



PRESEK



- MORSKI JEŽKI IN PETKOTNIK
- ATOMI, MOLEKULE
IN PROŽNOSTNI MODUL
- KROGLASTA KOPICA M 13
- RISANJE S PROGRAMOM SAGE

Ponovno odkrivanje genija

↓ ↓ ↓

→ Arhimeda imamo skupaj z Newtonom in Einsteinom za enega največjih genijev vseh časov. Žal se je marsikatero Arhimedovo delo v času izgubilo. Dogajalo pa se tudi je, da so Arhimedova dela preprosto brisali in take vrste praznih listov ponovno uporabili. V enem



tovrstnih del, napisanem na listu z bolj ali manj izbrisanim Arhimedovim besedilom (tako vrsto besedila imenujemo sicer palimpsest), so z najnovejšo računalniško tehnologijo odkrili do tedaj še neznan Arhimedove zapise o kombinatoriki in o računstvu. Ob takem odkritju se seveda sprašujemo, kako bi se od antičnih

časov naprej matematika in druge znanosti razvijale, če Arhimedova odkritja ne bi bila tako grobo izbrisana.

Eno najbolj vznemirljivih razkritij Arhimedove misli se je zgodilo s pomočjo rentgenskih žarkov. Ti so prodrli skozi sliko, nastalo v štiridesetih letih prejšnjega stoletja, ki je zakrila originalno besedilo. Odkrili so železo v starodavnem črnilu, s tem pa tudi Arhimedovo delo *Metoda izrekov o mehaniki*. Temu odkritju sta botrovala prav sodobna matematika in fizika; krog razvoja Arhimedove misli se tako na prav poseben, simboolen način zaokrožuje. Ne smemo namreč pozabiti, da je eden Arhimedovih dosežkov tudi izračun približka števila π .

× × ×

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 38, šolsko leto 2010/2011, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vladimir Bensa, Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2010/2011 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

© 2011 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1834

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Ponovno odkrivanje genija

MATEMATIKA

- 4-6** Morski ježki in petkotnik
(Mihael Škrget)
- 6** Škotska matura
(Darka Hvastija)
- 7-8** Polinom
(Marko Razpet)
- 8** Naloga
(Marko Razpet)
- 9-10** Peter J. Bentley: Knjiga o številih –
Skrivnost števil in kako so
ustvarila sodobni svet
(Marko Razpet)
- 11** Irena Majcen: Smelo na Olimp,
303 naloge iz teorije števil
(Janko Bračič)
-
- FIZIKA**
- 12-14** Atomi, molekule in prožnostni modul,
stisljivost, površinska napetost
(Janez Strnad)
- 14-15** Kaj se zgodi s platenko – odgovor naloge –
Poizkuševalnica v hribih
(Mojca Čepič)
- 18** Dobro ušla steklenica –
Poizkuševalnica doma
(Gorazd Planinšič)
- 19** Razmisli in poskusi
(Mitja Rosina)
- 20-21** Utripanje luči
(Aleš Mohorič)

ASTRONOMIJA

- 22-24** Kroglasta kopica M 13
(Bojan Kambič)
- 24** Nemo melje nad toroidno traso
(Marko Razpet)

RAČUNALNIŠTVO

- 25-29** Risanje s programom SAGE
(Andrej Taranenko)

RAZVEDRILO

- 31** Svetlobni steber – Naravoslovna fotografija
(Aleš Mohorič)
- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 38/5
(Marko Bokalič)
- 10** Križne vsote
- 15** Futošiki
- 29** Barvni sudoku

TEKMOVANJA

- priloga** Preizkusni komplet nalog za maturo 2012,
POLA 1: 35 vprašanj izbirnega tipa
- priloga** Preizkusni komplet nalog za maturo 2012,
POLA 2: 6 strukturiranih nalog
- priloga** 21. državno tekmovanje iz razvedrilne
matematike

SLIKA NA NASLOVNICI: Na notranjski strani vetrobranskega stekla je 27. decembra zjutraj nastala nenavadna, na poligone razmejena slana. Slana na strehah in steklih avtomobilov je sicer zelo pogost pojav. Ponavadi nastaja na zunanji strani – a tokrat je nastala na notranji strani. Poskusite odgovoriti na vprašanja:

- Zakaj sta na strehah in steklih avtomobilov rosa in slana dosti bolj pogosti, kot na tleh?
- Kako nastane rosa in kako nastane slana?
- Kako pa nastane ivje?
- Ali bi znali razložiti črte in razdeljenost slane na mnogokotnike med črtami?

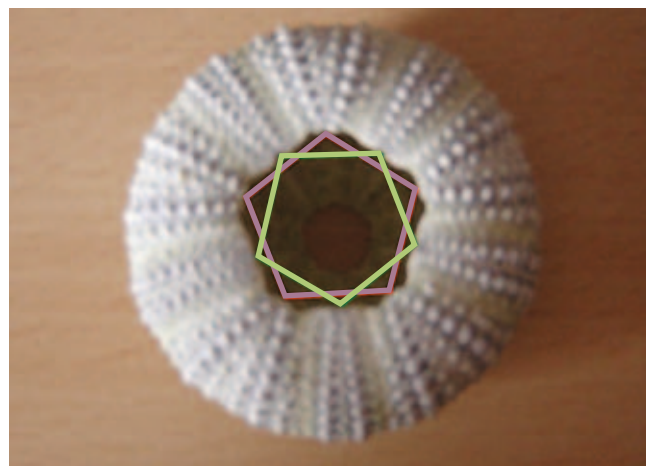
Odgovore pošljite na presek@dmfa.si, jih bomo zelo veseli.

(Foto: Jože Rakovec)



↓ ↓ ↓

→ Na apnenčastem oklepu morskega ježka so na dnu in vrhu točke, ki jih lahko povežemo v petkotnik (slika 1). Zanima nas primerjava med dolžinami stranic posameznega petkotnika s povprečno dolžino stranice petkotnika in regresijska analiza višine ježkov na stranice petkotnikov.



Točke na dnu oklepa morskega ježka lahko povežemo v petkotnik.

Telo morskega ježka je po videzu peterosomerno in kroglasto. Število pet se pri morskih ježkih večkrat pojavi: že prej omenjena petkotnika, ki imata po pet diagonal, pet zob na dnu oklepa, na oklepu dvakrat po pet pasov izboklin za bodice, ki jih ločuje enako število pasov drobnih luknjic, skozi katere izhajajo nožice za premikanje.

Meritve in izračuni

V plitvini morja sem nabral petnajst različnih dimenzij oklepov morskih ježkov. Doma sem s kljunastim merilom pri vseh izmeril višino (v) in dolžino stranic petkotnikov (a). Napaka pri merjenju je bila dovolj majhna in sem jo pri računih zanemaril. Dolžine stranic petkotnikov (a) so enake razdaljam med sosednjimi točkami na dnu morskega ježka (slika 1). Povprečno dolžino stranic ($\bar{a}$) sem izračunal po formuli

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

kjer so $x_1, \dots, x_n$ rezultati meritev dolžine stranic, n pa število meritev. Standardni odklon od povprečne dolžine stranic sem izračunal po formuli

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}}.$$

Velikost standardnega odklona nam govori o razpršenosti merjenih dolžin stranic okoli povprečne dolžine stranice. Bolj ko se več standardni odklon, bolj so vrednosti razpršene in različne druga od druge. Velikosti standardnega odklona so prikazane v tabeli 1.

Ježek	a_1 (cm)	a_2 (cm)	a_3 (cm)	a_4 (cm)	a_5 (cm)	$\bar{a}$ (cm)	σ (cm)	v (cm)
1.	1,12	1,07	1,09	1,12	1,11	1,10	0,02	2,07
2.	0,92	0,91	0,93	0,90	0,91	0,91	0,01	1,87
3.	0,85	0,84	0,83	0,86	0,85	0,85	0,01	1,60
4.	0,79	0,78	0,79	0,80	0,78	0,79	0,01	1,49
5.	1,00	1,01	1,01	1,04	1,02	1,02	0,01	2,05
6.	0,84	0,82	0,83	0,83	0,82	0,83	0,01	1,50
7.	0,74	0,74	0,74	0,75	0,73	0,74	0,01	1,33
8.	0,90	0,92	0,93	0,92	0,89	0,91	0,01	1,88
9.	0,82	0,80	0,82	0,81	0,78	0,81	0,02	1,42
10.	1,11	1,09	1,12	1,12	1,09	1,11	0,01	2,01
11.	0,85	0,81	0,85	0,82	0,84	0,83	0,02	1,52
12.	0,94	0,96	0,98	0,96	0,96	0,96	0,01	1,87
13.	0,64	0,65	0,62	0,64	0,62	0,63	0,01	1,18
14.	0,96	0,94	0,94	0,92	0,93	0,94	0,01	1,89
15.	0,81	0,85	0,83	0,83	0,82	0,83	0,01	1,39

Regresijska analiza

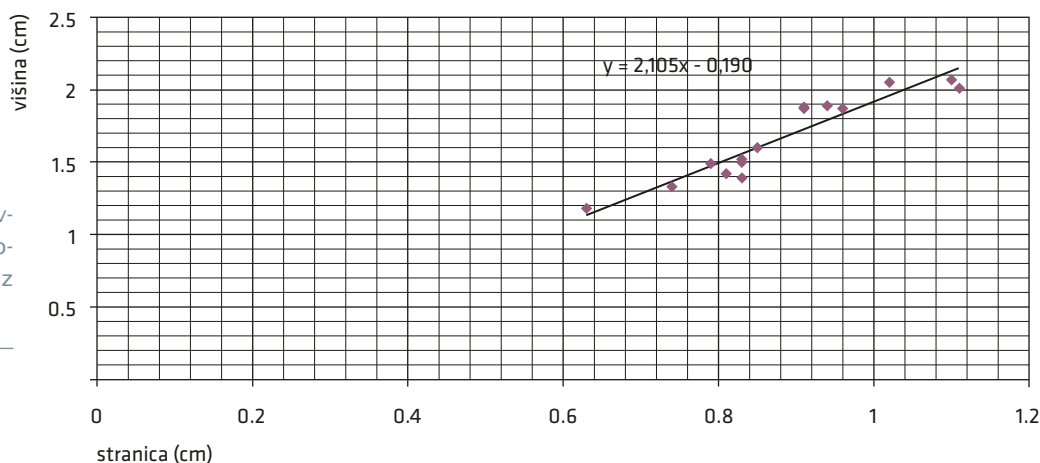
S programom Excel sem narisal razsewni grafikon odvisnosti višine ježkov od povprečne dolžine stranic petkotnikov (grafikon 1). Glede na razporeditev točk sem z istim programom naredil linearno regresijo po

TABELA 1.

Prikaz dobljenih podatkov meritev in izračunov pri petnajstih ježkih.

GRAFIKON 1.

Odvisnost višine ježka od povprečne dolžine stranice petkotnika vseh petnajst ježkov z regresijsko premico.



→ metodi najmanjših kvadratov. Mero linearne povezanosti dveh spremenljivk nam pove korelacijski koeficient. Korelacijski koeficient znaša 0,942, kar kaže na močno linearno povezanost med višino in povprečno dolžino stranice petkotnika. Regresijsko premico dveh spremenljivk prikažemo z enačbo

$$\blacksquare y = ax + b,$$

kjer sta a in b parametra. Določena sta tako, da je vsota kvadratov odklonov pravih vrednosti višine od vrednosti višine na regresijski premici najmanjša. V obravnavanem primeru znašata: $a = 2,105$, $b = -0,190$.

Literatura

- [1] N. I. Koškin in M. G. Širkevič, *Priročnik elementarne fizike*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 1990.
- [2] R. Jamnik, *Matematična statistika*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980.

× × ×



Škotska matura

↓↓↓

DARKA HVAŠTIJA

→

1. Trup in glava snežnega možaka na sliki sta kroga. Enačba trupa je $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$. Napišite enačbo glave, če je razdalja med najvišjo in najnižjo točko telesa 14 cm.

