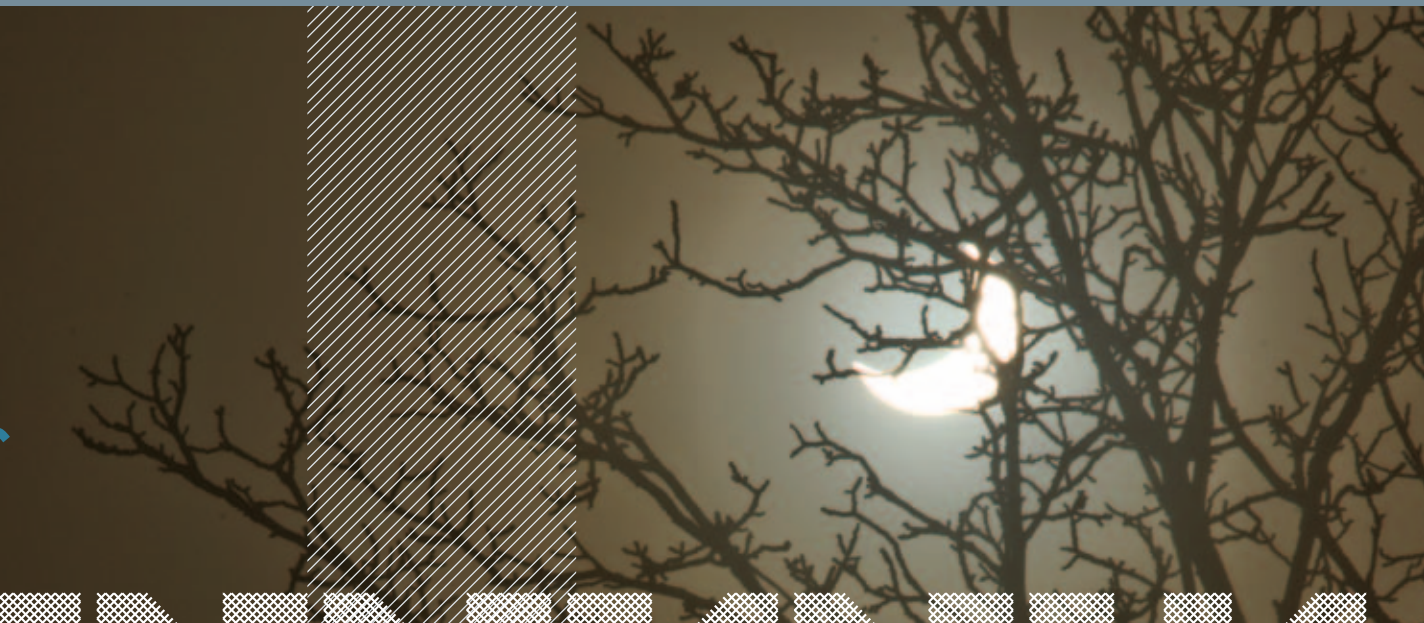
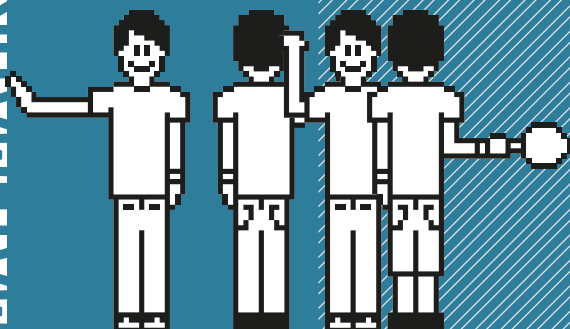




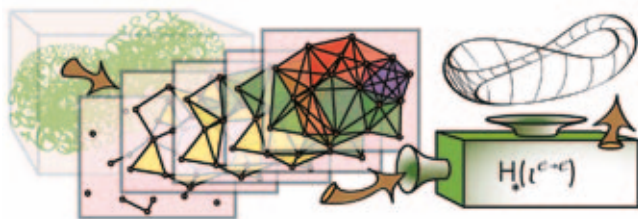
PRESEK



- TRI MISELNE IGRE
NA ŠAHOVNICI
- PRISLUHNI MO TRKU!
- OZVEZDJE NA MIZI
- NAGRADNA KRIŽANKA



Analiziranje podatkov



→ Veliko sodobnega raziskovanja – od urejanja gena do digitalnega pregledovanja vesolja – generira ogromne količine večdimenzionalnih podatkov. Na žalost je vizualizacija dimenzij višjih od tri zahtevna, zaradi česar je analiziranje in razumevanje podatkov zelo težko. Topologija, področje matematike, ki se ukvarja z lastnostmi geometrijskih struktur, pomaga osmisлити velike množice podatkov tako, da omogoča razvrstitev oblik teh množic v razrede. Posebno uporabna je za iskanje skupin podobnih točk imenovanih skupine. Te na primer razlikujejo med različnimi tipi dane bolezni, ki vsaka zahteva svojo obravnavo.

Topologija (posebej algebraična topologija) je tudi pomembna v delovanju brezžičnih senzorskih omrežij, ki so uporabna v tako različnih aplikacijah, kot je nadzorovanje prometa ali kontrola namakanja. V kombinaciji z numerično integracijo rezultati algebraične topologije omogočajo popolno sliko, ki temelji na povsem lokalnih podatkih. Prednost tega je, da so senzorska omrežja, ki jih upravljamo brez GPSa ali drugih oddaljenih merilcev, v splošnem mnogo cenejša za upravljanje. V primeru namakanja matematična odkritja, ki so bila narejena skoraj eno stoletje pred nastopom današnje tehnologije, prihranijo denar in hkrati pomagajo skrbno uporabljati dragoceno vodo. V jeziku topologije, tako kot Möbiusov trak: kar gre okoli, pride okoli.



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 38, šolsko leto 2010/2011, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vladimir Bensa, Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2010/2011 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA–založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1500 izvodov

© 2010 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1819

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevi naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Analiziranje podatkov

MATEMATIKA

- 4-6** Tri miselne igre na šahovnici
(*Kristijan Breznik*)
- 7-10** Posebne pitagorejske trojice in
trikotniška števila (*Marko Razpet*)

FIZIKA

- 11-13** Prislunhimo trku!
(*Andrej Likar*)
- 14** Galilejeva in Einsteinova življenja
(*Andreja Gomboc*)
- 15** Barva hrošča
(*Aleš Mohorič*)
- 18** Kaj se zgodi s plastenko – Poizkuševalnica
v hribih (*Mojca Čepič*)
- 18-20** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)

ASTRONOMIJA

- 21-24** Ozvezdje na mizi – Kaj so ozvezdja
(*Andrej in Liza Guštin*)

RAČUNALNIŠTVO

- 27-30** Kako teleportirati sliko?
(*Igor Pesek*)

RAZVEDRILO

- 31** Kapljica – Naravoslovna fotografija
(*Tine Golež*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 38/3
(*Marko Bokalič*)
- 13,30** Kakuro
- 20,24** Sudoku

TEKMOVANJA

- 24-26** Tekmovanje v znanju astronomije – drugič
(*Andrej Guštin*)
- priloga** 1. tekmovanje v znanju astronomije
– šolsko tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz fizike za bronasto
Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz znanja poslovne matematike
za srednje šole za bronasto tekmovanje
– šolsko tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: V novo leto nas je pospremil delni Sončev mrk. Na sliki z naslovnice se skriva za drevesnimi vejami, saj je bil v naših krajih viden 4. Januarja zjutraj nizko nad obzorjem. (foto: Andrej Guštin)

Tri miselne igre na šahovnici



KRISTIJAN BREZNIK

→ V prejšnjem prispevku smo predstavili miselni igri za enega igralca, ki ju lahko igramo na klasični 8×8 šahovnici. V nadaljevanju se bomo lotili treh iger, namenjenih igranju dveh igralcev, ki igrata drug proti drugemu. Zadnji dve igri nimata ničesar skupnega s šahom, razen šahovnice, a sta med opisanimi igrami najbolj kompleksni in se pojavljata tudi na tekmovanjih.

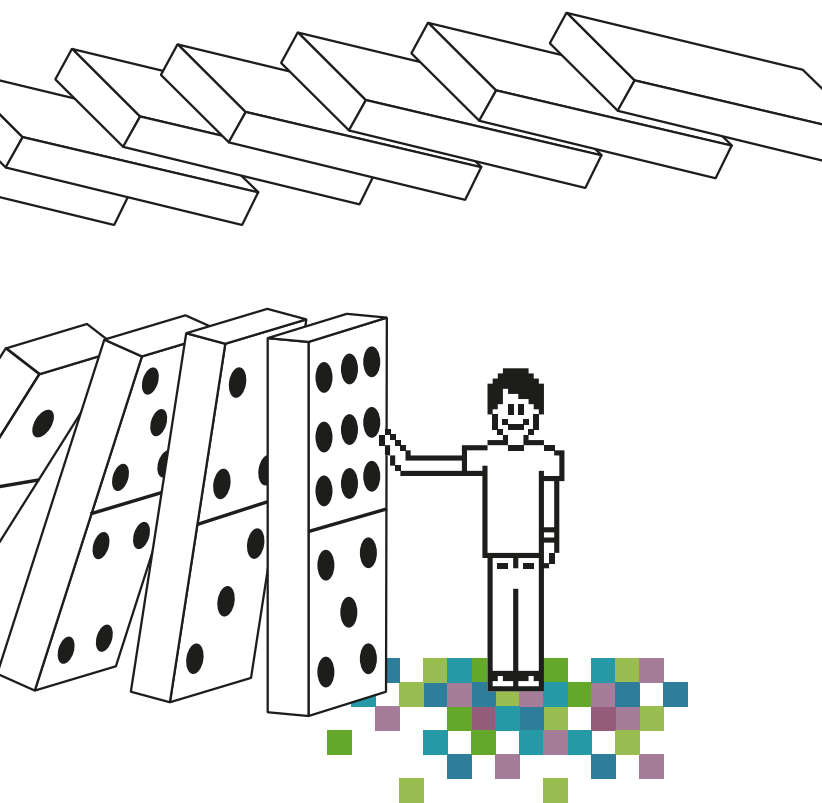
Trdnjavin pohod

V svojih gimnazijskih letih sem na matematičnem tekmovanju naletel na nalogo, ki jo najdemo tudi v [3]. V levem spodnjem kotu šahovnice stoji trdnjava. Dva igralca jo izmenično premikata, igralec na potezi mora premakniti trdnjavo ali desno ali navzgor za vsaj eno polje. Izgubi tisti, ki premakne trdnjavo v desno zgornje polje, torej na polje $h8$. Vprašanje se je glasilo:

- Kateri igralec lahko vedno zmaga?

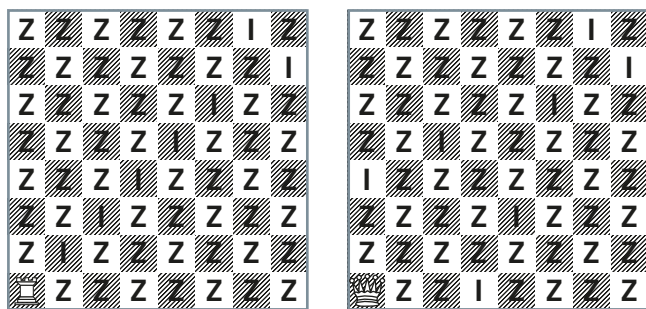
Že samo vprašanje vzbudi slutnjo, da lahko igro rešimo, kar pomeni, da lahko eden izmed igralcev ob pravilni igri vedno zmaga ne glede na to, kako bo igral njegov nasprotnik.

Analize igre se lahko lotimo na več načinov. Pogosto poiščemo najbolj kritična polja na šahovnici. To storimo tako, da igro analiziramo iz končne pozicije. Jasno je, da je igralec na potezi ob trdnjavi na polju $g8$ ali $h7$ izgubljen, saj mora v naslednji potezi



trdnjavo postaviti na $h8$. Hitro se prepričamo, da je polje $f6$ ključnega pomena, saj bo igralec, ki ga je s trdnjavo zasedel, tudi zmagal. Če je namreč igralec v zadnji potezi premaknil trdnjavo na polje $f6$, bo po naslednji potezi nasprotnika zasedel polje $g8$ ali polje $h7$ in tako zmagal. Podobno razmišljamo naprej in ugotovimo, da so ključnega pomena polja na diagonali $a1 - f6$. Igralec, ki je premaknil trdnjavo na katero od teh polj, bo ob pravilni igri v nadaljevanju zmagal. Povedano drugače: če je trdnjava na diagonalni $a1 - f6$, igralec na potezi izgubi. Na začetku je trdnjava na polju $a1$, torej je odgovor na začetno vprašanje, da lahko vedno zmaga drugi igralec. Njegova strategija je zelo preprosta: trdnjavo premika na polja diagonale $a1 - f6$, če pa je le mogoče, jo premakne na polje $g8$ oz. $h7$.

Na enak način analiziramo igro, kjer se namesto trdnjave premika dama. Tudi dami omejimo premikanje, in sicer se lahko premika le navpično navzgor, v desno in po diagonali v smeri od levo spodaj proti desno zgoraj za vsaj eno polje. Rešitvi obeh iger sta prikazani na sliki 1. Polje, označeno s črko I , pomeni, da je igralec, ki je na potezi, s figuro na tem polju izgubljen. Podobno črka Z pomeni, da bo ob pravilnem nadaljevanju igralec, ki je na potezi, zmagal ne glede na igro nasprotnika. Zmagovita strategija igralca na potezi je figuro premakniti na polje, označeno z I .



