



PRESEK

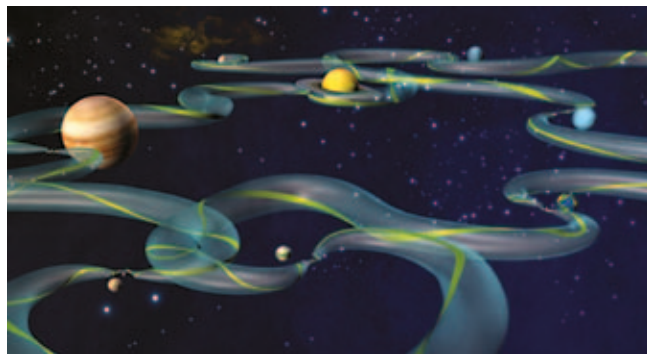


- ZLAGANJE PITAGOREJSKIH TRIKOTNIKOV V PRAVOKOTNIK
- TRIKOTNE SENCE
- ASTROGRAFIJA S PREPROSTIM SLEDENJEM
- PROGRAM IN PROJEKT SAGE
- NAGRADNA KRIŽANKA



Pogumno naprej

↓ ↓ ↓



→ Cevi na zgornji sliki ilustrirajo nizko energijske poti, po katerih lahko vesoljska vozila potujejo z manjšo porabo goriva. Te, pred kratkim odkrite poti, so prej nemogoče spremenile v mogoče. Večina vesoljskih potovanj je odvisnih od izračunov, trigonometrije in vektorske analize, toda obstoj teh poti izpeljemo s pomočjo dinamičnih sistemov in jih uporabimo za študij medsebojnega delovanja gravitacije sonca, bližnjih planetov ter lun.

Sile med dvema nebesnima telesoma in njunima orbitama ni težko izračunati; če pa hočemo določiti sile, orbite in trajektorije med več telesi, moramo poznati dinamične sisteme in teorijo kaosa. Že za problem treh teles je dokazano, da ne obstaja ena splošna rešitev. Za nekatere posebne primere pa je problem rešljiv, in to ne samo za omenjeno nalogo, ampak tudi v atomski fiziki -- za študij poti določenih vzbujenih elektronov. Na tak način matematika išče nove poti za vesoljska potovanja in hkrati ustvarja povezave med atomskim in vesoljskim.

Za več informacij: „Ground Control to Niels Bohr: Exploring Outer Space with Atomic Physics,“ Mason A. Porter and Predrag Cvitanović, *Notices of the American Mathematical Society*, October, 2005.

× × ×

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 38, šolsko leto 2010/2011, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vladimir Bensa, Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2010/2011 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

© 2011 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1828

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Pogumno naprej

MATEMATIKA

- 4-7** Zlaganje pitagorejskih trikotnikov v pravokotnik
(*Marko Razpet*)
- 8-9** Jin Akiyama in Mari-Jo Ruiz:
Dogodivščine v Deželi
matematičnih čudež (*Darja Antolin*)

FIZIKA

- 10-13** Trikotne sence
(*Nada Razpet*)
- 14-15** Galilei in sprememba nihala
(*Janez Strnad*)
- 18-19** Igrajmo se z mavrično vzmetjo –
Poizkuševalnica doma
(*Mojca Čepič*)
- 20-22** Barve brez barvil – odgovor naloge –
Poizkuševalnica doma
(*Mojca Čepič*)
- 22** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)

ASTRONOMIJA

- 23-26** Astrofotografija s preprostim sledenjem
(*Bojan Kambič*)
- 9** SMART – Mladinski astronomski
raziskovalni tabor 2011
(*Ad Labod*)

RAČUNALNIŠTVO

- 27-30** Program in projekt SAGE
(*Matjaž Kovše*)

RAZVEDRILO

- 31** Optična vlakna – Naravoslovna fotografija
(*Nada Razpet*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 38/4
(*Marko Bokalič*)
- 9** Futošiki
- 19,30** Barvni sudoku

TEKMOVANJA

- priloga** 30. mednarodno matematično tekmovanje
mest – pomladanski krog 2008/09
- priloga** Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja
srednješolcev Slovenije v šolskem letu
2009/10 – regijsko tekmovanje
(*Ciril Dominko*)
- priloga** Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja
srednješolcev Slovenije v
šolskem letu 2009/10 – državno tekmovanje
(*Ciril Dominko*)

SLIKA NA NASLOVNICI: V novo leto nas je pospremil delni Sončev mrk. Na sliki z naslovnice se skriva za drevesnimi vejami, saj je bil v naših krajih viden 4. januarja zjutraj nizko nad obzorjem. (foto: Andrej Guštin)



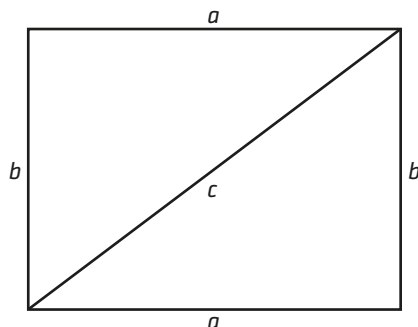
Zlaganje pitagorejskih trikotnikov v pravokotnik

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Obravnavali bomo trojice (a, b, c) , ki jih sestavljajo naravna števila a , b in c , za katera velja relacija $a^2 + b^2 = c^2$. Trikotnik, ki ima stranice dolge a , b in c enot, je pravokotni s hipotenuzo c in katetama a in b . Pri tem je seveda $a < c$ in $b < c$. Ker za tak trikotnik velja *Pitagorov izrek*, imenujemo (a, b, c) *pitagorejska trojica*.

Števila a, b, c bomo imenovali kar stranice, natančneje a in b kateti, c pa hipotenuza pitagorejske trojice (a, b, c) . Hitro se vidi, da v pitagorejski trojici (a, b, c) velja: $a \neq b$. V primeru $a = b$ bi namreč dobili $2a^2 = c^2$, kar pa je pri naravnih a in c nemogoče. Najbolj znana je pitagorejska trojica $(3, 4, 5)$. Pitagorejska trojica (a, b, c) določa pravokotni trikotnik, ki mu pravimo *pitagorejski trikotnik* in ga bomo označevali kar z (a, b, c) . Če števila a, b, c nimajo skupnega delitelja, govorimo o *primitivni pitagorejski trojici* oziroma o *primitivnem pitagorejskem trikotniku*.



SLIKA 1.

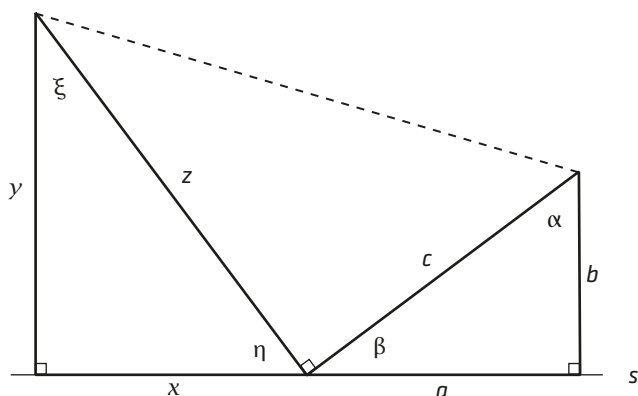
Pitagorejska trikotnika sestavljata pravokotnik.

Pitagorejska trojica (a, b, c) je primitivna, čim je največji skupni delitelj dveh stranic 1, na primer

■ $D(a, b) = 1$.

V primitivni pitagorejski trojici je ena kateta liho, druga pa sodo število. Vsako pitagorejsko trojico dobimo iz primitivne z množenjem z naravnim številom.

Dva enaka pitagorejska trikotnika (a, b, c) brez težav staknemo vzdolž hipotenuz in dobimo pravokotnik s stranicama a in b (slika 1). Oglejmo si sedaj postopek, po katerem lahko zložimo v pravokotnik tri in štiri pitagorejske trikotnike.



SLIKA 2.
Pravokotni hipotenuzi pitagorejskih trikotnikov.

Položimo v ravnini pitagorejska trikotnika (a, b, c) in (x, y, z) na dano premico s tako, da ležita na istem bregu premice s , da kateti a in x ležita na s in da imata trikotnika skupen vrh ostrih kotov (slika 2). Kdaj sta v taki legi hipotenuzi obeh pitagorejskih trikotnikov med seboj pravokotni? V prvem trikotniku naj bo nasproti katete a kot α , nasproti katete b pa kot β . V drugem trikotniku pa naj bo nasproti katete x kot ξ , nasproti katete y pa kot η . Pri tem veljajo enačbe:

■ $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\xi + \eta = 90^\circ$, $\beta + \eta = 90^\circ$.

Če od prve in druge enačbe odštejemo tretjo, dobimo $\alpha = \eta$ in $\beta = \xi$. Torej mora za kateti veljati relacija

$a : b = y : x$. To pomeni, da lahko v posebnem primeru vzamemo $x = b$ in $y = a$, torej pitagorejski trikotnik $(x, y, z) = (b, a, c)$.

Radi bi videli, da je pitagorejski tudi trikotnik, ki ima za kateti hipotenuzi c in z danih dveh pitagorejskih trikotnikov. Tak trikotnik bi potem dana dva lepo zaključil v trapez. Toda pri enakih katetah c tretji trikotnik ne more biti pitagorejski. Da bi to dosegli, vzemimo danima trikotnikoma podobna pitagorejska trikotnika

■ (qa, qb, qc)

in

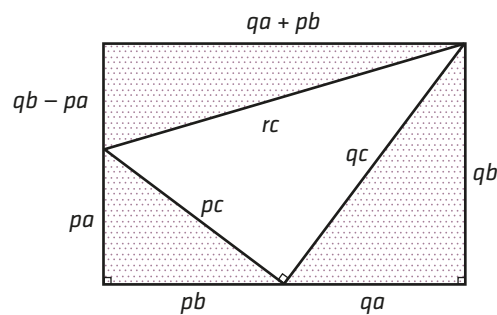
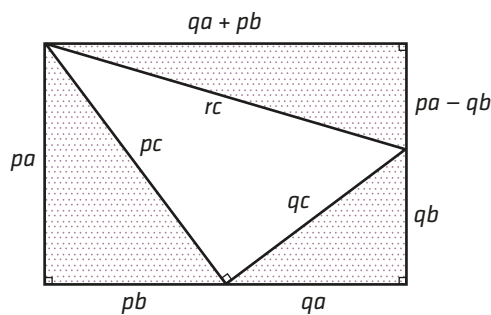
■ $(x, y, z) = (pb, pa, pc)$,

kjer sta p in q naravni števili, ki ju bomo še določili. Nova trikotnika položimo na dano premico na prej opisani način. Hipotenuzi oklepata pravi kot, ker velja $y : x = (pa) : (pb) = a : b$. Pravokotni trikotnik, ki leži nad njima, pa bo pitagorejski, čim bo $p^2c^2 + q^2c^2$ kvadrat naravnega števila. Števili p in q ne moreta biti enaki, saj bi v primeru $p = q$ zahtevali, da je $2p^2c^2$ kvadrat naravnega števila, kar pa je nemogoče. Cilj bomo dosegli, če vzamemo za števili p in q kateti poljubne pitagorejske trojice, denimo (p, q, r) . Pri tem seveda velja $p^2 + q^2 = r^2$. Očitno je potem (pc, qc, rc) tudi pitagorejski trikotnik. Vsi trije pitagorejski trikotniki sestavljajo pravokotni trapez, ki ima za vzporedni stranici pa in qb , za višino pa $qa + pb$.

Če je $ap \neq bq$, lahko trapez dopolnimo do pravokotnika še z enim pravokotnim trikotnikom, ki ima kateti $qa + pb$ in $|pa - qb|$. Presenetljivo je pri tem to, da je tudi ta trikotnik pitagorejski, če je le trojica (p, q, r) pitagorejska. Velja namreč:

■
$$\begin{aligned} (qa + pb)^2 + |pa - qb|^2 &= \\ q^2a^2 + 2pqab + p^2b^2 + p^2a^2 - 2pqab + q^2b^2 &= \\ p^2(a^2 + b^2) + q^2(a^2 + b^2) &= (p^2 + q^2)(a^2 + b^2) = \\ r^2c^2 &= (rc)^2. \end{aligned}$$

Dobljeni pravokotnik ima stranici $qa + pb$ in $\max\{pa, qb\}$. Če je $pa > qb$, ima nazadnje opisani pitagorejski trikotnik kateto $pa - qb$, ki je vzporedna pravokotnikovi stranici pa . Če je $qb > pa$, pa ima kateto $qb - pa$, ki je vzporedna pravokotnikovi stranici qb (slika 3).



Kaj pa, če je $pa = qb$? Tedaj sestavljajo že trije med seboj podobni pitagorejski trikotniki pravokotnik s stranicama $qa + pb$ in pa .

Opomba. Velja splošno: če sta trikotnika (a, b, c) in (p, q, r) pitagorejska ter velja $ap \neq bq$ oziroma $aq \neq bp$, sta pitagorejska tudi trikotnika $(|ap - bq|, aq + bp, cr)$ oziroma $(|aq - bp|, ap + bq, cr)$.