2. Premici AM in BM sta tangenti na krožnico s središčem v točki S in z radijem 12. Točki A in B sta dotikališči, središčni kot $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte natančno vrednost dolžine daljice AM in ploščino S črkanega lika.

Rešitev

1. Enačbo trupa zapišemo v obliki $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$, od koder preberemo, da je središče v točki $T(5, 6)$ in $r = 5$. Iz slike vidimo, da je radij glave 2, središče glave pa je v točki $A(5, 13)$. Enačba glave je $(x - 5)^2 + (y - 13)^2 = 4$.

2. Povežemo S in M trikotnika SAM in SBM sta dva skladna, pravokotna trikotnika. (Zakaj že?) Daljica SM razpolavlja kot α in lahko izračunamo $|AM| = 12 \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \sqrt{3}$. Polovico ploščine črkanega dela lahko dobimo, če od ploščine trikotnika SAM odštejemo $\frac{1}{12}$ ploščine kroga.

$$\blacksquare S = 2 \cdot \left(\frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \cdot 12^2}{12} \right) = 24\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

× × ×

www.presek.si

Polinom

↓ ↓ ↓

MARKO RAZPET

→ Polinom $\Lambda(x) = x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s$ naj ima pozitivne realne ničle x_1, x_2, x_3, x_4 . Dokažite, da tedaj veljata relaciji $pr \geq s$, $q^2 \geq s$ in da v njih hkrati velja znak enakosti natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Rešitev

Če so x_1, x_2, x_3, x_4 ničle polinoma

$$\blacksquare \Lambda(x) = x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s,$$

potem lahko zapišemo:

$$\blacksquare x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Izračunamo produkt na desni strani in primerjamo koeficiente. Dobimo Viètove formule:

$$\begin{aligned} \blacksquare x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -4p, \\ \blacksquare x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= 6q, \\ \blacksquare x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 &= -4r, \\ \blacksquare x_1x_2x_3x_4 &= s. \end{aligned}$$

Pri pozitivnih realnih ničlah x_1, x_2, x_3, x_4 polinoma $\Lambda(x)$ sta p in r negativni, q in s pa pozitivni realni števili.

Sedaj uporabimo znano neenakost

$$\blacksquare \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (\text{A-G})$$

pri čemer je n poljubno naravno število, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pa so poljubna pozitivna realna števila. Enačaj v zgornji neenakosti pa velja natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Izraz na levi strani v (A-G) je aritmetična, izraz na desni strani pa geometrična sredina števil $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Uporabimo (A-G), pa iz prve in četrte Viètove formule dobimo:

$$\blacksquare -p = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sqrt[4]{s}.$$

Podobno sledi iz tretje in četrte Viètove formule:

$$\begin{aligned} \blacksquare -r &= \frac{x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3}{4} \\ &\geq \sqrt[4]{x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3} = \sqrt[4]{s^3}. \end{aligned}$$

Dobljeni neenakosti lahko zmnožimo, ker nastopajo pri obeh, na levi in desni strani, pozitivna števila. Imamo torej:

$$\blacksquare (-p)(-r) = pr \geq \sqrt[4]{s} \sqrt[4]{s^3} = \sqrt[4]{s^4} = s.$$

Zato velja prva od neenakosti v dani nalogi: $pr \geq s$. Enačaj v njej očitno velja natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Za dokaz druge neenakosti v nalogi uporabimo drugo in četrto Viètovo formulo ter (A-G):

$$\begin{aligned} \blacksquare q &= \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4}{6} \\ &\geq \sqrt[6]{x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3} = \sqrt{s}. \end{aligned}$$



→ Po kvadriranju obeh pozitivnih strani dobimo, kar smo želeli: $q^2 \geq s$. Enačaj v tej neenakosti prevlada natanko tedaj, ko je

$$\blacksquare x_1x_2 = x_1x_3 = x_1x_4 = x_2x_3 = x_2x_4 = x_3x_4,$$

kar pa je samo takrat, ko je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Dodatek

Če ima polinom $\Lambda(x)$ same pozitivne ničle x_1, x_2, x_3, x_4 in če sta izpolnjena pogoja $pr = s$ in $q^2 = s$, ima polinom $\Lambda(x)$ eno samo pozitivno ničlo x_0 četrte stopnje in velja $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Zato je tedaj $\Lambda(x) = (x - x_0)^4$. Iz Viětovih formul dobimo povrsti:

$$\blacksquare p = -x_0, \quad q = x_0^2, \quad r = -x_0^3, \quad s = x_0^4.$$

1. Če sta izpolnjena pogoja $pr = s$ in $q^2 = s$ pri negativnih p in r ter pozitivnih q in s , pa to še ne pomeni, da ima polinom $x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s$ eno samo pozitivno ničlo četrte stopnje. Za $p = -3, q = 3, r = -3, s = 9$ sta izpolnjena pogoja $pr = s$ in $q^2 = s$, toda polinoma $x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 9$ se očitno ne da zapisati v obliki $(x - x_0)^4$ za nobeno realno število x_0 . Zato $M(x)$ nima ničle četrte stopnje.

2. Če sta izpolnjena pogoja $pr > s$ in $q^2 > s$, to še ne pomeni, da ima polinom

$$\blacksquare x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s$$

pozitivne ničle. Polinom $x^4 - 36x^3 + 218x^2 - 460x + 725$, pri katerem je $p = -9, q = 109/3, r = -115, s = 725$, ima dve pozitivni ničli $x_1 = 5, x_2 = 29$ in dve konjugirano kompleksni, $x_3 = 1 + 2i, x_4 = 1 - 2i$, čeprav izpolnjuje pogoja $pr > s$ in $q^2 > s$.

3. Za polinom $x^4 + 20x^3 + 140x^2 + 400x + 384$ je $p = 5, q = 70/3, r = 100, s = 384$. Tudi zanj sta izpolnjena pogoja $pr > s$ in $q^2 > s$, toda njegove ničle $x_1 = -2, x_2 = -4, x_3 = -6, x_4 = -8$ so negativne.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.dmfa.si

Naloga

↓ ↓ ↓

MARKO RAZPET

→ Rešite enačbo $\sqrt[3]{13x + 37} - \sqrt[3]{13x - 37} = \sqrt[3]{2}$.

Rešitev

ki ima korena $x_1 = -7$ in $x_2 = 7$. Preprost račun pokaže, da sta to res rešitvi dane enačbe.

$$\blacksquare x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7) = 0,$$

nato pa po krajšem računu enačbo

$$\blacksquare 2(13x + 27)(13x - 37) = 24^3,$$

Po ponovnem kubiranju dobimo najprej

$$\blacksquare \sqrt[3]{2(13x + 37)(13x - 37)} = 24.$$

Z upoštevanjem $\sqrt[3]{13x + 37} - \sqrt[3]{13x - 37} = \sqrt[3]{2}$ dobimo po preureditvi in krajšanju

$$\blacksquare (13x + 37) - (13x - 37) - 3\sqrt[3]{13x + 37}\sqrt[3]{13x - 37} = 2.$$

Če v dani enačbi vzamemo $a = \sqrt[3]{13x + 37}$ in $b = \sqrt[3]{13x - 37}$, dobimo s kubiranjem:

$$\blacksquare (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Uporabili bomo enakost

× × ×

www.presek.si

Peter J. Bentley: Knjiga o številih – Skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ S števili se pravzaprav srečujemo vsepovsod, in to celo življenje, od najnežnejšega otroštva naprej. Brez zadržkov lahko rečemo, da ljudje uporabljamo števila na vseh področjih svojega delovanja in bivanja. Števila ne sodijo samo v matematiko, z njimi imamo opravka v vsakdanjem življenju v zvezi z denarjem, še posebej v kriznih časih. S števili se srečamo npr. v avtu, veliko jih je v naših osebnih dokumentih, koledarjih, da o računalnikih ne govorimo.

Knjiga o številih nas na svojevrsten pripovedni način popelje skozi zgodovino razvoja pojma števila, od najpreprostejšega štetja in zapisa števil v sivi davnini naprej. Posebej je poudarjeno, kateri ljudje si lastijo posebne zasluge, da je znanje o številih nenehno napredovalo. Dandanes uporabljamo v zapi-



sih števil in računanju z njimi ničlo in le malokdo pomisli, da je ljudje pred dva tisoč leti še niso uporabljali, ampak da jo je nekdo moral izumiti. Prav tako se je godilo tudi z danes vsepovsod prisotnim desetiškim sistemom za zapis števil in ustreznimi števili.

Knjiga se ne more izogniti znanim številom, kot so krožno število π , zlato število $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, ki ga nekateri označujejo s τ , in število e , osnova naravnih logaritmov. Seveda izvemo tudi marsikaj o Pitagori in pitagorejcih, ki so svoj nauk o številih povzdignili skoraj na raven religije. Starogrška matematika je



→ sicer dosegla marsikaj, saj je skoraj do podrobnosti obvladala racionalna števila, zataknilo pa se ji je pri iracionalnih številih, kakršno je na primer $\sqrt{2}$. Pitagorejci se z njim preprosto niso ukvarjali. Toda prej ali slej so se ljudje morali spopasti tudi z iracionalnimi, celimi in kompleksnimi števili. Seznanimo se še z marsičim, tudi z zablodami, nesporazumi in problemi prvenstva ter avtorstva v matematiki.

Pripoved v knjigi ne poteka v zgodovinskem zaporedju, ampak v soglasju s števili, od majhnih prek malo večjih proti neskončnosti in se konča s kompleksnimi števili. Temu ustrezno sta prvi poglavji posrečeno oštevilčeni z -1 in 0 . Tema sledi Poglavje 0,000000001, označeno s številom, ki predstavlja nekaj zelo majhnega. Sledijo poglavja, ki so po vrsti oštevilčena z $1, \sqrt{2}, \phi, 2, e, 3, \pi$ in 10 . Namesto Poglavje 13 zapiše Poglavje 12a, da s tem vključi v pripoved še malo vraževerja in igre na srečo. Nato sledijo še poglavja, oštevilčena s c , hitrostjo svetlobe v praznem prostoru, $z \infty$ in $z i$, imaginarno enoto. Vsako poglavje nam ponuja nekaj zgodovine matematike, sproti spoznavamo tudi pomembne ljudi, ki so jo ustvarjali.

Knjiga je bogato likovno opremljena, v njej je veliko lepih in zanimivih računalniških slik, fraktalov, starodavnih risb, poslikav in drugih upodobitev, fotografij in podobnih gradiv, ki imajo opravka s števili. Vsekakor ponuja zanimivo branje, pri katerem še tako zahteven bralec izve tudi marsikaj novega in pri tem lahko uživa ob pogledu na izredno lepe ilustracije. Pri tem je morda najpomembnejše, da spozna, kako je matematika nastajala in se razvijala, kako so se rodila nekatera nova matematična področja in kateri so tisti dogodki, ob katerih lahko rečemo, da je matematika doživela znaten napredek.

Še nekaj besed o avtorju. Britanski profesor Peter John Bentley se je rodil leta 1972 in je zaposlen na University College v Londonu. Diplomiral je na področju umetne inteligence in pri svojih 24-ih letih doktoriral. Njegovo znanstveno področje sta računalništvo in njegova uporaba, zlasti v biologiji. Napisal je kar nekaj del za popularizacijo matematičnih in računalniških znanosti, čemur se posveča tudi na javnih prireditvah ter na radiu. ✖ ✖ ✖

www.presek.si

www.dmfa.si

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9, tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v črnem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	5	19					
13							
						3	14
9					8		
			11		19		
		7			14		
				10			
			15				
				15			

↓↓↓

REŠITEV

		9	6	15			
		8	1	9	15		
8	1	5	10	5	2	7	
			14				
6	2		19		11	8	1
		8					9
14		3				9	4
							13
					19	5	

✖ ✖ ✖

Irena Majcen: Smelo na Olimp, 303 naloge iz teorije števil

↓↓↓

JANKO BRAČIČ

→ Eden najstarejših in verjetno tudi najlepših delov matematike je teorija števil. Mnogi veliki matematiki, od Pitagore in Evklida naprej, so prispevali k njenemu razvoju. Carl F. Gauss, veliki nemški matematik, ki je deloval v prvi polovici 19. stoletja, je to teorijo imenoval kar kraljica matematike. Verjetno si teorija števil ta naziv tudi zasluži. V njej namreč najdemo bistvo matematike: preprosta vprašanja z razvejanimi odgovori in odprte probleme, okrog katerih nastajajo nove matematične teorije, ki širijo naše vedenje o številih in s svojo uporabo segajo celo v naše vsakodnevno življenje.