SLIKA 1.

Slika prikazuje rešitev trdnjavinega (levo) in daminega pohoda (desno).

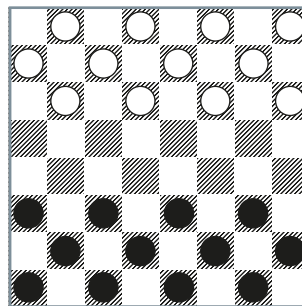
Iz povedanega sledi, da je trdnjavin pohod igra, dobljena za drugega igralca, in damin pohod igra, dobljena za prvega igralca. Zelo podobna obema je igra, pri kateri v levem spodnjem kotu šahovnice leži že-

ton, ki ga dva igralca izmenično prestavljata po njej; dovoljene poteze so levo gor, gor, desno gor, desno in desno dol. Zmaga tisti igralec, ki prvi spravi žeton v desni zgornji kot. Natančnejši opis igre in njeno rešitev, s pomočjo barvanja polj, lahko najdemo na spletni strani [4].

Žetoni

V nadaljevanju bomo predstavili igri, ki sta tekmovalno zelo zanimivi. Prva je zelo podobna igri, ki jo pri nas poznamo pod imenom *dama*. V Združenih državah Amerike ji pravijo *checkers*, v Kanadi in Angliji pa *draughts*. Razširjena je tudi drugod po svetu, sam sem naletel nanjo v Turčiji, kjer jo po navadi prodajajo skupaj z igro *backgammon*.

Na začetku imata oba igralca na šahovski tabli po dvanajst t. i. žetonov (angl. *checkers*), postavljenih le na črna polja. Začetni položaj je prikazan na sliki 2.



SLIKA 2.

Začetna postavitev žetonov v igri checkers

Igralca nato žetone izmenično premikata diagonalno naprej za eno (prosto) polje, torej igra poteka le po črnih poljih. Če je žeton enega izmed igralcev na sosednjem diagonalnem polju glede na žeton drugega igralca in je polje za njegovim žetonom prazno, **mora** prvi igralec s svojim žetonom preskočiti žeton drugega igralca in hkrati odstraniti nasprotnikov žeton. V eni potezi je mogoče odstraniti tudi več nasprotnikovih žetonov zaporedoma. V primeru, ko eden izmed igralcev pripelje svoj žeton na nasprotni rob šahovnice, njegov žeton postane kralj, ki se lahko premika diagonalno naprej in tudi nazaj, žetone pobira enako kot ostali žetoni, vendar tudi nazaj. Kralja med igro zaznamujemo tako, da postavimo dva žetona enega na drugega. Zmaga igralec, ki pobere vse nasprotnikove žetone oziroma nasprotniku onemogoči nadaljevanje igre, torej prepreči vse mogoče poteze.





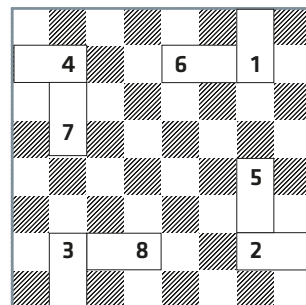
Igra je precej priljubljena, saj organizirajo tudi tovrstna svetovna prvenstva. Kot je značilno za miselne igre, tudi omenjena vedno bolj prehaja v domeno računalnikov. Na spletu lahko igramo proti računalniškemu programu Chinook [5], ki so ga razvili na kanadski univerzi v Alberti. Nadobudnejšim igralcem toplo priporočam kakšno igro proti temu programu. Nasploh je bil program Chinook prvi računalniški program, ki je postal svetovni prvak v kateri koli miselni igri v absolutni konkurenci, torej tudi z ljudmi. To mu je uspelo leta 1994 kar je zapisano tudi v Guinnessovi knjigi rekordov. Na omenjeni univerzi v Alberti so z izboljšavami tega programa celo rešili igro checkers [2]. Dokazali so: če bi oba igralca igrala optimalno, bi bil rezultat te igre vedno neodločen. To pa še zdaleč ne pomeni, da je tudi človek zmožen optimalno igrati to igro. Obstajajo še podobne različice te igre, igrajo se tudi na ploščah velikosti 10×10 ali celo 12×12 .

Domine

V tej igri igralca izmenično polagata pravokotnike, velikosti dveh kvadratkov (dveh šahovskih polj), imenovanih tudi *domine*, na šahovnico, in sicer tako, da se domine ne prekrivajo. Prvi igralec jih polaga le v navpični smeri, drugi pa le vodoravno. Igro izgubi tisti, ki ne more narediti poteze, torej ne more položiti domine na šahovnico. Iz pravil igre izhaja, da neodločen izid ni mogoč. Zaradi simetrije je, pri pravilnem igranju, igra zagotovo dobljena bodisi za prvega bodisi za drugega igralca ne glede na to, kako igra nasprotnik. V splošnem je ta igra relativno neraziskana, saj do danes niso uspeli ugotoviti, kateri igralec ima že na začetku odločilno prednost. Ugotovljeno je bilo, da je igra domin na plošči velikosti 5×5 dobljena za drugega igralca, vendar nam to nič ne pove o igri na klasični šahovnici, ki je zato toliko zanimivejša. Vsak izmed igralcev stremi k temu, da si naredi prostor na šahovnici, kjer bo le on lahko polagal domine.

Pri analizi lahko celotno igro razdelimo v tri faze: otvoritev, srednjo igro in končnico. Otvoritev obsega okoli osem potez, torej vsak igralec postavi na šahovnico po štiri domine. O postavljanju domin v začetni fazi igre se boljši igralci strinjajo, da so zelo pomembni koti šahovnice (glej [1]). Običajno imajo že izdelan koncept otvoritve, ki mu sledijo (podobno kot pri šahu) in ga spreminjajo le, če bi to delovalo

neugodno na nasprotnika. Na sliki 3 je primer ene izmed otvoritvenih pozicij dveh mojstrov te igre, ki sta se pomerila v finalu najmočnejšega turnirja do slej. Hitro opazimo simetrijo postavitve in tudi lego domin v vseh štirih koncih šahovnice. Številke na dominah ponazarjajo vrstni red polaganja domin na šahovnico.



SLIKA 3.

Primer otvoritvene pozicije v igri domine

Najzanimivejša faza igre je srednja igra, ki obsega približno šest potez. Šahovnica se v tej fazi razdeli na več delov, kjer ima prednost eden izmed igralcev. V srednji igri je vsaka napaka verjetno že usodna. Potez v igri domine je v povprečju precej manj kot pri šahu ali prej omenjeni igri z žetoni, zato so napake še posebej težko popravljive. Več napotkov, kako čim bolje igrati to igro, lahko najdemo na [6].

Literatura

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway in R. K. Guy: *Winning ways for your mathematical plays*. Natick: A. K. Peters, cop. 2001–2004.
- [2] J. Schaeffer, N. Burch, Y. Björnsson, A. Kishimoto, M. Müller, R. Lake, P. Lu in S. Sutherland: *Checkers Is Solved*. Science (2007), <http://www.sciencemag.org/cgi/rapidpdf/sci.1144079v1.pdf>
- [3] M. Željko: *Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj, 4. del*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana (1996).
- [4] www.dmfa.si/Seminarji/2008/Zeljko.pdf
- [5] <http://www.cs.ualberta.ca/~chinook/play/>
- [6] <http://www.msri.org/publications/books/Book29/files/westdom.pdf>



Posebne pitagorejske trojice in trikotniška števila



MARKO RAZPET

→ Pitagorejska trojica (x, y, z) je sestavljena iz treh naravnih števil x , y in z , za katera velja relacija $x^2 + y^2 = z^2$. Znano je, da je trikotnik, ki ima stranice dolge x , y in z enot, pravokotni in da je z dolžina hipotenuze, x in y pa sta dolžini katet. Pri tem veljajo običajne relacije med stranicami trikotnika, npr. $x < z$, $y < z$, $x + y > z$, $|x - y| < z$. Ker za tak trikotnik velja *Pitagorov izrek*, imenujemo (x, y, z) *pitagorejska trojica*.

Brez škode za splošnost bomo v nadaljevanju privzeli: $x < y < z$. Števila x, y, z bomo imenovali kar stranice, natančneje x in y kateti, z pa hipotenuzo pitagorejske trojice (x, y, z) . Vsem je znana pitagorejska trojica $(3, 4, 5)$, ker je $3^2 + 4^2 = 5^2$. Števila 3, 4 in 5 so si tuja. Pitagorejska trojica (x, y, z) je *primitivna*, če so si števila x, y in z tuja, torej taka, ki nimajo skupnega delitelja razen 1. Pitagorejska trojica $(3, 4, 5)$ je primitivna, trojica $(6, 8, 10)$ pa ne, ker imajo števila 6, 8 in 10 skupni delitelj 2. Obstaja nešteto primitivnih pitagorejskih trojic (x, y, z) , iz katerih z množenjem z naravnimi števili k dobimo vse druge: (kx, ky, kz) .

Na tem mestu ne bomo navajali postopka, kako poiščemo vse primitivne pitagorejske trojice (x, y, z) , ampak se bomo posvetili tistim, ki imajo

razliko katet enako 1; torej takim, za katere velja $y - x = 1$ oziroma $y = x + 1$ in jih lahko zapišemo kot $(x, x + 1, z)$. Števili x in z sta torej v relaciji $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$ oziroma $2x^2 + 2x + 1 = z^2$. Taka pitagorejska trojica je lahko le primitivna, saj zaporedni naravni števili x in $x + 1$ nimata skupnih deliteljev razen 1. Pri tem je z lahko le liho število. Pitagorejske trojice, pri katerih se kateti razlikujeta za 1, zagotovo obstajajo, saj sta npr. $(3, 4, 5)$ in $(20, 21, 29)$ že te vrste. Spoznali bomo, da je takih pitagorejskih trojic nešteto in da je v nekem smislu $(3, 4, 5)$ njihova mati. Poljski matematik Wacław Sierpiński (1882–1969) je namreč postavil preprosti trditvi.

Trditev 1. Kakor hitro je trojica $(x, x + 1, z)$ pitagorejska in je $x \geq 3$, je pitagorejska tudi trojica $(x_1, x_1 + 1, z_1)$, pri čemer je

$$\blacksquare \quad x_1 = 3x + 2z + 1, z_1 = 4x + 3z + 2.$$

Trditev 2. Kakor hitro je trojica $(x, x + 1, z)$ pitagorejska in je $x > 3$, je pitagorejska tudi trojica $(x_1, x_1 + 1, z_1)$, pri čemer je

$$\blacksquare \quad x_1 = 3x - 2z + 1, z_1 = 3z - 4x - 2.$$

Dokaz

V obeh primerih lahko takoj preverimo:

$$\blacksquare \quad x^2 + (x + 1)^2 = z^2 \implies x_1^2 + (x_1 + 1)^2 = z_1^2.$$

Potrpežljivo je treba zapisati kvadrate trinomov. Kvadrat trinoma je namreč vsota kvadratov vseh treh členov in vseh možnih dvakratnih produktov členov tega trinoma. V prvem primeru velja

$$\blacksquare \quad x > 0, z > 0 \implies x_1 > x, z_1 > z.$$

Nova trojica je pitagorejska z večjimi stranicami od prvotne.

V drugem primeru pa moramo za $x > 3$ dokazati,



→ da je $x_1 > 0$ in $z_1 > 0$. Poleg tega pa ima nova pitagorejska trojica manjše stranice od prvotne.

Za $x > 3$ imamo

$$\blacksquare x^2 > 3x = 2x + x > 2x + 3.$$

Iz $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$ pa

$$\blacksquare 4z^2 = 8x^2 + 8x + 4 = 9x^2 + 8x + 4 - x^2 < 9x^2 + 8x + 4 - (2x + 3) = (3x + 1)^2.$$

Torej velja za $x > 3$ relacija $2z < 3x + 1$ in s tem $x_1 = 3x - 2z + 1 > 0$. Ker je tudi $z < x + (x + 1) = 2x + 1$, dobimo

$$\blacksquare z - z_1 = z - (3z - 4x - 2) = 4x - 2z + 2 = 2(2x + 1 - z) > 0.$$

Torej res velja $z_1 < z$. Preostane nam le še dokaz, da je $z_1 > 0$.

Iz $z^2 = x^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$ in iz $x > 0$ dobimo

$$\blacksquare 9z^2 = 18x^2 + 18x + 9 > 16x^2 + 16x + 4 = (4x + 2)^2 \Rightarrow 3z > 4x + 2.$$

Od tod sledi $z_1 = 3z - 4x - 2 > 0$. Trojica $(x_1, x_1 + 1, z_1)$ je torej pitagorejska, s stranicami, ki so manjše od stranic pitagorejske trojice $(x, x + 1, z)$ za $x > 3$.

