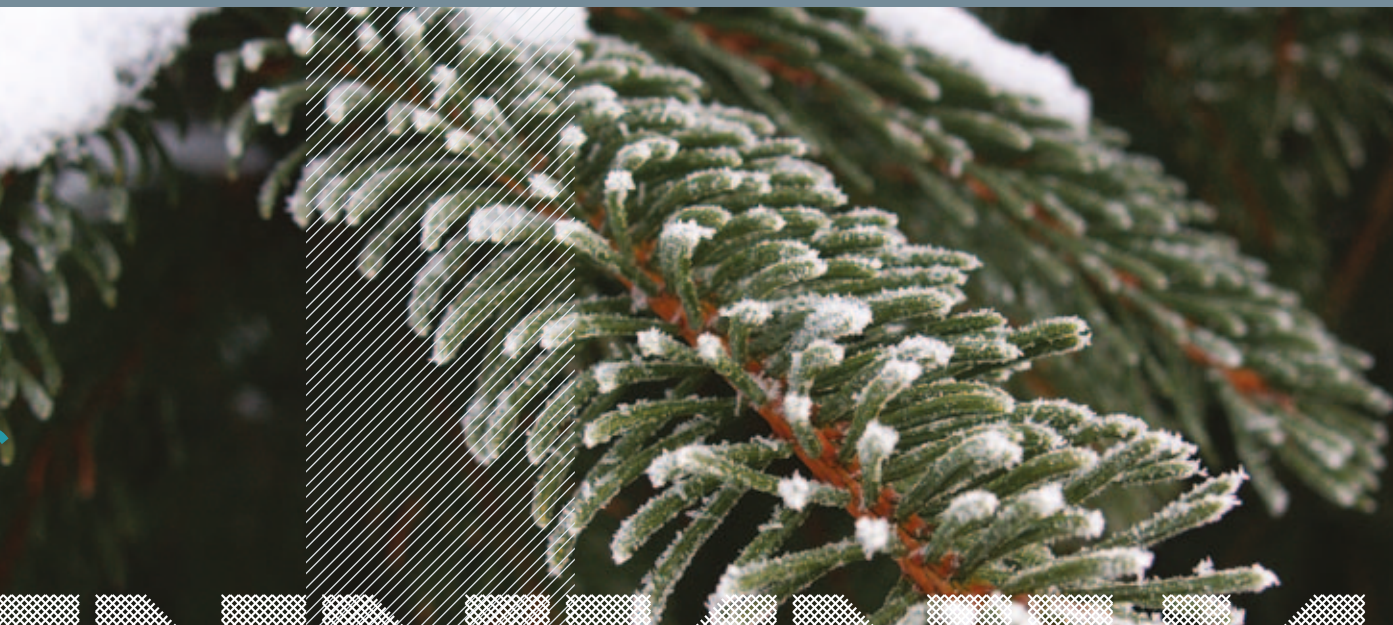


VO#3



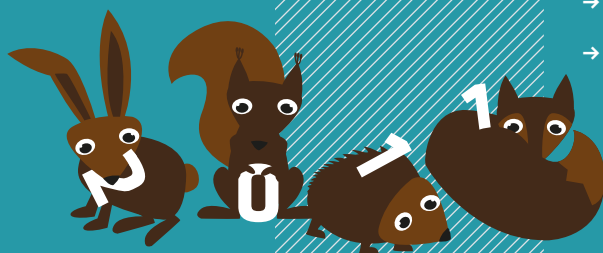
PRESEK LETNIK 38 (2010/2011) ŠTEVILKA 3

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO



PRESEK

- MISELNA PROBLEMA
NA ŠAHOVNICI
- PRIDOBIVANJE MONOKRISTALOV
V EPRUVETI
- MEHKA LOGIKA
- NAGRADNA KRIŽANKA



ISSN 0351-6652



Zavij jo kot Bernoulli



→ Pobarvane strune, ki jih vidimo na sliki, predstavljajo zračni tok okoli nogometne žoge. Temno modri tokovi izza žoge predstavljajo vrtnice nizkega pritiska. Računska dinamika tekočin in eksperimenti v zračnem tunelu so pokazali, da pri hitrosti okoli 45km/h obstaja točka prehoda med gladkim in turbulentnim tokom, ki lahko dramatično spremeni tir žoge, ki se približuje mreži, medtem ko se hitrost zmanjšuje pod točko prehoda. Ni treba, da je igralec, ki izvaja prosti strel matematik, vendar pa mu poznavanje rezultatov, ki jih dobimo iz fizikalnih dejstev, lahko pomaga razvijati boljše strategije za izvedbo prostega strela. Gibanje žoge je odvisno od oblike njene površine in od načina udarca. Topologija, algebra in geometrija so pomembni za določanje ustreznih vzorcev, medtem ko modeliranje pomaga določiti njihovo primernost. Ko raziskovalci preučujejo trajektorije nogometne žoge, v matematični model vpeljejo poleg modela nove žoge tudi vse druge podrobnosti, vključno s šivi. Pred časom je bila vpeljana korenita sprememba od dolgo uporabljenega petkotniškega šestkotniškega modela šivov na nogometnih žogah Adidas + Teamgeist™. Celotno ogrodje načrtovalnega postopka šivov ostaja enako: aproksimiranje krogle znotraj manj kot dveh odstotkov s pomočjo dvodimenzionalnih panelov.



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 38, šolsko leto 2010/2011, številka 3

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vladimir Bensa, Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2010/2011 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

© 2010 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1807

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Zavij jo kot Bernoulli

MATEMATIKA

- 4-6** Miselna problema na šahovnici
(*Kristijan Breznik*)
- 6-9** Gaussova cela števila, 2. del
(*Daniel Eremita*)

FIZIKA

- 13-14** Pridobivanje monokristalov v epruveti
(*Branislav Čabrić, prevod Petar Pavešić*)
- 15** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)
- 18-20** Kako se spreminjajo barve? – odgovor naloge
Poizkuševalnica v naravi
(*Mojca Čepič*)
- 20-21** Barve brez barvil – Poizkuševalnica doma
(*Mojca Čepič*)
- 21-22** Nobelova nagrada za fiziko 2010
(*Aleš Mohorič*)

ASTRONOMIJA

- 23-25** Model naše galaksije
(*Bojan Kambič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 26-29** Mehka logika, 2. del
(*Damjan Strnad*)

RAZVEDRILO

- 31** Mavrica – Naravoslovna fotografija
(*Aleš Mohorič*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 38/1
(*Marko Bokalič*)
- 14** Poišči mine

TEKMOVANJA

- 10-11** 54. matematično tekmovanje srednješolcev
Slovenije (*Urška Markun*)
- 12** 10. tekmovanje dijakin in dijakov srednjih
poklicnih šol v znanju matematike
(*Dušanka Vrenčur*)
- priloga** 1. tekmovanje v znanju astronomije
– državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo
priznanje – državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo
priznanje – področno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Na sliki je ivje, padavina v trdnem stanju, ki se naredi v mrazu in megli, zlasti na drevju. Sestavljajo ga ledeni kristali, snegu podobna snov. Na veje in listje dreves se nalepijo konice ledenih iglic. Ivje nastaja tam, kjer se telesa najhitreje ohlajajo. Ivje se od slane razlikuje v tem, da slana nastaja v hladnih urah (zvečer, ponoči in zjutraj) pri jasnem in mirnem vremenu, ivje pa nastaja pri oblačnem hladnem vremenu (celodnevna megla in veter). Navadno ivje je v belih ledenih plasteh kristalov, naloženih na vertikalnih površinah, še posebej na konicah predmetov in tistih straneh, od koder piha rahel veter. Ledeni kristali nastajajo zato, ker so v megli podhlajene kapljice. Kapljice imajo premer približno 10 µm. Kapljice so lahko v tekočem stanju tudi pri temperaturi nad -40°C. Ob stiku s trdnim telesom takoj zaledenijo. V megli je tudi vodna para, ki pri dotiku s trdnim telesom sublimira. Tako nastanejo kristali podobni snežinkam. Proces imenujemo tudi akrecija.