V slovenščini je kar nekaj knjig, ki obravnavajo teorijo števil. Nova knjiga avtorice Irene Majcen je pomemben kamenček v tem mozaiku. V njej so ob nalogah predstavljene osnove teorije števil. Na tak način je bralcu ponujen dvojni užitek: odkrivanje novega in uporaba že naučenega. Naloge so razdeljene v tri poglavja: Deljivost, Reševanje celoštevilskih enačb in Celoštevilske funkcije. Njihova težavnost je razpeta od lahkih nalog, katerih rešitev zahteva le kratek premislek, do trših orehov, ki jih lahko stremo le s poglobljeno analizo. Na srečo je avtorica dodala tudi rešitve nalog oziroma velikokrat kar celoten potek reševanja. To je velika prednost te knjige, saj jo lahko uporabimo kot učbenik za samo-

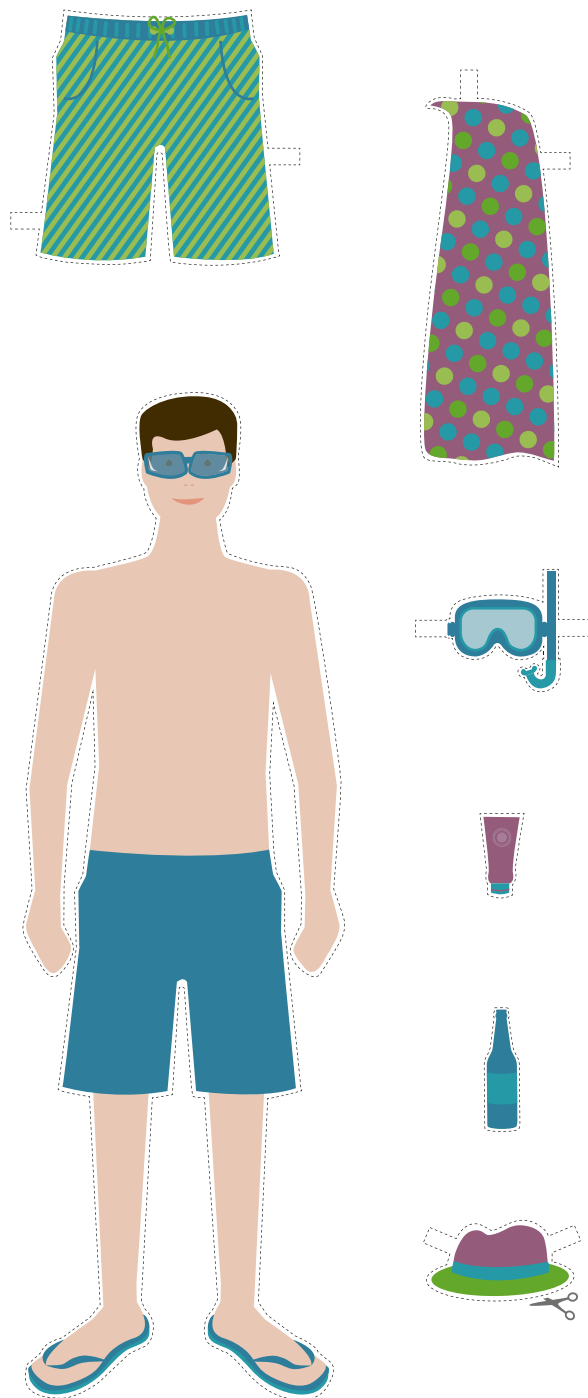


stojno učenje. Prepričan sem, da bo knjiga popestrila marsikatero urico učencem in dijakom, ki radi trejo matematične orehe. Veseli pa je bodo tudi njihovi učitelji, saj jim bo v pomoč pri pripravi na matematična tekmovanja.

Na koncu, za pokušino, zastavimo bralcu vprašanje. Ali obstajata dve zaporedni naravni števili, katerih zmnožek je število 123 456 789? Kaj pa zaporedni naravni števili, katerih zmnožek je 12 345 678? Na eno od obeh vprašanj lahko hitro odgovorimo, na drugo pa potem, ko polistamo po knjigi.

Knjižico lahko naročite pri DMFA-založništvo po članski ceni 14,39 EUR.

× × ×



Atomi, molekule in prožnostni modul, stisljivost, površinska napetost

↓↓↓

JANEZ STRNAD

→ Atome so iz antične grške misli v naravoslovje zanesli kemiki na začetku 19. stoletja. Med prvimi fiziki, ki so se zanimali za velikost atomov, je bil Thomas Young (1773–1829). Do njih ga je pripeljalo razmišljanje o prožnosti trdnih teles in tekočin. Sicer je Young najbolj znan po tem, da je oživil zamisel o svetlobi kot valovanju

Leta 1804 je Young objavil *Esej o koheziji tekočin* in dvanajst let pozneje za *Britansko enciklopedijo* pripeval geslo *Kohezija*. Tedaj so s *kohezijo* opisali silo, ki „telesa drži skupaj“. Prizmo iz trdne snovi v mislih s presekom, vzporednim z osnovnima ploskvama, razdelimo na dva dela. Vsak od njiju deluje s privlačno silo, kohezijo F_0 , na drugega. Pravokotno na presek moramo premagati to silo, da prizmo pretrgamo. Osnovno ploskev prizme vpnemo, na drugi pa prizmo obremenimo na stisk z dodatno silo F

pravokotno na osnovno ploskev. Young je razmerje med dolžino l obremenjene prizme in začetno dolžino neobremenjene prizme l_0 izrazil z

$$\blacksquare \quad \frac{l}{l_0} = \frac{F_0}{F_0 + F}.$$

Če ni dodatne sile, $F = 0$, se dolžina ne spremeni: $l/l_0 = 1$. Če je dodatna sila enaka koheziji, $F = F_0$, se dolžina skrči na polovico $l/l_0 = \frac{1}{2}$. Če s tolikšno silo prizmo obremenimo na nateg, $F = -F_0$, razmerje l/l_0 naraste čez vse meje in se prizma pretrga.

Za relativno spremembo velja zveza, ki jo dobimo, če od leve in desne strani enačbe odštejemo 1:

$$\blacksquare \quad \frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{F}{F_0 + F}.$$

Če je dodatna sila pozitivna, kar pomeni, da prizmo obremenimo na stisk, se njena dolžina zmanjša. Če je dodatna sila negativna, kar pomeni, da prizmo obremenimo na nateg, se dolžina poveča. Če je dodatna sila veliko manjša od kohezije F_0 , lahko F v imenovalcu zanemarimo proti F_0 in velja

$$\blacksquare \quad \frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{F}{F_0} = -\frac{F}{ES}.$$

Kohezijo F_0 je Young zapisal kot produkt ploskovne gostote kohezije $E = F_0/S$ in preseka prizme S . Danes uporabljamo enačbo $(l - l_0)/l_0 = -F/(ES)$, le da včasih ne zapišemo minusa. *Prožnostni modul* E imenujemo tudi *Youngov modul*. Prejšnja enačba kaže, da je Young – z današnjimi besedami – prožnostni modul izenačil z *natezno trdnostjo*, to je z natezno silo, preračunano na enoto preseka, pri kateri se prizma pretrga. Četudi sta bili zamisel in pot do rezultata sporna, enačba velja. V njej prepoznamo Hookov zakon $F = ks = k(l - l_0)$, v katerega za koeficient k postavimo $k = ES/l_0$ in se ne menimo za predznak.

Izbor podatkov kaže, da se prožnostni modul znatno razlikuje od natezne trdnosti.

snov	E	meja	trdnost
aluminij	70 GPa	15 do 20 MPa	40 do 50 MPa
baker	130	33	212
titan	120	100 do 225	140 do 370
volfram	411	550	550 do 620

Gigapascal, GPa, je 10^9 N/m^2 in megapascal, MPa, 10^6 N/m^2 . Preglednica poleg prožnostnega modula in natezne trdnosti navaja še mejo. *Mejo sorazmernosti*, pri kateri podaljšek ali skrčec preneha biti sorazmeren s silo, bi morali razločiti od *meje prožnosti*, po kateri podaljšek ali skrčec ne izgineta popolnoma, ko sila preneha. Merjenje pa je zahtevno in nenatančno, o čemer pričajo navedeni intervali. Zato se zadovoljimo z enim samim podatkom za mejo.

Young je premislek razširil na tekočino v cevki z batom s presekom S . Pri tem je prožnostni modul nadomestil z obratno vrednostjo *stisljivosti*. Stisljivost vpeljemo kot kvocient zmanjšanja relativne prostornine tekočine in tlaka $\Delta p = F/S$, ki povzroči zmanjšanje prostornine: $\chi = -(\Delta V/V)/\Delta p$. Tako je Young za tekočino v cevki dobil $(l - l_0)/l_0 = -\chi F/S$.

V Youngovih časih so navedli, da bi se navpičen stolpec vode zaradi teže pretrgal pri višini $l_0 = 2,29 \cdot 10^5 \text{ m}$. Če upoštevamo, da je po Youngu kohezija enaka „natezni trdnosti“, dobimo $\chi = 1/(F_0/S) = 1/(\rho g l_0)$. To da za stisljivost vode

$$\blacksquare \quad 4,4 \cdot 10^{-10} (\text{N/m}^2)^{-1}.$$

Najbrž so prišli do podatka o dolžini stolpca vode, ki se pretrga zaradi teže, po izmerjeni stisljivosti vode. V tablicah najdemo pri sobni temperaturi za stisljivost vode $4,6 \cdot 10^{-10} (\text{N/m}^2)^{-1}$.

Glede višine, pri kateri se stolpec pretrga zaradi teže, so se motili. Leta 1950 so ugotovili, da se stolpec vode pretrga pri *negativnem tlaku* 290 barov = $290 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, ki mu ustreza stolpec z višino 2900 metrov. Vodo so dali v cevko z obliko črke Z in jo vrteli v centrifugi z naraščajočo frekvenco. Stolpec vode se je pretrgal pri frekvenci, ki je ustrezala navedenemu tlaku. Vodo so prekuhali in jo pred poskusom za kratek čas izpostavili velikemu tlaku, da so iz nje izgnali vse mehurčke. Izmerjeni tlak se je tudi dobro ujemal z napovedjo enačbe stanja za pline, ki se utekočinijo.

Young je vpeljal še površinsko napetost in za vodo zanjo nameril v današnjih enotah $0,075 \text{ N/m}$. Osredotočil se je na plast vode pod gladino z debelino dosega sil med molekulami d . Ugotovil je, da naj bi bila površinska napetost enaka tretjini ploskovne

→ gostote kohezije, pomnožene z debelino te plasti: $\gamma = \frac{1}{3}(F_0/S)d = \frac{1}{3}\chi d$. Z navedenima podatkomata je dobil za doseg:

$$\blacksquare d = 3\chi\gamma = 0,1 \text{ nm}.$$

To je samo malo manj od današnje ocene za premer atomov. Young pa je molekule imel še za veliko manjše. Sklepal je, da je povprečna razdalja med molekulama v nasičeni vodni pari, ki se utekočinja, enaka dosegu sil med molekulami. Površinsko napetost je izmeril pri temperaturi 15,6 °C. Zato je za razmerje med gostoto nasičene pare pri tej temperaturi in gostoto vode upošteval 1/60000 (boljši podatek bi bil 1/72000) in ocenil premer molekule z

$$\blacksquare \frac{0,1 \text{ nm}}{60000^{1/3}} = \frac{0,1 \text{ nm}}{40}.$$

Zavedal se je slabosti, da je ocena odvisna od temperature, ker je od nje odvisna gostota nasičene pare. Danes vemo, da je bila Youngova ocena približno petdesetkrat premajhna.