Obstajata torej preslikavi f in g v množici pitagorejskih trojic, ki imajo razliko katet enako 1:

$$\blacksquare f : (x, x + 1, z) \mapsto (3x + 2z + 1, 3x + 2z + 2, 4x + 3z + 2) \quad \text{za } x \geq 3,$$

$$\blacksquare g : (x, x + 1, z) \mapsto (3x - 2z + 1, 3x - 2z + 2, 3z - 4x - 2) \quad \text{za } x > 3.$$

Primeri

$$\blacksquare \begin{array}{c|c} f & \begin{array}{c} (3, 4, 5) \\ (20, 21, 29) \\ (119, 120, 169) \\ (696, 697, 985) \\ (4059, 4060, 5741) \\ (23660, 23661, 33461) \\ (137903, 137904, 195025) \end{array} \\ \downarrow & \\ \blacksquare & \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ g \end{array}$$

Vidimo, da funkcija f stranice pitagorejskih trojic

$(x, x + 1, z)$ strogo monotonno povečuje. Njena večkratna uporaba nas pripelje do poljubno velike pitagorejske trojice, ki ima drugo kateto za 1 večjo od prve. Funkcija g pa stranice pitagorejskih trojic $(x, x + 1, z)$ strogo monotonno zmanjšuje in njena večkratna uporaba nas po končno mnogo korakov pripelje edinole do $(3, 4, 5)$, ker manjše pitagorejske trojice ni. Majhne primitivne pitagorejske trojice

$$\blacksquare (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25),$$

za katere je $5 < z < 29$, pa nimajo izpolnjenega pogoja $y - x = 1$. Naslednja, ki je prava, je $(20, 21, 29) = f(3, 4, 5)$ oziroma $(3, 4, 5) = g(20, 21, 29)$.

Opazimo pa tudi, da se lihost in sodost prvih katet, in prav tako drugih, med seboj izmenjujeta: 3, 20, 119, 696, 4059, ... oziroma 4, 21, 120, 697, 4060, ... Strogo pa to lastnost dokažemo z upoštevanjem definicije funkcije f .

Ni se težko prepričati, da veljata enakosti:

$$\blacksquare g(f(x, x + 1, z)) = (x, x + 1, z) \quad \text{za } x \geq 3,$$

$$\blacksquare f(g(x, x + 1, z)) = (x, x + 1, z) \quad \text{za } x > 3.$$

Preslikavi f in g sta torej na množici pitagorejskih trojic z razliko katet 1 druga drugi inverzni. Če je $x > 3$, velja lastnost komutativnosti:

$$\blacksquare g(f(x, x + 1, z)) = f(g(x, x + 1, z)) = (x, x + 1, z).$$

Za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj oznaka f^k pomeni k -kratni kompozitum funkcije f . Potem lahko za vsako primerno veliko hipotenuzo z zapišemo

$$\blacksquare (x_n, x_n + 1, z_n) = g^n(x, x + 1, z).$$

Pri tem velja $z > z_1 > z_2 > \dots \geq 5$. Za dano pitagorejsko trojico $(x, x + 1, z)$, $x > 3$, pa obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da velja: $g^m(x, x + 1, z) = (3, 4, 5)$. Ker pa za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja relacija

$$\blacksquare f^k g^k(x, x + 1, z) = (x, x + 1, z),$$

imamo

$$\blacksquare f^m(3, 4, 5) = f^m g^m(x, x + 1, z) = (x, x + 1, z).$$

To pomeni, da so vse pitagorejske trojice oblike

$(x, x + 1, z)$ členi zaporedja

- $(3, 4, 5), f(3, 4, 5), f^2(3, 4, 5), f^3(3, 4, 5), \dots$

Povezava s trikotniškimi števili

Trikotniška števila T_n so definirana kot vsota prvih n zaporednih naravnih števil: $T_1 = 1, T_2 = 1 + 2 = 3, T_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \dots$ Splošno formulo za T_n dobimo zelo preprosto. Člene vsote

- $T_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$

zapišemo še v obratnem vrstnem redu:

- $T_n = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1.$

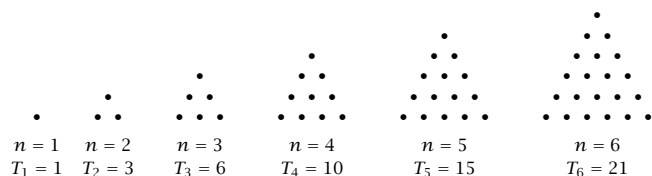
Ko istoležne člene obeh vsot seštejemo, dobimo

- $2T_n = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1).$

Zato je

- $T_n = \frac{n(n + 1)}{2} = \binom{n + 1}{2}.$

Trikotniška števila se torej pojavijo tudi na eni od diagonal Pascalovega trikotnika. Od vseh številnih enakosti, ki vsebujejo trikotniška števila, omenimo samo rekurzivno zvezo: $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$. Sledi neposredno iz definicije teh števil in pomeni, da med T_n in T_{n+1} leži natanko n naravnih števil, ki niso trikotniška. Od kod številom ime? Kot je razvidno s slike, lahko T_n enakih reči razporedimo v trikotnik, ki ima na osnovnici n reči, nato pa na vsaki višji vzporednici po eno reč manj.



Trikotniška števila uvrščamo med t. i. figurativna ali poligonska števila, ker bi po podobnem principu lahko razporejali reči tudi v druge poligone.

Smiselno se je vprašati po trikotniških številih, ki

so popolni kvadrati, torej kvadrati nekih naravnih števil. Očitno taka števila obstajajo, saj je

- $T_1 = 1 = 1^2, \quad T_8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36 = 6^2.$

Poraja se vprašanje, ali so še druga trikotniška števila, ki so popolni kvadrati. V pitagorejski trojici $(x, x + 1, z)$ velja $z^2 = x^2 + (x + 1)^2$, $z > x + 1$ in $z < x + (x + 1) = 2x + 1$. Zato sta števili

- $u = z - x - 1, \quad v = \frac{2x + 1 - z}{2}$

naravni števili. Na podlagi enakosti

- $T_u - v^2 = \frac{(z - x - 1)(z - x)}{2} - \frac{(2x + 1 - z)^2}{4} = \frac{z^2 - x^2 - (x + 1)^2}{4}$

lahko sklepamo, da je

- $T_u = \frac{u(u + 1)}{2} = v^2.$

Torej nam vsaka pitagorejska trojica $(x, x + 1, z)$ da trikotniško število, ki je popolni kvadrat.

Velja tudi obratno. Če je trikotniško število popolni kvadrat, denimo $T_u = v^2$, mu lahko priredimo pitagorejsko trojico $(x, x + 1, z)$ po formulah:

- $x = u + 2v, \quad z = 2u + 2v + 1.$

Velja namreč:

- $x^2 + (x + 1)^2 - z^2 = (u + 2v)^2 + (u + 2v + 1)^2 - (2u + 2v + 1)^2 = 4(v^2 - T_u).$

Iz $T_u = v^2$ očitno sledi $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$. Tako dobimo vsa trikotniška števila, ki so popolni kvadrati. Takih je neskončno mnogo.

Primeri

Pitagorejska trojica $(20, 21, 29)$ nam da $u = 8, v = 6$. Res je $T_8 = 36 = 6^2$.

Še nekaj takih primerov dobimo iz pitagorejskih trojic

- $(119, 120, 169), (696, 697, 985), (4059, 4060, 5741),$



- (23660, 23661, 33461),
(137903, 137904, 195025) :
- $T_{49} = 35^2$, $T_{288} = 204^2$, $T_{1681} = 1189^2$,
 $T_{9800} = 6930^2$, $T_{57121} = 40391^2$.

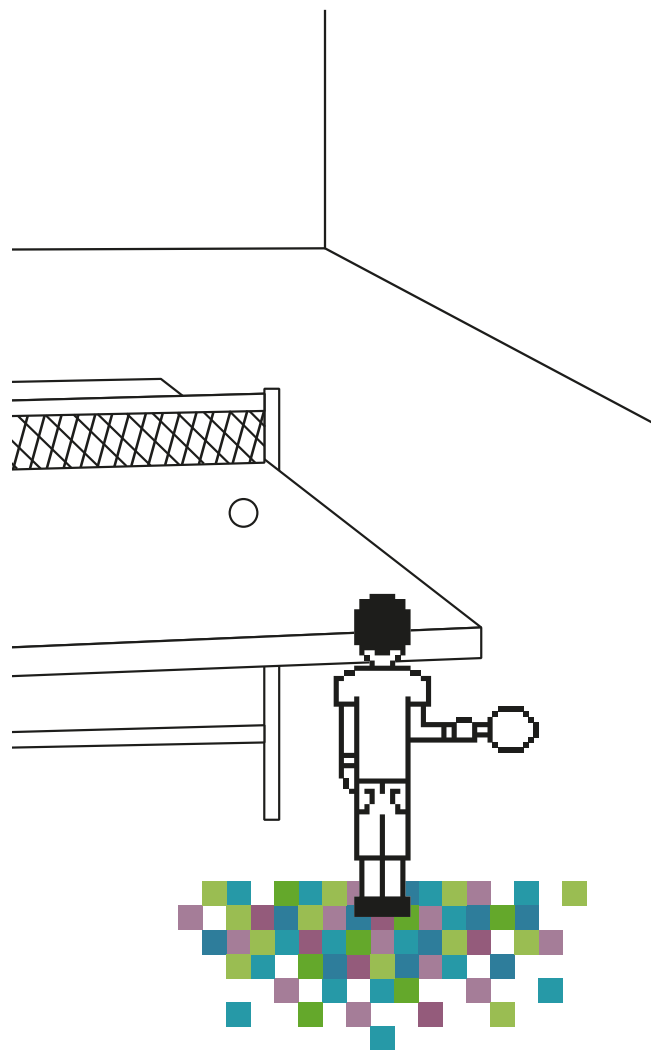
K problemu, katera trikotniška števila T_n so popolni kvadrati, bi lahko pristopili tudi na videz preprosteje. Trikotniško število T_n je popolni kvadrat, če obstaja tako naravno število m , za katero velja $T_n = m^2$. To pomeni, da velja enačba $n(n+1)/2 = m^2$ oziroma $n^2 + n = 2m^2$. Ko to enačbo pomnožimo na obeh straneh s 4 in potem na obeh straneh prištejemo 1, dobimo $4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1$. Očitno lahko dobljeno enačbo preoblikujemo v $(2n+1)^2 = 2(2m)^2 + 1$. Označimo $x = 2n+1$, $y = 2m$, pa smo pri *Pellovi enačbi* $x^2 - 2y^2 = 1$. Splošna Pellova enačba je $x^2 - Dy^2 = 1$, pri čemer naravno število D ni popolni kvadrat. Zanimajo nas samo njene celoštevilске rešitve. John Pell (1611–1685) je bil angleški matematik. Pellovo enačbo so poznali že pred približno poltretjim tisočletjem v Indiji in Grčiji, seveda ne pod tem imenom. Reševanje Pellove enačbe pa ni nič kaj preprosto. Takoj sicer vidimo trivialno rešitev $x = 1, y = 0$, malo težje rešitev $x = 3, y = 2$, še težje $x = 17, y = 12$. Obstajajo formule za rešitve Pellove enačbe in s tem trikotniških števil, ki so popolni kvadrati. Toda to presega okvir tega prispevka, zato se zadovoljimo zgolj z opisanim postopkom iskanja takih trikotniških števil.

Naloga 1. Dokažite naslednjo trditev. Če je T_n trikotniško število, ki je popolni kvadrat, je tako tudi trikotniško število $T_{4n(n+1)}$.

Naloga 2. Z večkratno uporabo funkcije f na pitagorejski trojici $(3, 4, 5)$ dobimo zaporedje pitagorejskih trojic $(x_n, x_n + 1, z_n)$ z vedno večjimi katetami in hipotenuzami. Proti kateremu številu konvergira zaporedje $(x_n/z_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Literatura

- [1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, Ljubljana 1984, 152 str.
- [2] W. Sierpiński, *Pythagorean Triangles*, Dover Publications, Mineola, New York 2003, 107 str.
- [3] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972, 340 str. × × ×



fizika

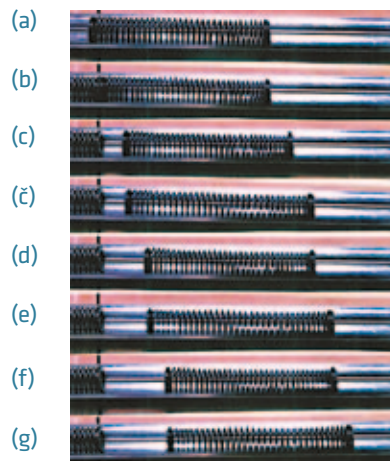
Prisluhnimo trku!



ANDREJ LIKAR

→ V Preseku 36 (2008/2009) 4 smo obravnavali čelni trk dveh prožnih valjev. Ugotovili smo, da je tak trk prožen le, če sta valja enakih premerov in enako dolga. Pri trku valja z dvakrat daljšim pa se del začetne energije porabi za nihanje daljšega valja. Ta sicer idealizirani primer jasno pokaže, da trk prožnih teles ni nujno vedno prožen. Del začetne kinetične energije valjev, ki pred trkom ne nihata, se lahko skrije v energijo nihanja enega ali pa obeh valjev.

Poskus se lepo posreči z vzmetmi, kjer je hitrost motnje majhna. Vzmeti položimo med daljši valjasti kovinski palici, ki ju staknemo po dolžini in na koncih pritrdimo. Najprej poženemo kratko vzmet z dolžino 0,2 m proti enaki, a mirujoči vzmeti. Prva vzmet se po trku povsem ustavi, druga pa se začne gibati s hitrostjo prve. To je povsem jasen dokaz, da je trk prožen. Po trku se vzmeti v vzdolžni smeri ne treseta. Enak izid dobimo, če poskus ponovimo s parom dvakrat daljših vzmeti. Sedaj pa poženimo kratko vzmet proti mirujoči daljši. Ker je masa daljše vzmeti večja, bi pri prožnem trku pričakovali, da se bo krajša vzmet odbila nazaj. A trk ni elastičen in tudi tu kratka vzmet obstane kot prikovana, večja vzmet pa se oddaljuje in povsem jasno se vidi, da niha vzdolž geometrijske osi. Na sliki 1 vidimo zaporedne posnetke vzmeti pred trkom (a), takoj po trku (b) in nekaj zaporednih trenutkov po trku (c–g). Tu vidimo, da se daljša vzmet po trku giblje podobno kot gosenica. Tak vtis nastane, ker se težišče vzmeti giblje enakomerno, vzmet pa tudi niha. Na sliki 2 pa je prikazano nihanje daljše vzmeti skozi celo peri-



SLIKA 1.