Kakorkoli primerjamo med seboj katete teh dveh trikotnikov, ugotovimo, da nobena kateta prvega ne more biti enaka nobeni kateti drugega. Pokažimo, da druga kateta ne more biti enaka drugi:

$$\begin{aligned} (aq + bp) - (ap + bq) &= a(q - p) - b(q - p) = \\ &= (a - b)(q - p) \neq 0. \end{aligned}$$

Podobno preverimo ostale možnosti.

Kdor je več v računanju s *kompleksnimi števili*, to je s števili oblike $t = x + iy$, kjer sta x in y realni števili in i imaginarna enota, za katero je $i^2 = -1$, bo hitro odkril njihovo povezavo s pitagorejskimi trojicami. Navadno označimo $x = \operatorname{Re}(t)$, kar je *realni del* kompleksnega števila t , in $y = \operatorname{Im}(t)$, kar je *imaginarni del* kompleksnega števila t .

Kompleksno število $x + iy$, kjer sta x in y celi števili, imenujemo *celo kompleksno število*. Vzemimo celo kompleksno število $t = m + in$, pri čemer sta m in n različni naravni števili. Kvadrat števila t je

$$\begin{aligned} t^2 &= (m + in)^2 = m^2 + 2mni + (in)^2 = \\ &= (m^2 - n^2) + i(2mn). \end{aligned}$$

Naj bo $a = |m^2 - n^2|$ in $b = 2mn$. Račun takoj pokaže, da je $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2$, zato števila

$$a = |m^2 - n^2|, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

sestavljajo pitagorejsko trojico (a, b, c) . Ko tečeta m in n po naravnih številih, dobimo vse primitivne

SLIKA 3.

Primeri štirih pitagorejskih trikotnikov, ki sestavljajo pravokotnik.

pitagorejske trojice, če vzamemo, da je od števil m in n eno sodo in eno liho ter da sta si tuji. Torej sta $|\operatorname{Re}(t^2)|$ in $\operatorname{Im}(t^2)$ kateti pitagorejskega trikotnika. Vsako pitagorejsko trojico dobimo iz primitivne, če jo pomnožimo z naravnim številom.

Iz pitagorejskih trikotnikov (a, b, c) in (p, q, r) lahko, kot smo videli, dobimo nova pitagorejska trikotnika (x, y, z) , če vzamemo

$$\begin{aligned} x &= |\operatorname{Re}((a + bi)(p + iq))|, \\ y &= \operatorname{Im}((a + bi)(p + iq)), \quad z = cr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= |\operatorname{Re}((a + bi)(q + ip))|, \\ y &= \operatorname{Im}((a + bi)(q + ip)), \quad z = cr, \end{aligned}$$

pri čemer mora v prvem primeru veljati pogoj $ap \neq bq$, v drugem pa $aq \neq bp$, da dobimo pozitivne katete.

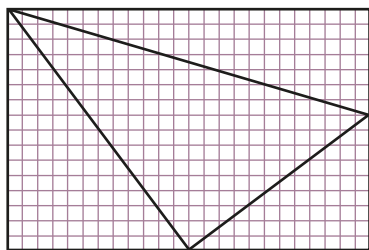
Primer 1. Vzemimo enaki pitagorejski trojici $(a, b, c) = (p, q, r) = (4, 3, 5)$. Ker je $pa = 16 \neq 9 = qb$, sestavljajo pravokotnik s stranicama 24 in 16 štirje pitagorejski trikotniki:

$$(16, 12, 20), (12, 9, 15), (20, 15, 25), (7, 24, 25).$$

Prvi trije so si podobni (slika 4).

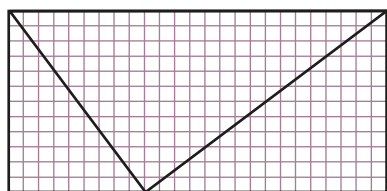
Primer 2. Za pitagorejski trojici $(a, b, c) = (4, 3, 5)$ in $(p, q, r) = (3, 4, 5)$ velja $pa = 12 = qb$, zato sestavljajo pravokotnik s stranicama 25 in 12 trije med seboj podobni pitagorejski trikotniki: (slika 5).

$$(12, 9, 15), (16, 12, 20), (15, 20, 25)$$



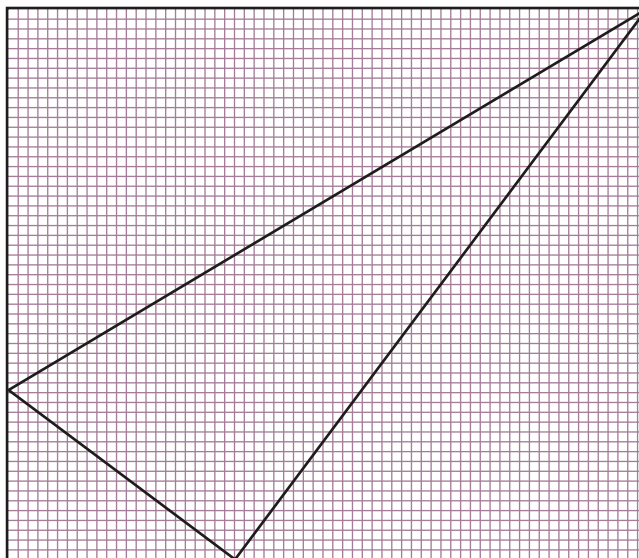
SLIKA 4.

Primer štirih pitagorejskih trikotnikov, ki sestavljajo pravokotnik.



SLIKA 5.

Primer treh pitagorejskih trikotnikov, ki sestavljajo pravokotnik.



SLIKA 6.

Primer štirih pitagorejskih trikotnikov, ki sestavljajo nekoliko večji pravokotnik.

$$\blacksquare (a, b, c) = (p, q, r) = (12, 5, 13)$$

dasta $pa = 144, qb = 25$, zato lahko sestavimo pravokotnik s stranicama 120 in 144 s štirimi pitagorejskimi trikotniki:

$$\blacksquare (144, 60, 156), (60, 25, 65), (156, 65, 169), (119, 120, 169).$$

Primer tudi pove, da je višina pravokotnika lahko tudi večja kot njegova dolžina.

Problem. Ali po opisanem postopku lahko zložimo tri pitagorejske trikotnike v kvadrat tako, kot kaže slika 4? Kdaj lahko tako pravokotnik s celoštevilskima stranicama razrežemo na tri pitagorejske trikotnike? Kdaj na štiri? Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $D(a, b) = D(p, q) = 1$.

www.presek.si

www.dmfa.si

Primer 3. Za pitagorejski trojici $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ in $(p, q, r) = (5, 12, 13)$ velja $pa = 15, qb = 48$, zato sestavljajo pravokotnik s stranicama 56 in 48 štirje pitagorejski trikotniki: (slika 6).

$$\blacksquare (15, 20, 25), (36, 48, 60), (25, 60, 65), (56, 33, 65)$$

Primer 4. Za pitagorejski trojici $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ in $(p, q, r) = (12, 5, 13)$ velja $pa = 36, qb = 20$, zato sestavljajo pravokotnik s stranicama 63 in 36 štirje pitagorejski trikotniki:

$$\blacksquare (36, 48, 60), (15, 20, 25), (60, 25, 65), (16, 63, 65).$$

Ta in prejšnji primer pokažeta, da obstajata nepodobna primitivna pitagorejska trikotnika z enako hipotenuzo: $(56, 33, 65)$ in $(16, 63, 65)$.

Primer 5. Enaki pitagorejski trojici

Jin Akiyama in Mari-Jo Ruiz: Dogodivščine v Deželi matematičnih čudes



DARJA ANTOLIN

→ Dežela matematičnih čudes je muzej interaktivnih matematičnih modelov v Hokkaidu na Japonskem, ki je bil osnovan leta 2003 na pobudo Jina Akiyama, enega izmed avtorjev knjige. Matematični modeli, ki jih najdemo v tem muzeju (mnogi izmed njih so bili razstavljeni po celi Japonski in v drugih mestih po svetu), so bili razviti iz tistih, ki jih je omenjeni avtor uporabil v svojih na Japonskem zelo uspešnih televizijskih oddajah, s katerimi približuje matematiko širšemu krogu ljudi. Na podlagi izkušenj s televizijsko oddajo se je porodila zamisel o muzeju oziroma hiši, kjer bi (predvsem mladi) obiskovalci preko praktičnih izkušenj z razstavljenimi modeli odkrivali in doživeli čudesa matematike.

Knjiga Dogodivščine v Deželi matematičnih čudes opisuje izkustva treh mladih izmišljenih junakov, učencev višjih razredov osnovne šole, ob njihovem obisku Dežele matematičnih čudes. Dan, ki ga preživijo v tej hiši matematičnih čudes, je poln zanimivih odkritij in izzivov. Med drugim se fantje namesto navadnega sprehoda po Deželi matematičnih čudes prevažajo s prav posebnimi kotalkami, katerih kolesa imajo obliko napihnjenih trikotnikov. Spoznajo stroj, ki izdeluje kvadratne luknje ter se preizkusijo v tekmovanju spuščanja po toboganih, ki imajo oblike različnih krivulj. Nadvse zanimivi sta tudi soba polna pravokotnih trikotnikov ter glasbena



soba, kjer lahko tekajo po glasbenih stopnicah in sami odkrivajo povezanost glasbe in matematike. Tam je še posebna igralna naprava imenovana matematični pachinko, tricikel s kvadratnimi kolesi, naprava, ki samodejno izračuna največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh števil ter še veliko drugih zanimivih interaktivnih modelov, ki jih fantje preizkusijo. Ob tem neizmerno uživajo, obenem pa vsaka taka izkušnja z modeli zbudi v njih radovednost ter jih spodbudi k lastnemu nadaljnjemu raziskovanju in matematičnem odkrivanju. Na potepanju po Deželi matematičnih čudes spoznajo nekaj prijaznih vodičev, ki jim v izziv ponudijo tudi različne aktivnosti kot so: posebno zvijanje, zgibanje ter rezanje papirja, izdelovanja sestavljanek, ki jih dobimo iz razrezanih tetraedrov in omogočajo tlakovanje ravnine ter spoznavanje t. i. obrnljivih teles in teles, s katerimi lahko zapolnimo tridimenzionalni prostor. Ko ob koncu dneva preživetega v Deželi matematičnih čudes, fantje odhajajo od tam, so bogatejši za veliko novih spoznanj obenem pa polni resničnega spoštovanja do matematike. Izkusili in spoznali so namreč njeno lepoto, uporabnost in neizbežnost.

Knjiga je napisana tako, da jo lahko berejo najstniki, ali morda celo mlajši. Vendar ne moremo reči, da gre za otroško knjigo; kajti kljub temu, da je napisana v stilu, ki je popolnoma primeren za najstniškega bralca, bo pritegnila tudi vsakega odraslega človeka, ki bo posegel po njej. Ne glede na to, kakšno matematično predznanje ima bralec, bo o branju te knjige spoznal nekatera čudovita matematična dej-

stva, ki jih prej ni poznal, ter občutil zadovoljstvo ob razumevanju. Omeniti pa velja, da se v knjigi pojavijo besede kot so: Rouleauxov trikotnik, epicikloidna krivulja, brahistrohrona krivulja, tautohrona krivulja, ki se bodo mlademu bralcu najverjetneje zdele neznane in težke, vendar pa za samo razumevanje besedila niso ključne.

V knjigi so predstavljene matematične vsebine in modeli, ki se do sedaj še nikoli niso pojavili v knjigah podobnih zvrsti; npr. obrnljiva telesa, tlakovanje ravnine s kosi, ki jih dobimo iz razrezanih tetraedrov in dvo-funkcijska telesa, ki so izpeljana iz avtorjevih lastnih znanstvenih člankov, objavljenih v matematičnih revijah. Knjiga je privlačna tudi na pogled. Pritegne nas še ob samem listanju, saj vsebuje veliko živahnih barvnih ilustracij potepanja po Deželi matematičnih čudes. Na koncu je naveden obširen seznam virov ter osnovni podatki o avtorjih knjige. Namen knjige je vzbuditi pri mladih interes do matematike ter jim na zanimiv način približati nekatere matematične vsebine. Iz te knjige se lahko ogromno naučijo tudi starši in učitelji. Slednjim je lahko odličen pripomoček za popestritev učnih ur matematike ter vir novih idej.

Knjižico lahko naročite pri DMFA-založništvo po članski ceni 16,00 EUR. $\times \times \times$

SMART–Mladinski astronomski raziskovalni tabor 2011



↓↓↓

AD LABOD

→ SMART - Mladinski astronomski raziskovalni tabor je največji mladinski astronomski tabor v Sloveniji. Namenjen je tako popolnim začetnikom kot izkušenim astronomom, saj zahtevnost programa prilagajamo predznanju in željam posameznika. SMART je namenjen spoznavanju astronomije, neba, zvezd, teleskopov in raziskovanja v počitniškem okolju, polnem sproščenega in veselega druženja.