Z Youngom večkrat povežejo oceno za velikost molekul. Masi m do vrelišča segrete vode moramo dovesti toploto $Q = m q_i$, da jo spremenimo v paro. Enako delo $A = \gamma S$ opravimo proti površinski napetosti, ko to maso vode razpršimo v „kapljice“ z velikostjo molekul. Oboje izenačimo ter za maso molekul vstavimo $m = N(4\pi r^3/3)\rho$ in za njihovo površino $S = N \cdot 4\pi r^2$. Pri tem je N število molekul in ρ gostota vode. Tako dobimo za premer molekule oceno:

$$\blacksquare 2r = \frac{6\gamma}{\rho q_i}.$$

S površinsko napetostjo 0,072 N/m, gostoto 10^3 kg/m^3 in izparilno toploto $2,3 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ dobimo za premer $2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,2 \text{ nm}$. Računali smo, da so molekule kroglice s prostornino $4\pi r^3/3$ in površino $4\pi r^2$. Kroglice ne izpolnijo prostora. Enak rezultat bi dobili, če bi vzeli da so molekule kocke s prostornino a^3 in površino $6a^2$. Rezultat je samo ocena, saj je površinska napetost količina iz velikega sveta in ni uporabna v svetu molekul. Ocenjena velikost molekule vode je smiselna. Oцени sicer ne gre zaupati, a jo zaradi preprostosti radi navedejo.

× × ×

Kaj se zgodi s plastenko

ODGOVOR NALOGE



MOJCA ČEPIČ

→ Tudi če niste načrtno izvedli preizkusa, ki smo vam ga predlagali, ste ga morda kdaj izvedli nenáčrtno. Če ste na vrhu smučišča popili pijačo in okolu prijazno sami odnesli v nahrbtniku plastenko v dolino, ste ugotovili to, na kar vas danes želimo opozoriti. Plastenka se je skrčila.

Poglejmo rezultate našega poskusa. Namenoma je poskus potekal v nekoliko večjem višinskem razponu, kot je za naše hribe običajno. Z gondolo smo se povzpeli namreč na goro visoko zelo blizu 3000 m (Schilthorn 2970 m), na vrhu smo izpraznili plastenko (za občutek si jo oglejte na sliki 1), nato pa smo se s plastenko v nahrbtniku začeli spuščati v dolino. Vmes smo se ustavili na planinski postojanki 1000 m nižje (slika 2), ogledali pa smo si jo tudi v dolini na višini okoli 750 m (Lauterbrunnen 759 m), kar lahko vidimo na sliki 3.

Prostornina plastenke se je občutno zmanjšala. Zakaj le? V vsakdanjem življenju se gibljemo po dnu oceana zraka. Teža zraka nad nami povzroča tlak 1 bar. Ko pa se dvignemo v višino, se debelina plasti zraka nad nami zmanjša, zato se zmanjša tudi tlak. Na naše občutje sprememba tlaka ne vpliva ne vem koliko. Seveda se v višinah, zaradi redkejšega zraka in manjše vsebnosti kisika, hitreje zadihamo. Poleg občasnih glavobolov, je to običajno tudi vse, dokler se gibljemo na višinah nekako do tri ali štiri tisoč metrov. Čutila, ki bi nam povedala zračni tlak, nimamo,



SLIKA 1.

Prazna plastenka (cca 3000 m visoko).



SLIKA 2.

Prazna plastenka (cca 1800 m visoko).



SLIKA 3.

Prazna plastenka (cca 750 m visoko).

čeprav ljudje radi ob spremembi vremena trdijo vse mogoče o svojih občutjih sprememb tlaka.

Če se tlak spremeni, se spremenijo tudi prostornine teles. Medtem, ko so te spremembe v trdnih snoveh in tekočinah zelo majhne, dokler hodimo le na planinske izlete, pa za zrak pri teh tlakih to ne velja. Za zrak pri približno stalni temperature velja Boylov zakon, ki pravi, da je produkt tlaka in prostornine plina stalen ($p_0 V_0 = p_1 V_1$). Zato ima zrak v višinah manjšo gostoto, saj se zaradi manjšega tlaka njegova prostornina poveča. Naša plastenka je pokazala prav to. Na višini je bila polna zraka pri nižjem tlaku. Zaprli smo jo dovolj tesno, da se zrak v njej ni mogel izmenjevati. S spuščanjem v dolino se je tlak povečeval, stiskal plastenko in zrak v njej. Prostornina zraka v plastenki se je zmanjševala. Vidimo, da pri 2000 m višinske razlike je učinek vse prej kot zanemarljiv. Plastenka je na sliki 3 kar precej tanka.

× × ×

www.presek.si
www.dmfa-zaloznistvo.si

× × ×

Futoški

↓ ↓ ↓

→ V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n , tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter, da bodo izpolnjene vse relacije.

6	>		<			1	
	>		1				> 4
	<		4	>			<
				> 4	>		
					<		
	< 5	>		<	<		

↓ ↓ ↓

REŠITEV

9	4	3	2	5	1
2	9	5	3	1	4
1	2	4	9	3	5
5	3	1	4	9	2
4	5	9	1	2	3
3	1	2	5	4	9

× × ×

[illegible]



NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **31. julija 2011**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

Dobro uglašena steklenica



GORAZD PLANINŠIČ

→ Ali ste že kdaj poskusili igrati na steklenico?

Vrat steklenice naslonimo na brado tako, da je spodnja ustnica tik nad robom steklenice. Če zdaj pihnemo in z zgornjo ustnico usmerimo tok zraka rahlo navzdol, proti vratu steklenice, bo steklenica zapela z jasnim tonom.

Raziščimo, od česa je odvisna višina tona, s katerim zapoje steklenica. Potrebovali bomo naslednje potreščine (glej sliko):

Potrebščine

- dve enaki prazni steklenici ali plastenki,
- ravnilo,
- šumeče tablete,
- slamico z rebrastim kolenom,
- kozarec vode

Raziskava naj poteka po naslednjih korakih, ki se dopolnjujejo in po zahtevnosti stopnjujejo.

1. Najprej se prepričajmo, da prazni steklenici zapojeta z enakima tonoma, če pihamo na eno ali drugo.

2. Nato natočimo v eno steklenico malo vode, tako da bo gladina približno en centimeter nad dnom steklenice. Druga steklenica naj ostane prazna. Zaigramo na prvo in nato na drugo steklenico ter pri tem pazimo, da v obeh primerih pihamo na enak način. Ka-



tera steklenica zapoje z višjim tonom? Prosimo prijatelja ali prijateljico naj pove, kateri ton je višji, in se prepričajmo, da se vsi strinjamo o primerjavi med višinama tonov. Dolijmo nekaj vode v prvo steklenico in poskus ponovimo. Kaj slišimo? Nadaljujmo z dolivanjem in vsakič primerjajmo tona obeh steklenic. Z besedami opišimo, kako je višina tona, s katerim zapoje steklenica, odvisna od količine vode v steklenici.

3. V obe steklenici natočimo enako vode, tako da sta gladini vode kak centimeter nad dnom steklenic. S pihanjem se prepričajmo, da steklenici zapojeta z enakima tonoma. Zdaj prepolovimo šumečo tableto in jo vrzimo v eno od steklenic. Počakajmo nekaj minut, da se tableta popolnoma raztopi in da se morebitne pene, ki pri tem nastajajo, poležejo. Nato previdno zaigramo na eno in na drugo steklenico ter pozorno poslušajmo. Kaj slišimo? Primerjajmo tona med seboj in svoja opažanja opišimo. Prosimo še prijatelja ali prijateljico, naj primerja tona, in si zapišemo še njihove ugotovitve.

4. Sledi še zadnji del poskusa. Vzemimo slamico, prepognimo rebrasto koleno in slamico potisnimo v steklenico, v kateri je raztopljena šumeča tableta. Pazimo, da pri tem slamice ne potopimo v tekočino. Slamico dajmo v usta in nekaj časa pihajmo v steklenico. Nato slamico odstranimo. S pihanjem na steklenici zopet primerjajmo višini tonov, s katerima zapojeta steklenici. Zapišimo svoja opažanja.

V naslednji številki bomo opisali izide poskusov in jih poskusili razumeti. _____ × × ×

Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA



43. „Varčne žarnice“ Ali so „varčne žarnice“ zares varčne? Preberemo lahko, da 20-wattna varčna žarnica sveti enakovredno kot 100-wattna navadna žarnica na wolframovo nitko. Preveri! Primerjaj osvetljenost dane ploskve pri uporabi različnih navadnih in varčnih žarnic.

Navadna žarnica na žarečo nitko ima slab izkoristek, ker gre večina energije v toploto s sevanjem in prevajanjem. 100-wattna žarnica oddaja kakih 1200 lumnov svetlobe, torej ima svetilnost $1200/4\pi = 100$ sveč. (To je naključje, da je približno ista številka pri moči v wattih in pri svetilnosti v svečah.) Idealen izkoristek pa bi dal 5400 sveč, če bi šla vsa energija v zeleno svetlobo, za katero je naše oko najbolj občutljivo. Varčne žarnice običajno vsebujejo živosrebrne pare, ki sevajo ultravijolično, toda na steni se ultravijolična svetloba pretvori v „belo“ svetlobo (cel spekter vidne svetlobe). Izkoristek je nekajkrat boljši kot pri navadnih žarnicah, vendar svetloba ni tako pijetna. Varčne žarnice so tudi dražje. Pričakovati sicer je, da se bodo tovrstne žarnice še izpopolnile. Najboljši izkoristek (čez 30%) imajo diode LED (*light emitting diodes*), toda zaenkrat so še prešibke. Te žarnice lahko vidimo na čelnih svetilkah in kolesarskih žarometih. Sprva so bile preveč modrikaste, a tudi te žarnice izboljšujejo.

NASVET. Svetilnost žarnic lahko primerjaš z uporabo fotoaparata. Na mizo položi bel papir in na stojalo v določeni višini fotoaparata. Nekje nad fotoaparatom naj bo svetilka, v katero boš dal različne žarnice. Ko slikaš papir, se digitalni fotoaparata sam prilagodi osvetljenosti. Javi tudi podatke o slikanju,

iz katerih lahko sklepaš na osvetljenost. Pomni, da je svetlobni tok, ki ga fotoaparata sprejme, sorazmeren z osvetljenostjo papirja, s časom ekspozicije in s kvadratom premera zaslonke. Ker avtomatski fotoaparata izbere fiksni optimalni vhodni svetlobni tok, lahko sklepamo, da je bila osvetljenost ploskve obratno sorazmerna s časom ekspozicije in s kvadratom premera zaslonke. Uporaben je tudi navaden neavtomatski fotoaparata z vgrajenim svetlometerom. Na fotoaparatu odčitaš čas ekspozicije in zaslonko, in iz njiju spet sklepaš na osvetljenost.

Morda je bolje vzeti namesto praznega lista papirja papir z besedilom.

Metoda lahko preveriš tako, da z isto žarnico osvetljuješ pri različnih razdaljah od žarnice do papirja. Osvetljenost mora biti obratno sorazmerna s kvadratom razdalje od žarnice od papirja.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

42. Kako hitro se svinčnik prevrne? Postavi svinčnik na mizo navpično na konico in ga kar se da previdno izpusti. Štopaj ali oceni, v kolikšnem času se svinčnik prevrne in pade na mizo. Kolikšen čas se ti je največ posrečil? Zakaj svinčnik pravzaprav pade, saj je v ravnotežju?