Zaporedni posnetki trka kratke vzmeti z dvakrat daljšo. Vidimo, da se kratka vzmet ustavi, dolga pa nadaljuje gibanje kot gosenica. (Foto G. Planinšič)



SLIKA 2.

Nihanje daljše vzmeti po trku s krajšo. Vzmet v težiščnem sistemu niha tako, da so amplitude na koncih največje, v sredini pa je vozel. Neostrost posameznih delov vzmeti se pojavi zaradi gibanja teh delov glede na mirujoči fotografski aparat. (Foto G. Planinšič)

odo. Razmazanost posameznih delov vzmeti na sliki kaže na hitrost vzmeti glede na mirujočo naletno vzmet na desni. Na vrhu vidimo, da je vzmet povsem stisnjena, na sredi slike povsem raztegnjena, na dnu pa spet stisnjena.

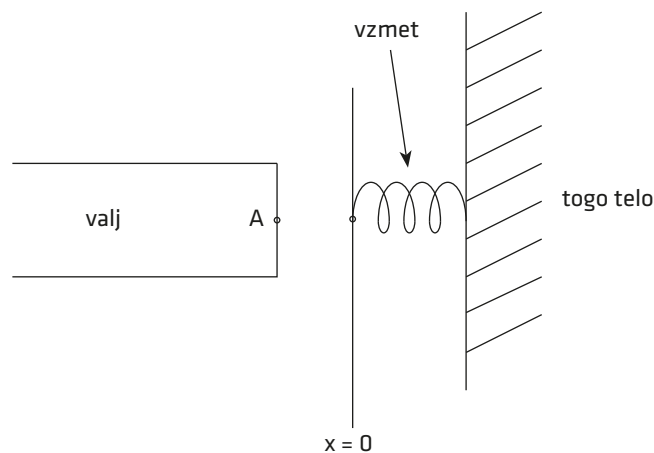




Doslej smo obravnavali le čelne trke. Kaj pa se zgodi, če je med valjema prožna vzmet? Da bo razlaga kar se da preprosta, bomo obravnavali trk valja z zelo lahko in kratko vzmetjo, ki je pritrjena na togo steno, kot kaže slika 3. Ker je vzmet zelo kratka, bomo privzeli, da je sila brez časovnega zaostanka sorazmerna z deformacijo vzmeti, torej da zanjo velja Hookeov zakon. Valj naj se giblje proti vzmeti z začetno hitrostjo v_0 in blizu stene pri $x = 0$ zadene vzmet. Ne bomo pisali enačb, potek trka bomo razbrali iz zaporednih slik, kot jih z ustreznim programom narišemo na računalniški zaslon. Ogledali si bomo časovni potek $x(t)$ in $v(t)$ čelne točke valja A, ki je nekaj časa v stiku z vzmetjo. Zaporedne slike veljajo za valje z različno dolžino (glej sliko 4a–č). Pri zelo kratkih valjih, kjer se motnja, ki jo povzroči vzmet, hitro vrne po odboju na nasprotnem koncu, je potek odmika in hitrosti tak, kot ga da „šolski“ račun s točkaso maso (glej sliko 4a). Nekaj časa se valj stika z vzmetjo, potem pa se od nje odlepi in nadaljuje premo gibanje v nasprotni smeri. Vzmet namreč deluje na valj le, ko je stisnjena. Takrat lahko zelo kratek valj in vzmet obravnavamo kot nihalo, valj se zavira in pospešuje ravno polovico nihajnega časa, ko je pač v stiku z vzmetjo in je le-ta bolj ali manj stisnjena. Trk je povsem elastičen, kinetična energija na začetku je enaka kinetični energiji po trku. Vmes, ko se valj ustavlja in pospešuje v nasprotni smeri, pa je kinetična energija valja manjša od začetne, v napeti vzmeti pa tiči prožnostna energija vzmeti. Ko opazujemo trk z vzmetjo vse daljših valjev, se potek odvisnosti hitrosti točke A od časa vse bolj odmika od poteka, ki ga da račun s točkaso maso. Lepo vidimo, da valj med in po odboju niha (glej sliko 4b–c). Pri zelo dolgem valju so na nasprotnem koncu odbiti signali zakasnjeni do mere, ki je primerljiva s časom odboja. Takrat se razlika jasno opazi tudi na grafu odmika (glej sliko 4č).

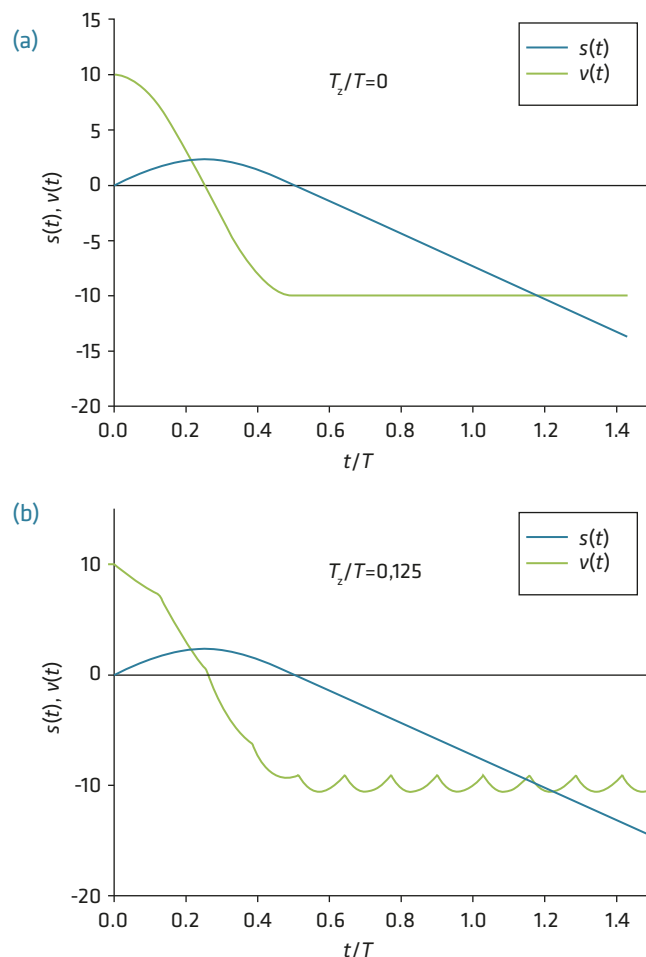
Če je med valji vzmet in je čas trka zelo dolg v primeri z zakasnitvijo zaradi potovanja valovnega čela v valju, je trk skoraj povsem prožen. Za pojave, ki jih obravnavamo, je torej bistveno, da je čas trka zelo kratek in primerljiv z zakasnitvijo. Sicer so trki zelo blizu prožnim. Razmere v tem primeru spominjajo na razmere pri potovanju elektromagnetnih signalov po vodnikih. Pri dovolj visoki frekvenci ne moremo spregledati valovnih lastnosti pojava.

Trku valjev lahko tudi prisluhnemo. Pri poskusu smo uporabili jeklena valja različnih dolžin, ki sta drsela



SLIKA 3.

Zelo dolg valj naleti na en konec kratke vzmeti, ki je na drugem koncu togo vpeta na mirujočo podlago.



Galilejeva in Einsteinova življenja



ANDREJA GOMBOC

→ V Presekovi knjižnici sta izšla dva stripa izpod peresa Fiamija v spretnem in zabavnem prevodu Alojza Kodreta. Stripa na hudomušen način peljeta bralca skozi zgodovino in predstavita najpomembnejše zamisli Galileja in Einsteina.

Knjižica *Galilejeva življenja – Popotovanje skozi čas in astronomijo* nas popelje skozi pomembne postaje v razvoju astronomije. Začnemo v Babilonu, kjer se mladi Galilosor uči računanja, klinopisa in znanja o zvezdah. Nekaj stoletij kasneje Galileos v Aleksandriji sreča Eratostena, ki ga pouči o obliki in velikosti Zemlje. Naslednja postaja je Indija, kjer Galilala spoznava idejo o gibanju Zemlje. Leta 1609 Galilej v Padovi uporabi teleskop, da z njim opazuje nebo in postane heliocentrični „krivoverec“. Kmalu zatem pa je skupaj s Halleyem priča sporu med Hookom in Newtonom glede gravitacijskega zakona. Galileja popremimo še v učilnico v 21. stoletju, kjer med učiteljico in učenci poteka sodobna razprava o vesolju, medtem ko nekatere izmed prisotnih seveda najbolj zanima, kdaj bo odmor.

V knjižici *Einsteinova življenja – Popotovanje skozi čas in zgodovino fizike* je struktura podobna: spremljamo junaka Enkamna na potovanju skozi različne čase in kraje: iz antične Grčije, kjer izmenja nekaj filozofskih s Sokratom, Hipokratom in Demokritom, v Bagdad, kjer spozna začetke algebre, pa naprej v Padovo, kjer postane Galilejev asistent in spozna relativnost gibanja. Nekaj desetletij kasneje mu v Angliji Newton razloži svoja dognanja, ampak Onestonu to ni dovolj – zanima ga, zakaj se telesa privlačijo. In že smo na začetku 20. stoletja, ko Einstein postavi



na glavo dotedanjo fiziko in dojemanje časa. Strip se konča s poglavjem o pomenu znanosti v današnjem času.

Oba stripa sem prebrala na mah in se pri tem nasmejala mnogim zanimivim domislicam, ki se navezujejo na junake in dogodke ter na nevsiljiv način ilustrirajo glavne ideje fizike in astronomije. Stripa priporočam v branje zlasti srednješolcem in učiteljem. Knjižici sta zanimivi tudi za učence višjih razredov osnovnih šol, ki pa morda potrebujejo za razumevanje nekaterih domislic še spremno razlago. Vsekakor sta knjižici uspel poskus, kako mladim namesto v suhoparnih dolgih učbenikih predstaviti nekaj idej znanosti v njim bližji stripovski obliki. Zabavno in poučno.

Knjižico lahko naročite pri DMFA-založništvo po članski ceni 6,15 EUR.

× × ×

Barva hrošča



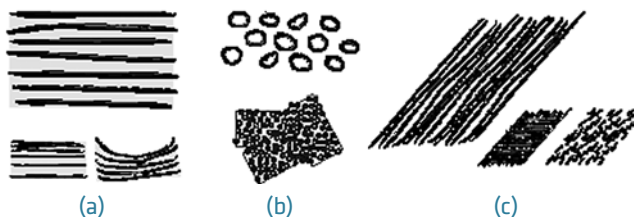
ALEŠ MOHORIČ

Opazil sem ga poleti, ko je lezel po verandi. Zlata minica iz družine skarabejev ima nenavaden oklep. Barva površine ima kovinski odsev in se spreminja od zlate, rumene do zelene, ko jo opazujemo pod različnimi koti.



Pojav, da je barva površine odvisna od opazovalnega kota, imenujemo iridescenca. Iridescenco opazimo tudi drugje v naravi – na tanki plasti olja, na luži, na milnični opni, metuljevih krilih, ptičjih peresih, školjkah ... pa tudi avtomobile vam znajo tako prebarvati, da o tisku ne govorim. Oglejte si embalažo parfumov, zaščitne holograme na bankovcih, zgoščenko. Okrog nas je vse polno zgledov. Vzrok teh barv tiči v razširjanju, odboju, lomu, uklonu in interferenci svetlobe na površinah in v snoveh. Po homogeni snovi se svetloba razširja naravnost. Na meji med dvema prozornima snovema se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu: vpadni kot je enak odbitemu, del pa preide v drugo snov. Pri tem se smer razširjanja svetlobe spremeni po lomnem zakonu: razmerje sinusov vpadnega in lomljenega kota je obratno sorazmerno razmerju lomnih količnikov snovi. Lomni količnik snovi je razmerje hitrosti svetlobe v vakuumu in hitrosti v snovi. Na svetlobo tudi močno vplivajo strukture z velikostnim redom podobnim valovni dolžini svetlobe. Vidna svetloba ima valovne dolžine v območju med 400 in 700 nm. Na takih strukturah pride do izrazitega uklona. V grobem si lahko predstavljamo, da se ravni val svetlobe na takih objektih odbije v vse smeri. V primeru, da so strukture, na katerih prihaja do uklona, pravilno razporejene po prostoru, se zaradi interference v do-

ločenih smereh ojači ena od barv. Do interference in ojačitve določene barve svetlobe pride tudi pri odboju na tankih plasteh. Najbolj znan mehanizem, ki daje površini barvo, je absorpcija svetlobe na pigmentih. Pigmenti so spojine, ki svetlobo z določeno barvo dobro absorbirajo ali odbijajo. Površini obarvani s pigmentom se barva ne spreminja z opazovalnim kotom. Glavni mehanizmi, ki povzročijo iridescenco na oklepu hroščev so interferenca na tankih plasteh ter uklon in interferenca na površinski uklonski mrežici ali fotonskem kristalu. Pri uklonski mrežici brazde ali grebeni tečejo po površini, pri fotonskem kristalu pa so manjši kroglasti objekti porazdeljeni v pravilno prostorsko mrežo.