Miselna problema na šahovnici

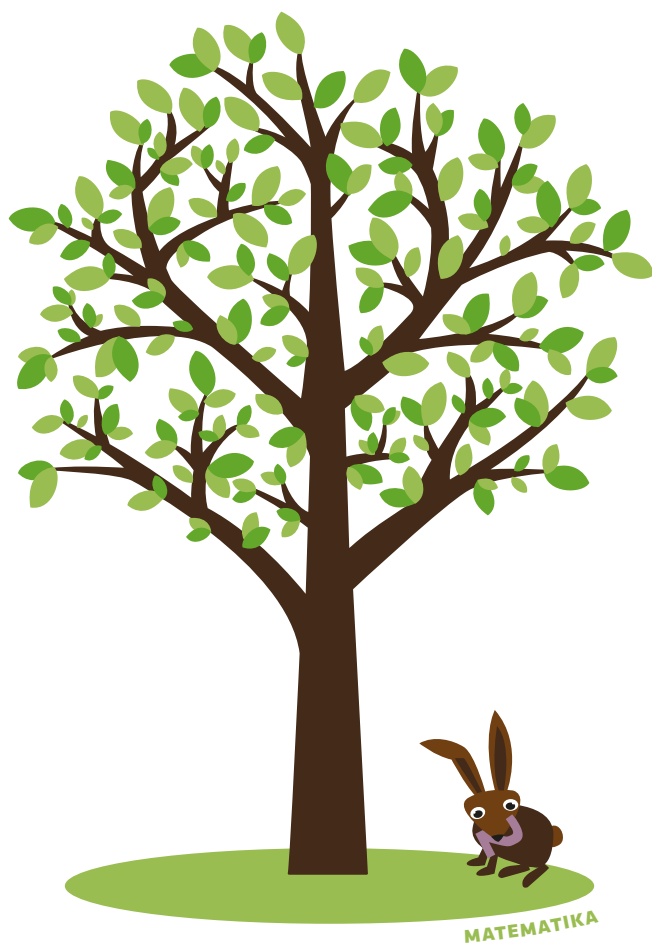


KRISTIJAN BREZNIK

→ Miselne igre niso vedno neposredno povezane z matematiko, toda ukvarjanje z njimi krepi logično razmišljanje, ki je še kako pomembno tako v matematiki kot v vsakdanjem življenju. Šah je ena najpopularnejših in najstarejših miselnih iger. Igra se na kvadratni igralni deski, imenovani šahovnica, ki jo sestavlja 64 polj. Za lažje sporazumevanje polja na šahovnici po navadi označimo, in sicer linije označimo s črkami od a do h, od leve proti desni, podobno vrste označimo s števili od 1 do 8, od spodaj navzgor. Dogovor je tudi, da je polje levo spodaj črne barve, nato polja izmenično menjajo belo in črno barvo. Predstavili bomo miselni igri, ki ju lahko igramo na klasični 8×8 šahovnici. Za razumevanje obeh iger je potrebno osnovno poznavanje šahovskih pravil. Dovolj je, da poznamo pravila premikanja figur pri klasičnem šahu [5]. Iгри spadata med igre za enega igralca, ki jim rečemo tudi problemi.

Problem osmih dam

Cilj igre je postaviti na šahovnico osem dam tako, da se med sabo ne napadajo. Iz samih šahovskih pravil gibanja dame sledi, da noben par dam ne sme



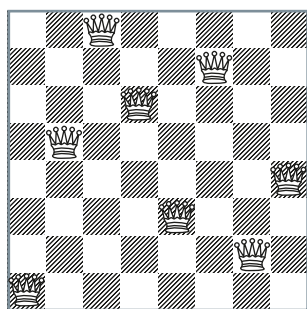
biti postavljen v isti vrsti, liniji ali diagonalni. Najbolj znani matematik, ki se je ukvarjal z reševanjem tega problema, je bil Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Igra še zdaleč ni preprosta, v to se lahko prepriča bralec sam, toda z nekaj truda in poskusov bo gotovo našel rešitev. Precej težje je najti vse rešitve tega problema. Zanimivo je, da kljub številnim poskusom veliki Gauss ni bil prvi, ki je našel vse rešitve te igre.

Problem osmih dam ima natanko 92 rešitev oz. 12 osnovnih različnih rešitev, če upoštevamo vrtenje in zrcaljenje šahovnice. Vseh 12 rešitev je zapisanih na sliki 1.

Na spletni strani [4] si lahko pogledamo, kako računalnik s pomočjo rekurzivnega algoritma, ki mu v slovenščini rečemo *sestopanje* (angl. *backtracking*), poišče vse rešitve. Program najprej postavi damo na neko mesto in nato nadaljuje s postavljanjem naslednjih dam tako, da se med sabo ne napadajo. Če se na katerem koraku postavitev ne izide, če torej naslednje dame ni mogoče pravilno postaviti na šahovnico, se program vrne nazaj in postavi damo na drugo mesto. Metoda vodi do rešitve tega problema. Je sicer časovno zelo potratna, vendar je do danes to edina znana pot, kako poiskati vse rešitve.

SLIKA 1.

Vseh 12 osnovnih rešitev problema osmih dam (spodaj) in grafični prikaz prve od njih (desno).



a1,	b5,	c8,	d6,	e3,	f7,	g2,	h4
a1,	b6,	c8,	d3,	e7,	f4,	g2,	h5
a2	b4,	c6,	d8,	e3,	f1,	g7,	h5
a2,	b5,	c7,	d1,	e3,	f8,	g6,	h4
a2,	b5,	c7,	d4,	e1,	f8,	g6,	h3
a2,	b6,	c1,	d7,	e4,	f8,	g3,	h5
a2,	b6,	c8,	d3,	e1,	f4,	g7,	h5
a2,	b7,	c3,	d6,	e8,	f5,	g1,	h4
a2,	b7,	c5,	d8,	e1,	f4,	g6,	h3
a3,	b5,	c2,	d8,	e1,	f7,	g4,	h6
a3,	b5,	c8,	d4,	e1,	f7,	g2,	h6
a3,	b6,	c2,	d5,	e8,	f1,	g7,	h4

Kasneje so damo zamenjali še z ostalimi figurami. Na klasično 8×8 šahovnico je mogoče postaviti osem šahovskih trdnjav [2], 32 skakačev, 14 lovcev ali 16 kraljev tako, da se iste figure ne napadajo med sabo.

Soroden problemu osmih dam je naslednji problem: koliko dam je potrebno postaviti na šahovnico, da so napadena vsa polja na šahovnici. O tem smo v Preseku že pisali [1].

Skakačev obhod

Pri tej igri želimo s skakačem narediti obhod po vsej šahovnici in pri tem na vsako polje stopiti le enkrat. Začetno polje, na katerem stoji skakač, je lahko izbrano poljubno. Iz samega števila polj na šahovnici sledi, da je treba s skakačem narediti 63 potez za en obhod šahovnice. Igro lahko še otežimo, če zahtevamo, da se skakač na koncu vrne na začetno polje. Temu problemu rečemo *zaključen* skakačev obhod, v nasprotnem primeru govorimo o *nezaključenem* skakačevem obhodu.

Danes vemo, da obstaja natanko

■ 26.534.728.821.064

različnih *zaključenih* skakačevih obhodov. Za ilustracijo, kako zelo veliko število je to, povejmo, da bi potrebovali skoraj milijon let, če bi želeli preigrati vse rešitve. Pa še to ob pogoju, da bi za vsak premik skakača potrebovali le dobro sekundo.

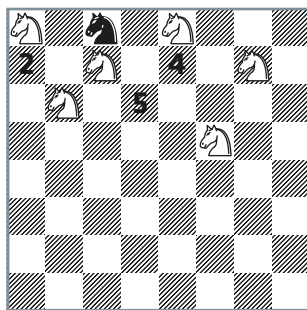
Prvič se je zelo podoben problem pojavil že v devetem stoletju. Med bolj znanimi matematiki se je z njim ukvarjal Leonhard Euler (1707-1783) skoraj devetsto let kasneje. Skakačev obhod je tesno povezan s teorijo grafov, saj je reševanje tega problema primer iskanja Hamiltonove poti v grafu, zaključen skakačev obhod pa je primer Hamiltonovega cikla [3]. Obstaja več načinov, kako se lahko lotimo reševanja problema skakačevega obhoda. Poleg t. i. metode gole sile (angl. *brute force*), ki preveri vse možnosti, se zdi vredno omeniti še Warnsdorffov algoritem, ki je heurističen pristop k reševanju tega problema. Omenjeni algoritem je relativno preprost. Za vsako polje, ki je še na voljo iz trenutnega položaja skakača, preštejemo, koliko polj je dosegljivih v naslednji potezi. Nato izberemo polje, ki ima najmanj možnih potez v naslednji potezi, in nanj postavimo skakača. Postopek nadaljujemo, dokler niso

→ obiskana vsa polja na šahovnici. S tem algoritmom je mogoče najti rešitev, s kateregakoli skakačevega začetnega položaja.

Primer Warnsdorffovega algoritma je na sliki 2, ki prikazuje začetek obhoda skakača. Polja, ki jih je skakač že obiskal, so označena z belim skakačem. Po zadnji potezi je skakač na polju c8 (označen je s črno barvo). Za naslednjo potezo so na voljo polja a7, d6, e7. Sedaj preštejemo število polj, ki jih skakač še lahko obiše z vsakega od omenjenih polj. Po Warnsdorffovem algoritmu za naslednjo potezo izberemo polje a7, saj lahko z njega obiščemo le dve polji.