ODGOVOR. Svinčnik pade, ker ni v stabilnem, temveč v labilnem ravnovesju. Sila svinčnikove teže in sila podlage pod konico sta sicer nasprotno enaki, vendar prej ali slej nastopi tudi majčkena prečna sila zaradi tresljajev okolice in zato, ker svinčnik ni čisto navpičen.

Primerjajmo čas padanja s teoretičnim pričakovanjem. Izpeljava (ki je tukaj ne navajamo) pokaže, da naklonski kot ϕ raste s časom približno eksponentno, $\phi(t) = \phi_0 \exp(t/\tau)$, kjer je značilni čas $\tau = \sqrt{\ell/3g}$. Čas padanja je torej približno

$$\blacksquare \quad t \approx \tau \ln(\phi_1/\phi_0).$$

Privzemimo končni kot $\phi_1 = \pi/2$ in začetni kot $\phi_0 \approx 0,1^\circ = 0,0017$, kar pomeni, da smo vrh svinčnika dolžine $\ell = 18$ cm držali le za $x_0 = \ell\phi \approx 0,3$ mm nenatančno. Dobimo značilni čas $\tau = 0,077$ s in čas padanja $t = 0,53$ s. In res nisem uspel bolje kot pol sekunde!

× × ×

Utripanje luči



ALEŠ MOHORIČ

→ Utripanje luči, ki jih uporabljamo za hišno razsvetljavo, redkokdaj opazimo. Ko pa ga, nas zmoti; običajno je tovrstno utripanje posledica okvare v napajanju ali kakšnih drugih posebnih okoliščin.

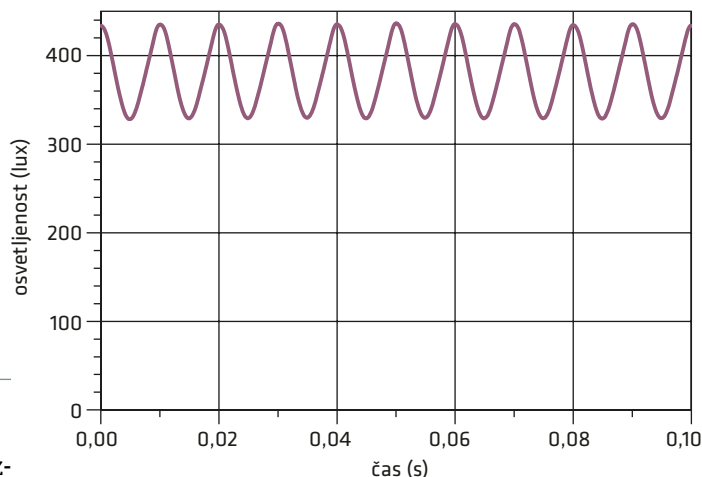
Večino luči napaja izmenična napetost, izjema so baterijske svetilke. Zaradi izmeničnega napajanja luči utripajo, četudi tega človeško oko ne zazna. Le-tega pa ni težko naplahtati; že spreminjanje slik s hitrostjo 25 slik na sekundo namreč v očesu vzbudi videz tekočega gibanja – to izkoristijo v kinu in na televiziji. Seveda je oko bolj občutljivo za ostre kot mehke spremembe. Spremembe so ostre, če se kader hitro in močno spreminja, npr. izmenjevanje belega in črnega zaslona. Primer mehke spremembe je posnetek potujočega oblaka. Tekoča zaznava zaporedja slik je povezana z izvenevanjem signala iz vidnih živcev in tvorbo slike v korteksu možganov.

Najpreprostejša svetiła – žarnice – so narejena tako, da električni tok teče po tanki žici, ki se zato segreje do visoke temperature (več kot 1000 °C) in seva elektromagnetno valovanje. Večina sevanja je v infrardečem območju; ta del občutimo kot toplotni tok, če blizu žarnice pridržimo roko. Del energije žarnica izseva kot vidno svetlobo.

Svetlobni tok, ki ga izseva žarnica, je sorazmeren s četrto potenco temperature žarilne nitke. Zvezo podaja Stefanov zakon

$$j = \sigma T^4.$$

j je gostota izsevanega svetlobnega toka, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefanova konstanta, albedo sve-



SLIKA 1.

Časovni potek osvetljenosti občutljivega in hitrega svetlomera, na katerega sveti žarnica. Žarnico napaja izmenična napetost s frekvenco 50 Hz, tok pa niha okoli povprečne vrednosti s frekvenco 100 Hz: 10 nihajev v 0,1s. Žarnica nikoli čisto ne ugasne, saj se zaradi hitrih sprememb moči ne ohladi dovolj.

tila pa privzamemo 1, kar ni čisto res, a zgodbe nočem po nepotrebnem zapletati. Temperatura žarilne nitke se spreminja zaradi neravnovesja med prejeto električno energijo in izsevano toploto. Električno energijo prejema s trenutno močjo, ki je enaka produktu napetosti in toka skozi žarilno nitko:

$$\blacksquare P = UI.$$

Če napetost niha sinusno

$$\blacksquare U = U_0 \sin 2\pi \nu t,$$

ima tudi tok po ohmovem zakonu enak časovni potek in amplitudo U_0/R . R je upor žarnice, ν je frekvenca, s katero niha napetost. V Evropi je frekvenca napetosti 50 Hz, kar ustreza nihajnemu času $1/\nu = 20 \text{ ms}$. Trenutna moč žarnice je

$$\blacksquare P = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 2\pi \nu t = \frac{U_0^2}{2R} (1 - \cos 4\pi \nu t) = P_0 (1 - \cos 4\pi \nu t)$$

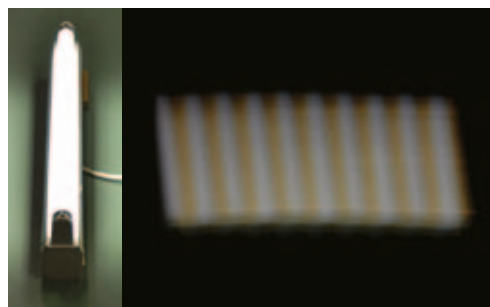
in niha med 0 in $P_0 = \frac{U_0^2}{2R}$ z dvakrat večjo frekvenco

SLIKA 2.

Žarnica (levo) na premaknjeni fotografiji (desno) pusti utripajočo sled.

**SLIKA 3.**

Sledi nočne lučke (levo) in neonske svetilke (desno) na premaknjeni fotografiji kažeta bolj izrazito utripanje kot sled žarnice, saj se ti svetili hitreje odzivata na spremembe električnega toka.

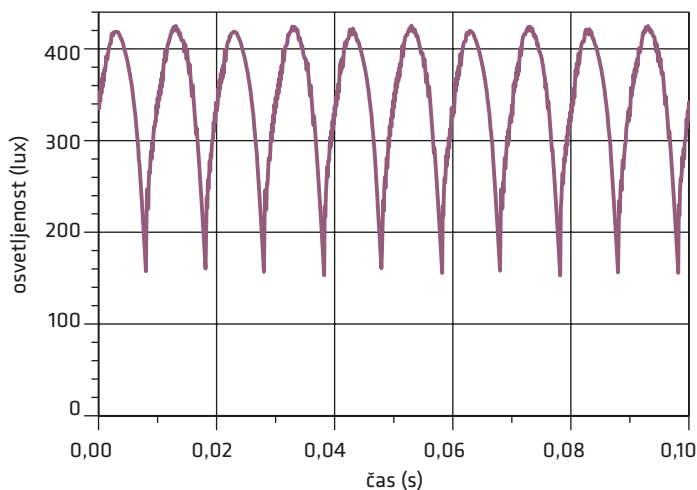


kot napetost. Nazivna moč žarnice, ki je napisana na bučki ali podnožju, je običajno efektivna moč $P_{ef} = P_0/2$.

Svetilnost žarnice se spreminja z enako frekvenco kot trenutna moč; nekaj razlike je le v časovnem poteku, saj temperatura zaradi končne toplotne kapacitete žarilne nitke in omejenega toplotnega toka ne sledi popolnoma električni moči. Svetilnost zato ne niha med ničlo in največjo vrednostjo, temveč z manjšo amplitudo okoli povprečne vrednosti. To opazimo tudi na grafu časovnega poteka osvetljenosti izmerjene z občutljivim in hitrim svetlometerom (slika 1).

Utripanje žarnice lahko razkrijemo tudi s fotoaparatom, kjer nastavimo nekoliko daljšo osvetlitev (izbrali smo 0,1 s). Svetilo slikamo tako, da kamero premikamo (ali vrtimo) in se pri tem svetilo v kadru premika. Posnetek moramo narediti ob pravem trenutku, zanj pa potrebujemo tudi nekaj vaje. Na sledi, ki jo svetilo pusti na sliki, lahko opazimo spreminjanje svetlosti (slika 2).

Podobno lahko raziščemo tudi druga svetila; poi-grali smo se še z neonko in nočno lučko na svetleče diode (slika 3). Pri teh svetilih časovni potek svetilnosti ni tak kot pri žarnici, saj ta svetila napajamo z usmerjeno napetostjo. Če napetost usmerjamo samo na pol nihaja (napetost poganja tok samo v tisti polovici nihaja, ko je pozitivna), potem svetilo utripa s frekvenco 50 Hz. Če pa je usmerjanje na cel nihaj, ko usmernik negativno napetost pretvori v pozitivno, svetilo utripa s 100 Hz.

**SLIKA 4.**

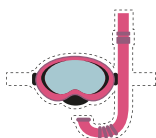
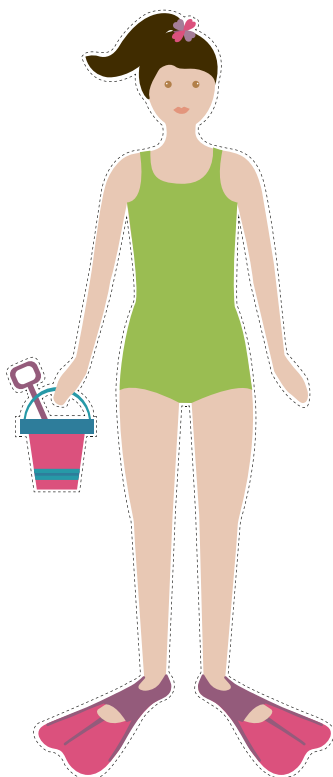
Časovni potek osvetljenosti občutljivega in hitrega svetlomera, na katerega sveti neonka. Jasno razločimo, da neonko napaja na cel nihaj usmerjena napetost.

Literatura

[1] http://www.100fps.com/how_many_frames_can_humans_see.htm (ogled: 21. 4. 2011)

× × ×

www.presek.si



Kroglasta kopica M 13



BOJAN KAMBIČ

→ Kroglasta kopica M 13 je zagotovo najbolj priljubljena kopica med amaterskimi astronomi naših geografskih širin. V jasni, temni, brezmesечni noči in daleč stran od svetlobnega onesnaženja jo zaslutimo že s prostim očesom kot zvezdico 6. magnitude med zvezdama Eta in Zeta Herkula. Kopico prvi omenja Edmund Halley leta 1715, odkril pa jo je povsem po naključju že leto dni prej. M 13 je četrta po svetlosti med kroglastimi kopicami našega neba. Svetlejšje od nje so le Omega Kentavra, NGC 104 v Tukanu in M 22 v Strelcu. Prvi dve z naših geografskih širin nista vidni, slednja pa je vedno nizko nad obzorjem.