Trije glavni mehanizmi iridescence pri hroščih so: (a) odboj svetlobe na tankih plasteh. Plasti so lahko nenakomerne debeline, potem je spekter odbite svetlobe bogatejši in barva dobi kovinski pridih, Plasti so lahko ukrivljene in površina je sestavljena iz množice drobnih jamic. Barva z roba jamice je drugačna, kot barva iz sredine in mešanje teh barv lahko zelo dobro posnema strukturo peska v okolici, (b) uklon in interferenca na fotonskih kristalih - urejena struktura objektov razmaknjenih za razdaljo, ki približno ustreza valovni dolžini svetlobe ter (c) odboj svetlobe na površinskih uklonskih mrežicah. Grebeni ali brazde mrežice lahko tečejo samo vzdolž ene smeri ali pa večih. is mrežice lahko posredujejo tudi krajše brazde.

Kogar zanima kaj več, se lahko pozanima še o pojmi opalescenca, Tyndallov pojav ter Rayleighovo sipanje.

× × ×

NAŠ ELEKTRONIK, KI JE DELOVAL V ZDA (ZVONKO ANTON)	UMETEN DRAG KAMEN, ZELENI KORUND	2. SOLMI-ZACIJSKI ZLOG	DRŽAVA NA TIHO-OCEANSKI OBALI ZDA	TEKOČINA, KI NASTAJA PRI USIRJANJU MLEKA	AVTOR MARKO BOKALIČ	NAJET AVTO Z VOZNIKOM	VEZNIK	STAR IZRAZ ZA PARE (MRTVAŠKI ODER)	NAŠA IGRALKA (OLGA)
ANTIČNI OTOK PRED ALEK-SANDRIJO					ČASOPISI IN REVLIJE KONČNICA NEDOLOČNIKOV				
PREBIVALKA CELINE NA ZAHODNI POLOBLI				15					
GLASOVALNI PREDLOG		KIRURG BRECELJ					OLIVER CROMWELL		
FR. FIZIK IN ASTRONOM	3	MESTO V IZRAELU, AKKO			ZELIKA Z VELIKIMI BELIMI KOBULI NACIJA		2		
NAPIS NA DEMONSTRACIJAH									
AVTOMOBILSKA OZNAKA SPLITA	NEMŠKI SATIRIČNI PIŠATELJ (GÜNTHER)	ČUTNA LJUBEZEN	BERBERSKO LJUDSTVO V ZAHODNI SAHARI, NOMADI S KAMELAMI	OTOŠKA DRŽAVA V JUŽNI AZIJI IZRAEL			FILMSKI REŽISER RUSSELL MORSKA RIBA		
			LAHKA KOVINA SREDNJE VELIKA TAMBURICA		GERMANSKI BOGOVI POD VODSTVOM BOGA ODINA, NASPROTNIKI VANOV	RITMIČNO POUČENJE ZLOG STOPIČE			
					NEMŠKI LIRIK, ANAKREONTIK (JOHANN)	KAZNIVO DEJANJE	ENAKI ČRKI NEGATIVNO NAELEKTREN ION	PORTUGALSKO OTOČJE	
NASLOVNA JUNAKINJA IBSENOVE DRAME GLAVOBOL				VARNO-SVETI SVET	STAVBA GRŠKA MITIČNA MORSKA POŠAST				
				DRUGA NEZNANKA PLAZ SUH. SNEGA, KI SE RAZPRŠI			RUS. LUKA OB IZLIVU DONA ZDRAVIL V BELGIJI	11	
		PREJŠNJI PRIIMEK ATLETINJE JOLANDE BATAGELJ			POSLANICA V VERZIH NORVEŠKI KNJIŽNI JEZIK				
		GORSKI GREBEN OD SEDLA DO VRHA	IT. STAVBAR IN MATMATIK TEKSTILNA DEJAVNOST	1		IZČRPEK KATASTR-SKI OPIS ZEMLJIŠČA TURNUS			
SL. ESEJIST (BOJAN) BRITANSKI IGRALEC (DAVID)				IZLOČITEV NEZNANKE IZ SISTEMA GLASBENIK ŽGUR		12			
			BOSANSKI POLITIK TERZIČ			3. KOORDINATA TOČKE GRŠKI OTOK			
			GIBANJE TELES PO ZRAKU IZREDNA LEPOTA		ENOTA ZA UPORNOST EVROPSKA VESOLJSKA AGENCIJA				
				MESTO OB ISTOIMEN. JEZERU V ZDA BOR TUREL					
						4			
		ŠVEDSKA IGRALKA (ULLA)							
		DOBA OD POMEMB. ZGODOV. DOGODKA NAPREJ		PRIS-TOJBINA					

NAŠ PES-NIK (JOŽE)

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poštnina je že plačana) do 15. marec 2011, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

XXX

Kaj se zgodi s plastenko



MOJCA ČEPIČ

→ Pomlad je že prišla v naše kraje, lepo vreme kar kliče na izlete, zato tokrat predlagam, da preizkusite nekaj zanimivega kar na izletu samem.

Potrebščine so tokrat zelo preproste. Potrebujete le plastenko in izlet v visoke hribe. Višje, kot se boste povzpeli, bolj izrazit bo pojav, ki ga nameravate opazovati. Prostornina plastenke niti ni pomembna, lahko je plastenka le za pol litra, lahko pa tudi za liter in pol. Pomembno pa je, da jo je mogoče dobro zapreti. To običajno velja za vse „nove“ plastenke. Če boste plastenko s pijačo zjutraj dali v nahrbtnik in pijačo do vrha hriba popili, bo ravno prav.

Na vrhu hriba, preden se vrnete v dolino, prazno plastenko odprite in jo nato ponovno zaprite ter dobro privijte zamašek. Nato pa s plastenko v nahrbtnik in na pot v dolino. Lahko jo vmes tudi izvlečete in pogledate, če se je kaj spremenilo, a nikar je ne odpirajte.

Naredite še nekaj posnetkov na različnih višinah, da boste lahko obliko plastenke primerjali. Najbolje je, da si poleg zabeležite še višine, na katerih ste plastenko fotografirali. Višine so običajno zapisane na tablah z imeni planinskih postojank.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

× × ×

Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA



Odgovori na vprašanja iz prejšnjih števil Preseka (37/6, 38/1, 38/2 in 38/3)

38. Odboj vrtavke ali žoge. Če vržemo žogo proti ravni ploskvi (tlem, mizi, steni, loparju), vsaj približno uboga *odbojni zakon*: odbiti kot je enak vpadnemu kotu. Če je žoga „rezana“, tako da se vrti okrog vodoravne osi (*ima spina*), pa odbojni zakon ne velja več. Opazuj vpadne in odbite kote pri žogici za ping-pong, tenis ali žogi za košarko v odvisnosti od osi in smeri spina, zabeleži rezultate ter „odkrij“ novi lomni zakon.

Podoben problem je polna gumijasta žogica, ki pri poševnem vpadu pridobi nekaj *spina* že zaradi lepenja (ob času stika s tlemi se nekoliko zakotali) in je ni treba vnaprej rezati. Zakaj se pri metu pod mizico žogica vrne nazaj k tebi?

ODGOVOR. Za razumevanje pojava smo predlagali naslednji poenostavljeni model. Pri *topspinu* se žogica vrti spodaj nazaj in pri trku podrsa nazaj na mizo. Miza ji pri trku torej podeli sunek sile navzgor (ker se je deformirala) ter sunek sile naprej (zaradi trenja). Sunek sile navzgor jo odbije navzgor z enako velikostjo z-komponente gibalne količine (vendar v obrnjeni smeri), sunek sile trenja pa ji doda gibalno količino v smeri naprej. Predpostavimo, da je sila trenja odvisna samo od sile na podlago in ne od hitrosti podrsavanja $F_x = kF_z$, pri čemer je $k \sim 0,1 \rightarrow 0,5$ tipični koeficient trenja. Potem velja za gibalne količine (črtica označuje količine po trku)

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad G'_z &= -G_z, \quad G'_x = G_x + 2k G_z. \end{aligned}$$

Pa imamo „lomni zakon“ za kote glede na navpičnico

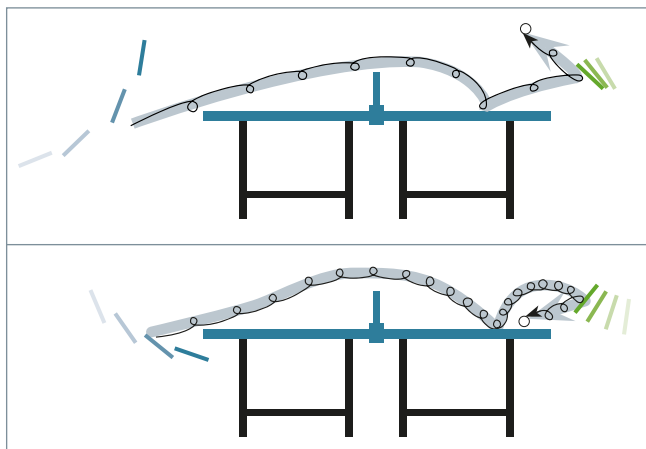
$$\blacksquare \quad \operatorname{tg} \theta = G_x / G_z, \operatorname{tg} \theta' = G'_x / G'_z:$$

$$\blacksquare \quad \operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta + 2k.$$

Analogno se pri *backspinu* odbojni kot zmanjša (žogica se odbije bolj strmo) in lahko postane celo negativen (tedaj se žogica vrne nazaj): $\text{tg } \theta' = \text{tg } \theta - 2k$.

Ker žogice skačejo zelo hitro in nepredvidljivo, je težko meriti kote, zato je najbolje fotografirati ali filmati. Če je kdo med vami tega več, naj nam pošlje svoj izdelek. Tukaj pa bom pojasnil sliko 1 (iz Preseka 37/6). Če je $k = 0,5$ in $\theta \approx 0^\circ$, je pri *topspinu* v zgornjem modelu $\text{tg } \theta' \approx 1$ in $\theta' \approx 90^\circ$, kar kvalitativno ustreza sliki 1. Podobno ustreza pri *backspinu* kotu $\theta \approx 45^\circ$ po odboju $\text{tg } \theta' \approx 0$ in $\theta' \approx 0^\circ$.

Poglejmo še drugi problem. Ko se žogica prvič odbije od tal, se malo zakotali in spodnja stran žogice zaostaja za zgornjo. Glede na tla nastane *topspin*, toda glede na spodnjo stran mizice je to *backspin* in se glede na zgornji model lahko vrne nazaj. Izpeljava, zakaj se žogica vrne skoraj točno po isti poti nazaj, pa je prezamudna. Poskus je zabaven, ker ti žogica prileti nazaj naravnost v roko in met lahko ponavljaš. Kolikokrat si ga uspel ponoviti?



SLIKA 1.

Pot ping-pong žogice pri *topspinu* (zgornja) – na vrhu se vrtili v smeri gibanja – in pri *backspinu* (spodnja) – na vrhu se vrtili nazaj (iz Wikipedije – topspin, backspin)

39. Lok in fračo. Na tetivo loka obesi tolikšno utež, da se bo lok napel toliko kot pri streljanju. S tem oceniš maksimalno silo, povprečna sila pri napenjanju $\bar{F}$ je približno polovica tega. Opravljeno delo je torej $A = \bar{F} \cdot d$, kjer je d premik središča tetive. To delo prejme puščica, njena potencialna energija v najvišji točki je mgh . Stehtaj maso puščice m in oceni vi-

šino strela h . Preveri, ali se je vse delo izkoristilo za dvig puščice. Kaj misliš, kdo je „poneveril“ preostalo delo? Podobne meritve in študijo lahko napraviš tudi s fračo.

ODGOVOR. Poskus sem naredil s preprosto fračo. Na letev z luknjo v sredini sem vpel gumico, jo potegnil za $d = 10$ cm ter z njo ustrelil palčko skozi luknjo. Silo za tak nateg sem izmeril z utežjo $m_u = 0,32$ kg, torej je maksimalna sila na gumici $F_{\max} = m_u g$ ter povprečna sila $\bar{F}$ pol manjša. Opravil sem delo $A = \bar{F} d = \frac{1}{2} m_u g d = \frac{1}{2} 0,32 \text{ kg} \times 10 \text{ ms}^{-2} \times 0,1 \text{ m} = 0,16$ joule. Puščica z maso $m_p = 5,2$ g je poletela $h = 1,1$ m visoko. Pridobila je potencialno energijo $V_{\text{pot}} = m_p g h = 0,057$ joule. Izkoristek dela je torej $\eta = V_{\text{pot}}/A = 0,057 \text{ J}/0,16 \text{ J} = 35\%$. Kam pa je šlo ostalo delo? V notranjo energijo elastike, ki ni bila čisto prožna, in v notranjo energijo zaradi upora v zraku. Kolikšen izkoristek pa si dosegel ti z lokom ali z boljšo fračo?

40. Slamnata streha. „Luknja pri luknji tiči, pa vendar vodo drži“. Zloži eno plast slamic na dve prečki in jih pritrdi z nitko ali lepilom. To „streho“ nagni za kot 30° in jo rahlo polij z vodo. Ali drži vodo (ki potem odteka na koncih)? Zakaj? Kaj pa, če močnejše „dežuje“ (pobrizgaj s prho)? Poskusi tudi z dvojno plastjo slamic, tako da zgornje ležijo v presledkih med spodnjimi.

