ki vsebuje približno tri milijarde baznih parov. Iz biologije vemo, da je veriga DNK sestavljena iz nukleotidnih baz, in sicer iz adenina (A), timina (T), gvanina (G) in citozina (C). V laboratoriju genetiki takšno verigo prevedejo v zapis nukleotidnih baz, ki ga zapišejo kot zaporedje znakov, in dobijo dolgo besedilo (npr. AAATTGGCATGTGGTGCCAA). Prvo pomembno vprašanje, ki si ga zastavijo, je, ali je dobljeni niz enak ali vsaj podoben kateremu drugemu nizu, shranjenemu v podatkovnih bankah DNK. Odgovor na to vprašanje dobijo ravno z iskalnimi algoritmi in kasneje v poglobljeni analizi z algoritmi ujemanja.

Tudi v računalništvu večkrat potrebujemo iskanje nizov v besedilu. Pri tem je predvsem pomembno, da na besedilo ne gledamo kot na nekaj, kar ima za človeka smisel, temveč kot na zaporedje znakov. Besedilo je tako lahko tudi binarni zapis programa, v

katerem iščemo točno določeni niz – zaporedje ničel in enic.

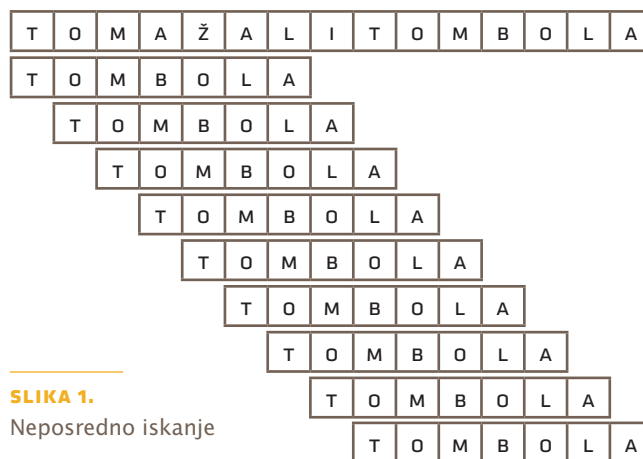
Dani problem bi lahko zapisali na naslednji način: Podano je zaporedje znakov *besedilo* dolžine n , v katerem iščemo zaporedje znakov *niz* dolžine m .

Neposredno iskanje

Najbolj preprost način iskanja niza v besedilu je, da za vsak položaj k v besedilu pregledamo, ali je naslednjih m znakov iz iskanega niza enakih tistim v besedilu. Če nastopi neskladje, še preden pregledamo vse znake iz iskanega niza, potem poskusimo z naslednjim položajem ($k + 1$) kot začetnim položajem iskanja. Algoritem bi bil videti takole:

```

1  k = 0
2  dokler k <= n ponavlja
3      j = 0
4      dokler j <= m in niz[j+1]
        = besedilo[k+j+1] ponavlja
5          j = j + 1
6      če je j = m potem
7          vrni k
8      sicer
9          k = k + 1
10 vrni "iskanje neuspešno"
```



SLIKA 1.

Neposredno iskanje

Algoritem neposrednega iskanja je kratek, preprost in intuitiven, vendar pa ni zelo „pameten“. Oglejmo si primer na sliki 1. Hitro opazimo, da algoritem preizkuša vsak nov položaj kljub temu, da je nekatere naslednje položaje že pregledal v prejšnjih po-



→ skusih. Po iskanju s prvega položaja ($k = 0$) algoritem npr. poskuša po neuspehu na četrti črki primerjave ($\text{besedilo}[3] \neq \text{niz}[3]$) z naslednjo črko v besedilu ($k = 1$), čeprav vemo, da do četrte črke gotovo ne bo uspešen. Takšnemu pametnemu preskakovanju se bomo posvetili kasneje, sedaj pa si pogledjmo časovno zahtevnost tega algoritma. V primeru najslabšega možnega scenarija, ko imamo zelo veliko ponavljajočih se znakov v besedilu in nizu (npr. besedilo vsebuje samo znake a in je zaključeno z b), je časovna zahtevnost $O(nm)$. Vendar se v praksi izkaže (npr. iskanje po književnem besedilu), da je časovna zahtevnost zelo blizu linearni. To lahko razložimo z dejstvom, da se v književnem besedilu prvi znak iskanega niza ne pojavi prav pogosto in se zato notranja zanka ne izvede velikokrat.