Tabor bo potekal na Ribniški Koči na Pohorju, med 29. julijem in 7. avgustom 2011. Vodilo ga bo 10 izkušenih mentorjev. S pomočjo domiselnega družabnega programa bomo kot vedno poskrbeli, da bo SMART 2011 za vse udeležence ostal nepozaben dogodek!

Delovne skupine na taboru bodo: Uvod v astronomijo, Astronomska opazovanja, Astrofizika in astronomske simulacije, Astrofotografija, Meteorji, Temno nebo.

Vse informacije o taboru, delovnih skupinah, mentorski ekipi in o prijavi najdete na naši spletni strani: www.adl.si ali na telefonski številki 040/480383 (Nina, vodja tabora). $\times \times \times$

Futošiki

↓↓↓

→ V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n , tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter, da bodo izpolnjene vse relacije.

3	<		>			6	
						<	6
		>			<	>	
	<	2			>		
		4	<		>		>
					<	5	4

↓↓↓

REŠITEV

7	5	2	8	1	9
1	2	8	9	7	5
5	8	9	7	2	1
8	7	1	5	9	2
9	1	5	2	8	7
2	9	7	1	5	8

$\times \times \times$

Trikotne sence



NADA RAZPET

→ Gore in hribi v Sloveniji imajo vrhove različnih oblik. Te so lahko špičaste, kopaste, zaobljene, nazobčane. Včasih imamo srečo in smo na vrhu gore ravno takrat, ko je vreme lepo, sonce pa v taki legi, da lahko vidimo senco gore. Če dobro poznamo kraje v okolici, lahko ugotovimo, kam pada vrh sence. Na sliki je senca Špika. Slika je bila posneta 12. novembra 2005 ob 15.07. Fotograf Andrej se ni mogel spomniti, ali je ura na aparatu kazala poletni ali zimski čas. Ali jo lahko določimo s podatki, ki jih najdemo na spletnih straneh, na zemljevidu in v efemeridah?

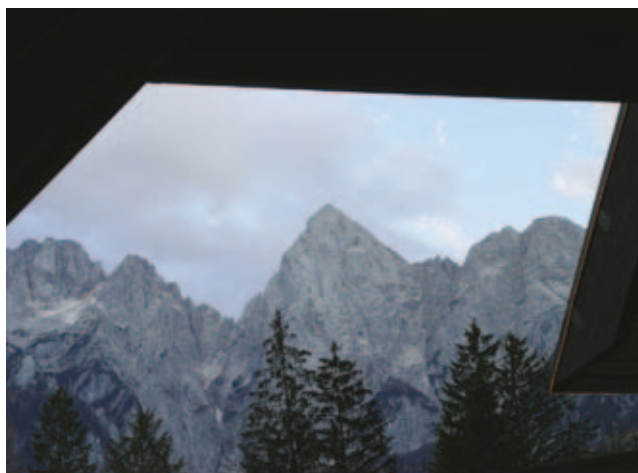
Iz karte Atlasa Slovenije lahko razberemo, da je azimut vrha sence 21° . Azimut je kot, ki ima en krak usmerjen proti severu, drugi krak pa proti konici sence, vrh kota je vrh Špika. Pozitivna smer je smer proti vzhodu. Vzhod ima torej azimut 90° .

Računanje si lahko poenostavimo, saj ne potrebujemo velike natančnosti. V enem dnevu se Zemlja premakne na svojem tiru okrog Sonca za približno 1° , zato lahko za nekaj ur računamo, da je naklonski kot žarkov proti Zemljini osi konstanten. Zemlja se okrog svoje osi zavrti vsako uro za 15° . Narišimo lego krajev, ki imajo zemljepisno širino 46° , vodoravno ravnino in ravnino, ki je vzporedna z ekvatorsko ravnino.

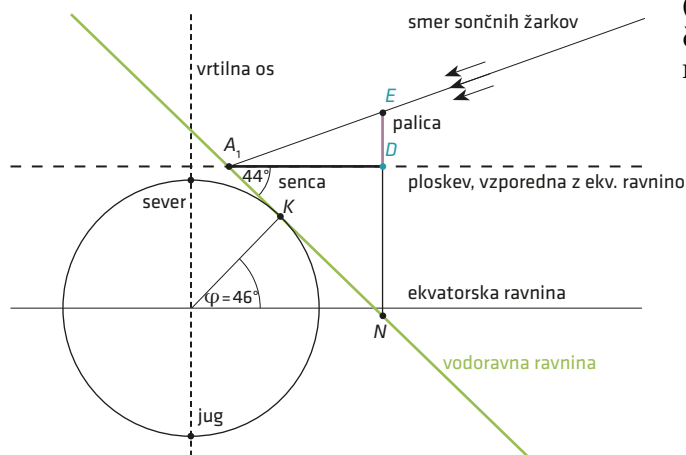




SLIKA 1.
Senca Špika



SLIKA 2.
Pogled na Špik

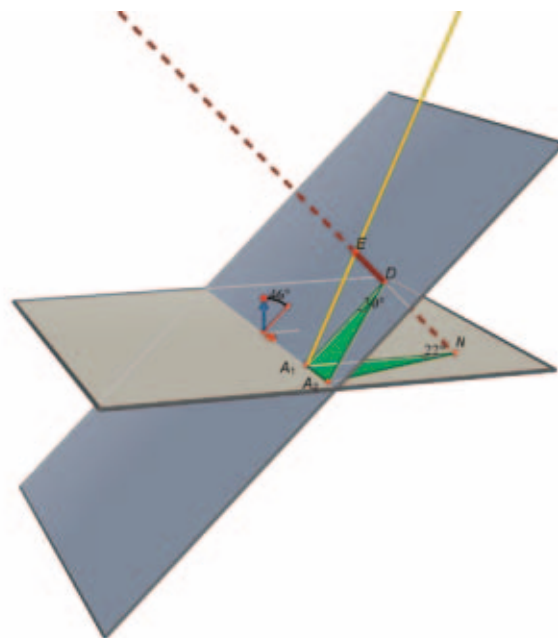


SLIKA 3.
Vodoravna in ekvatorska ravnina ter konstrukcija sence na ravni, ki je vzporedna z ekvatorsko ravnino.

Namesto računanja uporabimo računalniški program za prostorsko geometrijo Cabri 3D.

Palico ED zasadimo pravokotno na ravnino, ki je vzporedna z ekvatorsko ravnino (na sliki obarvana modro). Ker vemo, da je slika nastala dve ali tri ure po 12. uri, začnemo risati sence od 12. ure dalje. Senca, ki jo opazujemo na ravni, vzporedni z ekvatorsko ravnino, se v dveh urah zasuče za 30°

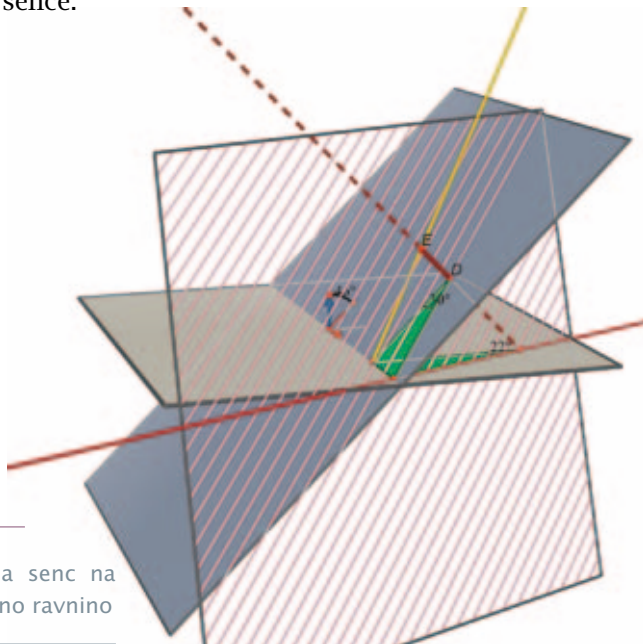
(zeleni trikotnik na modro obarvani ravni) in je ves čas enako dolga. Za koliko pa bi se senca zasukala v ravni, kjer jo zares opazujemo, torej v (naši) vodo-



SLIKA 4.
Zasuk sence v dveh urah. Rumena črta kaže smer sončnih žarkov, črtkana pa smer proti severu.

→ ravni ravnini (na sliki svetlo siva)? Iz meritev, ki jih opravimo z računalnikom, ugotovimo, da približno za 22° . Za približno enako pa se je premaknil tudi vrh naše sence od smeri proti severu (izmerimo na zemljevidu). To pa pomeni, da je Andrej sliko posnel približno ob 14. uri.

Že, že, boste rekli, ampak palica ni pravokotna na vodoravno ravnino. Če palico sukamo v ravnini, ki je na spodnji sliki označena črtkano, ugotovimo, da se smer sence ne spremeni, torej velja sklep, da se v vodoravni ravnini senca v dveh urah po poldnevu premakne za 22° tudi za palico, ki je postavljena pravokotno na vodoravno ravnino, spremeni se le dolžina sence.



SLIKA 5.
Projekcija senc na vodoravno ravnino

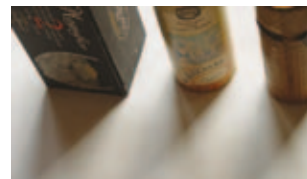
Na fotografiji vidimo ob spodnjem robu nekaj zelo svetlih prog, kar pomeni, da je takrat Sonce ravno zahajalo za vrhom Špika. Zato lahko ocenimo še naklonski kot sončnih žarkov. S pomočjo zemljevida izmerimo dolžino sence od nožišča vrha do konice sence. Na zemljevidu je to 8,8 cm, kar je z upoštevanjem merila $s = 4400$ m. Nadmorska višina Gozd Martuljka je 755 m, višina Špika pa 2472 m. Torej sta višinska razlika h_1 in naklonski kot žarkov proti vodoravni ravnini:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2472 \text{ m} - 755 \text{ m} = 1717 \text{ m} \\ \tan \alpha &= \frac{h_1}{s} = \frac{1717}{4400} \quad \alpha \approx 21^\circ. \end{aligned}$$

Opoldan tistega dne je bil naklonski kot žarkov okoli 30° (poiščemo v efemeridah), ker pa je slika nastala kasneje, je naklonski kot žarkov seveda manjši.

Ali ima še kakšen vrh trikotno senco?

Ker je Špik ošiljen, je njegova senca trikotna. Ali imajo lahko različno oblikovani predmeti pri dnevni svetlobi prav tako trikotne sence? Odgovor je pritrdilen. Samo opazovati jih je treba ob pravem času na pravem mestu. Ni nam treba hoditi daleč, lahko jih opazujemo kar na mizi ali na tleh ob oknu ali steklenih vratih. Opazujemo sence na vodoravni ravnini (slika 6).



SLIKA 6.

Trikotne sence cvetličnega lončka, TEX-ov maskote – levčka, kvadra ter dveh valjev in kvadra. Na zadnji sliki so vidne tudi plosence. Svetilo je okenska odprtina. Slike so nastale zgodaj jutraj, ko je sonce ravno hotelo pokukati iza strehe hiše, ki jo v daljavi vidim skozi okno. Opazujemo jih lahko tudi blizu računalniškega monitorja, na kateri je osvetljena bela ploskev. Vendar je fotografiranje takrat težavnejše.

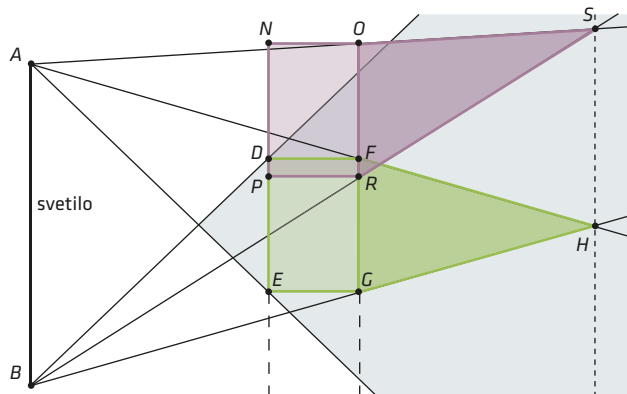
Nastanek takih senc si še razložimo. Iz izkušenj vemo, da pri zelo razsežnih svetilih in majhnih predmetih opazimo sence in plosence.

Najprej opazujemo senco predmeta, ki ima pravokotni presek. Opazimo, da se pri premiku predmeta vzporedno s svetilom višina trikotne sence ne spre-

minja. To dokažemo s podobnimi trikotniki.

Trikotnik ABS razdelimo na trapez $ABRO$ in trikotnik OSR . Trapez ima višino v trikotnik pa višino v_1 . Označimo razdaljo $AB = a$ stranica pravokotnika $RO = b$. Iz podobnosti sledi:

$$\frac{a}{v + v_1} = \frac{b}{v_1} \quad v_1 = \frac{bv}{a - b}.$$



SLIKA 7.