ODGOVOR. Vodo med slamicami drži površinska napetost. Ocenimo, kolikšen sme biti presledek $2r$ med slamicama, če tekočina miruje. Privzemimo plast vode v obliki valja z radijem r in dolžino h (h je dolžina slamic). Dol vleče vodo sila teže

$$\blacksquare F_{\text{teže}} = \pi r^2 h \rho g,$$

gor pa sila zaradi površinske napetosti $F_{\text{pov}} = 2\gamma h$. Faktor 2 je zato, ker je vodni valj vpet ne obeh slamicah. Iz tega sledi $2r = \sqrt{8\sigma/\pi\rho g}$. Iz podatkov za vodo $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ in $\gamma = 0,070 \text{ N m}^{-1}$ dobimo 4,2 mm.

To bi veljalo seveda v idealnih pogojih. Poskus sem napravil s sirkovim omelom. Če so se slamice prekrivale, je taka „slamnata streha“ odlično držala tudi močan „dež“. Če sem omelo razširil, da so bile slamice razporejene v enojno plast z razmiki do 1 mm, je še vedno zdržalo rahel dež. Če na spodnjem delu





„strehe“ ni deževalo, so smeli biti tam presledki celo 2 – 3 mm, saj so se vodni curki združili okrog snopa slamic (ki jih je pritegnila skupaj površinska napetost), vmes pa je bilo suho.

41. Borromejski obroči simbolizirajo izkušnjo rodbine Borromeo iz severne Italije **v slogi je moč**. Trije obroči držijo skupaj, če pa enega odpreš in odstraniš, ostala dva razpadeta. Ali je mogoče boromejske obroče sestaviti iz pravih ravninskih krogov ali morajo biti rahlo zverženi? Zakaj? Ali znate trije sošolci sestaviti borromejske obroče tako da sklenete vsak svoje roke v obroč in jih pred tem prepletete?

ODGOVOR. Postavimo rdeči krog na mizo, modrega pa položimo vodoravno nanj. Da bi ju tretji vezal, bi moral iti najprej pod prvim, nato nad drugim, spet pod prvim in nad drugim. Take stične točke pa ne morejo ležati v isti ravnini (glej zeleni obroč na sliki 1 v prejšnji številki Preseka). Zato mora biti vsaj en krog zveržen. Kaj pa če bi kroge nagnili ali vzeli različno velike kroge? Splošen dokaz, da tudi to ne pomaga, je zamuden in ga najdete na spletu. Pač pa zlahka sestavimo borromejske obroče iz elips, recimo tako, kot vidite na sliki 2. Če bi skušali elipse raztegniti v kroge, pa bi si postale napoti!

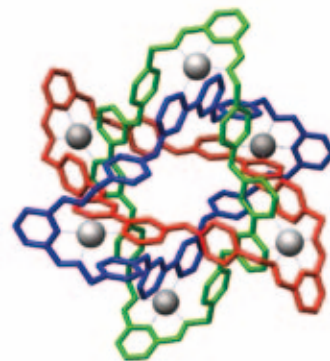
Poskus z „borromejskimi obroči“ iz treh parov rok je zlahka uspel.

Poleg jedrskih zgledov iz prejšnje številke je zanimiv tudi zgled iz dolgih molekul. Posrečilo se je sintetizirati tri verige aminokislin, ki so prepletene v borromejske obroče (slika 3). Baje so se podobni borromejski obroči nedavno posrečili tudi skupini na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani.



SLIKA 2.

Borromejski obroči iz elips (iz Wikipedije – Borromean rings)



SLIKA 3.

Borromejski obroči iz aaminskih velemolekul (iz Wikipedije – Molecular Borromean rings, J. F. Stoddart et al., Science 304 (2004) 1308–1312)

× × ×

Sudoku

↓ ↓ ↓

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	8	2			5				
B	5							9	6
C	6				7		4		
D						8	7		9
E		5						4	
F	4		2	3					
G			6		1				4
H	2	3							
I					4			3	2

fizika

× × ×

Ozvezdje na mizi – Kaj so ozvezdja



ANDREJ IN LIZA GUŠTIN

→ Kaj so ozvezdja?

Ozvezdja so liki, ki jih dobimo, če v mislih povežemo bližnje zvezde na nebu. Ozvezdja si je izmislil človek. Naši davni predniki so v svetlejših, na nebu bližnjih zvezdah, videli like bogov, mitoloških bitji, živali in predmetov. Te „zvezdne podobe“ so se ohranile do danes in astronomi ter ljubitelji nočnega neba jih uporabljajo za orientacijo po nebu, le da so jih uredili v 88 ozvezdij s točno določenimi mejami. Toda večina svetlejših zvezd, ki tvorijo neko ozvezdje, so v prostoru, v vesolju, daleč narazen. Ene zvezde so nam blizu, druge mnogo bolj oddaljene, njihova razporeditev na našem nebu pa je le slučajna. Če bi lahko hitro potovali med zvezdami, bi opazili, da je videz kakega ozvezdja zelo odvisen od lege, iz katere ga opazujemo. Torej: ozvezdje ni nekaj, kar v vesolju obstaja, kakor obstaja, recimo, mesto na Zemlji. Ni nekaj, kamor bi odpotovali, kot odpotujemo v Celje, in se tam tudi znašli. Res bi lahko prispeli do kake zvezde v ozvezdju, toda druge zvezde tega ozvezdja, ki se nam z Zemlje na našem nebu zdijo tako blizu ena drugi, bi bile še vedno daleč vsaksebi. Če rečemo, da se to in to telo nahaja v nekem ozvezdju, potem s tem mislimo le na lego na našem nebu. Ker žal ne moremo potovati med zvezdami, si lahko na domači mizi ali v učilnici pričramo ozvezdja, spoznamo, kako so zvezde razporejene v prostoru in kako bi določeno ozvezdje videli iz kakega drugega mesta v vesolju. Pa veliko zabave.

Na kratko o Velikem vozu

Za našo vajo smo izbrali Veliki voz. Veliki voz sicer ni ozvezdje, temveč le del večjega ozvezdja Ve-



astronomija

→ liki medved. Takim navideznim likom, ki niso prava ozvezdja, pravimo asterizmi. Veliki voz smo izbrali zato, ker ga vsakdo pozna in ga je na nebu prav lahko najti. Sedem svetlejših zvezd tvori znani voziček; štiri oblikujejo „košaro“, tri pa oje voza. Astronomi zvezde označujejo s črkami grške abecede, najsvetlejše pa imajo tudi lastna imena. V preglednici so zvezde Velikega voza, njihove oddaljenosti in drugi podatki, ki so potrebni za izdelavo modela.

Razpredelnica s podatki za zvezde Velikega voza

Ime zvezde	Oddaljenost (1 sv. leto = 1 cm)	<i>h</i> – dolžina palice (cm)	<i>x</i> (cm)	<i>y</i> (cm)
α ali Dubhe	124	50	117	40 D
β ali Merak	79	23	74	25 D
γ ali Fekra	84	21	84	8 D
δ ali Megrez	81	25	81	0
ε ali Aliot	81	24	80	14 L
ζ ali Mizar	78	21	74	23 L
η ali Benetnaš	101	17	93	40 L

Svetlobno leto – enota za razdalje v vesolju

Svetlobno leto je razdalja, ki jo prepotuje svetloba v enem letu oziroma 365-ih dneh. Ker svetloba v eni sekundi prepotuje 300 000 kilometrov, znaša eno svetlobno leto $9,46 \times 10^{12}$ kilometrov ali 9 460 milijard kilometrov. Če bi avtomobil neprestano vozil s hitrostjo 100 kilometrov na uro, bi razdaljo enega svetlobnega leta prepotoval v 11 milijonih let! V našem modelu bo eno svetlobno leto merilo en centimeter.

Ozvezdje na mizi

Potrebujemo: večji list črnega papirja ali kartona, veliko leseno ploščo (najmanj 80 × 80 cm) ali enako velik kos ravne in trdne lepenke, najmanj sedem daljših tankih palic, plastelin, stiroporne kroglice, črno barvo, meter, ravnilo, lepilo, škarje, svinčnik.

1. Priprava

Palice so lahko plastične, kovinske ali lesene. Dolge naj bodo približno 50 centimetrov. V našem primeru smo si pomagali kar po domače. V grmovju smo narezali sveženj tankih in ravnih vejic. Name-



SLIKA 1.
Veliki voz na nebu



SLIKA 2.
Potrebščine

sto stiropornih kroglic, ki bodo predstavljale zvezde, lahko kroglice naredimo kar iz belega plastelina.

Ker zvezde v vesolju niso podprte s palicami, jih v našem modelu poskušamo skriti. Zato jih pobarvamo s črno barvo, lahko tempero ali vodno akrilno barvo, ki ni škodljiva in nevarna. Preden nadaljujemo z izdelavo modela, počakamo, da se barva posuši. Najbolje je, da palice pobarvamo dan prej.

2. Priprava mize

Izberemo najmanj 130 centimetrov dolgo mizo. Na steno nad višino mize nalepimo črn papir, ki bo za ozadje. Mizo prislonimo k steni, nanjo pa položimo leseno ploščo. Po sredini mize in plošče s


SLIKA 3.

Merjenje in postavljanje zvezd

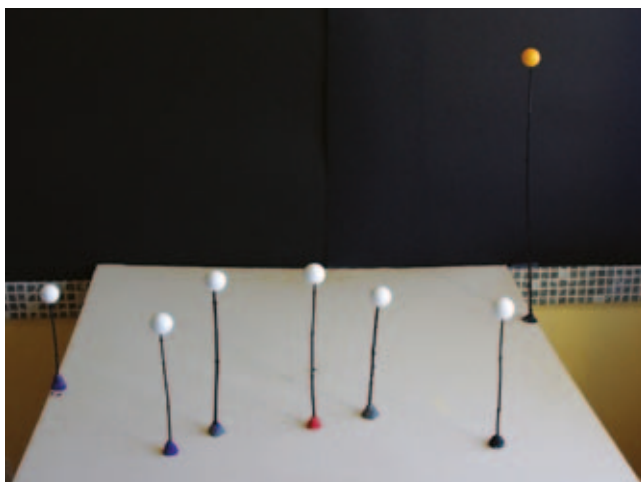

SLIKA 4.

Od tu bomo gledali

svinčnikom narišemo ravno črto. Od nje bomo levo in desno merili lege zvezd.

3. Postavljanje zvezd

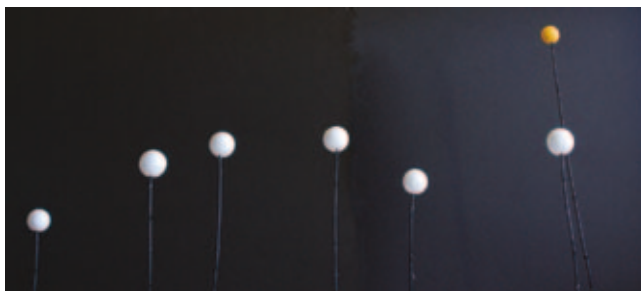
Vsako zvezdo pripravimo in postavimo posebej, da ne pride do napak pri razporejanju zvezd. Začnemo z zvezdo Dubhe. Kroglico napičimo na en konec palice. Nato od vrha kroglice odmerimo dolžino h iz razpredelnice (v tem primeru 50 cm) in jo s škarijami na to dolžino skrajšamo. Na mizi na srednji črti odmerimo x , ki ga merimo od roba mize (v razpredelnici 117 cm), nato pa od tam pravokotno še y v desno (v tem primeru 40 cm od sredinske črte). D v razpredelnici pomeni desno od sredinske črte, L pa levo. Tam na plošči narišemo piko in nanjo damo plastelin, v plastelin pa navpično vtaknemo palico z zvezdo. Za preostale zvezde je postopek enak, podatki so v preglednici. Zvezda Megrez je v sredini mize, zato je $y = 0$.


SLIKA 5.

Maketa je narejena

4. Kje je Veliki voz?

Ko postavimo vse zvezde, počepnemo na konec mize in z njene sredine pogledamo proti „zvezdam“. Če smo vse naredili prav, potem njihovo razporeditev vidimo kot Veliki voz. Mi smo na sredini roba mize naredili veliko piko, ki ponazarja našo lego v vesolju. Toda če na naše „zvezde“ pogledamo s katerega drugega konca mize ali sobe, potem lika Velikega voza ne vidimo. Vidimo povsem drugačno razporeditev zvezd. Podoba ozvezdja je odvisna od našega opazovališča!


SLIKA 6.

Res je Veliki voz!

→ 5. Sklep in nekaj vprašanj

Model bi lahko naredili kar na mizi, a če ga naredimo na plošči, ga lahko shranimo, prenesemo in pokažemo še drugim. Na tak način bomo vsakogar prepričali, da so ozvezdja videti takšna, kot so, ker jih opazujemo prav z Zemlje.

Za bistro glave pa še to.

- Znaš prebrati grške črke ob imenih zvezd?
- Zakaj smo kroglico za Dubhe pobarvali rumeno?
- Bi videli lik Velikega voza, če bi Zemlja krožila okoli zvezde Megrez?
- Veliki voz v naših krajih nikoli ne zaide. V večernih urah in ob jasnem vremenu ga poišči na nebu in ga primerjaj z modelom. Znaš s pomočjo Velikega voza najti Severnico?