Seveda pa lahko algoritem neposrednega iskanja optimiziramo. V algoritmu na drugem koraku v zanki pregledamo znake, tudi če vemo, da je dolžina iskanega niza daljša od števila preostalih znakov v besedilu. Zato bi lahko nadomestili korak 2 z naslednjim stavkom:

```
2 dokler k <= n - m ponavljaj
```

Kot nadaljno optimizacijo pa lahko uporabimo tudi stražarje na koncu besedila. Razmislite, zakaj in kako je mogoče algoritem optimizirati s stražarji.

Boyer-Mooreov algoritem

Boyer-Mooreov algoritem spada med učinkovitejše algoritme iskanja nizov v običajnih aplikacijah, pogosto je implementiran v urejevalnikih besedila, saj deluje najhitreje, če je besedilo srednje dolgo in so iskani nizi daljši.

V nadaljevanju bomo predstavili enostavejšo različico algoritma, ki ne dosega tako dobrih rezultatov, lepo pa prikaže samo delovanje algoritma. Algoritem obdeluje znake od desne proti levi, pričenši z najbolj desnim znakom v iskanem nizu, in jih primerja z ustrezno ležečimi znaki v besedilu. Med izvajanjem algoritma se v primeru neujemanja znaka $B[i]$ iz besedila B z znakom $N[j]$ iskanega niza N zgodi naslednje: če se znak $B[i]$ v iskanem nizu N ne pojavi nikjer, potem začetek novega iskanja postavimo na $i + m + 1$ mesto. V nasprotnem primeru predstavimo mesto iskanja toliko v desno, da sta znaka $B[i]$ in $N[j]$ poravnana.

Poglejmo si na primeru. Iščemo niz $N = 'abcd'$ v besedilu B . Najprej preverimo, ali se ujemata četrta znak v besedilu in četrta znak v iskanem nizu. Osnovna ideja algoritma namreč je, da začnemo s primerjavo z zadnjim znakom v iskanem nizu N in ustreznim mestom v besedilu B . Predpostavimo, da je znak v besedilu B enak 'e'. Ker znak ni enak znaku v iskanem nizu N , to pomeni, da naše besedilo B do trenutne pozicije pregledovanja nikakor ne more več vsebovati celotnega iskanega niza (saj se ne ujema v zadnjem znaku). Zato pregledovanje prvih znakov iz N v besedilu B ni več potrebno. Še več; ker znaka 'e' sploh ni v iskanem nizu N , je smiselno, da z iskanjem niza v besedilu B nadaljujemo za četrnim znakom, zato prištejemo celotno dolžino iskanega niza. Iz danega primera je razvidna še ena značilnost algoritma; primerjanje poteka tako, da preverjamo znake v iskanem nizu po vrsti od desne proti levi.

Preden lahko predstavimo celotni algoritem, definirajmo še funkcijo $last(x)$, ki za poljubni znak x iz abecede pove, na katerem mestu se v iskanem nizu znak pojavi oz. se ne pojavi. Ta podatek nam v algoritmu služi pri določanju, za koliko mest premaknemo iskalni niz N v desno, in s tem poravnamo iskalni niz ter besedilo z znakom x . Funkcija je definirana takole:

$last(x) = \begin{cases} i & \text{indeks zadnje pojavitve znaka } x \\ & \text{v nizu } N \\ -1 & \text{drugače} \end{cases}$