Razsežno svetilo je ponazorjeno z daljico AB . Senci predmetov s pravokotnima presekom sta obarvani tako, kot sta obarvana predmeta. S sivo barvo je označena še polsenca zeleno obarvanega predmeta. Če predmete pomikamo po vzporednici s svetilom, se konice trikotnih senc prav tako premikajo po vzporednici s svetilom.

Oglejmo si še drugi trikotnik ABH . Trapez $ABGF$ ima tudi višino v (stranici na isti vzporednici). Trikotnik FGH ima višino v_2 . Tako kot prej iz podobnih trikotnikov dobimo:

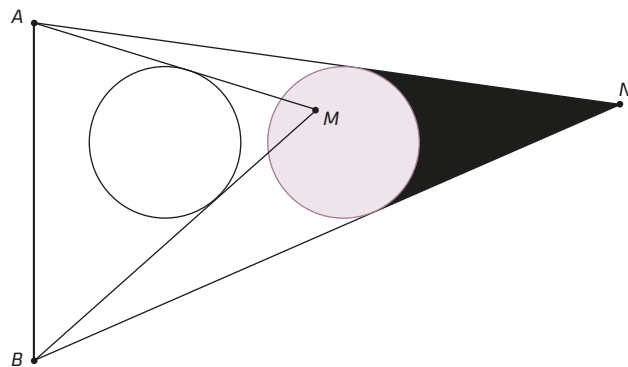
$$\frac{a}{v + v_2} = \frac{b}{v_2} \quad v_2 = \frac{bv}{a - b}.$$

Dokazali smo torej, da sta višini trikotniških senc enaki.

Zdaj pa pogledjmo še, kaj se zgodi s sencami, če spreminjamo razdaljo med predmetom in svetilom. Tokrat bomo opazovali predmet z okroglim presekom.

Vidimo, da je višina trikotne sence odvisna od razdalje med predmetom in svetilom, njegove osnovne ploskve in od razsežnosti svetila.

Omenjali smo samo preseke predmetov. Kaj pa njihove višine?



SLIKA 8.

Senca predmeta z okroglim presekom, ki ga približujemo svetilu. Višina trikotne sence se krajša, krajšala bi se tudi, če bi povečali razsežnost svetila (dolžino daljice AB). To lahko bralci dokažejo sami.



SLIKA 9.

Senci dveh valjev z enakim presekom a različnih višin. Trikotni senci sta enako veliki. Na sosednji sliki sta prikazana oba valja skupaj. Senca je še vedno trikotna, čeprav sta višini valjev različni.

Na sliki 9, kjer sta senci dveh različno visokih valjev, opazimo, da sta trikotni senci enako veliki. Ko pade na predmet direktna sončna svetloba, pa sence niso več trikotne. (Mejni primer lahko bralci opazujejo sami.) Sončni žarki so med seboj vzporedni in dobimo pri kvadru paralelogramsko senco, prav tako tudi pri valju. Ostali predmeti imajo sence različnih oblik, njihova dolžina pa je odvisna od naklonskega kota sončnih žarkov in od velikosti predmeta.

Ob primernih pogojih so torej sence gora ne glede na njihovo obliko trikotne. Nekaj takih slik lahko najdete tudi na svetovnem spletu.

× × ×

Galilei in sprememba merila



JANEZ STRNAD

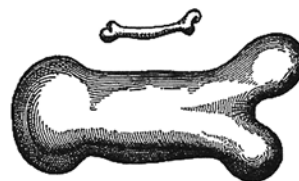
→ Presek je poročal o „drugi znanosti“ Galilea Galileija iz njegove knjige *Razprave in matematični dokazi o dveh novih znanostih*. Danes bi „drugi znanosti“ rekli kinematika enakomernega in enakomerno pospešenega premega gibanja ter vodoravnega meta. Kaj pa je bila Galilejeva „prva znanost“? Čeprav Galilei po njej ni tako znan kot po drugi, je dovolj zanimiva. V glavnem zadeva trdnost teles. Ker še ni imel izdelanih pojmov sile in navora, ne kateri njegovi sklepi niso obveljali (slika 1). Morda zaradi tega „prve znanosti“ ne omenjamo tako pogosto kot „drugo znanost“. Ob raziskovanju trdnosti je Galilei prišel do pomembnega sklepa, ki ga kaže omeniti.

Na začetku „prve znanosti“ na obisku v beneškem notranjem pristanišču trije možje razpravljajo o tem, da je treba pri gradnji velikih ladij uporabiti nesorazmerno močnejše opornike in odre kot pri gradnji majhnih. Postavijo si vprašanje, ali bi se velika ladja lahko zrušila pod lastno težo. Enemu od njih se zdi vprašanje povsem odveč: „Ker je mehanika osnovana na geometriji, v kateri sama velikost ne ustvari oblike, ne uvidim, zakaj bi se lastnosti [...] valjev,



SLIKA 1.

„Predlog VI. Prizmam in valjem enake dolžine, a neenake debeline se odpornost poveča v enakem razmerju kot kub premera ali roba osnovne ploskve.“ Galilei se je motil. Trdnost je sorazmerna s četrto potenco, ne s kubom. Nekdo je duhovito pripomnil, da bi se zid podrl prej, kot bi se prelomil vodoravni drog, če bi sodili po sliki. Ta slika in naslednja sta iz angleškega prevoda *Razprav in matematičnih dokazov*.



SLIKA 2.

„Za kratko pojasnilo sem narisal kost, katere naravno dolžino sem trikrat podaljšal in katere debelino sem povečal, dokler ni izpolnila enake naloge kot manjša kost v majhni živali. Po narisani velikosti lahko vidite, kako nesorazmerna se zdi večja kost. Jasno, če želite, da bi velik velikan imel okončino v enakem razmerju kot običajno velik človek, morate najti trdnejši in močnejši material za kosti ali pa se sprijazniti z manjšo močjo v primerjavi s človekom običajne zgradbe. Velikan bi padel in se zrušil zaradi lastne teže, če bi neobičajno povečali njegovo višino. Če pa pomanjšamo velikost telesa, se moč telesa ne zmanjša v enakem razmerju, zares, čim manjše je telo, tem večja je relativna moč.“

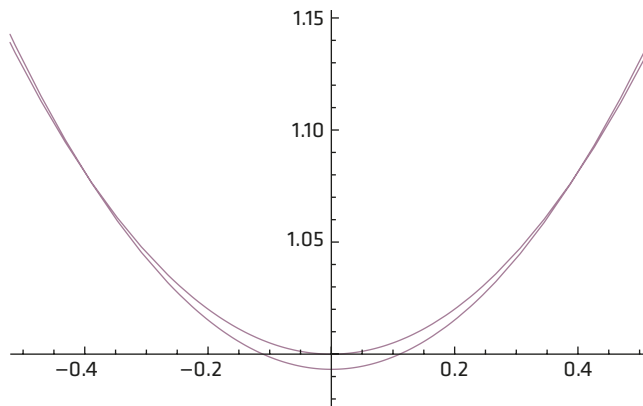
stožcey in drugih trdnih teles spremenile z velikostjo. Če bi torej naredili velik stroj tako, da bi bili njegovi deli v enakem medsebojnem razmerju kot v

manjšem, [...] ne uvidim, zakaj tudi večji ne bi prestal katerega koli resnega [...] preizkusa, ki bi ga prestal manjši.“

Tako je bilo tudi mnenje mladega Galileja. Na začetku poklicne poti je pozimi 1587/88 imel v Firencah dve javni predavanji. Pri tem je obravnaval načrt in velikost pekla iz Dantejeve *Božanske komedije*. Tedaj ni bilo nenavadno resno razpravljati o pesniškem predmetu. V razpravi se je oprl na geometrijo in sorazmerja. Primerjal je dva načrta. Enega si je izmislil meščan Firenc, drugega mož iz mesta Lucca, ki je tekmovalo s Firencami. Galilei se je odločil za prvi načrt in je odklonil drugega. S tem si je pridobil naklonjenost poslušalcev. Predavanji sta mu zgladili pot do mesta profesorja na univerzi v Pisi leta 1589. V enem od predavanj je izračunal debelino peklenškega stropa. Privzel je, da sta debelina stropa in njegov razpon v enakem razmerju kot debelina in razpon stropa firenške katedrale. Za debelino peklenškega stropa je tako dobil približno dvesto kilometrov in je bil s tem rezultatom zadovoljen. V naslednjih letih je spoznal, da se je glede debeline peklenškega stropa krepko zmotil. Kaže, da ga je to spoznanje močno prizadelo.

V *Razpravah* drugi mož pouči prvega, da lahko: „[...] z geometrijo pokažemo, da večji stroj ni sorazmerno močnejši od manjšega. Nazadnje lahko rečemo za vsak stroj ali napravo, umetno ali naravno, da obstaja nujna meja [velikosti], ki je ne moreta preseči ne umetnost ne narava. Pri tem seveda razumemo, da uporabimo enak material in enako razmerje.“ [...] „Kdo ne ve, da bi si konj polomil kosti, ko bi padel iz višine dveh ali treh metrov, medtem ko bi se pes pri padcu iz tolikšne višine ali mačka pri padcu iz višine šest do sedem metrov ne poškodovala.“ Izjava je prvega moža presenetila: „V glavi se mi vrti. Moj razum je kot oblak, ki ga trenutno osvetli blisk, ta hip poln nenavadne svetlobe [...]. Po tem, kar si rekel, se mi ne zdi mogoče zgraditi dveh podobnih zgradb iz enakega materiala v različnih velikostih, ki bi bili sorazmerno enako močni.“

Sledilo je še pojasnilo: „sile, upore itd. lahko obravnavamo [...] ločeno od snovi ali povezano s snovjo. Tako se lastnosti, značilne za oblike, ki so zgolj geometrijske in niso snovne, spremenijo, ko te oblike napolnimo s snovjo in jim s tem damo težo.“ Velikan ne more imeti udov v enakem razmerju kot človek običajne velikosti. Če bi imel kosti iz enake snovi, bi se sesedel zaradi lastne teže (slika 2). „Tako bi



SLIKA 3.

Galilei je obravnaval tudi vrvi. Ugotovil je, da ima v dveh točkah pritrjena vrv ali verižica obliko parabole. Pozneje so spoznali, da je to le približek. Enačbo prave krivulje, *verižnice*, so v okviru nagradne naloge leta 1691 ugotovili brata Johann in Jacob Bernoulli ter Christiaan Huygens in Gottfried Wilhelm Leibniz. Verižnica na risbi se le malo razlikuje od parabole.

majhen pes na hrbtu verjetno mogel nositi dva do tri pse svoje velikosti, a mislim, da konj ne bi mogel nositi niti enega konja svoje velikosti.“ Danes ugotovimo, da je teža povezana s prostornino, ki pri podobnih telesih narašča sorazmerno s kubom velikosti, trdnost pa s presekom, ki narašča sorazmerno s kvadratom velikosti. Lastnosti majhnih teles določa bolj površina, lastnosti velikih pa bolj prostornina. Pribijmo, da so zakoni narave občutljivi za spremembo merila oziroma da niso *invariantni* proti spremembam merila.