× × ×

REŠITEV SUDOKU
→
→
→

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	8	2	9	6	5	4	3	1	7
B	5	4	7	1	3	2	8	9	6
C	6	1	3	8	7	9	4	2	5
D	3	6	1	4	2	8	7	5	9
E	9	5	8	7	6	1	2	4	3
F	4	7	2	3	9	5	1	6	8
G	7	9	6	2	1	3	5	8	4
H	2	3	4	5	8	6	9	7	1
I	1	8	5	9	4	7	6	3	2

× × ×

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

× × ×

Tekmovanje v znanju astronomije – drugič

↓ ↓ ↓

ANDREJ GUŠTIN

→ Lani, v mednarodnem letu astronomije, je domovinsko pravico dobilo tudi tekmovanje v znanju astronomije za osnovne in srednje šole. Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov smo v tem tekmovanju videli pomemben prispevek k popularizaciji astronomije med mladimi. Glavni namen vpeljave „še enega tekmovanja“ je torej povečanje zanimanja za astronomijo, dvig astronomskega znanja učencev in dijakov in spodbuda mentorjem, da to čudovito znanost resneje umestijo na seznam pedagoških dejavnosti. Rezultati drugega tekmovanja v znanju astronomije, ki je potekalo decembra 2010, kaže, da smo na dobri poti pri realizaciji teh namenov.

Sestava nalog tekmovanja v znanju astronomije za šolsko leto 2010/2011 je ohranila lansko zasnovo. Tako na šolskem kot na državnem nivoju so malo manj kot polovico točk prinesli odgovori na vprašanja iz splošnega znanja astronomije, nekaj več od polovice točk pa računske naloge. Ohranili smo tudi enotni skupini za osnovnošolce (7., 8. in 9. razred skupaj), in za srednješolce oziroma gimnazijce (enotna skupina za vse štiri letnike). Razlog za tako pomenenje je v tem, da se astronomija v osnovnih šolah kot izbirni predmet poučuje le na redkih šolah, v

srednjih šolah pa dijaki tega predmeta sploh nimajo in astronomsko znanje pridobivajo samostojno ali v okviru krožkov. Sestavljavci nalog in recenzenti smo se zaradi tega tudi tokrat znašli pred težko nalogo, kako sestaviti naloge, ki ne bodo pretežke za nižje razrede oziroma letnike, da bomo torej zagotovili približno enake možnosti za vse. Glavna težava ni toliko splošno znanje, temveč znanje matematike za reševanje računskih nalog. Prav zato so bile računske naloge sestavljene v okviru splošne astronomije, torej brez astrofizike.

Prišlo pa je do sprememb na državnem tekmovanju. Izkušnja s prvega tekmovanja, ki smo ga na državnem nivoju organizirali na enem mestu (v Ljubljani), je bila dobra šola. Zagodel jo je hud snežni metež, ki je nekaterim tekmovalcem preprečil prihod v Ljubljano. Tudi veliko število tekmovalcev na enem mestu je velik organizacijski zalogaj. Zato smo se odločili, da bo odslej tekmovanje potekalo na treh lokacijah, določenih po regijskem ključu. Letošnje tekmovanje je tako potekalo na osnovni šoli Koper, na Gimnaziji Šentvid in na Gimnaziji Murska Sobota.

Prvi cilj pri uvedbi tekmovanja v znanju astronomije je bil dosežen že na šolskem tekmovanju. Letos se je šolskega tekmovanja udeležilo kar 1961 osnovnošolcev in 185 srednješolcev, skupaj 2146, kar je približno štirideset odstotkov več tekmovalcev kot lani! Očitno je, da se je tekmovanje „prijelo“. Na prvem tekmovanju je sodelovalo 129 šol, letos pa 170, kar je tudi izjemen porast. Na šolskem tekmovanju je bilo podeljenih 725 bronastih priznanj, na državno tekmovanje pa se je uvrstilo okoli 250 tekmovalcev.

Državnega tekmovanja se je udeležilo 188 osnovnošolcev in 48 srednješolcev, skupaj torej 236. Naloge na državnem tekmovanju so bile zahtevnejše, celo nekoliko težje kot lani. Kljub temu pa je bil splošni uspeh oz. število doseženih točk v povprečju višje kot lani. Nekaj tekmovalcev je celo doseglo stodontni izkupiček. Na državnem tekmovanju je bilo tako podeljenih 135 srebrnih in 38 zlatih priznanj. To je pomemben pokazatelj, da se v letošnjem letu ni le povečalo število tekmovalcev, temveč je napredovalo tudi njihovo znanje. Verjetno gre pomemben del zaslug tudi mentorjem, ki so aktivno sodelovali pri pripravi na tekmovanje. Predavanja o astronomskem tekmovanju, ki je potekalo v okviru občnega zbora DMFA, se je namreč udeležilo zelo veliko mentorjev iz vse Slovenije, kar je še en

pokazatelj pomena tega tekmovanja. Glede na opažen dvig astronomskega znanja bo tekmovalna komisija že prihodnje leto začela uvajati astrofizikalne naloge. Vzorčne naloge bo tekmovalna komisija objavljala vse leto.

Pomemben dodatek tekmovanja v znanju astronomije pa je tudi finale, na katerega so se uvrstili najboljši osnovnošolci in srednješolci z državnega tekmovanja. Na tem finalu bodo morali tekmovalci pokazati še praktično astronomsko znanje. Po mnenju tekmovalne komisije je finalni izbor s praktičnim astronomskim delom pomemben za dvig astronomskega znanja na osnovnih in srednjih šolah, hkrati pa prispeva k popularizaciji astronomije. Opazovalne in druge praktične metode so v astronomiji neolčljivi del teoretičnega znanja, ki ga tekmovalci pokažejo na šolskem in državnem tekmovanju v znanju astronomije. Finalni del ima tudi namen spodbuditi delo mentorjev pri uporabi teleskopov in drugih naprav za astronomska opazovanja, ki so jih v mednarodnem letu astronomije lahko kupile vse šole v Sloveniji.

Srebrna in zlata priznanja, ki so jih tekmovalci dosegli na državnem tekmovanju v znanju astronomije, se po finalnem delu tekmovanja ohranijo. Skupno število točk, doseženih na državnem tekmovanju in v finalu, bo dalo končno razvrstitev tekmovalcev v znanju astronomije. Finalni del tekmovanja bo predvidoma v sredini februarja 2011. O rezultatih tega finala bomo poročali v eni od prihodnjih števil Preseka.



SLIKA 1.

Na drugem tekmovanju v znanju astronomije se je bistveno povečalo število sodelujočih. Tekmovalci so pokazali tudi več znanja kot lani. (Foto: Zorko Vičar)

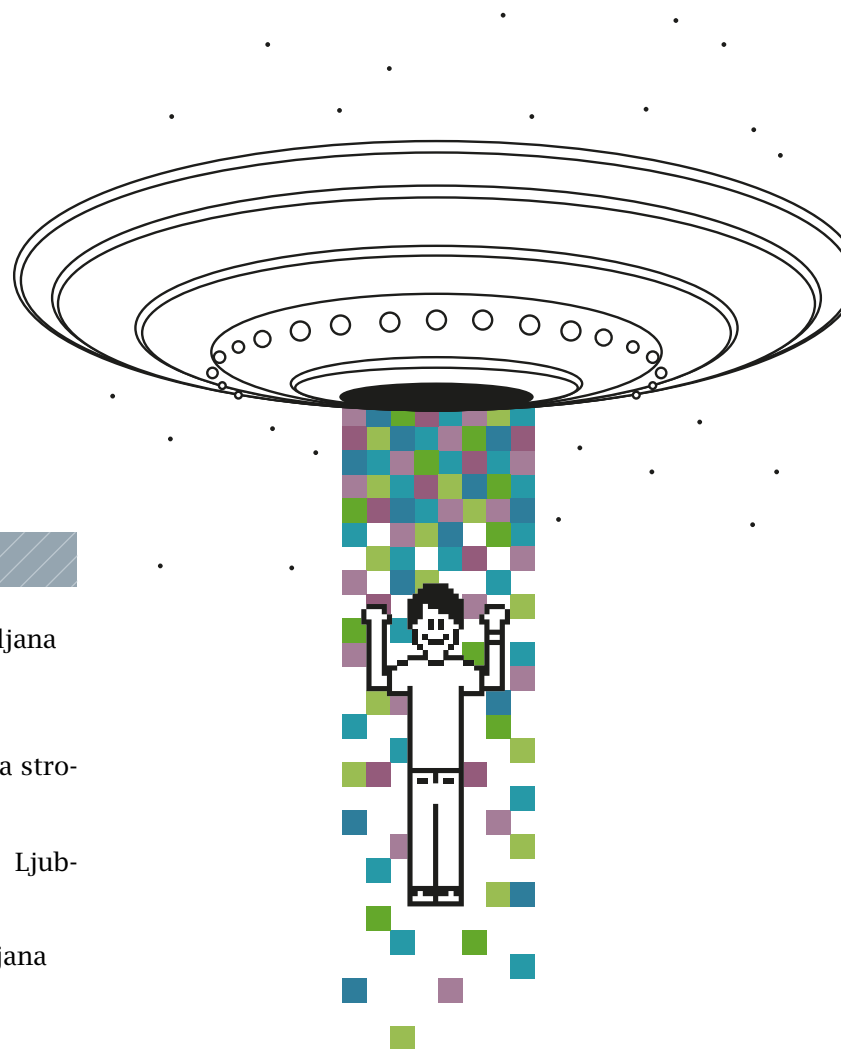
→ Finalisti

1. OSNOVNA ŠOLA

- DARKO KOLAR, OŠ Turnišče
- LUKA GOJKOŠEK, OŠ Rače
- ROK ŠIKONJA, OŠ Metlika
- DENIS ARNŠEK, OŠ Lava, Celje
- ŽAN KOKALJ, OŠ Starše
- URBAN STANIČ, OŠ Vodmat, Ljubljana
- KATJA LOGAR, OŠ Šenčur
- KRISTJAN PONEBŠEK, OŠ Litija
- BLAŽ POTOVAR, OŠ Trebnje

1. SREDNJA ŠOLA

- DOMEN KAMPJUT, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- PAVEL KOS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATIJA SKALA, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana
- ANDRAŽ GNIDOVEC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MICHEL ADAMIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- KRISTIJAN KUCHAR, ŠC Velenje, Gimnazija
- MARTINA LOKNAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ŽAN PIRC, Gimnazija Litija


www.dmfa.si

računalništvo

Kako teleportirati sliko?

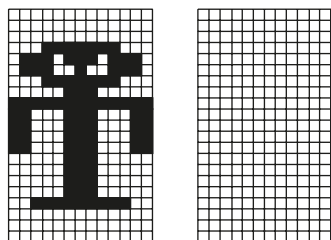


IGOR PESEK

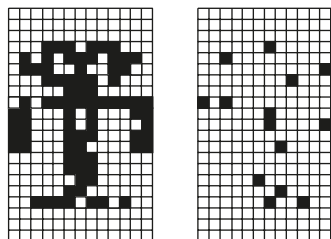
→ Ameriška televizijska serija Zvezdne steze [1] je v času svojega prikazovanja precej razburkala javnost, saj so v seriji uporabljali tehnologije, ki so bile takrat težko predstavljljive. Mnogim se je posebej vtisnila v spomin možnost teleportiranja ljudi iz vesoljske ladje na tuj planet ali drugo vesoljsko ladjo. Za teleportacijo se je oseba postavila na posebej označena mesta, tehnik, ki je upravljal z napravo, je dal ukaz in naprava je začela s teleportacijo. Gledalec je to videl kot počasno razblinjanje osebe na eni lokaciji in sestavljanje osebe na drugi lokaciji. Izgledalo je, kot da so se naključni atomi na izhodiščni strani prestavili na pravo mesto na ciljni lokaciji.

Ko se je teleportacija zaključila, na začetni lokaciji ni ostalo nič od osebe, na ciljni lokaciji pa je oseba že opravljala svojo nalogo. V tem prispevku ne bomo teleportirali oseb, ampak bomo teleportirali slike, pri tem pa predvsem razmišljali, kako zasnovati algoritem, ki bo naključno teleportiral delce slike na drugo lokacijo. Da bi lažje razumeli, kakšno nalogo bomo reševali, si oglejmo sliko 1, ki prikazuje več korakov teleportacije slike z možicem. Za lažjo predstavo predpostavimo, da je kvadrater, iz katerih je možic sestavljen, enak eni točki na zaslonu. Levi stolpec na sliki 1 tako prikazuje možica na izhodiščnem mestu, desni stolpec pa možica na ciljnim mestu. Teleportacija se izvede v treh korakih, kjer začetno stanje

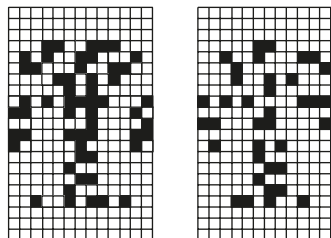
Korak 1:



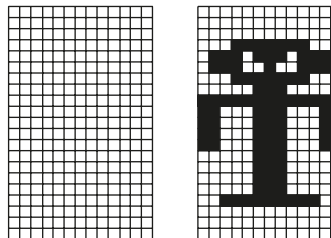
Korak 2:



Korak 3:



Korak 4:



SLIKA 1.
Prikaz teleportiranja slike

predstavlja stanje pred teleportacijo. Ko se teleportacija začne, se naključni delci (kvadratk) možica teleportirajo na končno mesto. Prvi korak prikazuje stanje, ko se je teleportiralo le nekaj delcev, drugi korak pa stanje, ko se je teleportiralo že precejšnje število delcev možica. Zadnji, tretji korak, predstavlja možica po uspešno zaključeni teleportaciji.