Oglejmo si delovanje funkcije $last(x)$ na primeru. Imejmo iskalni niz $N = 'abacab'$. Za lažjo predstav bomo zapisali niz s pripadajočimi indeksi v tabelo 1.

a	b	a	c	a	b
0	1	2	3	4	5

TABELA 1.
Niz s pripadajočimi indeksi

Vrednosti funkcije $last(x)$ so za izbrane znake naše abecede naslednje:

- $last('a') = 4$, znak 'a' se zadnjič pojavi na mestu z indeksom 4;

x	'A'	'B'	...	'L'	'M'	'N'	'O'	...	'T'	...
last(x)	6	3	-1	5	2	-1	4	-1	0	-1

TABELA 2.

Tabela vrednosti za funkcijo *last*

- $last('b') = 5$, znak 'b' se zadnjič pojavi na mestu z indeksom 5;
- $last('c') = 3$, znak 'c' se pojavi na tretjem mestu v iskalnem nizu;
- $last('d') = -1$, znak 'd' se v iskalnem nizu ne pojavi.

Sedaj lahko zapišemo pseudokod Boyer-Mooreovega algoritma.

Vhod: Besedilo B z n znaki in
iskalni niz N z m znaki
Izhod: Indeks prvega ujemanja
iskanega niza N v besedilu B

- izračunaj funkcijo $last(x)$ za celotno abecedo
- $i = m - 1$
- $j = m - 1$
- ponavljaj
- če $N[j] = B[i]$ potem
- če $j=0$ potem
- vrni i
// našli smo ujemanje
- sicer
- $i = i - 1$
- $j = j - 1$
- sicer
- $i = i + m - \min(j, 1 + last(B[i]))$
- $j = m - 1$
- dokler $i > n - 1$
- vrni "ni ujemanja"

Oglejmo si delovanje algoritma na primeru iz slike 1. V danem besedilu iščemo besedo 'TOMBOLA'. Najprej moramo izračunati vrednosti funkcije *last* za celotno abecedo. V tabeli 2 so prikazane vredno-

sti funkcije *last* za črke, ki se pojavijo v iskanem nizu, ostali znaki abecede imajo vrednost funkcije *last* enako -1.

Po določitvi tabele za funkcijo *last* nadaljujemo z izvajanjem algoritma, katerega grafični potek je prikazan na sliki 2.

T	O	M	A	Ž	A	L	I	T	O	M	B	O	L	A	
T	O	M	B	O	L	A									
			T	O	M	B	O	L	A						
									T	O	M	B	O	L	A

SLIKA 2.