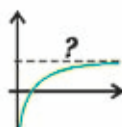
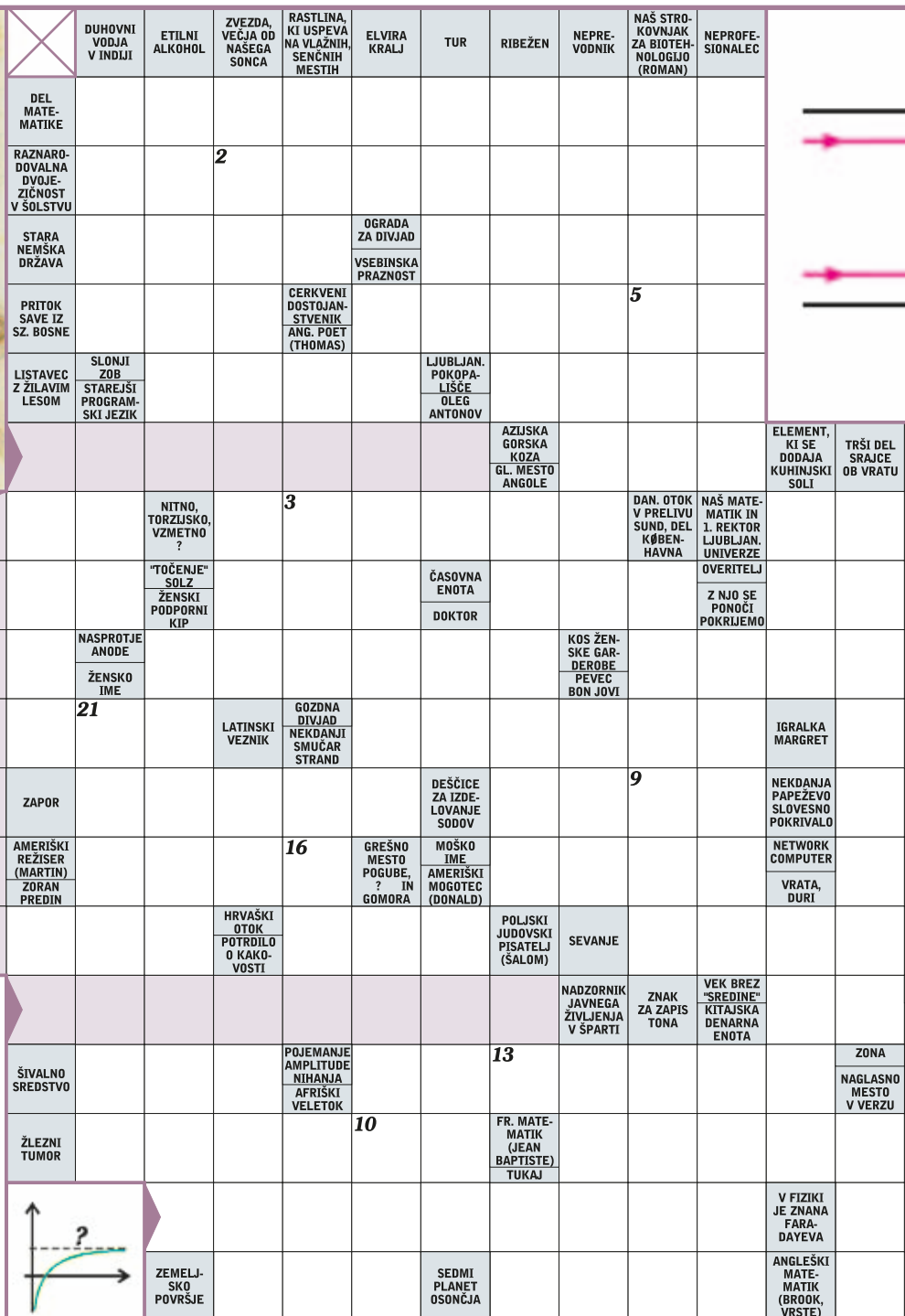
× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

× × ×



NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **23. aprila 2011**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

× × ×

Igrajmo se z mavrično vzmetjo



MOJCA ČEPIČ

→ Mavrično vzmet verjetno poznate. Vidite jo tudi na sliki, verjetno pa se z njo znate tudi igrati.

Tokrat si bomo ogledali nekaj pojavov, značilnih za valovanje, ki jih je na mavrični vzmeti mogoče zelo podrobno opazovati. Ogledali si bomo, kako se gibljejo deli vzmeti, če po njih potuje motnja. Ob tem bomo pobližje spoznali tudi interferenco. Iz motenj bomo sestavili valovanje in opredelili številne fizikalne količine, s katerimi valovanja opisujemo.

Potrebščine

- mavrična vzmet,
- košček barvnega traku ali barvnega lepilnega traku (npr. izolirni trak),
- prostor na gladkih tleh (parket, ploščice, vsekakor ne preproga) dolg nekaj metrov in širok vsaj meter in pol.

Mavrično vzmet raztegnite toliko, da bo dolga nekaj metrov oziroma da bodo zavoji približno centimeter narazen. Če imate le zelo kratko mavrično vzmet (da je rahlo raztegnjena dolga le kak meter), si izposodite še eno podobno in ju povežite z lepilnim trakom. Na enem ali dveh mestih navežite na enega od zavojev pentljico iz barvnega traku ali nalepite kos barvnega lepilnega traku.

Da bomo vedeli, o čem govorimo in kaj opazujemo, vpeljimo še nekaj poimenovanj.



SLIKA 1.
Mavrična vzmet

Kadar hitro izmaknemo začetek vzmeti in ga enako hitro vrnemo v začetno lego, nastane na vzmeti **motnja**. Motnja je videti kot deformacija vzmeti – bodisi je na enem delu vzmet vbočena ali izbočena bodisi je le stisnjena ali raztegnjena. Motnjo lahko s skico predstavimo, kot kaže slika 2. Na njej smo vzmet predstavili s črto.

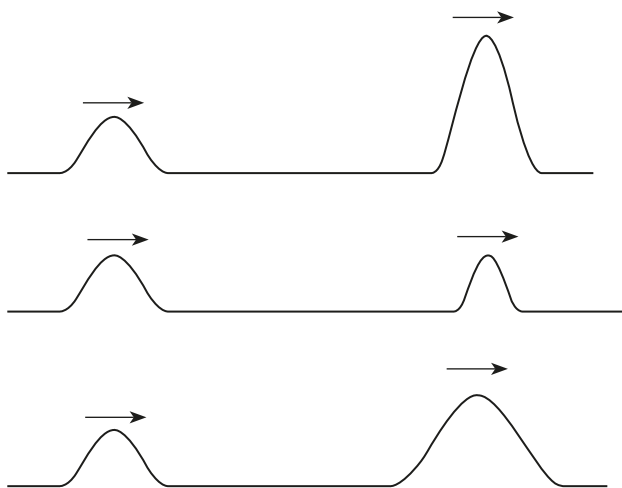


SLIKA 2.
Motnji na sliki običajno poimenujemo z imenoma **hrib** in **dolina**.

Ker imata motnji lahko različni smeri glede na smer raztegnjene vzmeti, ju poimenujemo hrib in dolina. Preden začnemo eksperimentirati, se s prijateljem dogovorimo, katero smer bomo imenovali hrib in katero dolina. Motnje na tleh bomo namreč naredili z gibi levo in desno glede na smer vzmeti, tako povezava gor ali dol, ki se povezuje z imenoma hrib in dolina, ni več očitna.

Glede na to, kako daleč in kako hitro bomo na

začetku zamahnili z roko, bo lahko nastala višja ali nižja motnja, krajša ali daljša oziroma oboje hkrati (večja ali manjša). Višino motnje opisujemo z amplitudo, dolžina in velikost pa nimata posebnega pomena. Na sliki 3 vidite zaporedoma po dve motnji, ki ju opisujemo kot motnji z manjšo ali večjo amplitudo oziroma daljša in krajša motnja. Zadnji motnji se razlikujeta tako po amplitudi kot tudi po dolžini. Čeprav v povezavi z dolžino nismo uvedli posebnega poimenovanja, tako poimenovanje obstaja. Podrobneje ga bomo razložili v odgovoru.



SLIKA 3.

Motnji z različnima amplitudama (zgoraj), z različnima dolžinama (v sredini) in motnji z različnima velikostma (amplitudi in dolžino).

Sedaj pa k nalogam. Potrebujete pomočnika, ki bo na eni strani držal vzmet, da bo ostala raztegnjena. Na njenem drugem kocu pa boste poskusili ustvariti različne motnje. Včasih bosta motnje hkrati ustvarila tudi oba s pomočnikom.

a) Hitro zamahnite z roko levo ali desno in nazaj na sredino. Opazujte, kakšna motnja nastane. Kaj morate narediti, da bo imela motnja večjo amplitudo, večjo dolžino ali oboje hkrati?

b) Opazujte potovanje motnje po mavrični vzmeti. S štoparico izmerite hitrost motnje. Ali na hitrost potovanja motnje vpliva oblika (amplituda, velikost)

motnje? Ali na hitrost potovanja vpliva smer potovanja motnje? Svoje predvidevanje najprej zapišite na papir, nato šele izvedite poskus.

c) Opazujte, kako se giblje pentljica ali lepilni trak, s katerim ste označili del vzmeti. Primerjajte gibanje pentljice in gibanje roke. Kako se gibanji razlikujeta?

d) S pomočnikom naredita hkrati vsak svojo motnjo. Obe naj bosta ali hrib ali dolina in naj imata čim bolj enaki amplitudi in dolžini. Kaj se zgodi, ko se motnji srečata? Zapišite svoje opazovanje.

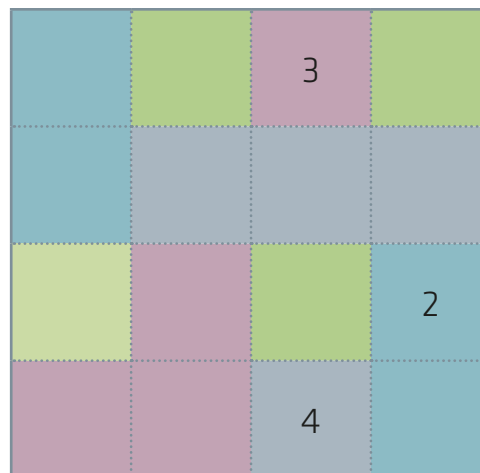
e) Kaj se bo zgodilo, če se srečata hrib in dolina, ki potujeta v nasprotnih smereh? Napovejte svoje predvidevanje. S pomočnikom naredite hkrati vsak svojo motnjo, ena naj bo hrib in druga dolina. Naj bosta amplitudi in dolžini čim bolj enaki. Kaj se zgodi, ko se motnji srečata? Zapišite svoje opazovanje.

× × ×

Barvni sudoku

↓ ↓ ↓

→ V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n , tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve nastopalo vseh n števil.



× × ×

Barve brez barvil

ODGOVOR NALOGE

↓ ↓ ↓

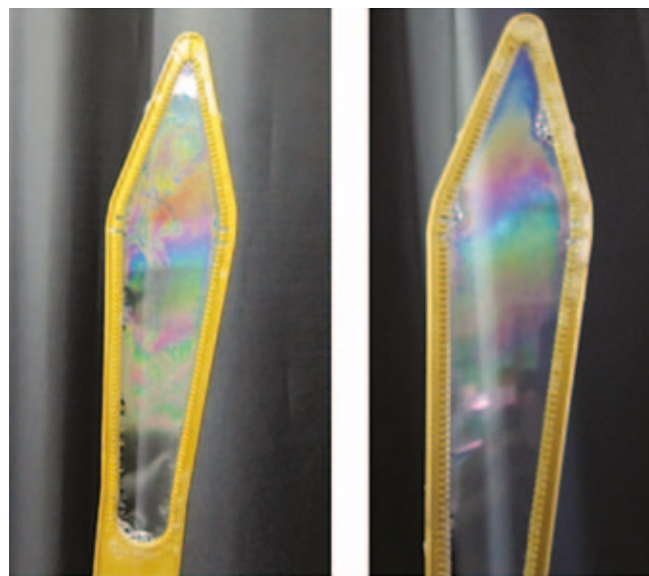
MOJCA ČEPIČ

→ Milne mehurčke ste zagotovo že napihovali in spuščali. Milnične opne, iz katerih napihnemo mehurček, pa tudi opazovali. Poglejmo si, kako si na milnični opni sledijo barve, potem pa bomo še na kratko razložili, kako te barve nastanejo (slika 1).

Opna na levi je bila fotografirana takoj po nastanku. Barve na njej nakazujejo še pretakanje milnice, a vseeno lahko vidimo nekatere zakonitosti. V gornjem delu opne so zastopane vse mavrične barve, v srednjem se izmenjujeta le še zelena in magenta, na dnu pa je opna črna, ker skozi njo vidimo črno zaveso. Opna na desni je bila posneta nekaj časa po nastanku. Tokovi milnice so se že umirili, a razpored barv je enak. Na vrhu vidimo tako modro kot rumeno in rdečo oziroma magento, nižje se pojavljata le magenta in zelena. V obeh opnah vidimo tudi slike okolice in ozadje. A z njimi se tokrat ne bomo ukvarjali. Ponovno lahko vidimo enak razpored barv na milnem mehurčku, čeprav nam jo je zagodla ostrina.

Zakaj se barve sploh pojavijo? Milnici nismo dodali nikakršnega barvila, barve se tudi neprestano spreminjajo, očitno pa za barvna zaporedja veljajo tudi določene zakonitosti.

Razlog se skriva v interferenci. Interferenca je pojav, ki je značilen le za valovanja. Če za nek pojav pokažemo prisotnost interference, potem vemo, da pojav sodi v družino valovanj. Kaj interferenca pravzaprav sploh je? Kadar se poti dveh teles srečata in bi se telesi morali znajti ob istem času na istem mestu, trčita in se običajno odbijeta, kot npr. žogi, ali pa se sprimetata, kot dve kepi gline, ali pa se



SLIKA 1.

Milna opna takoj po nastanku (levo), potem, ko so je pretakanje že umirilo (sredina), in milni mehurček (desno).

zgodi nekaj vmes kot pri prometni nesreči. Kadar se srečata dve valovanji, nemoteno potujeta drugo skozi drugo. Temu pravimo interferenca ali seštevanje valov. Če potujeta valovanji v isti smeri, se zaradi interference lahko oslabita, ojačata ali nekaj vmes. Razlog za barve mehurčkov in open, čeprav milnica ni obarvana, se skriva v interferenci.