SLIKA 2.

Primer uporabe Warnsdorffovega algoritma.



Literatura

- [1] B. Brešar: Kraljice napadajo. Presek, letnik 27, št. 1, str. 16-21 (1999-2000).
- [2] M. Juvan: Trdnjave na šahovnici. Presek, letnik 28, št. 2, str. 81 (2000-2001).
- [3] J. Wilson Robin: Uvod v teorijo grafov. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana (1997).
- [4] <http://www.animatedrecursion.com/advanced/the-eight-queens-problem.html>
- [5] <http://www.sah-zveza.si/pravila/pravilafide.pdf>

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Gaussova cela števila, 2.del

↓ ↓ ↓

DANIEL EREMITA

→ V prvem delu prispevka, ki je izšel v prejšnji številki Preseka [1], smo vpeljali množico Gaussovih celih števil in predstavili nekatere osnovne lastnosti, ki jih ima relacija deljivosti v tej množici. Spomnimo se, da je množica Gaussovih celih števil $\mathbb{Z}[i]$ množica vseh števil oblike $a + bi$, kjer sta a in b celi števili. Poleg relacije deljivosti smo v množici Gaussovih števil vpeljali še pojme, kot so enota, asociirano število Gaussovega števila in norma Gaussovega števila (glej prvi del prispevka [1]).

V nadaljevanju nas bodo zanimala Gaussova praštevila. Proučili bomo povezavo med Gaussovimi in običajnimi praštevili ter predstavili zanimiv nerešeni problem, ki je star skoraj 50 let.

Gaussova praštevila

Praštevila imajo v množici naravnih števil prav posebno vlogo. Spomnimo se, da je praštevilo vsako naravno število p , ki je različno od 1 in ima natanko dva pozitivna delitelja, števili 1 in p . Na enak način definiramo Gaussova praštevila.

Definicija 3. Neničelno Gaussovo število π je *Gaussovo praštevilo*, če ni enota in je deljivo samo z enotami in s svojimi asociiranimi števili.

Ob tej definiciji se porodijo naslednja vprašanja: Kako ugotovimo, da je neko Gaussovo število Gaussovo praštevilo? Ali so običajna praštevila tudi Gaussova praštevila? Katera Gaussova števila so Gaus-

sova praštevila? Odgovore na ta in na sorodna vprašanja bomo podali v nadaljevanju.

Definicija nam pove, da je Gaussovo število π Gaussovo praštevilo, če ni enota in ima natanko osem deliteljev: štiri enote $1, -1, i, -i$ in štiri asociirana števila $\pi, -\pi, i\pi, -i\pi$. Vsako Gaussovo število, ki ni enota in ki ni Gaussovo praštevilo, ima torej več kot osem deliteljev.

Zgled 1. Ali je $1+2i$ Gaussovo praštevilo? Da bi lahko odgovorili na to vprašanje, moramo ugotoviti, ali poleg enot in asociiranih števil obstaja še kak drug delitelj števila $1+2i$. Iz prvega dela prispevka [1, trditev 1] je razvidno, da moramo preveriti deljivost števila $1+2i$ le s tistimi Gaussovimi števili, katerih norma deli $N(1+2i) = 5$. Pri tem seveda izpustimo enote in asociirana števila Gaussovega števila $1+2i$ (glej [1, zgled 4]). Ugotoviti je torej potrebno, ali je $1+2i$ deljivo še s katerim od števil $1-2i, -1+2i, 2+i, -2-i$. Če število $1+2i$ delimo s temi števili, ugotovimo, da nobeno od naštetih števil ne deli števila $1+2i$. Torej so edini delitelji števila $1+2i$ enote $1, -1, i, -i$ in asociirana števila $1+2i, -1-2i, -2+i, 2-i$. To pomeni, da je $1+2i$ Gaussovo praštevilo.

Postopek, ki smo ga opisali v primeru, je lahko precej zamuden. Oglejmo si še nekoliko bolj elegantno metodo, ki temelji na naslednjem izreku.

Izrek 1. Če je π Gaussovo število in $N(\pi) = p$ za neko praštevilo p , potem je π Gaussovo praštevilo.

Dokaz. Naj bo α delitelj Gaussovega števila π . Potem je $\pi = \alpha\beta$ za neki $\beta \in \mathbb{Z}[i]$. Zato je $N(\pi) = N(\alpha)N(\beta)$. Ker je $N(\pi) = p$, dobimo

$$\blacksquare \quad p = N(\alpha)N(\beta).$$

A ker je p praštevilo in sta $N(\alpha)$ ter $N(\beta)$ naravni števili, sledi, da je bodisi $N(\alpha) = 1$ in $N(\beta) = p$ bodisi $N(\alpha) = p$ in $N(\beta) = 1$. To pomeni, da je α enota ali β enota (glej dokaz izreka 1 v prvem delu [1]). S tem smo dokazali, da je vsak delitelj Gaussovega števila π bodisi enota bodisi asociirano število števila π . Torej je π Gaussovo praštevilo.

Zgled 2. Z uporabo izreka 1 pokažimo, da je $2+3i$ Gaussovo praštevilo. Zadošča izračunati $N(2+3i) =$

$2^2 + 3^2 = 13$. Ker je 13 praštevilo, nam izrek 1 pove, da je $2+3i$ Gaussovo praštevilo.

Žal pa ta metoda odpove v primeru, ko je $N(\pi)$ sestavljeno število. Obstajajo namreč Gaussova praštevila, katerih norma ni praštevilo. Eden takih primerov je Gaussovo število 3. Kot bomo videli, je 3 Gaussovo praštevilo, čeprav je $N(3) = 3^2 = 9$ sestavljeno število.

Poglejmo sedaj, katera od običajnih praštevil so Gaussova praštevila. Takoj opazimo, da izreka 1 v tem primeru ni možno uporabiti, saj je norma poljubnega praštevil p sestavljeno število. Velja namreč $N(p) = p^2$.

Zgled 3. Zlahka opazimo, da 2 ni Gaussovo praštevilo, saj je $2 = -i(1+i)^2$. Število $1+i$ je torej delitelj števila 2 in ni niti enota niti asociirano število števila 2. Je pa $1+i$ Gaussovo praštevilo, saj je $N(1+i) = 2$ praštevilo. Tako smo število 2 zapisali kot produkt Gaussovih praštevil in enote $-i$.

Zgled 4. Tudi praštevilo 5 ni Gaussovo praštevilo, saj je $5 = (2+i)(2-i)$. Ker velja $N(2+i) = N(2-i) = 5$, sledi, da sta $(2+i)$ in $(2-i)$ Gaussovi praštevili. Torej znamo tudi število 5 zapisati kot produkt Gaussovih praštevil.

Zgled 5. Sedaj se prepričajmo, da je število 3 Gaussovo praštevilo. Predpostavimo, da je

$$\blacksquare \quad 3 = (a+bi)(c+di)$$

za neki Gaussovi števili $a+bi$ in $c+di$, ki nista enoti. Potem je $N(3) = N((a+bi)(c+di))$. Ker je $N((a+bi)(c+di)) = N(a+bi)N(c+di)$, sledi

$$\blacksquare \quad 9 = N(a+bi)N(c+di).$$

Ker števili $a+bi$ in $c+di$ nista enoti, vemo, da $N(a+bi) \neq 1$ in $N(c+di) \neq 1$. To pomeni, da je $N(a+bi) = N(c+di) = 3$. Od tod sledi $a^2+b^2 = 3$, kar je nemogoče, saj števila 3 ni možno zapisati kot vsote kvadratov dveh celih števil. S tem smo dokazali, da je 3 Gaussovo praštevilo.

Na podoben način se lahko prepričamo, da so poleg praštevil 3 tudi praštevila 7, 11, 19, 23, ... Gaussova



→ praštevila. Pozoren bralec bo opazil, da imajo ta praštevila skupno lastnost. Vsa namreč dajo ostanek 3 pri deljenju s 4. To ni zgolj naključje. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 2. Če je p praštevilo oblike $4k + 3$, potem je p Gaussovo praštevilo (v tem primeru so Gaussova praštevila tudi $-p$, ip in $-ip$).

Dokaz. Naj bo p praštevilo in $p = 4k + 3$ za neko celo število k . Predpostavimo, da p ni Gaussovo praštevilo. Potem je $p = (a + bi)(c + di)$ za neki Gaussovi števili $a + bi$ in $c + di$, ki nista enoti. Od tod sledi $N(p) = N((a + bi)(c + di))$ in zato je

$$p^2 = N(a + bi)N(c + di).$$

Ker števili $a + bi$ in $c + di$ nista enoti, vemo, da $N(a + bi) \neq 1$ in $N(c + di) \neq 1$. To pomeni, da je

$$N(a + bi) = a^2 + b^2 = p \quad \text{in}$$

$$N(c + di) = c^2 + d^2 = p.$$

Ker vemo, da je lahko kvadrat celega števila le oblike $4k$ ali $4k + 1$, sledi, da $p = a^2 + b^2$ ni oblike $4k + 3$. To nas privede do protislovja in dokaz je končan.