Iskanje z Boyer-Mooreovim algoritmom

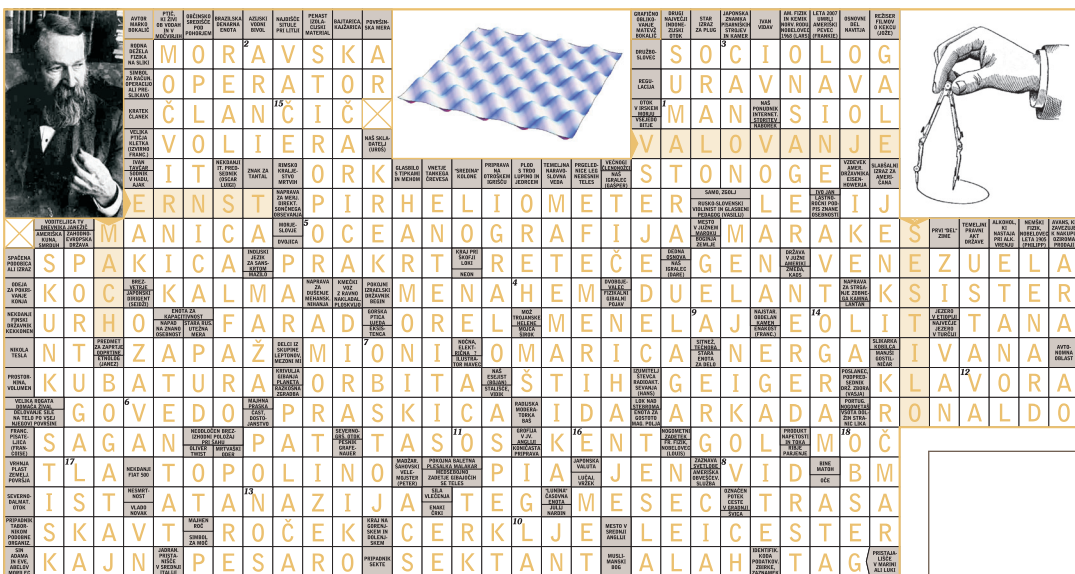
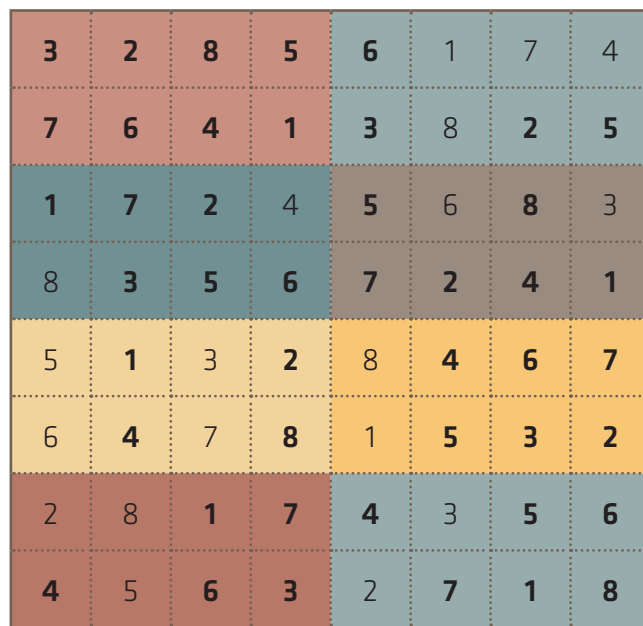
Kot vidimo, za celotno iskanje potrebujemo samo tri skoke na novo pozicijo iskanja, medtem ko imamo pri neposrednem iskanju kar devet skokov. V prvem krogu iskanja Boyer-Mooreovega algoritma primerjamo znaka $B[6]$ in $N[6]$. Ker znaka nista enaka, povečamo indeks za ena, kar je posledica funkcije $last(x)$, saj najdemo znak 'L' tudi v iskanem nizu. Spet primerjamo zadnji znak iskanega niza s trenutnim znakom v besedilu (to je znak 'I'). Ker primerjana znaka nista enaka in ker znaka 'I' ni v iskanem nizu, povečamo mesto začetka primerjanja za celotno dolžino iskanega niza. Ponovimo primerjanje, ki se uspešno zaključi, saj so bili vsi primerjani znaki enaki.