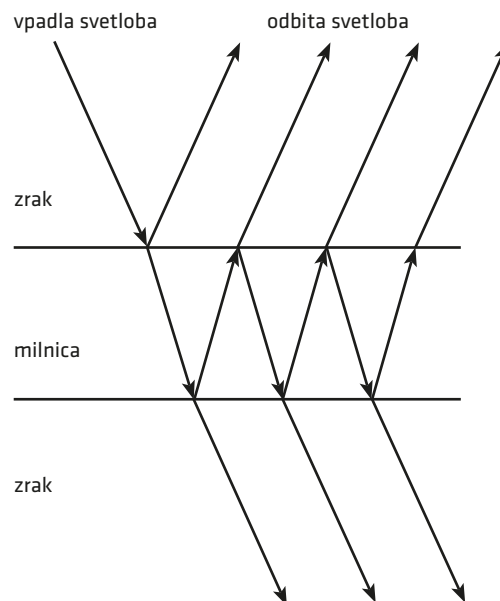
Katero valovanje pa je povezano z barvami open in mehurčkov? Seveda vidna svetloba, ki je elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami med 400 nm (modra) in 700 nm (rdeča). Med tema valovnima dolžinama oziroma barvama se zvrstijo vse valovne dolžine, ki jih zaznavamo kot barve v mavrici. Del svetlobe, ki pada na milnično opno, se ob prehodu iz zraka v milnico odbije, del pa se širi naprej. Zato vidimo skozi opno zaveso za njo in zato vidimo v opni sliko luči, ki so bile prižgane za fotografovimi hrbtom. Enako se zgodi tudi pri prehodu iz milnice v zrak, z odbito svetlobo se zgodba ponavlja (slika 2). Odbiti in prepuščeni deli valovanj med seboj interferirajo. Od valovne dolžine svetlobe oziroma njene barve je odvisno, ali se bo na različnih plasteh odbila svetloba ojačila ali oslabila ali nekaj vmes.

Svetloba običajne svetilke ali sončna svetloba vsebuje vse valovne dolžine vidne svetlobe v takih de-



ležih, da je videti bela. Po odboju na tanki milnični opni pa se svetloba enih valovnih dolžin zaradi ojačitev odbije v večjih deležih kot svetloba drugih valovnih dolžin. Katere so te valovne dolžine, določa debelina opne, pa tudi snov, iz katere opna je. Če je opna zelo tanka, precej manj kot valovna dolžina svetlobe, je opna videti prozorna, ker se oslabitve in ojačitve sploh ne pojavijo. Če je debela okoli 200 do 300 nm, se zares ojači le ena valovna dolžina, ostale pa mnogo manj in opna bo videti ojačene barve. Barva opne se z naraščajočo debelino spreminja od modre proti rdeči. Rdeča barva se ne pojavi, ker je tedaj poleg rdeče hkrati ojačena tudi modra barva in opna je videti barve ciklame - magenta. Te barve v mavrici ne najdemo, saj je sestavljena iz dveh barv z nasprotnih koncev spektra vidne svetlobe. Zelena barva, ki ima valovno dolžino med rdečo in modro, pa je oslabljena. V opnah, debelih nekaj valovnih dolžin, se ojačuje več barv iz cele mavrične palete hkrati. Valovne dolžine med sosednjimi ojačenimi barvami v spektru pa so oslabljene. Če pogledamo seštevek teh barvnih svetlob, se z naraščajočo debelino opne izmenjujeta le še magenta in zelena. Ti barvi sta med seboj komplementarni. Če se debelina opne še povečuje, se barve svetlob, ki so ojačene in oslabljene, razlikujejo že tako malo, da mešanico oko ponovno zazna kot belo svetlobo.

Sedaj lahko razumemo, zakaj si barve opne sledijo, kot vidimo na sliki 1. Milnična opna se pod vplivom teže preliva in je zato na različnih mestih

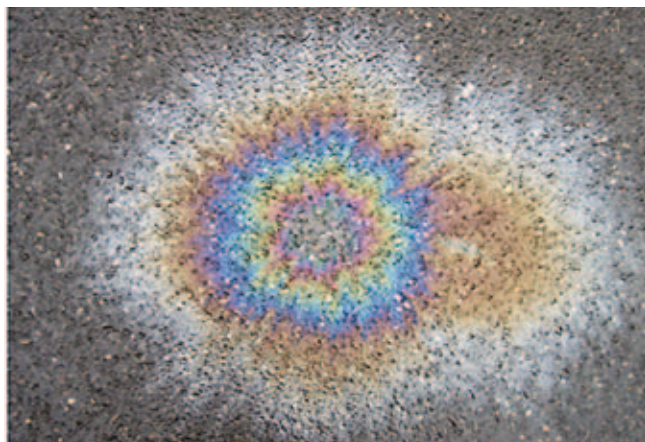


SLIKA 2.

Večkratni odboj svetlobe na tankih plasteh

različno debela. To vidimo na sliki 1 levo. Ko se pretakanje čez nekaj časa umiri, je opna na spodnjem delu debelejša, na gornjem pa tanjša. Zato je v najvišjem delu prozorna, nato je modra, sledijo pa ji mavrične barve, ki se končajo z magento. Takrat, ko je opna dovolj debela, da se ojači rdeča barva, je hkrati tudi ponovno dovolj debela, da se nekoliko ojači tudi odboj modre barve. Z naraščanjem debeline se potem na krajših in krajših razdaljah izmenjujeta magenta in zelena, dokler ne postane opna spet prozorna. Enako velja za mehurček. Tudi po mehurčku se barve spreminjajo na podoben način. Na vrhu je mehurček tanek, ker je milnica odtekla navzdol, in je prozoren. Nato si barve sledijo kot na navpično postavljeni opni, le njih površine so zaradi okrogline mehurčka večje. Na dnu je mehurček debel in zato spet prozoren.

Fotografiranje open in mehurčkov je zahtevno delo. Vse se dogaja precej hitro, fotoaparatus ne ubogati fotografa in ostriti na razdaljah, kjer se nahaja mehurček, pa še ti zlobni mehurčki najraje počijo takrat, ko jih ujameš v objektiv. S kolegom Goranom Iskričem sva se za posnetke pošteno namučila, a nisva najbolj zadovoljna. Zato najinih fotografskih dosežkov ne sodite prestrogo.



SLIKA 3.

Oljni madež na mokrem asfaltu. Barve nastanejo zaradi odboja na tankih plasteh (zgoraj). Barve tekoče kristalne opne nakazujejo, da se debelina opne spreminja (Foto: E. Gorecka). Deli različni barv so različno debeli (spodaj).

Še nekaj. Barve, ki nastanejo brez barvil, vidimo marsikje. Če pušča olje na avtomobilu, bomo mavrice, ki se cedijo izpod avtomobila, videli ob deževnih dneh. Na podoben način je nastala tudi slika 3 levo. Mavrične madeže olja lahko vidite tudi na vodni gladini v пристanišču. Pojav, ki smo ga opisovali danes, uporabljajo tudi znanstveniki za določanje struktur. Slika 3 desno je nastala ob študiju posebnega faznega prehoda, ko so ob ohlajanju opne iz tekočih kristalov na njej pri določeni temperaturi začeli rasti labirinti.

× × ×

Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA



42. Kako hitro se svinčnik prevrne? Postavi svinčnik na mizo navpično na konico in ga, kar se da previdno, izpusti. Štopaj ali oceni, v kolikšnem času se svinčnik prevrne in pade na mizo. Kolikšen najkrajši čas se ti je posrečil?

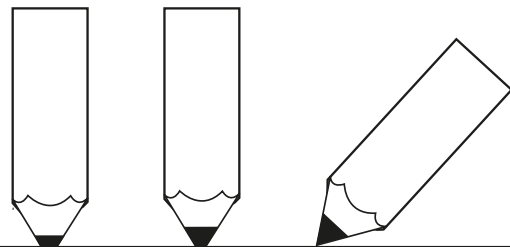
Zakaj svinčnik pravzaprav pade, saj je v ravnotežju? Sila svinčnikove teže in sila podlage pod konico sta namreč nasprotno enaki.

Primerjaj čas padanja s teoretičnim pričakovanjem. Izpeljava, ki je tukaj ne navajamo, pokaže, da naklonski kot ϕ raste s časom približno eksponentno:

$$\phi(t) = \phi_0 \exp(t/\tau),$$

kjer je značilni čas $\tau = \sqrt{\ell/3g}$. Čas padanja je torej približno $t \approx \tau \ln(\phi_1/\phi_0)$. Privzemi končni kot $\phi_1 = \pi/2$ in začetni kot $\phi_0 \approx 0,1^\circ = 0,0017$, kar pomeni, da si vrh svinčnika dolžine $\ell = 18$ cm držal le za $x_0 = \ell\phi \approx 0,3$ mm nenatančno. Ker je odvisnost od ϕ_0 logaritmična, se izboljšava (zmanjšanje) ϕ_0 le malo pozna, zmoti že tresenje okolice. Tudi pri skrajni natančnosti bi zmotile celo termične in kvantne fluktuacije.

Kaj pa če konica svinčnika ni ostra, temveč topa? Kolikšen mora biti radij krogca, da se ti posreči postaviti svinčnik v stabilno lego? Za šalo lahko predlagamo novo metodo za merjenje drhtavice (kako nemirno roko imaš). Potrebuješ le zaporedje bolj ali manj ošiljenih svinčnikov in ravno podlago (slika 1).



× × ×

Astrofotografija s preprostim sledenjem

↓↓↓

BOJAN KAMBIČ

→ Prav gotovo ste že kdaj občudovali slike, ki so jih posneli mojstri astrofotografije. Posnetki so zelo ostri, z zvezdami in zvezdicami, ki so zares večje ali manjše pike in ne le bolj ali manj razmazane packe. Res je, da lahko danes, v digitalni dobi, mnogo lažje posnamemo odlične astronomske fotografije kot pred leti. Toda dobre rezultate lahko tudi danes dosežemo le s temeljitim poznavanjem lastnosti fotoaparata, tehnik ostrenja, časov osvetlitve. Zapisano velja seveda tudi za fotografe, ki bi radi posneli dobre neastronomske fotografije. Tisto, kar je pri astrofotografiji posebnega, so dolgi časi osvetlitve in s tem povezano sledenje zvezdam, ki po nebu drsijo proti zahodu. Saj vemo – v resnici se Zemlja neprestano vrti okoli svoje osi.

Fotografiranje nebesnih objektov z objektivni in teleobjektivni je med amaterskimi astronomi od nekdaj zelo priljubljeno. Omogoča nam prvi stik s pravo astrofotografijo. Potrebujemo le fotoaparata in najpreprostejši amaterski teleskop na ekvatorialni nastavitvi, ki ga bomo uporabili kot sledilni teleskop. Na ta način se bomo prvič srečali s sledenjem zvezdam med osvetljevanjem, ki pa na srečo pri fotografiranju z objektivni ni tako kritično. Ti prvi koraki v svet astrofotografije s sledenjem nas bodo vsekakor ohrabрили, da bomo naredili še korak naprej – k fotografiranju v primarnem gorišču teleskopa.

Nove generacije objektivov so se s svojimi karak-



→ teristikami že zelo približale astrokameram. Kakovostni 300-milimetrski f/2,8 teleobjektiv, ki ima 107 milimetrov veliko lečje, je po svojih lastnostih le nekoliko slabši od 15-centimetrske f/2 astrokamere tipa Schmidt, ki ima enako goriščno razdaljo.

Poglejmo si vse, kar smo povedali, nekoliko podrobneje.

Teleskop za sledenje

Preprost sistem za astrofotografijo s teleobjektivi sestavljata teleskop na ekvatorialni nastavitvi in pa vzporedno z njim pritrjen fotoaparatus (slika 1). Nujno je, da ima nastavev možnost preciznih pomikov po obeh oseh vsaj z gibkimi vijaki. Motor za sledenje je koristen, saj olajša delo, ni pa nujno potreben. Vsaj pri astrofotografiji s kratkogoriščnimi objektivmi lahko shajamo brez njega.

Potrebujemo še okular z osvetljenim nitnim križem in Barlow lečo, ki nam podaljša goriščno razdaljo teleskopa. Ker bomo s teleskopom izbrani zvezdi le sledili, je popolnoma vseeno, kako kakovostna je slika te zvezde v zornem polju. Za čim bolj natančno sledenje je pomembno le to, da je povečava na sledilnem teleskopu čim večja. Ko bomo sledili zvezdi, ki jo bomo skušali držati na sredini nitnega križa, nam bo lahko nekoliko uhajala, pa se to na sliki ne bo prav nič poznalo. Koliko nam bo zvezda lahko uhajala, da bo posnetek še vedno oster, pa je odvisno od goriščne razdalje objektiva, s katerim fotografiramo, od povečave v sledilnem teleskopu – torej od goriščne razdalje objektiva in okularja – in pa od tega, kako ostro sliko želimo.

Natančnost sledenja

Kot primer vzemimo, da za sledilni teleskop uporabljamo najpreprostejši in najcenejši 60-milimetrski refraktor z goriščno razdaljo 900 milimetrov, ki mu dodamo Barlow lečo 2X. Ta nam podaljša gorišče objektiva na 1800 milimetrov. Okular z osvetljenim nitnim križem ima goriščno razdaljo 9 milimetrov in polje 52 stopinj. S to kombinacijo dobimo 200-kratno povečavo in približno 16 ločnih minut veliko zorno polje. Za kakovostna opazovanja nebesnih teles s takšnim refraktorjem je povečava že prevelika, za sledenje pri astrofotografiji pa je ravno prava.