Seveda je mogoče za takšno teleportacijo vnaprej določiti zaporedje kvadratkov in to zaporedje pri vsaki teleportaciji ponavljati, vendar je naš cilj, da zapišemo algoritem, ki teleportira poljubno obliko in ne zgolj možica s slike 1. Zato je bolj zanimivo razmišljati o postopku, kako naključno izbirati delce slike (v našem primeru možica) in jih prestaviti na ustrezno ciljno mesto, pri tem pa bomo tehnični del dejanske izvedbe (npr. kako izbrisati in narisati točko na zaslonu) zanemarili, saj je odvisen od izbranega programskega jezika.



→ Algoritmi za teleportacijo

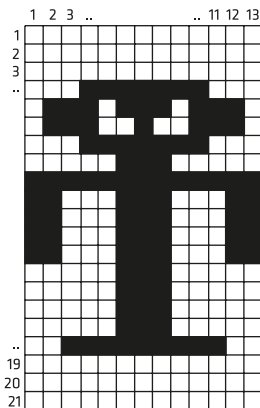
Na prvi pogled se zdi naloga zelo enostavna. Pa je temu res tako?

Slike so v računalnikih shranjene v vektorskem ali rasterskem načinu. Za teleportacijo je uporaben rasterski način, saj je v tem načinu, če poenostavimo, slika prikazana kot pravokotna mreža pik (pikslov) na zaslonu, kjer vsaka pika nosi informacijo o svoji barvi. Pravokotna mreža je velikosti $m \times n$, kjer je m število vrstic in n število stolpcev. V primeru našega možica so pike kvadratki in so v dveh barvah, beli in črni. Za teleportacijo potrebujemo še označitev posameznih kvadratkov. Kvadratke bomo označevali s pomočjo vrstic in stolpcev, kot je prikazano na sliki 2. Ker bomo teleportirali samo možica, nas ozadje (beli kvadratki) ne zanimajo, zato jih tudi ne bomo teleportirali, število vseh črnih kvadratkov pa bomo označili z N . Teleportacijo bomo izvajali po korakih, ki jih bomo označili s k in katerih število bomo vnaprej določili. Predpostavili bomo še, da je število kvadratkov t , ki se teleportira v posameznem koraku, enakomerno porazdeljeno in je enako

$$\blacksquare \quad t = \frac{N}{k}.$$

SLIKA 2.

Označitev vrstic in stolpcev slike



Postopek z naključnim izbiranjem

Najenostavnejši način za teleportacijo je, da na vsakem koraku izberemo t kvadratkov, ki jih še nismo teleportirali. To ponavljamo, dokler na zadnjem koraku ne teleportiramo vseh kvadratkov. Zapišimo sedaj pseudokod takšnega načina teleportiranja:

```

1  za i = 1 do k ponavljaj
2    za j = 1 do t ponavljaj
3      naključno izberi kvadrateg,

```

ki še ni bil teleportiran
4 izvedi teleportacijo kvadratka

Hitro ugotovimo, da bi pri implementaciji takšnega algoritma zašli v težave. Pa raziščimo, kje bi te težave bile. V tretji vrstici moramo naključno izbrati kvadrateg, ki še ni bil teleportiran. Ker izbiramo naključno med vsemi kvadratki na sliki, pomeni, da izbiramo tudi med belimi in že teleportiranimi kvadratki. Torej moramo za vsak naslednji kvadrateg izbrati ponavljati tako dolgo, dokler ne izberemo kvadratka, ki še ni bil teleportiran. Popravljen pseudokod bi bil potem naslednji:

```

1  za i = 1 do k ponavljaj
2    za j = 1 do t ponavljaj
3      ponavljaj
4        naključno izberi kvadrateg
5        dokler izbran kvadrateg ni črn
          in še ni bil teleportiran
6        izvedi teleportacijo kvadratka

```

Algoritem bo sedaj uspešno teleportiral možica. Hitro pa bi opazili, da bi imeli pri večjih slikah težave. Razmislite, kaj bi bil vzrok teh težav.

Pri izbiri uporabljamo generator naključnih števil izbranega programskega jezika ali pa si sprogramiramo svojega, o čemer je že bilo pisano v Preseku [2]. In ravno generator naključnih števil je šibka točka tega algoritma. Pri slikah manjših dimenzij ta pomanjkljivost ne bi bila tako izrazita, zelo očitna pa bi težava postala pri slikah večjih dimenzij, npr. 1000×1000 , kar je v jeziku fotografov 1 megapiksl. Zakaj bi imeli težave? Na začetku bi algoritem hitro izbral kvadratke za teleportacijo. Bolj bi se bližali koncu teleportacije, težje bi uspešno naključno izbirali črne neteleportirane kvadratke. Za zadnji kvadrateg je tako verjetnost, da bi izbrali pravega, vsega 1 proti 10^6 . Lahko si predstavljamo, da lahko, kljub izredno hitrim računalnikom, slab generator naključnih števil povzroči neskočno zanko.

Kaj lahko storimo? Težava nastopi, ko imamo na voljo še samo majhen del kvadratkov, ki še niso bili teleportirani. Ker se algoritem izvaja v k korakih, ni potrebno, da tudi v zadnjem koraku naključno izbiramo med vsemi kvadratki. Tu si lahko poenostavimo in v zadnjem koraku preostale kvadratke enostavno teleportiramo zaporedno. Pseudokod takšnega algoritma bi tako bil:

```

1  za i = 1 do k - 1 ponavlajaj
2      za j = 1 do s ponavlajaj
3          ponavlajaj
4              naključno izberi kvadrateg
5              dokler izbran kvadrateg ni črn
                in še ni bil teleportiran
6              izvedi teleportacijo kvadratka
7  teleportiraj preostale črne
    kvadratke
    
```

Vidimo, da sedaj izvedemo v prvi zanki en korak manj in nato v sedmi vrstici teleportiramo preostale črne kvadratke. Morda se zdi, da sedaj teleportacija ni več v celoti naključna. Da bi spet naredili teleportacijo v celoti naključno, pred sedmo vrstico postavimo ukaz, ki pregleda celotno sliko, si v seznam zabeleži vse preostale kvadratke in jih v zadnjem koraku naključno izbere in teleportira.

Naključno izbiranje iz seznama

Pri algoritmu iz prejšnjega poglavja se kljub izboljšavam velikokrat zgodi, da izberemo napačen kvadrateg. Razmisliti torej velja, kako algoritem spremeniti, da bi bilo malo ali pa sploh nobene zgrešene izbire. Uporabimo idejo, kjer si v seznam shranimo črne kvadratke, ki so ostali pred zadnjim korakom teleportacije. Da bi se izognili napačnim izbiram, zato pred začetkom teleportacije pregledamo celotno sliko in si v seznam zabeležimo vse črne kvadratke z vsemi potrebnimi informacijami. Sedaj izbiramo kvadratke iz seznama in ne iz celotne slike. Po uspešni teleportaciji kvadrateg izbrišemo iz seznama. Na ta način vedno izbiramo izključno med preostalimi črnimi kvadratkami, zato nobena izbira ne bo napačna. V tem algoritmu tudi ni potrebno, da teleportacijo izvajamo po k korakih, vendar bomo to značilnost zaradi lažje ponazoritve obdržali:

```

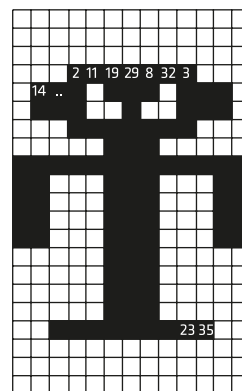
1  preglej celotno sliko in si zabeleži
    vse kvadratke, ki se bodo
    teleportirali
2  za i = 1 do k ponavlajaj
3      za j = 1 do t ponavlajaj
4          naključno izberi kvadrateg iz
            seznama
5          izvedi teleportacijo kvadratka
6          izbriši kvadrateg iz seznama
    
```

Izbiranje s pomočjo permutacij

Permutacije so razporeditve n elementov na n prostih mest (tudi o generiranju permutacij je bilo v Preseku že pisano [3]), število različnih razporeditev pa je enako $n!$. Če uporabimo permutacije kot osnovo pri naključnem izbiranju kvadratkov, najprej izberemo poljubno permutacijo brez ponavljanja N elementov. Prenesimo dobljeno permutacijo, ki je v obliki zaporedja, na sliko možica. Zaporedno od leve proti desni in od zgoraj navzdol oštevilčimo črne kvadratke. Dobimo označitev, ki je prikazana na sliki 3. Algoritem mora sedaj N -krat poiskati ustrezno zaporedno številko kvadratka in ga teleportirati:

```

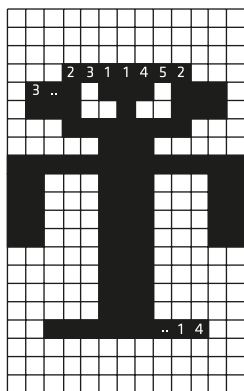
1  določi permutacijo N elementov
2  označi kvadratke z dobljeno
    permutacijo
3  za i = 1 do N ponavlajaj
4      poišči i-ti kvadrateg
5      izvedi teleportacijo i-tega
        kvadratka
    
```



SLIKA 3.

Označitev kvadratkov po permutaciji

Če želimo algoritem prevesti v teleportacijo v k korakih, potem uporabimo permutacije s ponavljanjem, kjer k elementov razporedimo na N mest. V tem primeru se števila ponavljajo in v permutaciji predstavljajo korak, v katerem se bodo vsi ustrezni kvadratki teleportirali. Primer označitve s permutacijo s ponavljanjem je prikazan na sliki 4. Algoritem je zelo podoben prejšnjemu, zato prepuščamo bralcu, da ga sam zapiše. Seveda pa to niso edini načini, kako elegantno izvesti teleportacijo slike. Razmislite, kako bi še na kakšen drug način izvedli teleportacijo.



SLIKA 4.

Označitev kvadratkov po permutaciji

Literatura

- [1] http://sl.wikipedia.org/wiki/Zvezdne_steze
- [2] A. Vesel, *Generatorji slučajnih števil*, Presek (33) 3, 2005
- [3] K. Pnavor, *Permutacije in kombinacije*, Presek (36) 1, 2008

xxx

www.presek.si

REŠITEV KAKURA IZ STRANI 13

↓↓↓

	5	19		12	14		29	3		23	7		
8	2	6	15	9	6	7	5	2	8	6	2		
11	3	8	10	4	3	1	5	8	7	1	13	8	5
	6	5	1	11	2	1	8	11	2	9			
	9	37	2	3	5	4	9	8	6	29	5		
28	9	4	7	8	6		12	6	6	1	2	3	
	3	3	3	2	1	12	3	9	3	1	2		
	8	1	7	7	2	4	1	9	3	6			
	15	6	9	6	3	1	2	4	1	3	16		
16	6	2	5	3	12	4	29	9	5	8	7		
13	8	5	19	9	3	1	2	4	7	4	3		
17	9	8		16	9	3	4		11	5	6		

xxx

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 38/3

→ Za nagradno križanko iz tretje številke 38. letnika Preseka smo prejeli 23 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Kristali v naravi**. Izžrebani reševalci, ALJAŽ KAVČIČ iz Ljubljane, OSKAR KRIŽANEC iz Ptuja in ALEN DJUDARIČ iz Celja so razpisane nagrade prejeli po pošti.

xxx

Kapljica

↓ ↓ ↓

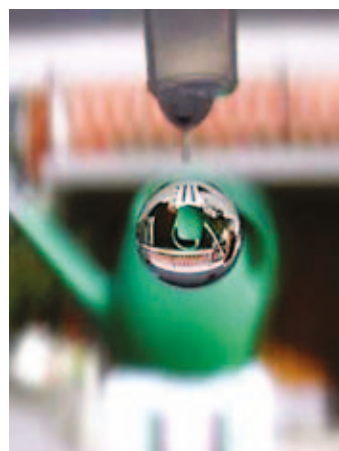
TINE GOLEŽ

→

O,
bo
zdaj
kapljica
končno kanila?
Ker gre za vodo, je
prozorna. Skozi kapljico
opazujemo oddaljeno
vrtno kanglico v
ozadju.

Padajoča
kapljica niha.
V navpični smeri se
razteguje in krči. Zato
dobi v vmesnem trenutku
elipsoid obliko krogle.
Tedaj je kapljica kot
navadna zbiralna
leča. Sic!

Kapljica ima
obliko sploščenega
elipsoida in lomi žarke
svetlobe tako, da nastane
sploščena slika. Na fotografijah
torej opazujemo pojave, kot so
nihanje, valovanje, optika.
Kako lep je ta svet tudi
skozi oči fizike!



× × ×

NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR

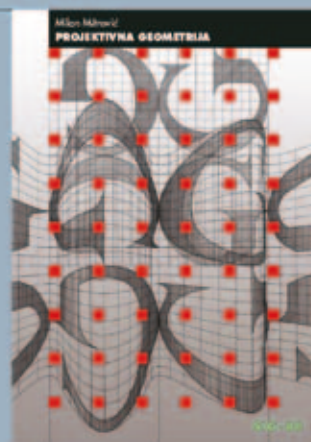


Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

Nekaj matematičnih
zamisli

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.