Enolična faktorizacija Gaussovih števil. Spomnimo se, da lahko po osnovnem izreku aritmetike vsako naravno število n , ki je večje od 1, zapišemo kot produkt praštevil. Še več, tak zapis je enoličen, do vrstnega reda prafaktorjev natančno. To pomeni, da lahko naravno število n zapišemo kot produkt praštevil na en sam način, če se na primer dogovorimo, da prafaktorje uredimo po velikosti. Ni težko razmisliti, da velja podoben izrek tudi za vsako celo število, ki je različno od -1 , 0 in 1 .

Nekaj Gaussovih števil smo že v zgornjih zgledih zapisali v obliki produktov Gaussovih praštevil. Da to velja za vsako neničelno Gaussovo število, ki ni enota, je dokazal že Gauss. Torej imajo Gaussova števila še eno podobno lastnost kot običajna cela števila.

Izrek 3 Vsako neničelno Gaussovo število α , ki ni enota, lahko zapišemo kot produkt Gaussovih praštevil. Ta zapis je enoličen v naslednjem smislu: če je

$$\alpha = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l,$$

kjer so $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ Gaussova praštevila, potem je $k = l$ in po morebitni zamenjavi indeksov velja, da je π_i asociirano število števila ω_i za vsak $i = 1, 2, \dots, k$.

Zgled 6 Gaussovo število 2 smo že faktorizirali. Zapišemo ga lahko kot

$$2 = -i(1 + i)^2 \quad \text{ali kot}$$

$$2 = (1 + i)(1 - i).$$

V skladu z izrekom 3 produkta

$$-i(1 + i)^2 \quad \text{in}$$

$$(1 + i)(1 - i)$$

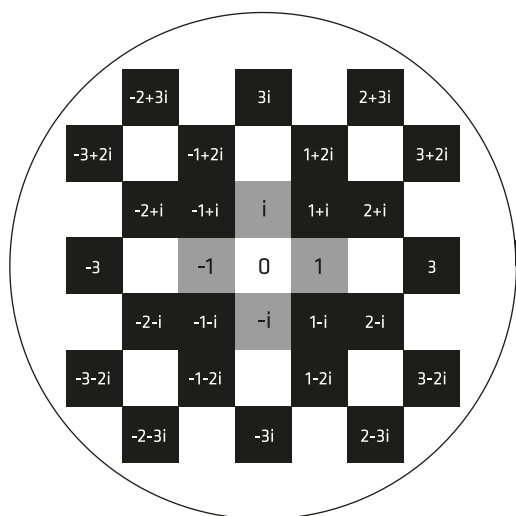
predstavljata isto faktorizacijo števila 2, saj je $-i(1 + i)$ asociirano število števila $1 - i$ ter $1 + i$ asociirano število števila $1 + i$.

Karakterizacija Gaussovih praštevil. Ugotovili smo, da so vsa tista Gaussova števila, ki zadoščajo predpostavkam izreka 1 ali izreka 2, Gaussova praštevila. Še več, izkaže se, da so to kar vsa Gaussova praštevila. Velja namreč naslednji izrek, ki opiše množico vseh Gaussovih praštevil.

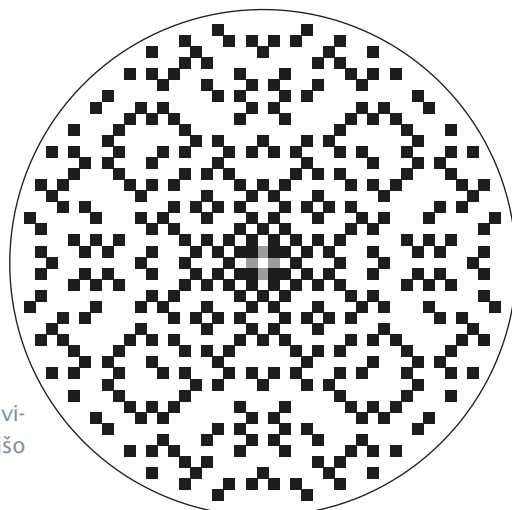
Izrek 4 Gaussovo število $a + bi$ je Gaussovo praštevilo natanko tedaj, ko velja ena izmed naslednjih možnosti:

- $N(a + bi)$ je praštevilo (in $a, b \neq 0$),
- $|a|$ je praštevilo oblike $4k + 3$ in $b = 0$,
- $|b|$ je praštevilo oblike $4k + 3$ in $a = 0$.

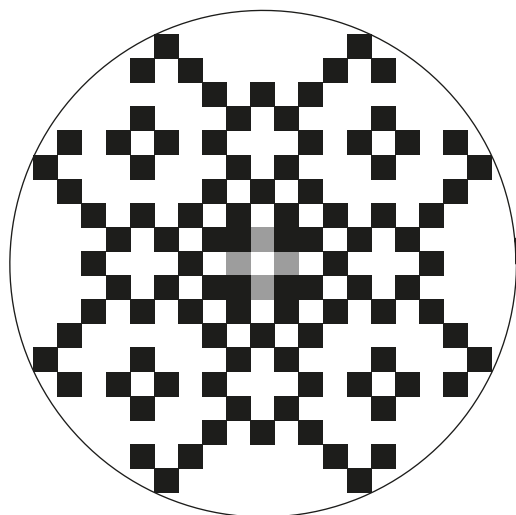
Omeniti velja, da imajo Gaussova števila še več podobnih lastnosti kot običajna cela števila. Tako se na primer izkaže, da lahko tudi za Gaussova cela števila izpeljemo izrek o deljenju z ostankom, vpeljemo pojem največjega skupnega delitelja in izvajamo Evklidov algoritem. Gaussova števila je v knjigi [3] z naslovom *Algebraična števila* zelo natančno in hkrati dovolj elementarno obravnaval prof. dr. Jože Grasseili, kjer lahko bralci najdejo še več o njih.


SLIKA 1.

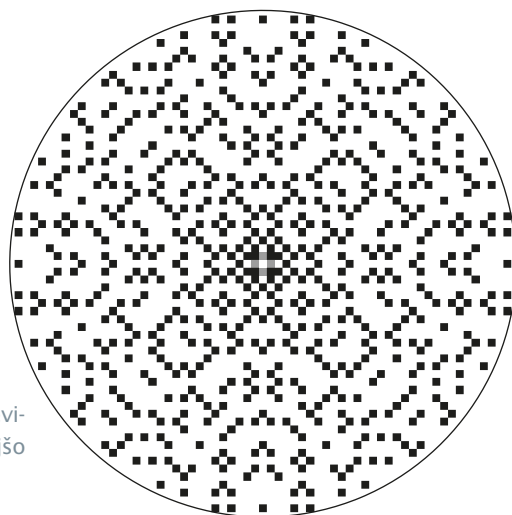
Gaussova praštevilna z normo manjšo od 16.


SLIKA 3.

Gaussova praštevilna z normo manjšo od 500.


SLIKA 2.

Gaussova praštevilna z normo manjšo od 100.


SLIKA 4.

Gaussova praštevilna z normo manjšo od 1000.

Nerešen problem

Za konec omenimo še nerešeni problem, ki ga je leta 1962 zastavil Basil Gordon na mednarodnem kongresu matematikov v Stockholmu.

Problem 1 Ali lahko odkorakamo v neskončnost, če stopamo le po Gaussovih praštevilih in delamo korake omejene dolžine?

Zanima nas torej, ali obstaja tako pozitivno realno število r , da se s hojo po Gaussovih praštevilih, s koraki dolžine največ r , poljubno oddaljimo od koordinatnega izhodišča. Čeprav mnogi domnevajo, da na tak način ni možno odkorakati v neskončnost, je problem po skoraj 50-ih letih še vedno odprt. Po doslej

znanih rezultatih vemo, da se s koraki dolžine največ $\sqrt{26}$ ni možno poljubno oddaljiti od izhodišča. To so leta 1998 dokazali Gethner, Wagon in Wick [2].