Na ta sledilni teleskop vzporedno pritrdimo fotoaparatus s 50-milimetrskim objektivom. Usmerimo ga



SLIKA 1.

Na ekvatorialno nastavev teleskopa sta vzporedno pritrjena nosilec za fotoaparatus in sledilni teleskop.

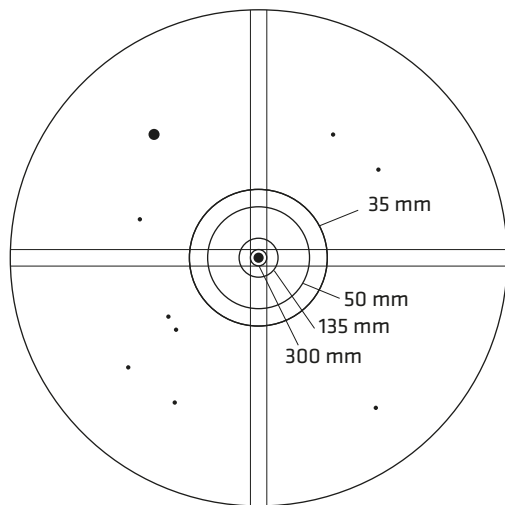
v želeno smer neba in v zornem polju teleskopa poiščemo kakšno razmeroma svetlo zvezdo. Sprožimo fotoaparatus in v sledilnem teleskopu pazimo, da je izbrana zvezda vedno v sredini nitnega križa. Njeno uhajanje sproti popravljamo z gibkimi vijaki. In to je to! Posneli smo astronomsko fotografijo s sledenjem!

Tisti, ki ste to že kdaj poskusili, že veste, da je zvezdo pri 200-kratni povečavi nemogoče za dalj časa obdržati natančno v sredini nitnega križa. Pa to tudi ni potrebno. Od goriščne razdalje objektiva, s katerim fotografiramo, je odvisno, koliko nam lahko zvezda uhaja iz sredine nitnega križa, ne da bi se to poznalo na ostrini slike.

Za začetek si moramo postaviti vprašanje, kako velika je še lahko slika najšibkejših zvezd, da bomo z ostrino zadovoljni. Za izkušene astrofotografe, katerih fotografije so polne fantastičnih podrobnosti, je to na fotografiji 20 krat 30 centimetrov okrog 0,2 milimetra. Za nas, ki smo na začetku naše astrofotografske kariere, naj bo ta meja dvakrat večja, torej 0,4 milimetra.

Koliko nam lahko pri teh pogojih zvezda, ki ji sledimo, uhaja iz sredine nitnega križa, vidimo na sliki 2. Če namesto s 50-milimetrskim objektivom snemamo s 35-milimetrskim objektivom, ki ima večje zorno polje, je sledenje lažje. Težje pa je, če hočemo s takšno kombinacijo snemati nočno nebo s

300-milimetrskim teleobjektivom, ki ima majhno zorno polje. Izkušnje nas bodo naučile, da potrebujemo za kakovostno sledenje pri fotografiranju z dolgogoriščnimi teleobjektivi tudi kakovosten in dolgogoriščen sledilni teleskop z motornim pogonom po obeh oseh in elektronsko korekcijo hitrosti. Pri astrofotografiji z objektivom lahko uporabljamo vse filtre, ki jih proizvajalci ponujajo za vizualno opazovanje: filtre za izboljšanje kontrasta slike, vse vrste emisijskih filtrov (H-alfa, OII, OIII ...) in barvne filtre. Pomembno je, da na začetku za vsak filter posebej ugotovimo, v kateri legi obročka za ostrenje je slika najbolj ostra. Zavedati se moramo, da še tako kakovosten objektiv rdečo in modro svetlobo preslika v različni gorišči. Za vse vrste astrofotografije z objektivom je za začetek najprimernejša izbira občutljivosti 400 ali 800 ISO, kar je dovolj, da bomo lahko posneli tudi šibkejšje objekte.



SLIKA 2.

Zorno polje refraktorja 60/900 z dodano Barlow lečo 2X in 9-milimetrskim okularjem z nitnim križem. Krogi kažejo, za koliko lahko pleše zvezda, ki ji sledimo, pri fotografiranju z različnimi objektivom.

In kdo nam bo poziral?

Pravi projekt, ki je primeren za društva in šolske krožke, pa tudi za posameznike, je fotografiranje posameznih ozvezdij. Za to potrebujemo objektivom od 35-milimetrov (za največja ozvezdja, kot je na primer Veliki medved) do 135-milimetrov (za tista najmanjša, kot sta na primer Delfin ali Žrebiček). Naj-

večkrat pa lahko celotno ozvezdje ujamemo v 50-milimetrski objektiv.

Da bo naloga nekoliko zahtevnejša in seveda še bolj zanimiva, lahko z izbiro različnih časov osvetlitve ozvezdja posnamemo tako, da so na enem posnetku le tiste zvezde, ki jih vidimo s prostimi očmi (torej je mejna magnituda na posnetku 6,5), na drugem posnetku zvezde do osme magnitude, na tretjem do devete itn.

Ko usmerimo fotoaparatus proti izbranemu ozvezdju, moramo biti prepričani, da bo celotno ozvezdje res na posnetku. Ker v iskalu fotoaparatus vidimo le najsvetlejšje zvezde, si pomagamo s preprostim trikom. Ko so naše oči prilagojene na gledanje v temi, lahko v iskalu fotoaparatus vidimo temno silhueto naše roke na svetlejšem ozadju neba. Da preverimo, kateri predel neba bomo posneli, gledamo v iskalo in premikamo roko pred objektivom, dokler ne pridemo do roba zornega polja. Sedaj dvignemo oči le toliko nad fotoaparatus, da vidimo, kam kaže roka. To je približno rob našega posnetka. Postopek lahko ponovimo za vse štiri strani. Tako se nam bo le redko primerilo, da fotografirani objekt ne bo v sredini zornega polja.

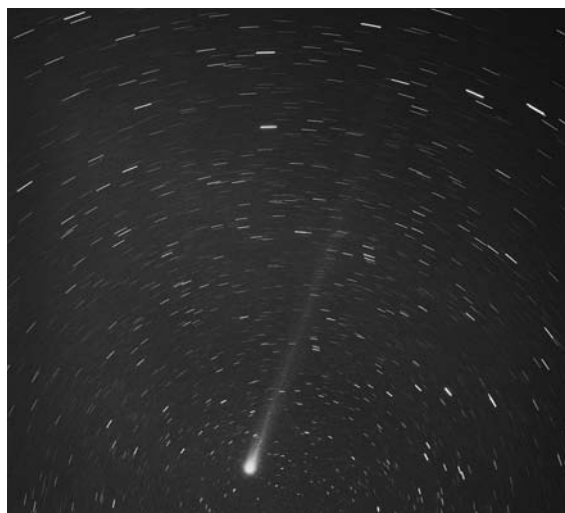
Kratkogoriščni objektivom so primerni še za fotografiranje vseh svetlejših in razsežnejših meglic, ki največkrat sploh niso vidne s prostimi očmi. Na zimskem nebu je takšnih meglic največ v ozvezdju Oriona in Samoroga.

Večje in svetlejšje razsute kopice, kot so Plejade in Hijade v ozvezdju Bika ali pa M 35 v ozvezdju Dvojkov, so prav primerni objekti za preprosto astrofotografijo. Kateri objektiv bomo izbrali za določen objekt? Odgovor je odvisen od naših želja.

Kot primer si oglejmo fotografiranje Plejad. Navidezni premer kopice je približno 100 ločnih minut oziroma 1,7 stopinje. Če želimo panoramski posnetek Plejad, na katerem bo vidno, kje na nebu kopica leži, bomo uporabili 50-milimetrski objektiv. Če bodo Plejade v sredini posnetka, bomo zajeli še okoli z Aldebaranom in Hijadami in še dele vseh sosednjih ozvezdij. Vedeti pa moramo, da bodo Plejade na takšnem posnetku majhne, velike le 1,5 milimetra. Če želimo posneti portret samih Plejad, moramo izbrati teleobjektiv z goriščno razdaljo med 400 in 600 milimetri.

Kroglaste kopice, planetarne meglice in galaksije pa zaradi razmeroma majhne navidezne velikosti za astrofotografijo z objektivom niso primerne (razen ne-





SLIKA 3.

To fantastično fotografijo Andromedine galaksije je posnel eden naših najboljših astrofotografov Jurij Stare.



SLIKA 4.

Komet Hyakutake, posnet 27. marca 1996 s 65-milimetrskim f/3,5 objektivom na film T-Max 400. Čas osvetlitve je bil 22 minut, polje na sliki je veliko 40 krat 40 stopinj. Tehnika sledenja je pri kometih nekoliko drugačna. Kometi imajo ponavadi tako veliko lastno gibanje po nebu, da moramo obvezno v sledilnem teleskopu slediti kometu in ne kateri od bližnjih zvezd. Tako bo slika kometa ostra in polna podrobnosti, zvezde pa bodo krajše ali daljše črtice (odvisno od časa osvetlitve in velikosti lastnega gibanja kometa). Foto: Herman Mikuž in Bojan Kambič.

kaj izjem, kot je na primer galaksija M 31 v ozvezdju Andromede). Če planetarno meglico M 57 v ozvezdju Lire posnamemo z 200-milimetrskim teleobjektivom, bo njena velikost na fotografiji 20 krat 30 centimetrov le 0,7 milimetra.

Za dobre fotografije navidezno majhnih objektov moramo uporabiti dolgogoriščne objektivne oziroma kar objektiv teleskopa in posneti sliko v njegovem primarnem gorišču. To pa je že druga zgodba.

× × ×



Program in projekt SAGE



MATJAŽ KOVŠE

→ Predstavljen je program SAGE, ki ga nekateri imenujejo tudi veleprojekt svetovne matematične skupnosti in predstavlja alternativo mnogim znanim komercialnim programom, kot so Magma, Maple, Mathematica in Matlab. Predstavljenih je nekaj enostavnih primerov uporabe.

Nekaj osnovnih podatkov o programu

SAGE je odprtokodni matematični program, ki ga lahko uporabimo za raziskovanje in eksperimentiranje na področju elementarne in višje matematike, na področju teoretične in uporabne matematike. Matematična področja, ki jih zajema, so: teorija števil, algebra, analiza, numerična matematika, kriptografija, teorija grup, kombinatorika, teorija grafov. Program je primeren tako za izobraževalne namene kot za raziskovanje. Namen SAGEa je poenotiti, združiti, a hkrati tudi razširiti obstoječe programe in programska okolja s področja matematike. Znotraj programa je možno uporabljati in povezati mnoge ostale komercialne in nekomercialne programe. Sam program je zgrajen s pomočjo skoraj 100 obstoječih odprtokodnih paketov (ki izvirajo iz samostojnih raziskovalnih projektov), ki so v SAGEu združeni s poenotenim vmesnikom. Ker uporablja visoko razvita in optimizirana odprtokodna orodja, kot so GMP, PARI (teorija števil), GAP (teorija grup), NTL, je pri nekaterih izračunih zelo hiter. Celotna sintaksa ukazov, ki niso uvoženi iz ostalih orodij, je enaka kot v programskemu jeziku Python.

SAGE lahko uporabljamo znotraj brskalnika, ki se lokalno poveže s programom iz našega računalnika, ali preko katerega izmed obstoječih strežnikov na omrežju. Prav tako lahko objavimo delovne liste in

jih na svetovnem spletu delimo z ostalimi uporabniki. Znotraj SAGE beležke lahko ustvarjamo matematične formule, grafiko in še mnogo druge stvari. Simbolično računanje je zelo enostavno in učinkovito. Z učinkovitostjo in pestrostjo uporabe je SAGE odprtokodna alternativa znanim komercialnim programom, kot so Magma, Maple, Mathematica in Matlab.

Glavna spletna stran projekta je

- <http://www.sagemath.org/>.

Na tej strani se nahajajo osnovne informacije o programu, povezave na spletne strani, od koder si je možno prenesti program, in povezave na druge strani, povezane s projektom. Inštalacija v operacijskih sistemih Linux ali Mac OS X je zelo enostavna. Pri inštalaciji v operacijskih sistemih Windows pa si moramo pomagati z virtualnim okoljem, kot je recimo VirtualBox.

Najbolj znan strežnik, preko katerega lahko uporabljamo SAGE, se nahaja na naslovu:

- <http://www.sagenb.org>.

Za delo na strežniku si moramo izbrati samo uporabniško ime in geslo. Razen obremenjenosti strežnika in vpliva hitrosti prenosa podatkov preko interneta je delo v programu, ki smo ga namestili na samostojnem računalniku ali strežniku, identično.