XXX

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si



× × ×

Barvita pajčevina



ALEŠ MOHORIČ

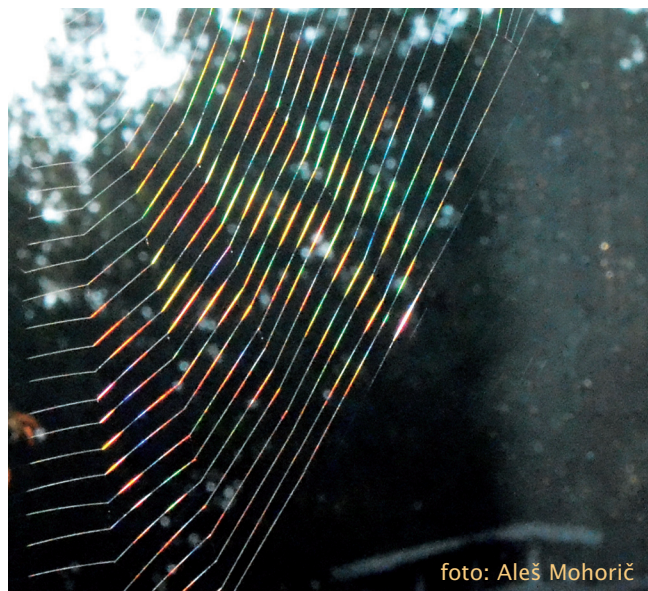


foto: Aleš Mohorič

→ Pajčevina je res nekaj posebnega. Je svilen nit, ki jo sprede pajek v svojih žlezah, sestavljena je iz beljakovin. Niti je več vrst, tako kot žlez, iz katerih pridejo. Pajki nit spletejo v mrežo, v katero se ujame njihov plen. V mreži je več vrst niti – ene so lepljive, druge ne. Uporabljajo jih tudi za transport. Nekaj jih izbrizgajo v zrak in pustijo, da jih veter odnese drugam. Pajčevina ima izjemno veliko natezno trdnost in je zelo raztegljiva. Natezno trdnost 1500 MPa ima podobno jeklu a pol manjšo od kevlarja. Gostota je le petino železove, malo večja od vode: 1,3 kg/l. Polkilogramska nit bi bila dovolj dolga, da bi z njo objeli Zemljo po ekvatorju. Niti prenesejo tudi velike raztezke: nekatere vrste lahko razegnemo na štirikratno dolžino, preden se pretrgajo. Zanimivo je tudi, da se v vodi skrčijo na polovico svoje dolžine. V premeru so tanjše od lasu – približno 3 mikrometre. Še en zanimiv pojav je moč opaziti na mreži v vogalu spalničnega okna. Pajkova mreža ni pobarvana; za prelivajoče barve poskrbita uklon in interferenca. Ne upamo si trditi, da tu opazujemo pojav, ki je tak kot pri ozki reži. Barve se namreč prelivajo, tudi če smer opazovanja spreminjamo v ravnini, v kateri leži nit. Mogoče k tenu kaj prispeva tudi iridiscenca, o kateri smo v Preseku pisali lani (*Barviti hrošč*, Presek, 38 2010/2011, št. 4, str. 15).



Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti.



Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

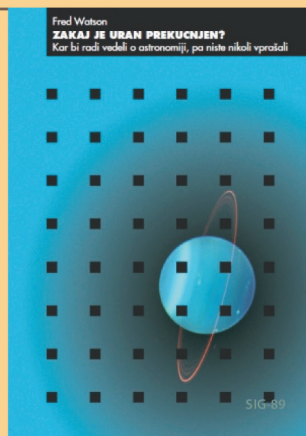
Fred Watson:

ZAKAJ JE URAN PREKUCNEN?

Kar bi radi vedeli o
astronomiji, pa niste
nikoli vprašali

200 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

22,39 EUR

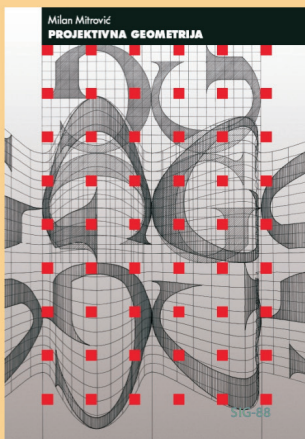


Janez Strnad:

SVET NIHANJ IN VALOVANJ

200 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

19,99 EUR

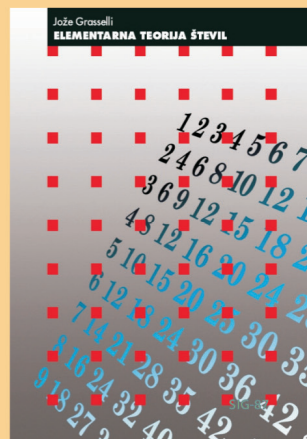


Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.