Literatura

- [1] D. Eremita, *Gaussova cela števila, 1. del*, Presek **38** (2010) 2, 8–10
- [2] E. Gethner, S. Wagon, B. Wick, *A Stroll Through the Gaussian Primes*, American Mathematical Monthly **105** (1998), 327–337.
- [3] J. Grasselli, *Algebraična števila*, DMFA, Ljubljana, 1983.
- [4] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and its applications, 5th ed.*, Pearson/Addison Wesley, Boston, 2005. × × ×

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije



URŠKA MARKUN

→ V soboto, 17. aprila 2010, je na Gimnaziji Bežigrad potekalo 54. državno tekmovanje iz matematike. Organiziralo ga je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije s pomočjo soorganizatorja, Gimnazije Bežigrad. Udeležilo se ga je 153 dijakov iz 41-ih slovenskih gimnazij, ki so bili izbrani na podlagi doseženih rezultatov na izbirnem tekmovanju. Državno tekmovanje se je začelo s kratko slavnostno otvoritvijo, nadaljevalo pa z reševanjem nalog, ki je trajalo od 9.30 do 13.00. Po zaključku pisanja so se tekmovalci in njihovi mentorji lahko udeležili katere od ponujenih športnih aktivnosti ali pa so si popoldne popestrili z vožnjo po Ljubljani in vzponom na ljubljanski grad. Neuradni rezultati so bili objavljeni še istega dne, uradni pa po preteku časa za pritožbe in razrešitvi letih. Nagrade so bile najboljšim tekmovalcem podeljene 19. maja 2010 na slavnostni prireditvi v Koloseju v Ljubljani.

Zlato priznanje za uspeh na državnem tekmovanju iz matematike je prejelo 85 tekmovalcev. Pri tem je bilo podeljenih pet prvih, osem drugih in deset tretjih nagrad.

1. NAGRADA

1. letnik

- MATIJA SKALA, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija, Ljubljana

2. letnik

- MATJAŽ LEONARDIS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- VENO MRAMOR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

4. letnik

- TOMAŽ STEPIŠNIK PERDIH, I. gimnazija, Celje
- MATEJ ALEKSANDROV, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

2. NAGRADA

1. letnik

- TADEJ CIGLARIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- EVA LIPNIK, Gimnazija Ledina, Ljubljana
- ERIK LANGERHOLC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

2. letnik

- VESNA IRŠIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

3. letnik

- NIK JAZBINŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

4. letnik

- EVA BREZNIK, I. gimnazija, Celje
- MATEJ MLINARIČ, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer
- MATEJ PETKOVIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

3. NAGRADA

1. letnik

- TIMOTEJ GRUDEN, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana
- ŽAN KLANEČEK, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer
- NIKA OSEL, Gimnazija Kranj
- MIHAELA PUŠNIK, I. gimnazija, Celje
- ERIK SCHERIANI, Gimnazija Gian Rinaldo Carli, Koper

2. letnik

- VID GRUDEN, Gimnazija Nova Gorica

3. letnik

- NEŽA ŽAGER-KORENJAK, I. gimnazija, Celje
- KLEMEN ZAJC, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana
- MATEJA HRAST, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

4. letnik

- FILIP KOZARSKI, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

ZLATA PRIZNANJA

1. letnik

Matija Skala in Timotej Gruden (Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana), Tadej Ciglarič in Erik Langerholc (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Eva Lipnik in Domen Tomič (Gimnazija Ledina, Ljubljana), Žan Klaneček, Mitja Šadl in Nejc Havaši (Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer), Nika Osel, Anže Božič, Sara Ručigaj, Robi Ravnikar, Matej Mohorič in Nejc Kišek (Gimnazija Kranj), Mihaela Pušnik in Maruša Pečovnik (I. gimnazija, Celje), Erik Scheriani (Gimnazija Gian Rinaldo Carli Koper), David Gričar (Gimnazija Moste, Ljubljana), Rok Havlas, Saša Ritonja, Kristijan Šoštarič in Nejc Čeplak (II. gimnazija Maribor), Katjuša Koler (Gimnazija Jurija Vege Idrija), Marko Stručić (Gimnazija Brežice), Franko Jančič (Srednja tehniška šola Koper), Jar Žiga

Marušič (Gimnazija Koper), Andrej Svetina (Gimnazija Nova Gorica), Barbara Volarič in Tadej Ulčnik (ŠC Rogaška Slatina), Lucija Bizjak in Martina Petrič (Gimnazija Vič, Ljubljana), Mirjam Drobnič in Peter Merše (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Urban Alič (Gimnazija Šentvid Ljubljana), Ana Sever (ŠC Postojna, Srednja šola) ter Maks Pečar (ŠC Krško-Sevnica, Gimnazija Krško).

2. letnik

Matjaž Leonardis, Venko Mramor, Vesna Iršič, Domen Ipavec, Luka Benčan, Domen Kampjut in Anja Petkovič, (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Vid Gruden (Gimnazija Nova Gorica), Rok Kaufman, Vid Kovačec in Ajda Zavrtanik Drglin (Gimnazija Vič, Ljubljana), Tjaša Legen in Anja Žižek (Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer), Vendi Grobelšek (I. gimnazija, Celje), Boštjan Petek (II. gimnazija Maribor), Žiga Gregorin (ŠC Velenje, Gimnazija), Žan Novak (Gimnazija Škofja Loka) ter Matej Pelko (Gimnazija Kranj).

3. letnik

Nik Jazbinšek, Mateja Hrast, Pavel Kos, Simon Bergant in Jaka Dolenc (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Neža Žager-Korenjak, Aleš Omerzel, Kaja Sajko in Gloria Kotnik (I. gimnazija, Celje), Klemen Zajc (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Gregor Rus in Borut Lampret (ŠC Velenje, Gimnazija), Jaka Kavčič (Gimnazija Škofja Loka), Nina Troha (Gimnazija Jurija Vege Idrija) ter Tadej Novak (Gimnazija Kranj).

4. letnik

Tomaž Stepišnik Perdih in Eva Breznik (I. gimnazija, Celje), Matej Aleksandrov, Matej Petkovič, Filip Kozarski, Miša Vidmar, Peter Koželj in Anja Bregar (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Matej Mlinarič in Sara Drvarič Talian (Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer), Črt Jaklič (ŠC Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija), Marin Ferara (ŠC Celje, Gimnazija Lava), Katja Klobas (Gimnazija Koper), Jana Aupič (Gimnazija Kočevje) ter Luka Šturm (Gimnazija Škofja Loka).

× × ×

www.presek.si

10. tekmovanje dijakinj in dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike



DUŠANKA VRENČUR

→ Na šolskem tekmovanju je letos tekmovalo 1194 tekmovalcev.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Srednja ekonomska šola v Mariboru sta organizatorja 10. državnega tekmovanja v znanju matematike za 58 najboljših dijakinj in dijakov srednjih poklicnih šol iz 37-ih slovenskih poklicnih šol. Med njimi je bilo podeljenih 44 zlatih priznanj.

Na svečani podelitvi je organizator prvim trem najboljše uvrščenim iz vsakega letnika podelil priznanja in praktične nagrade. Prejeli so jih:

1. LETNIK

I. nagrada

- MARKO LEBAR, ŠC Ptuj, Strojna šola

II. nagrada

- ANEJ PREGELJ, TŠC Nova Gorica, Strojna, prometna in lesarska šola

III. nagrada

- MATIJA ČEBULAR, ŠC Novo mesto, Srednja strojna šola

2. LETNIK

I. nagrada

- UROČ DOGARIS, ŠC Celje, Srednja šola za gradbeništvo

II. nagrada

- MATJAŽ METELKO, ŠC Celje, Srednja šola za strojništvo in mehatroniko

III. nagrada

- DAVID FRIDAUER, ŠC Ptuj, Strojna šola

3. LETNIK

I. nagrada

- ROK ATELŠEK, ŠC Škofja Loka, Srednja šola za lesarstvo

II. nagrada

- TOMAŽ OGRIZEK, Srednja frizerska šola Ljubljana

III. nagrada

- JAS OGRIN, TŠC Kranj

xxx

www.presek.si
www.dmfa.si
www.dmfa-zaloznistvo.si

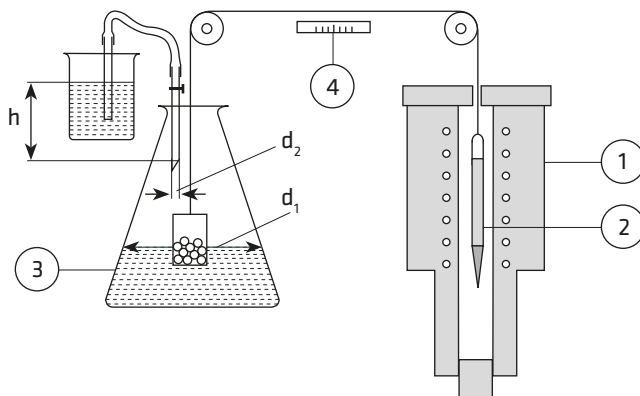
Pridobivanje monokristalov v epruveti



BRANISLAV ČABRIČ, PREVOD PETAR PAVEŠIČ

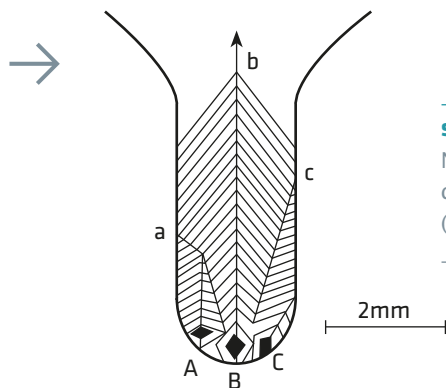
→ V članku je predstavljena originalna šolska naprava, ki omogoča uravnavanje hitrosti naraščanja monokristala iz raztopine v epruveti. S pomočjo te naprave je možno določiti najprimernejšo hitrost naraščanja, potrebno za pridobivanje zelo pravilnih monokristalov. Navedeni so pogoji za pridobivanje monokristalov nekaterih snovi v šolskem laboratoriju.