Kopica je dobro vidna že v daljnogledu 10×50 , a le kot približno 10 ločnih minut velika meglica z nekoliko svetlejšim osrednjim delom. Velikost in videz sta seveda močno odvisna od trenutnih opazovalnih razmer. Če hočemo na njenem robu razločiti posamezne zvezdice, pa potrebujemo teleskop s premerom objektiva vsaj 10 centimetrov. V večjih amaterskih teleskopih pri velikih povečavah je kopica zares sijajna – pa če jo vidimo prvič ali stotič. Iz gostega središča, ki ga v posamezne zvezde ne razločijo niti največji teleskopi na svetu, se vijejo veličastni loki nizov zvezd. Število zvezd v kopici so ocenili na milijon, njihov kupni izsev pa je več kot 300 000-krat večji od Sončevega. Najsvetlejšje članice so rdeče orjakinje, ki na našem nebu sijajo z 11. magnitudo, resnični izsev vsake od njih pa je vsaj 2000-krat večji

od Sončevega. Naše Sonce bi s te oddaljenosti že kar težko videli tudi v največjih teleskopih – le kot zvezdico 19. magnitudo.

Današnja ocena o oddaljenosti kopice je okoli 25 000 svetlobnih let. Njena starost je več kot 10 milijard let in sodi med najstarejše kopice v naši Galaksiji. Premer M 13 je okoli 145 svetlobnih let. Ocena je zelo groba, saj je težko določiti njene meje. Večina zvezd je zbranih v središčnem predelu, ki v premeru meri vsega 100 svetlobnih let, nekatere posamezne članice pa najdemo v premeru vse do 200 svetlobnih let.

Si sploh lahko zamislimo, kakšna je gostota zvezd v bližini središča takšne goste kopice? Fotografije, posnete z največjimi teleskopi, dajejo vtis, kot da so zvezde v središču tako lepo in enakomerno razporejene druga ob drugi, da se skoraj dotikajo. Seveda je to posledica tega, da kopico gledamo s tako velike oddaljenosti. Kot smo že omenili, je osrednje območje veliko 100 svetlobnih let oz. štiri milijone kubičnih svetlobnih let. Če to območje naseljuje milijon zvezd, je povprečna gostota ena zvezda na štiri kubična svetlobna leta. (Le za primerjavo: v naši vesoljski soseščini pride po grobi oceni ena zvezda na 360 kubičnih svetlobnih let!) Proti središču kopice je morda gostota nekoliko večja, a vseeno ni takšne gneče, kot je videti na prvi pogled. Še bolj nazorno si lahko razmere predstavljamo, če v mislih naredimo model kopice. Zamislimo si, da imamo milijon zrnč mivke, ki predstavljajo milijon zvezd kopice. Vsako zrnčce je veliko približno pol milimetra, razporediti pa jih moramo v kroglo s premerom 480 kilometrov. Če jih enakomerno razporedimo po tej namišljeni krogli, je razdalja med dvema sosednjima zrnčema kar pet kilometrov. Tudi če je osrednje območje kopice veliko bolj zgoščeno, je med dvema sosednjima zrnčema mivke še vedno razdalja nekaj sto metrov. Tako lahko vidimo, da je po zemeljskih merilih tudi najgostejša kopica v resnici razmeroma redko posejana z zvezdami, po vesoljskih merilih pa ne. Če namreč enak model z mivko naredimo za Sonce in njegovo soseščino, je najbližja zvezda Proksima Kentavra oddaljena od nas kar 20 kilometrov!

Prav zanimivo bi bilo živeti na planetu, ki bi krožil okoli zvezde v bližini središča kopice. To bi bil prizor brez primerjave! Nebo bi bilo polno samih svetlih zvezd, ob katerih bi bile naše Sirij, Antares ali Vega videti prav šibke in nepomembne. Kar nekaj tisoč zvezd pa bi imelo sij med Venero in polno



SLIKA 1.

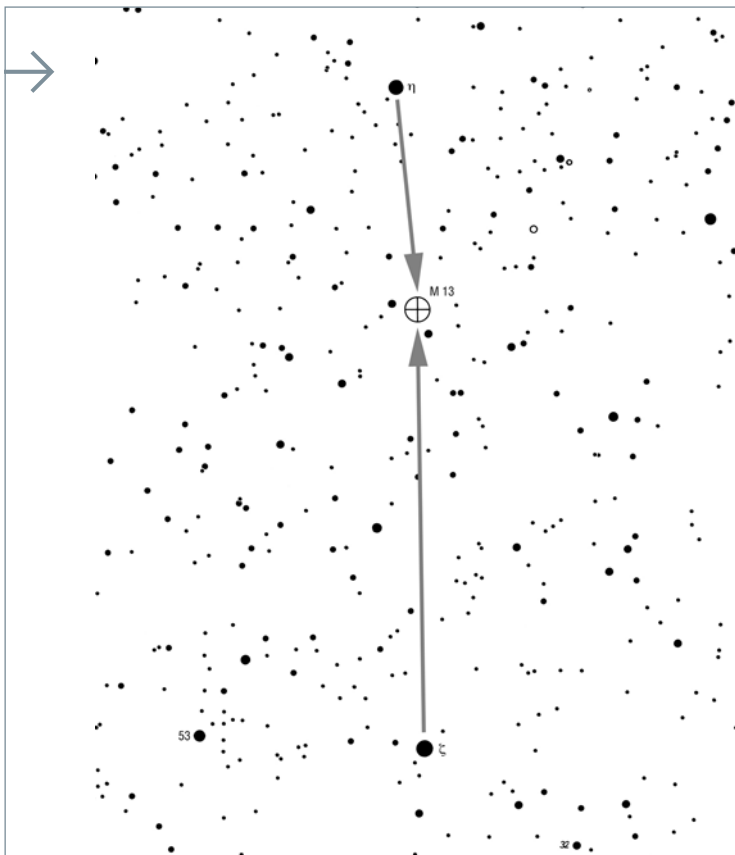
Kroglasta kopica M13. Fotografija: NOAO/Tom Bash

Luno. Na planetu verjetno sploh ne bi bilo noči, kot jo poznamo na Zemlji. Prebivalci tega planeta skoraj zagotovo ne bi ničesar vedeli o drugih zvezdah, o naši Galaksiji ali o drugih galaksijah, saj bi bilo njihovo nebo veliko presvetlo za astronomijo. Za njih bi bilo vse vesolje kar njihova domača kroglasta kopica. Žalostno!?

Še ena zanimivost je povezana s to kopico. Leta 1974 so M 13 izbrali za cilj enega prvih radijskih sporočil, ki so ga astronomi poslali v vesolje za morebitna inteligentna bitja. Kopico so izbrali zato, ker je tam na kupu toliko zvezd in je verjetnost, da je okoli katere od njih planet z inteligentnim življenjem, največja. Kodirano sporočilo je na pot odšlo z radijskega teleskopa Arecibo. Vedeti pa moramo, da kljub temu, da signal potuje z največjo možno hitrostjo v vesolju, bo do kopice potreboval kar 25 000 let. In če ga bo kdo prebral in nam takoj odgovoril, bomo odgovor dobili nekje okoli leta 50 000. Ja, to pa je žalostna stran vesoljske komunikacije!

In kje kopico najdemo? Herkul je veliko, a razmeroma nevpadljivo pomladno ozvezdje, saj najsvetlejša zvezda Beta sije le z 2,8 magnitudo. Še najboljša zvezda vodnica je svetla Vega v Liri, ozvezdje Herkul pa leži približno 30 stopinj vzhodno od nje. Najbolje je, če si pri iskanju pomagamo z vrtljivo karto. Ko ozvezdje enkrat prepoznamo, nam kroglaste kopice ne bo težko najti.





SLIKA 2.

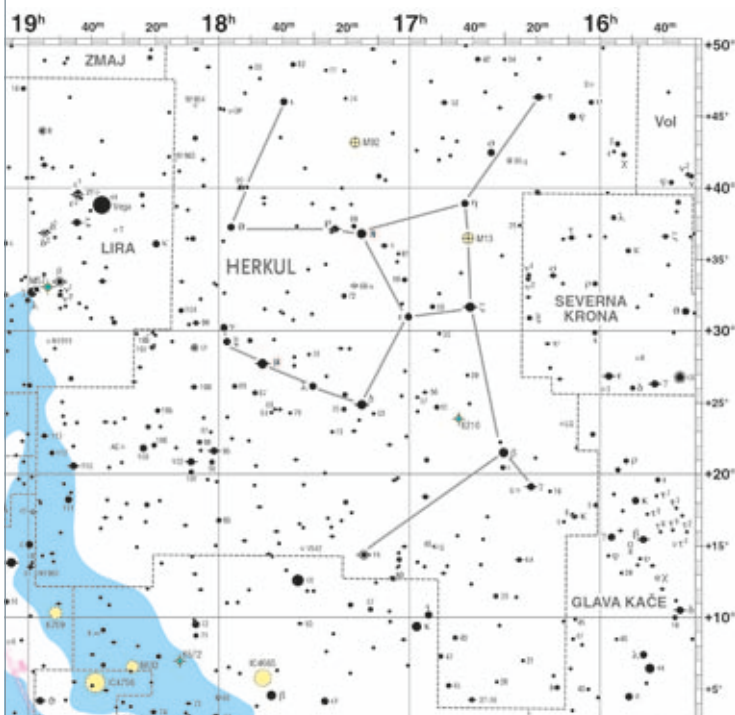
Kroglasto kopico M 13 enostavno najdemo, saj jo v odličnih opazovalnih razmerah zaslutimo že s prostim očesom. V daljnogledu 10x50 se pokaže kot velika, svetla in torej dobro vidna lisa svetlobe. Vodnici do kopice sta svetla Zeta in 0,7 magnitude šibkejša Eta. Kopica leži vmes, nekoliko bližje Eti. Karta: Bojan Kambič



SLIKA 3.

Ozvezdje Herkul z zvezdami do 6. magnitude. Karta: Bojan Kambič

xxx



Nemo melje nad toroidno traso



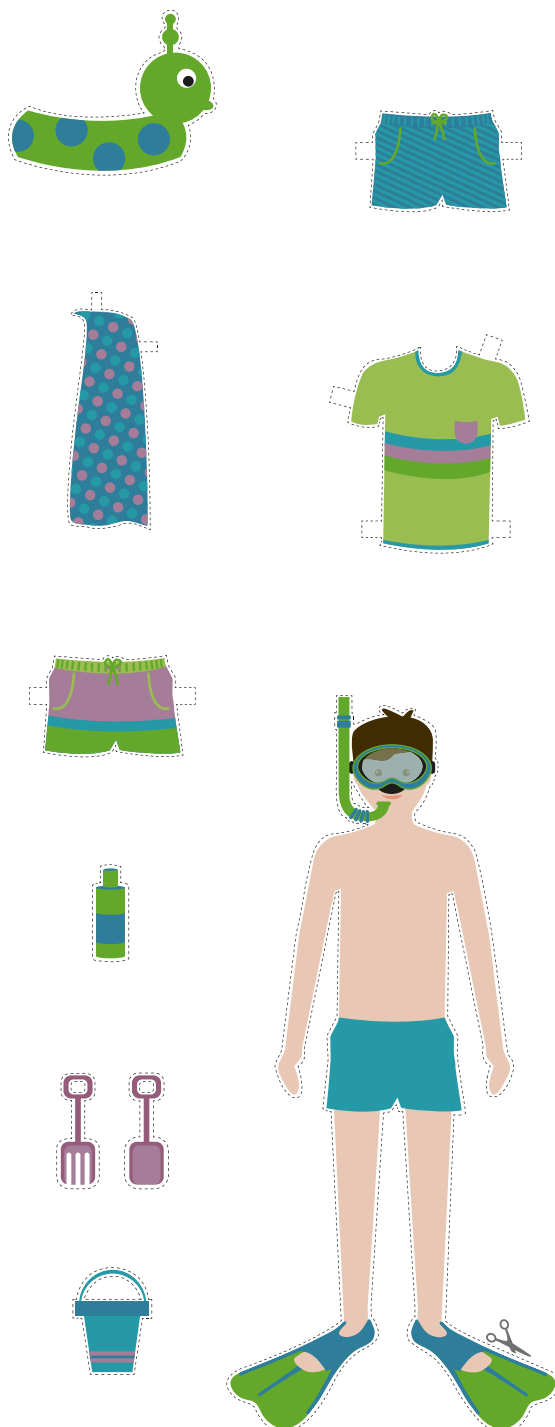
MARKO RAZPET

→ Tudi v letu 2009 je Nemo tam gori še vedno mlel. Kaj je bilo takrat (tri besede)?