Sage lahko uporabljamo na več načinov:

- s pomočjo grafičnega vmesnika (v poljubnem standardnem brskalniku, kot so Mozilla Firefox, Chrome, Safari, Opera, Internet Explorer),
- s pomočjo ukazne vrstice,
- pomočjo pisanja programov, ki jih potem naložimo v samem programu,
- s pomočjo skript napisanih v programskem jeziku Python.

Delo v SAGEu in nekaj primerov uporabe

Nov delovni list ustvarimo s klikom na

- new worksheet



→ in že lahko pričnemo z delom. Vpišemo na primer $2+2$ in kliknemo na evaluate (oziroma pritisnemo hkrati tipki Shift in Enter):

- $2 + 2 = 4.$

SAGE računa z ulomki na simboličen način:

- $1/2 + 2/3 = \frac{7}{6}$

in jih samodejno okrajša:

- $5/10 = \frac{1}{2}.$

Prav tako lahko definiramo spremenljivke in jim določimo vrednosti. Recimo

$a=2$

$b=-1$

in potem izračunamo

- $a + b = 1.$

Privzeto je v programu definirana samo spremenljivka x . Tako lahko izračunamo

- $x + x = 2x.$

Ostale spremenljivke definiramo s pomočjo ukaza `var()`, recimo `var('y')`. Za množenje se uporablja ukaz `*`. Tako izraz $3x + 2$ pravilno vnesemo kot $3*x+2$. Za vnos potence uporabimo operator `^` ali operator `**`. Tako lahko x^2 zapišemo kot x^2 ali $x**2$.

Nekaj primerov uporabe simboličnega računa prikazeta naslednja dva primera. Ukaz `expand` razširi izraz sestavljen iz spremenljivk, tako nam ukaz

`expand((x+y)^5)` vrne

- $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$

Ukaz `factor` poskrbi za razcep izraza sestavljenega iz spremenljivk, tako nam ukaz

- `factor(x^2+2*x*y+y^2)`

vrne

- $(x + y)^2.$

Ukaz `simplify` poenostavi izraz, sestavljen iz spremenljivk, tako ukaz

- `simplify(factor((x^2-1)/(x-1)))`

vrne

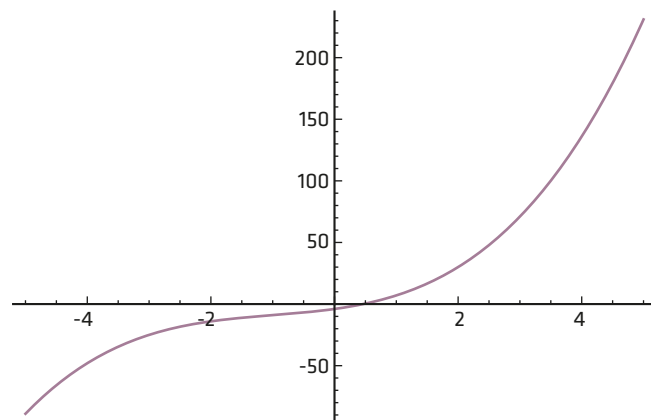
- $x + 1.$

V kolikor imena funkcije, ki bi jo potrebovali, ne poznamo v celoti, lahko vtipkamo samo nekaj začetnih črk ter pritisnemo na tipko TAB. S tem zaporedjem ukazov se izpišejo vsi vgrajeni ukazi, ki vsebujejo kot podniz niz znakov, ki smo jih pred tem zapisali. V kolikor je X poljuben matematični objekt, ki smo ga definirali, lahko z ukazom $X.$ in pritiskom na tipko TAB dobimo seznam vseh ukazov, ki so povezani z objektom X .

Če vtipkamo `plot?`, se izpišejo osnovne informacije o funkciji `plot` (za risanje grafov funkcij) in nekaj primerov njene uporabe. Če vtipkamo `plot??`, se nam prikaže vsa dokumentacija te funkcije, kjer si lahko ogledamo tudi podrobnosti o tem, kako je vse skupaj sprogramirano.

Enostavnejše matematične funkcije lahko definiramo na naslednji način: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x - 4$. Graf funkcije f na intervalu $[-5, 5]$ narišemo z ukazom:

`p = plot(f, x, -5, 5).`



Pri tem f predstavlja ime funkcije, katere graf želimo narisati, x ime spremenljivke, ki nastopa v funkciji, -5 ter 5 predstavljata meji intervala, kjer želimo narisati graf funkcije.

Definirajmo funkcijo $e^x \sin(2x)$ z naslednjim zaporedjem ukazov:

$$g(x) = \exp(x) * \sin(2*x).$$

Potem lahko njen drugi odvod izračunamo s pomočjo ukaza `diff(g, x, 2)`, in dobimo

$$\frac{d^2}{dx^2} e^x \sin(2x) = -3e^x \sin(2x) + 4e^x \cos(2x).$$

Nedoločeni integral funkcije $g(x)$ lahko izračunamo s pomočjo ukaza `integral(g, x)` in dobimo

$$x \rightarrow \frac{1}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))e^x.$$

Ukaz `integrate(g, x, 1, 5)` nam vrne vrednost določenega integrala funkcije g na intervalu $[1, 5]$:

$$x \rightarrow -\frac{1}{5}e \sin(2) + \frac{2}{5}e \cos(2) + \frac{1}{5}e^5 \sin(10) - \frac{2}{5}e^5 \cos(10).$$

S pomočjo zaporedja ukazov

$$N(\text{integrate}(g, x, 1, 5), \text{digits}=10)$$

lahko izračunamo numerični približek zgornjega računa na deset števk natančno:

$$32.71689711.$$

Sezname zapišemo tako, da damo elemente seznama med oglete oklepaje `[ in ]` in jih ločimo z vejico. Sisteme linearnih enačb lahko rešujemo s pomočjo ukaza `solve`. Recimo

$$\text{solve}([x + y == 6, x - y == 4], x, y)$$

nam vrne rešitev

$$[[x == 5, y == 1]].$$

Bolj zapleten primer reševanja nelinearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} &\text{var}('a, b, c') \\ &\text{eqn} = [a+b*c==1, b-a*c==0, a+b==5] \\ &s = \text{solve}(\text{eqn}, a, b, c) \end{aligned}$$

nam vrne rešitve sistema enačb

$$[bc + a = 1, -ac + b = 0, a + b = 5]:$$

$$\begin{aligned} &\left[a = \frac{25i\sqrt{79} + 25}{6i\sqrt{79} - 34}, b = \frac{5i\sqrt{79} + 5}{i\sqrt{79} + 11}, \right. \\ &\quad \left. c = \frac{1}{10}i\sqrt{79} + \frac{1}{10} \right] \\ &\left[a = \frac{25i\sqrt{79} - 25}{6i\sqrt{79} + 34}, b = \frac{5i\sqrt{79} - 5}{i\sqrt{79} - 11}, \right. \\ &\quad \left. c = -\frac{1}{10}i\sqrt{79} + \frac{1}{10} \right]. \end{aligned}$$

Delovni list (worksheet) lahko shranimo na lokalni računalnik tako, da v meniju `File` izberemo možnost `Save worksheet to a file`. Iz lokalnega računalnika ali spletne povezave lahko naložimo delovni list tako, da v istem meniju izberemo možnost `Upload worksheet from a file`. S klikom na gumbek `Edit` lahko vnašamo besedilo med posamezna delovna polja (možno je tudi uporabljati latex-formule). Pri kopiranju ukazov iz priročnikov je potrebno biti pozoren na to, da se lahko znaki za narekovaje ' izpišejo drugače, kot bi se morali, zato je potrebno v tem primeru pogosto popraviti vse narekovaje. V kolikor naletimo na težave pri izpisovanju matematičnih simbolov v brskalniku, je dobro preveriti, če je ustrezno nameščen program `jsMath`.

Kako se najlažje naučim SAGEa?

Pomoč lahko najdemo na podstrani `Help and Support` (<http://sagemath.org/help.html>). Tam lahko poleg osnovne dokumentacije najdemo tudi posnetke kratkih uvodnih predstavitev programa in razna ostala gradiva namenjena novim uporabnikom. Prav tako priporočamo strani `Tutorial`

$$\text{http://sagemath.org/doc/tutorial/index.html.}$$

Interaktivno verzijo priročnika lahko prikličemo tudi znotraj samega programa, z izbiro menija `Help`. Priporočamo tudi kartice z zbirko osnovnih ukazov – `Quick Reference Cards`, priročnik, ki razlaga konstrukcije – `Constructions`, in kratke predstavitve `SAGEa – Sage Feature Tour`.

Poleg tega obstajata dve zelo aktivni novičarski skupini, kjer je možno zelo hitro poiskati pomoč: <http://groups.google.com/group/sage-devel> (imenjena razvijalcem),





■ <http://groups.google.com/group/sage-support>

(namenjena vsem uporabnikom, ki potrebujejo pomoč). Precej razvijalcev programa tudi aktivno objavlja zapise o SAGEu na blogih ali objavlja skripte in predavanja, povezana z uporabo SAGEa.

SAGE skupnost

Vsi sodelujoči razvijalci pri projektu so prostovoljci. Vsakdo je dobrodošel, da se pridruži pri nadaljnjem razvoju projekta. Običajno se nekajkrat na leto vse nove funkcije in aplikacije, ki so jih sprogramirali prostovoljci, dodajo v novo verzijo programa, ki je potem prosto dosegljiva na spletni strani in omogoča enostavno posodobitev programa. Vse nove funkcije so recenzirane, tako da se napake običajno odpravljajo sproti. Prednost pred komercialnimi paketi je tudi ta, da lahko uporabnik dostopa do vseh delov programa in vidi, kako je kaj sprogramirano.

Nekajkrat na leto se zvrstijo SAGE dnevi - SAGE days, bodisi v obliki samostojnih dogodkov ali kot spremljevalno dogajanje na različnih matematičnih konferencah. Poleg uvodnih predstavitev, katerih namen je razširiti krog uporabnikov, se pogosto srečajo razvijalci s sorodnih raziskovalnih področij in se posvetijo razvoju programa glede na določeno po-

dročje. Več o teh dogodkih je možno spremljati na spletni strani: <http://wiki.sagemath.org/SageDays>. V Sloveniji uporabljamo SAGE na Oddelku za matematiko in računalništvo, Fakultete za naravoslovje in matematiko, Univerze v Mariboru. Pričujoči prispevek je skromna želja avtorja razširiti krog uporabnikov programa SAGE v slovenskem matematičnem prostoru.

xxx

→
→
→
REŠITEV BARVNI SUDOKU

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

xxx



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	--

Optična vlakna



NADA RAZPET

→ Pred približno tremi desetletji so v nekdanji tovarni Iskra začeli izdelovati optična vlakna. Izdelavo takih vlaken smo si lahko tudi ogledali in ob koncu obiska prejeli kolut vlaken, izdelanih v poskusni seriji.

Optično vlakno je imelo več plasti. Plast v sredini je imela največji lomni količnik, na obodu pa najmanjšega. Vlakno je bilo krhko, zato so ga zaščitili s posebnim zaščitnim slojem.

Svetloba se pri prehodu iz snovi, ki ima večji lomni količnik, v snov, ki ima manjši lomni količnik, lomi stran od vpadne pravokotnice. Od določenega mejnega vpadnega kota naprej svetloba ne prehaja več v sosednjo plast, ampak se na meji popolnoma odbije. To pomeni, da svetloba v vlaknu ostane. Čim manj je preide skozi plasti, tem boljše je vlakno, ker je manj izgub. Svetlobo moramo v vlakno poslati v taki smeri, da se je na meji dveh plasti čim več odbije.



foto: Marko Razpet

Današnja vlakna imajo večinoma le tri plasti: sredico ali jedro, ki ima večji lomni količnik, oblogo, ki ima manjši lomni količnik, in zaščito, ki varuje krhki del vlakna.

Kako je nastala fotografija? Vlakna smo narezali na enako dolge dele in jih na enem koncu pritrdili na stojalo ter postavili navpično. Zaradi teže so se vlakna upognila navzdol, v nekakšno palmo. Za vlakni smo na mizo postavili gorečo svečo. Ker je plašč gladek, se na njem svetloba odbija po odbojnem zakonu. Od sveče v oko prihaja le del svetlobnih žarkov, ki se odbije na vlaknih, in sicer tisti, ki se odbije pod določenimi koti, znotraj nekega intervala. Ti žarki tvorijo plašč stožca, ki ima vrh v očesu, prečni presek (ki je približno krog) pa na vlaknih, zato vidimo na vlaknih svetel kolobar.

× × ×

Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti.



Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR

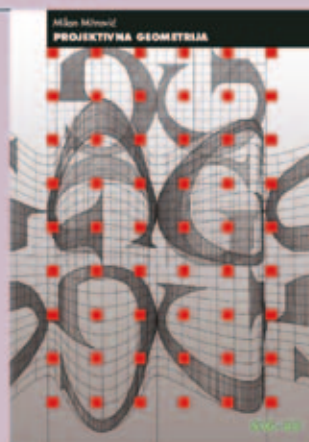


Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

Nekaj matematičnih
zamisli

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.