Ena izmed mnogih metod za regulacijo naraščanja kristalov v raztopini, ki je izvedljiva v šolskem laboratoriju, je Bridgmanova metoda (1882–1961), dobitnik Nobelove nagrade leta 1946) [1]. Načrt originalne naprave, ki smo si jo zamislili in ki jo je mogoče sestaviti v šolskem laboratoriju, je prikazana na sliki 1.



SLIKA 1.

Naprava za uravnavanje rasti monokristala po Bridgmanovi metodi. (1) elektroporna cilindrična peč, (2) steklena cev, na dnu zaključena s kapilaro (Bridgmanova epruveta), (3) posoda s spremenljivim presekom in (4) merilo.

**SLIKA 2.**

Nastanek monokristala na dnu Bridgmanove epruvete (kapilare).

Temperaturo peči nastavimo na okoli 50 °C nad tališčem snovi, potem pa, ob stalni temperaturi peči, počasi spuščamo epruveto. Ko konec epruvete (kapilare) izstopa iz peči, se v njej oblikujejo jedra kristalov (slika 2). Zaradi majhne količine raztopine na dnu epruvete, t. j. v kapilari, nastane le nekaj kristalnih jeder. Jedra, ki naraščajo proti stenam kapilare *Aa* in *Cc*, slej ko prej nehajo rasti. Edino jedro, ki narašča v smeri osi kapilare *Bb* preraste ostala jedra in se po izstopu iz kapilare razširi na celoten prerez epruvete [2].

Hitrost spuščanja epruvete mora biti manjša od hitrosti naraščanja monokristala (glej tabelo), sicer bodo nastala nova jedra. Primerna hitrost je odvisna od preseka posode (d_1), preseka kapilare (d_2) in višine (h). Na podlagi hitrosti spuščanja vzdolž epruvete in kakovosti kristala vzdolž epruvete je mogoče določiti hitrost, potrebno za pridobivanje najbolj pravega monokristala.

Za rast kakovostnih monokristalov (z majhno koncentracijo primesi in nepravilnosti) je potrebna zelo čista raztopina, epruveta iz snovi, ki kemično ne reagira z raztopino, zelo stabilna temperatura v peči in odsotnost mehaničnih tresljajev. Pogoji za rast mo-

snov	tališče (°C)	premer epruvete (cm)	hitrost naraščanja monokristala (cm/h)
naftalin	80.1	1,3 – 2	0,1 – 0,4
Sn	231.9	0,5	2,5 – 13
Bi	271.4	0,5	2,5 – 16
Pb	327.5	2,5 – 4	1,8 – 18
Zn	419.6	4 – 5	2 – 6

TABELA.

Pogoji za rast monokristalov nekaterih snovi [1].

**SLIKA 3.**

Monokristal sintetične spojine $BaNi_2(PQ_4)_2$ [3]. Kristal ima električno polarizacijo (električni dipolni moment) tudi kadar ni v električnem polju (feroelektrični kristal).

nokristalov nekaterih snovi z nizkim tališčem, primernih za šolsko delo, so podani v tabeli.

Literatura

- [1] Wilke, K-Th., Bohm, J., *Kristallzüchtung*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [2] Čabrić, B., Janićijević, A., *Začete i rast kristala u rastopu*, Hemijski pregled, 41, br.5 (2000), str. 122.
- [3] Čabrić, B., Arnaut, S., Cvjetković, V., *Programming the crystallization rate along a Bridgman test tube*, Cryst. Res. Technol (Berlin), 32 (3),(1997), str. 485.

xxx

Poišči mine



→ Naloga reševalca je, da poišče vse skrite mine in z M označi ustrezne kvadratke in odkljuka kvadratke brez min. Pri tem veljata naslednji pravili: a) Vsako število v preglednici pove, koliko sosednjih kvadratkov vsebuje mino. Kvadrateg je sosednji kvadratku, če imata skupno stranico. Kvadrati v spodnji vrsti so na enak način sosednji kvadratkom v zgornji vrsti in kvadrati v levem stolpcu so na enak način sosednji kvadratkom v desnem stolpcu. b) Kvadrati s številkami nimajo mine.

	1	0		
	1			2
	0		2	
1				3
		0		



REŠITEV

W		0		W
E	W			L
W	Z		0	
Z			L	W
W		0	L	W

xxx

Razmisli in poskusi

↓↓↓

MITJA ROSINA

→

41. Borromejski obroči simbolizirajo življenjsko moč rodne Borromeo iz severne Italije: V slogi je moč! Trije obroči na sliki 1 držijo skupaj; če pa enega odpreš in odstraniš, ostala dva razpadeta.

Sestavi take tri obroče iz žic ali cevč. Ali res razpadejo, če enega odstraniš? Ali je mogoče borromejske obroče sestaviti iz pravih ravninskih krogov, ali morajo biti rahlo zverženi? Zakaj? Ali znate trije sošolci sestaviti borromejske obroče tako, da sklenete vsak svoje roke v obroč in jih pred tem prepletete?

Zgledi. Zglede najdemo tudi v naravi, celo pri molekulah in atomskih jedrih. *Borromejska jedra* so sestavljena iz treh nukleonov ali manjših jeder, vendar razpadejo, če enega od njih izbijemo s trkom projektila. Primer je jedro ${}^6\text{He} \approx {}^4\text{He} + n + n$, kajti niti ${}^5\text{He}$ niti dinevtron ni vezan in takoj razpade. Podobna primera sta jedri ${}^9\text{Be} \approx {}^4\text{He} + {}^4\text{He} + n$ ter ${}^{12}\text{C} \approx {}^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$, saj tudi ${}^8\text{Be}$ ni vezan.

Mnogo zanimivih zgledov najdeš v Wikipediji. Morda se boš tudi ti kakega domislil in nam ga poslal.

www.presek.si

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si



SLIKA 1.

Borromejski obroči (iz Wikipedije - Borromean rings)

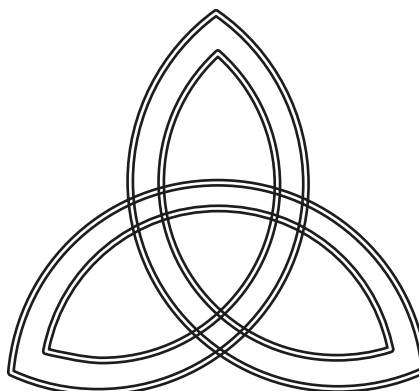
SLIKA 2.

Borromejski obroči v vrtnih vratih Borromejske palače na enem od Borromejskih otokov na jezeru Lago Maggiore ponazarjajo prijateljstvo med rodbinami Visconti, Sforza in Borromeo.



SLIKA 3.

Že v srednjem veku so prepleteni krogi predstavljali troedinega Boga (omenja jih že sveti Avguštin, 354–430). Podobna na tej sliki je „trikvetra“ iz ene same prepletene krivulje, ki jo vidimo ponekod na nagrobnikih, npr. v Veliki Britaniji in na Švedskem.



xxx

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **15. januarja 2011**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

Kako se spreminjajo barve?

ODGOVOR NALOGE



MOJCA ČEPIČ

→ Skoraj je že minila jesen, listje se je že usulo in čas je, da poročamo o raziskovalni nalogi, ki vas je vabila k opazovanju dreves. Večina nas o barvah listov ne ve prav mnogo. V naravoslovni reviji *Proteus* sta v preteklih letih izšla dva članka na temo barv listja. V članku [1] so avtorji izmerili odbojni spekter listja in ugotovili, da se v svetlobi, ki jo odbija list, skriva več barv in ne samo običajna zelena.

Drugi članek [2] se je ukvarjal s spreminjanjem barv. A lotimo se raziskovanja dogajanja, z opazovanjem bomo zbrali podatke in poskusili postaviti hipoteze. Žal hipotez ne bomo preverjali, ker bi zato morali počakati še celo leto, narediti kupček meritev itd. Bomo pa v prihodnje še kakšno rekli o tem, kaj na to temo pravijo „pravi“ raziskovalci.