Nemo je bil kapitan podmornice *Nautilus* v romanu *Dvajset tisoč milj pod morjem* pisatelja Julesa Verna. Toroidno je telo, ki ima obliko avtomobilске zračnice.

Odgovor: Mednarodno leto astronomije.

xxx



Risanje s programom Sage



ANDREJ TARANENKO

→ V prejšnji številki Preseka [2] je avtor na kratko predstavil program Sage in omenil le peščico njegovih zmožnosti. Namen tega prispevka je prikazati možnosti za risanje grafov s pomočjo programa Sage, pri čemer se bomo omejili na risanje v 2D ravnini kljub temu, da je možno risati tudi objekte v 3D prostoru.

Točke, daljice in besedilo

Osnovni objekti, ki jih lahko rišemo, so točke, daljice in besedilo. Za risanje točk uporabljamo ukaz `point(parametri)` ta za parameter prejme kartezične koordinate točke, ki jo želimo narisati. Z ukazom `point((1,1))` tako npr. narišemo točko s koordinatama (1,1). Vidimo, da koordinate točke zapišemo kot dvojico, torej obe koordinati ločeni z vejico zapišemo znotraj oklepajev.

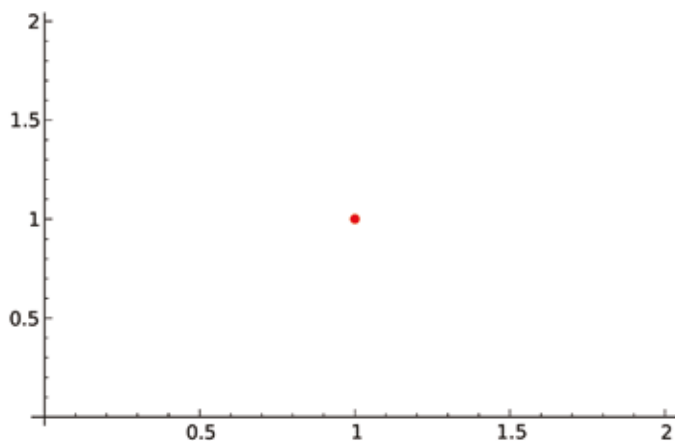
Z ukazom `point` lahko narišemo tudi več točk naenkrat tako, da za parameter podamo seznam točk, ki jih želimo narisati. Spomnimo se, da v programu Sage seznam tvorimo tako, da elemente zapišemo znotraj oglatih oklepajev in jih ločimo z vejicami. Tako z ukazom `point([(1,1), (2,2)])` na isto sliko narišemo dve točki, prvo s koordinatama (1,1) in drugo s koordinatama (2,2).

Točkam, narisanim na sliki, lahko spremenimo določene lastnosti, npr. *barvo*, s katero je točka izri-





sana, ter *velikost* prikazane točke. Barvo določimo s parametrom `rgbcolor`. Njegova vrednost je trojica realnih števil med 0 in 1, kjer števila v trojici predstavljajo barvo v RGB (Red Green Blue) modelu, torej rdečo, zeleno in modro komponento barve, v tem vrstnem redu. Velikost točke pa določimo s parametrom `size`, čigar vrednost je celo število. Le-to predstavlja premer kroga, ki predstavlja točko na sliki. Privzeta barva za točke je modra, privzeta velikost točke pa 10. Poglejmo primer na sliki 1, kjer smo z rdečo barvo narisali točko s koordinatama (1,1), velikost točke pa določili na 20.



SLIKA 1.

Slika, narisana z ukazom `point((1,1),size=20,rgbcolor=(1,0,0))`.

Prvi parameter ukaza `point` morajo biti koordinate točke oz. seznam koordinat vseh točk, ostale lastnosti pa lahko določamo v poljubnem vrstnem redu.

Recimo, da želimo nad točko zapisati še oznako te točke, kot vidimo na sliki 2. Poljubno besedilo izpišemo z ukazom `text(parametri)`, pri čemer sta ključna parametra *besedilo*, ki ga želimo izpisati, in *koordinata*, kje se naj besedilo prikaže. Za tema dva parametra lahko še spreminjamo lastnosti besedila, med drugimi *velikost pisave*, *barvo pisave* in *naklon besedila* v stopinjah. Velikost pisave določimo s parametrom `fontSize`, čigar vrednost je celo število. Barvo pisave določimo s parametrom `rgbcolor`, ki deluje enako kot pri prej omenjenem ukazu `point`. V kolikor želimo spremeniti naklon

napisa, določimo parametru `rotation` vrednost, ki predstavlja kot naklona v stopinjah v nasprotni smeri urinega kazalca.

Daljice rišemo z ukazom `line(parametri)`, pri čemer je obvezen prvi parameter, ki je seznam koordinat obeh krajišč daljice. Ostali parametri so opcijski in spreminjajo npr. *debelino*, s katero je izrisana daljica, *barvo daljice* ter *slog črte*, s katero je narisana daljica.

Za določanje barve črte podobno kot v prejšnjih dveh ukazih uporabimo parameter `rgbcolor`. Debelino črte spremenimo s parametrom `thickness`, katerega privzeta vrednost je 1, v splošnem pa mu lahko določimo poljubno celo število. Slog črte, s katero je izrisana daljica, določa parameter `linestyle`. S slogom črte lahko določimo, kako je izrisana daljica. Možne vrednosti tega parametra so naslednje:

- `'-'` predstavlja polno črto, je privzeta vrednost.
- `'--'` predstavlja prekinjeno črtkano črto.
- `':'` predstavlja prekinjeno pikčasto črto.
- `'-.'` predstavlja prekinjeno črto, v kateri se izmenično pojavljata črtica in pika.

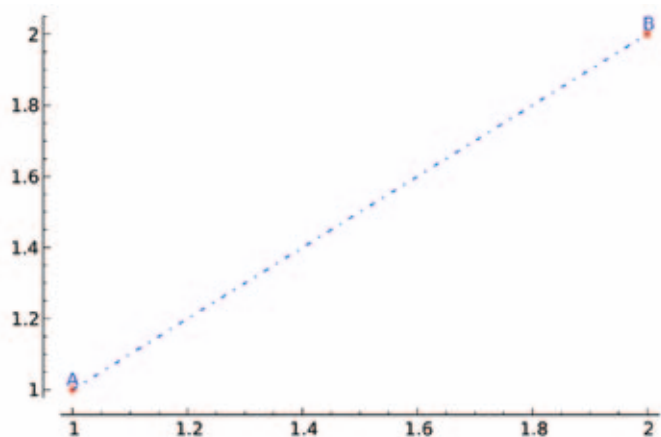
Program Sage za vsak grafični objekt nariše svojo sliko, seveda pa lahko različne objekte prikažemo na isti sliki, za to uporabljamo operator `+`. Da bi bilo delo preglednejše, najprej vsak objekt shranimo v spremenljivko, na koncu pa vse objekte prikažemo na skupni sliki.

Primer

Spomnimo se, da lahko vrednosti in objekte v programu Sage shranimo v spremenljivko s prireditvenim stavkom oblike `ime = vrednost`. V spodnjem primeru shranimo pet različnih grafičnih objektov v spremenljivke, v zadnjem ukazu pa vse objekte prikažemo na isti sliki z uporabo operatorja `+`. Tako z naslednjim zaporedjem ukazov dobimo sliko, ki je prikazana na sliki 2.

```
tockA = point((1,1), rgbcolor=(1,0,0))
tockB = point((2,2), rgbcolor=(1,0,0))
daljicaAB = line([(1,1), (2,2)],
                  linestyle='-.')
```

```
oznakaA = text("A", (1,1.03))
oznakaB = text("B", (2,2.03))
daljicaAB+tockaa+tockab+oznakaA+oznakaB
```



SLIKA 2.

Več grafičnih objektov na isti sliki

Opazimo lahko, da program Sage samodejno določi razmerje med enotami na x in y oseh ter najmanjšo in največjo vrednost, ki je prikazana na vsaki osi. V kolikor želimo te vrednosti določiti sami, imajo grafični objekti na voljo naslednje parametre:

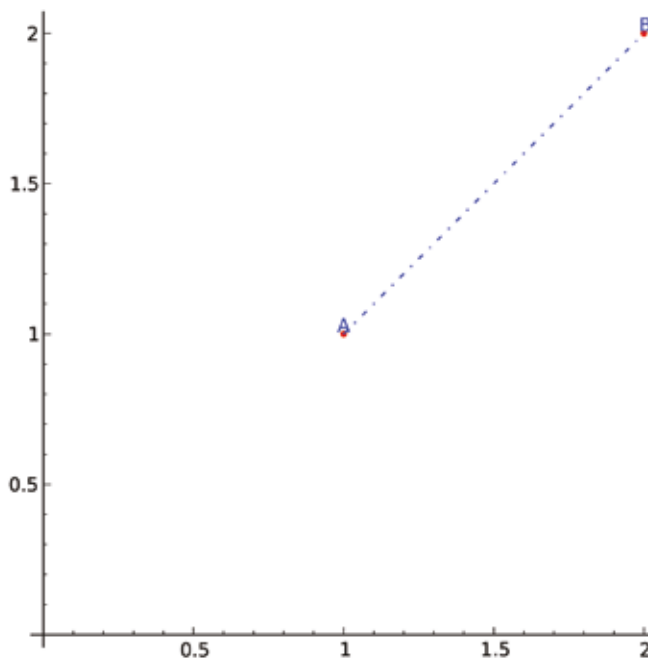
- `aspect_ratio` predstavlja razmerje med enotami x in y osi. Če želimo, da so enote na obeh oseh enake, temu parametru določimo vrednost 1. Če parametra ne določimo, bo razmerje določeno samodejno.

- `xmin`, `xmax`, `ymin`, `ymax` predstavljajo najmanjšo oz. največjo vrednost, prikazano na x oz. y osi. V kolikor jih ne določimo, se določijo samodejno, glede na objekte prikazane na sliki.

Primer

Recimo, da želimo na sliki iz prejšnjega primera prikazati še izhodišče koordinatnega sistema ter določiti enako razmerje med enotami na obeh oseh. Dovolj je, da ustrezne parametre določimo v enem izmed objektov, prikazanih na sliki; mi jih bomo določili za objekt `tockaa`. Rezultat te spremembe je viden na sliki 3.

```
tockaa = point((1,1), rgbcolor=(1,0,0),
               xmin=0, ymin=0, aspect_ratio=1)
tockab = point((2,2), rgbcolor=(1,0,0))
daljicaAB = line([(1,1), (2,2)],
                 linestyle='-.')
oznakaA = text("A", (1,1.03))
oznakaB = text("B", (2,2.03))
daljicaAB+tockaa+tockab+oznakaA+oznakaB
```



SLIKA 3.

Uporaba parametrov `xmin`, `ymin` in `aspect_ratio`

Risanje grafov funkcij

Program Sage omogoča tudi izris grafov funkcij. Spomnimo se, da funkcijo v tem programu definiramo na naslednji način: $f(x) = \text{predpis}$, pri čemer je x vedno definiran kot neodvisna spremenljivka. Za lažjo demonstracijo bomo najprej definirali funkcijo, katere graf bomo risali, v našem primeru bo to funkcija $f(x) = x^2$, ki jo v programu Sage zapišemo kot $f(x) = x**2$. Operator `**` predstavlja potenciranje.