Opazovala sem tri različna drevesa v svoji bližnji okolici. Sosedovo okrasno drevo, katerega barve so me vsako leto prevzele, mačico pred našo hišo, ki je jeseni sploh nisem opazila in še eno veliko drevo ob cesti. Slike kažejo, kako so se barve spreminjale skozi dva meseca in pol. Vidimo naslednje: ne spreminjajo vsa drevesa barv na enak način. Na enih listih rdijo, na drugih rumenijo, na tretjih se po barvi skorajda ne spreminjajo, nenadoma porjavijo in kar odpadejo.

Ko raziskovalci zberejo podatke, je pomembno, da jih uredijo. Iz neurejenih slikc naših treh dreves bi težko kaj sklepali. Zato smo uredili slike v dvo-

dimenzionalno tabelo. vzdolž vodoravnice so slike urejene po času posnetka, tako lahko neposredno sklepamo, kdaj je posnetek nastal in ni treba brskati po podatkih digitalne fotografije. Navpično smo razvrstili različne vrste dreves. Tako lahko sledimo razvoju posameznega drevesa.

Oglejmo si torej slike dreves na časovni osi letošnje jeseni. Okrasno drevo je bilo v začetku septembra še lepo zeleno, le v tonu zelene barve lahko slutimo bodočo rdečino. Ko so se krajšali dnevi in se nižale temperature, so listi postajali bolj in bolj rdeči, nato so začeli rumeneti in odpadati. Skokovite spremembe barv so se zgodile v obdobjih, ko so bile temperature nekaj časa nižje. Hišna mačica je ostajala zelena, le tu in tam je porumenel kak listek, pa tudi odpadalo jih je bolj malo. Na zadnji fotografiji jo vidimo po krajšanju „kiklce“, a listi se na njej še vedno držijo. Hrast je v začetku novembra nenadoma spremenil barvo in izgubil liste.

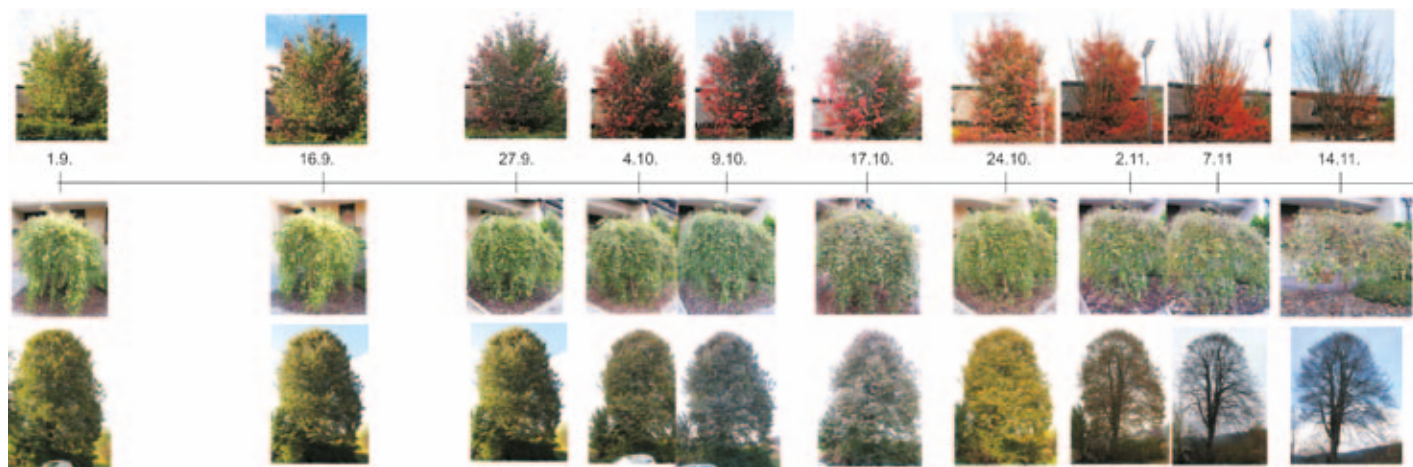
Na fotografijah vidimo še nekaj. Sodobna digitalna fotografija počne z barvami marsikaj. Ob bolj svetlih dnevih so barve precej drugače zabeležene kot ob oblačnih dnevih, ki jih je bilo letos obilo. A vtis o razvoju barv vseeno lahko zabeležimo.

Če pogledamo tako urejene slike treh dreves in se naslonimo še na druge spremljajoče izkušnje, lahko postavimo nekaj hipotez

- Skozi katere barvne odtenke živi drevo, je lastnost drevesa oziroma vrste; ogledali smo si tri vrste dreves in vsako je imelo ob enakih časih in v skoraj enakih okoliščinah različne barve.

- Nekatera drevesa odvržejo najprej liste na zunanjih delih krošnje, kasneje pa še v notranjosti; tako kaže slika okrasnega drevesa.

- Spremembe barv so bolj intenzivne ob ohladitvah.



SLIKA 1.

Sosedovo okrasno drevo (zgoraj), domača vrbja mačica (v sredini) in hrast ob cesti (spodaj).



SLIKA 2.

Bukev 31. oktobra 2010 na višini 400m (levo) in na višini 900 m (desno).



Kako preveriti gornje hipoteze? Nobene od hipotez ne bomo mogli preveriti še letos. Opazovanje dreves je dalo le prvi namig. Kogar zanima, lahko naslednje leto načrtno spremlja nekaj dreves.

Preverjanje hipotez zahteva upoštevanje določenih pravil. Če želimo preveriti, ali je zaporedje barv lastnost vrste, bo treba poiskati več dreves enake vrste, ki bodo rasla v vsaj približno enakem okolju in jih primerjati s skupino dreves neke druge vrste v enakem okolju. Spremeniti smemo le eno lastnost oziroma okoliščino in to je „vrsta“ drevesa. Le tako lahko sklepamo, da je način spreminjanja barv odvisen le od vrste.

Barvo listov dreves določajo spektri odbite svetlobe oziroma odvisnost albeda od valovne dolžine svetlobe. Več o tem si lahko preberete v članku [1]. Zdi se, da je prav albedo kot funkcija valovne dolžine karakteristika posamezne rastlinske vrste.

Če želimo preveriti drugo hipotezo, bo treba opa-

zovati drevesa najrazličnejših vrst in ugotavljati, ali je odmetavanje „zunanjih“ listov bolj pogosto, kot odmetavanje „notranjih“. Vso letošnjo jesen sem opazovala najrazličnejša drevesa in izkaže se, da je pogosto tako. Zakaj je tako, ne vem. Ampak vsak pravi fizik bo takoj naložil naročje idej. Ali so morda zunanji listi bolj pod udarom vetra? Ali je v notranjosti drevesne krošnje morda ugodnejša mikroklima, ker ni tolikšnega kroženja zraka? Ali so v notranjosti drevesa listi preprosto mlajši, ker so morda ozeleneli nekoliko kasneje, kot zunanji? Vsako od tovrstnih idej je treba načrtno raziskati, a take raziskave pogosto presegajo možnosti običajnega radovedneža.

Namenimo še nekaj besed zadnji hipotezi, ki je sicer ne moremo razbrati iz fotografij, pač pa iz dodatnih podatkov o temperaturah. Žal temperatur ob fotografiranju nisem zapisovala, kar se je izkazalo za napako. Pri začetnih raziskavah se pogosto zgodi,





da ne izmerimo vsega, kar se izkaže kasneje kot pomembno. Če je to fizikalni poskus, ga lahko ponovimo in izmerimo manjkajoče. Če je to dogajanje v naravi, ki sledi letnim časom, moramo počakati na ponovitev dogajanja in podrobnejše meritve, leto dni. To se je zgodilo v tem primeru. Če je dogodek enkratne narave, npr. nepričakovan plaz ali povodenj, potem meritev morda ne bomo mogli izvesti nikoli, ker se dogodek ne bo več ponovil. Tako se je zgodilo z zasledovanjem mešanja kovancev v Evropi ob vpeljavi evra. Ker tega nihče ni zasledoval, te spremljave ne bo nikoli več mogoče izvesti.

Če se vrnemo k hipotezi, se takoj pojavi tudi vprašanje: Kaj je vzrok za spremembe barv? V članku [2] so avtorji navajali, da se barve listja spreminjajo jeseni, ker je pot sončne svetlobe skozi ozračje daljša kot poleti. Ker se svetlobe krajše valovne dolžine bolj sipljejo, preostaja v svetlobi več rdečih komponent, zato naj bi rastline razvile rdeča barvila, da izkoristijo tudi ta del svetlobe. Taka razlaga nekako ne zdrži dejstva, da v višjih legah listje odpade prej. Lepo lahko vidimo na sliki 2 dve bukovi drevesi. Eno je bilo posneto na višini okoli 400 m drugo pa na višini 900 m 31. oktobra letos. Medtem ko je bukev v nižini še vsa olistana, so bukke v višini že popolnoma gole. Glede na to, da se zdi, da se barve listja bolj intenzivno spremenijo ob ohladih, je verjetneje, da je za spremembe barv zelo pomembna temperatura, ki vpliva na hitrost kemijskih procesov v listih. S tem področjem pa se ukvarjajo rastlinski fiziologi.