Risanje grafa funkcije ene spremenljivke izvedemo z ukazom `plot(parametri)`. Prvi parameter ukaza



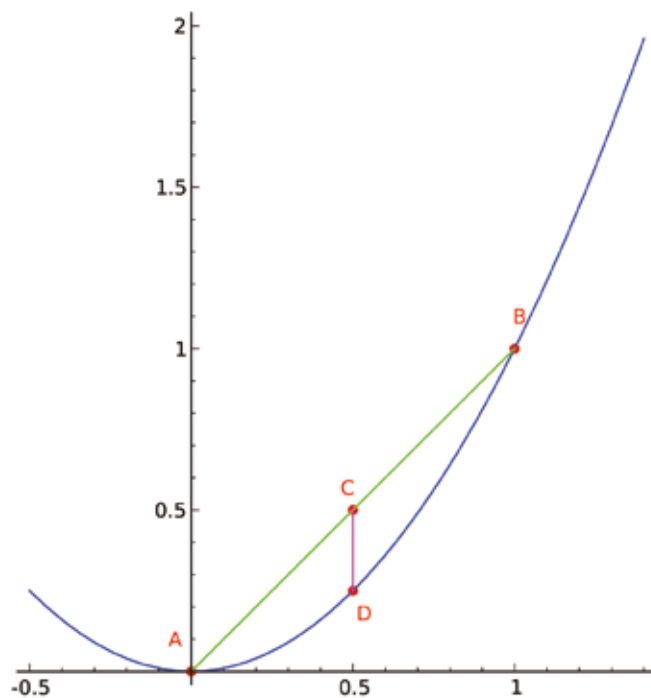
→ plot je funkcija, katere graf želimo narisati. Ostali parametri so opcijski in so naslednji:

- `xmin`, `xmax`, `ymin`, `ymax` kot prej, predstavljajo najmanjšo in največjo vrednost prikazano na ustrezni osi.
- `rgbcolor` določa barvo grafa funkcije in prejme vrednosti v že predhodno opisani obliki, torej `(r,g,b)`.
- `thickness` določa debelino črte, s katero je izrisan graf funkcije.
- `linestyle` določa slog črte, s katero je izrisan graf funkcije. Možne vrednosti so opisane pri ukazu `line`.
- `fill` S tem parametrom, lahko osenčimo del slike v odvisnosti od izrisanega grafa funkcije. Prva možna vrednost za ta parameter je `'axis'`, ki pomeni, da se osenči del med grafom funkcije in x osjo. Vrednosti `'min'` in `'max'` določata, da se osenči vse, kar je pod oz. nad grafom funkcije, v tem vrstnem redu. Če za vrednost parametra podamo konstanto `C`, nam le-ta predstavlja premico $y=C$, zato bo osenčeno vse, kar je med grafom te premice in grafom izrisane funkcije. Kot zadnjo možnost za vrednost tega parametra omenimo, da lahko podamo poljubno funkcijo, recimo $g(x)$; tako bo osenčen del med grafoma funkcije $g(x)$ in grafom funkcije, ki jo rišemo.
- `[fillcolor]` S tem parametrom spremenimo barvo senčenja, možne vrednosti so pa enake kot pri parametru `rgbcolor`.

V prejšnjih primerih smo vsak objekt shranili v svojo spremenljivko. Včasih je bolje delati z eno spremenljivko, še posebej, če imamo veliko število objektov. V tem primeru si lahko pomagamo z operatorjem `+=`, ki ga lahko beremo kot *dodaj*. Uporabimo ga na naslednji način: `ime += objekt`, torej v spremenljivko `ime` dodaj objekt.

Vsak grafični objekt vsebuje tudi funkcijo `show(parametri)`, s katero lahko med drugim določamo parametre, ki so skupni vsem grafičnim objektom. Uporabimo jo v obliki

- `objekt.show(parametri)`,


SLIKA 4.

Več grafičnih objektov na isti sliki

pri čemer je objekt poljuben grafični objekt, parametri pa so skupni različnim grafičnim objektom. Poglejmo si možnost uporabe te funkcije v naslednjem primeru.

Primer

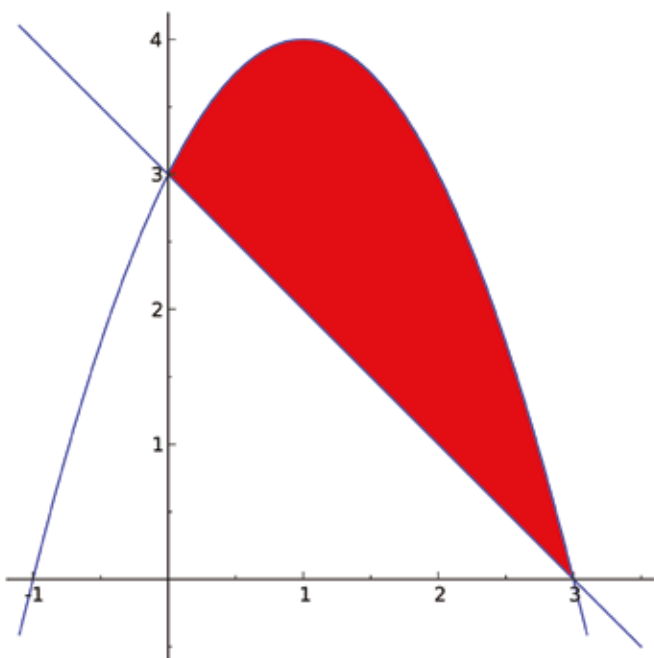
Spodnje zaporedje ukazov izriše sliko, ki je vidna na sliki 4.

```
p = plot(f(x), (-0.5, 1.4))
p += line([(0,0), (1,1)], color=(0,1,0))
p += line([(0.5, 0.5), (0.5, 0.25)],
          color=(1,0,1))
p += point(((0, 0), (0.5,0.5), (0.5,0.25),
            (1, 1)), color=(1,0,0), pointsize=20)
p += text('A', (-0.05, 0.1), color=(1,0,0))
p += text('B', (1.01, 1.1), color=(1,0,0))
p += text('C', (0.48, 0.57), color=(1,0,0))
p += text('D', (0.53, 0.18), color=(1,0,0))
p.show(xmin=-0.5, xmax=1.4, ymin=0, ymax=2,
       aspect_ratio=1)
```

Naloga

Zapišite zaporedje ukazov, ki izrišejo sliko, kot je razvidna na sliki 5.

Želim vam obilo zabavnih slik pri eksperimentiranju z opisanimi ukazi.



SLIKA 5.

Katero zaporedje ukazov izriše zgornjo sliko?

Literatura

- [1] <http://www.sagemath.org/> (ogled: 7. 4. 2011)
 [2] Matjaž Kovše, *Program in projekt SAGE*, Presek 38 (2011) 5, 27–30.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Barvni sudoku

↓ ↓ ↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

	6		1				2
2				3		4	
			5				
		4	8		7		
						7	
3			4			5	
		8					
		2			4		1

→
→
→
REŠITEV BARVNI SUDOKU

1	3	4	8	9	2	7	5
7	2	9	5	3	8	4	1
8	5	2	9	4	7	1	3
4	7	3	1	2	9	5	8
5	1	7	2	8	4	3	9
3	9	8	4	5	1	2	7
9	4	1	3	7	5	8	2
2	8	5	7	1	3	9	4

× × ×

Astronomska literatura

Ob lanskem mednarodnem letu astronomije 2009 smo na enem mestu zbrali vse publikacije s področja astronomije, ki so na voljo pri DMFA-založništvo.



Pavla Ranzinger:

PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA 2000,0

format 54 × 58 cm
plastificirana, zložena
3,34 EUR



Pavla Ranzinger, Bojan Dintinjana in Herman Mikuž:

NAŠE NEBO 2011 Astronomske efemeride

56 strani formata 16 × 23 cm
mehka vezava
9,36 EUR

Poleg omenjenih dveh ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.



1. GEOMETRIJA

2. UTRAKVIZEM

3. RAJHOBORA

4. UNAPRELAT

5. OKELŽALE

6. GALILEO

7. TINTA

8. IDEAL

9. JAVANKA

10. IR

11. BOLEKATODAMODRČEKVEHECOLT

12. ECECO

13. KAL

14. KALO

15. EP

16. IN

17. TALININ

18. TALININ

19. TALININ

20. TALININ

21. TALININ

22. TALININ

23. TALININ

24. TALININ

25. TALININ

26. TALININ

27. TALININ

28. TALININ

29. TALININ

30. TALININ

31. TALININ

32. TALININ

33. TALININ

34. TALININ

35. TALININ

36. TALININ

37. TALININ

38. TALININ

39. TALININ

40. TALININ

41. TALININ

42. TALININ

43. TALININ

44. TALININ

45. TALININ

46. TALININ

47. TALININ

48. TALININ

49. TALININ

50. TALININ

51. TALININ

52. TALININ

53. TALININ

54. TALININ

55. TALININ

56. TALININ

57. TALININ

58. TALININ

59. TALININ

60. TALININ

61. TALININ

62. TALININ

63. TALININ

64. TALININ

65. TALININ

66. TALININ

67. TALININ

68. TALININ

69. TALININ

70. TALININ

71. TALININ

72. TALININ

73. TALININ

74. TALININ

75. TALININ

76. TALININ

77. TALININ

78. TALININ

79. TALININ

80. TALININ

81. TALININ

82. TALININ

83. TALININ

84. TALININ

85. TALININ

86. TALININ

87. TALININ

88. TALININ

89. TALININ

90. TALININ

91. TALININ

92. TALININ

93. TALININ

94. TALININ

95. TALININ

96. TALININ

97. TALININ

98. TALININ

99. TALININ

100. TALININ

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 38/5

→ Za nagradno križanko iz četrte številke 38. letnika Preseka smo prejeli 11 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Primarno gorišče teleskopa**. Izžrebani reševalci, JASNA JAKOBČIČ iz Novega mesta, ZVONKO PERAT iz Jesenic in PREDRAG GRUJIĆ iz Zagorja so razpisane nagrade prejeli po pošti.

XXX

Svetlobni steber



ALEŠ MOHORIČ

→ V prejšnji številki smo na naslovnici objavili fotografijo nenavadnega sončnega zahoda, posneto proti koncu letošnjega januarja, in vzpodbudili radovednost bralcev z vprašanjem: kateri atmosferski optični pojav je videti na sliki? Danes sledi odgovor.

Fotografija prikazuje optični pojav, ki ga imenujemo svetlobni steber. Če izvira od Sonca, ga poimenujemo sončni steber. Nastane zaradi odboja svetlobe na ledenih kristalih. Najlepše je pojav viden, če so kristali ploščati in obrnjeni vodoravno. Svetlobni stebri se v obliki ozkega pasu svetlobe raztezajo nad in pod izvirom svetlobe, ki je lahko tudi ulična svetilka ali pa Luna. Najbolje so vidni, ko je Sonce tik nad ali pod obzorjem.



foto: Andrej Guštin



Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti.



Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

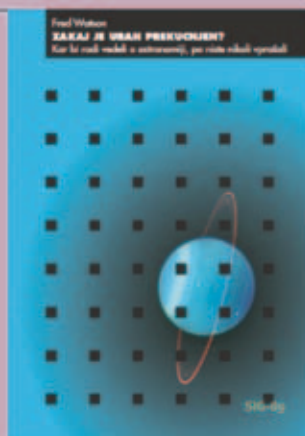
Fred Watson:

ZAKAJ JE URAN PREKUCNEN?

Kar bi radi vedeli o
astronomiji, pa niste
nikoli vprašali

200 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

22,39 EUR

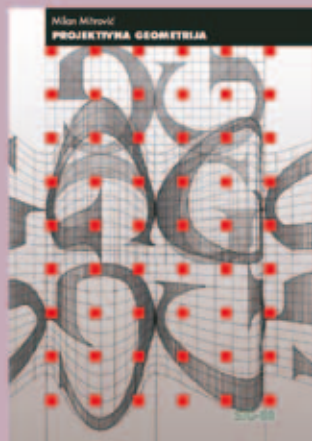


Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR



Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.