Literatura

- [1] Vaupotič Nataša, Ambrožič-Dolinšek Jana, Marhl Marko, *Barve jesenskega listja*, Proteus, 2004, letn. 67, št. 2/3, str. 52-61.
- [2] Vilhar Barbara, *Zakaj so rastline zelene? In zakaj nekatere rastline niso zelene?*, Proteus, apr. 2007, letn. 69, št. 8, str. 350-355.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

× × ×

Barve brez barvil



MOJCA ČEPIČ

→ Barve, ki jih bomo raziskovali danes, ste gotovo že videli. Pravimo jim barve tankih plasti. Poskusimo najprej ugotoviti nekaj odvisnosti barv, potem bomo pa poskusili razložiti, zakaj so barve takšne, kakršne so.

Potrebščine:

- mešanica za milne mehurčke.

Običajno jo lahko kupimo v vseh trgovinah z igračami. Lahko pa poskusite tudi katerega od napotkov za pripravo mešanice iz spleta. Tam trdijo, da je s takimi mešanicami mogoče narediti tudi zelo velike „mehurje“. V tem primeru boste za poskus, ki ga predlagamo, potrebovali še zanko iz žice ali trše plastike.

Za začetek napihnite nekaj mehurčkov in opazujte njih barve.

- Ali so barve mehurčka ves čas prisotne?
- Kako so razporejene?
- Kakšen je njihov vrstni red?
- Kako se spreminjajo, ko se mehurček stara?

Podobno storite še z milnično opno na zanki sami. Zanko pomočite v milnico in jo podprite tako, da je milnična opna navpična.

- Ali se barve pojavijo takoj?
- Kakšen je njihov vrstni red?

Nobelova nagrada za fiziko 2010

- Kako se spreminjajo, ko se mehurček stara?

Zaporedje obeh opazovanj lahko tudi obrnete. Opno je namreč lažje opazovati kot mehurček in zato ponuja več podrobnosti. Je pa, seveda, mehurček bolj zanimiv, pa tudi razporeditve barv so lahko drugačne.

Pa še recept za pripravo domače mešanice za mehurčke.

Recept 1

- Skodelica vode,
- dve žlici detergenta za pomivanje posode,
- žlica glicerina,
- čajna žlička sladkorja.

Recept 2

- Skodelica vode,
- dve žlici koruznega sirupa ali dve žlici glicerina,
- štiri žlice detergenta za pomivanje posode.

Za zelo velike mehurje potrebujete še pripomoček za pripravo velike opne, ki ga sestavljata dve palici, povezani z vrvico. Vse skupaj pomočimo v pripravljeno mešanico in se poskusimo z „mehurji“. Več si lahko ogledate na spletni strani

<http://bibaleze.si/clanek/idejnica/video-gigantski-milni-mehurcki.html>.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

↓ ↓ ↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Ste kdaj pomislili, da se v drobni piki, narejeni z navadnim svinčnikom, skriva milijon evrov? Prav tam najdemo „grafen“ in „za pionirske raziskave dvodimenzionalne snovi grafen“ sta si omenjeni znesek letošnje Nobelove nagrade iz fizike razdelila ruska fizika Andre Geim in Konstantin Novoselov.

Geim je bil rojen 1958 v Sočiju, nato je nekaj časa delal na Nizozemskem, kjer je dobil tudi državljanstvo. Iz tistih časov je znan njegov prikaz levitacije žive žabe v močnem magnetnem polju, za katerega je dobil Ig-Nobelovo nagrado. Zdaj dela na univerzi v Manchestru v Veliki Britaniji. Geimov mlajši kolega Novoselov je bil rojen 1974 v Nižnjem Tagilu. Doktorat je naredil pri Geimu na Nizozemskem in mu kasneje sledil v Anglijo, kjer je tudi zaposlen.



SLIKA 1.

Andre Geim. Vir: Wikipedia



SLIKA 2.

Konstantin Novoselov. Vir: Univerza v Manchestru, VB





Raziskovalci so dolgo vedeli, da je vsem znani grafit, ki ga najdete tudi v mini svinčnikov, sestavljen iz tankih atomskih plasti, niso pa poznali načina, kako te plasti posamično ločiti med sabo. To je uspelo letošnjima prejemnikoma Nobelove nagrade za fiziko tako, da sta z lepilnim trakom zaporedoma z večjega kosa grafita odstranjevala najprej večje kose, nato pa jima je uspelo odstraniti tudi enoatomne plasti. Take plasti, z razsežnostjo po nekaj deset mikrometrov, sta namestila na silicijevo podlogo in jo opremila z električnimi priključki. Na ta način sta lahko merila električne lastnosti grafena.

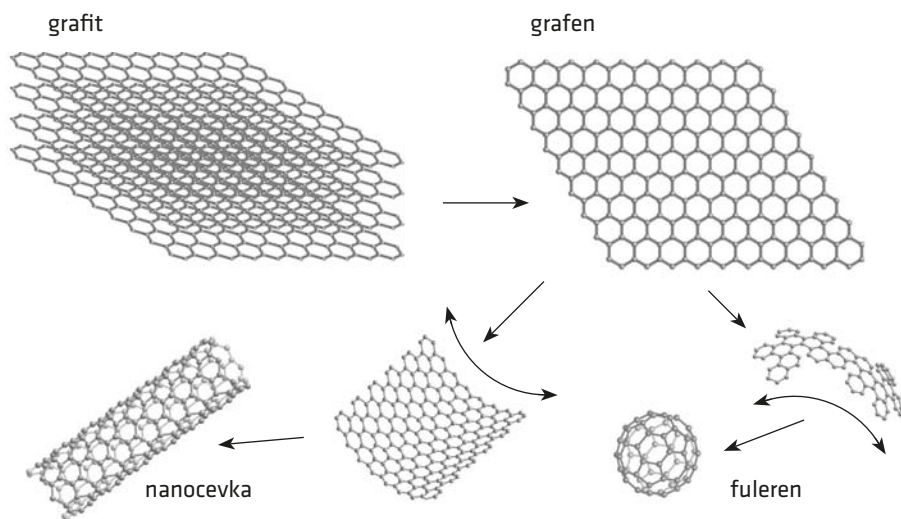


SLIKA 3.

Nagubana plast grafena na silicijeji ploščici. Slika je narejena z elektronskim mikroskopom pri 5000-kratni povečavi. University of Manchester. Science vol 324, 15 May 2009

SLIKA 4.

Grafit najdemo v naravi. Plast grafita je grafen, ki se lahko zvi-je v nanocevkco ali v kroglico - fuleren.



Grafen je enoatomska plast medsebojno močno povezanih ogljikovih atomov. Ima izjemne lastnosti. Je najtanjša doslej znana trdna snov, obenem pa prenese izjemne obremenitve. Trdnost atomskih plasti raziskujejo z mikroskopi na atomsko silo. Rezultati kažejo, da bi v viseči mreži iz te en atom debele snovi lahko počivala mačka. Za nameček bi bila taka mreža skoraj nevidna in bi imela maso le nekaj miligramov. Ogljikovi atomi so v grafenu razporejeni v oglišča šetkotnikov, tako da oblika spominja na satovnico. Oblika je zaradi močne ogljikove vezi izredno stabilna in vsebuje malo nepravilnosti in nečistoč. Tudi zato je grafen dober prevodnik. Električno prevaja tako dobro kot baker, še desetkrat bolje pa prevaja toploto. Za svetlobo je prozoren, a vendar dovolj gost, da ne prepušča niti helija. Kljub močnim medatomskim vezem je grafen možno raztegniti za petino. Pri marsikateri drugi snovi dosežemo mejo natezne trdnosti, ko se snov strga, že pri mnogo manjših raztezkih.

Zaradi pravilne dvodimenzionalne strukture si raziskovalci obetajo, da bo v grafenu možno opazovati nekatere kvantne pojave, kot je npr. Kleinovo tuneliranje, ki so v teoriji dobro znani. Veliko si od nove snovi obetajo tudi izdelovalci polprevodnikov, zaslonov občutljivih na dotik, svetil, sončnih celic... Že majhna količina grafena naj bi dvignila tališče plastike za 30 °C, z večjo koncentracijo pa bi celo postala prevodna. Vse te lastnosti imajo veliko tehnološko vrednost, saj novi materiali omogočajo nove rešitve v tehniki.

XXX

Model naše galaksije

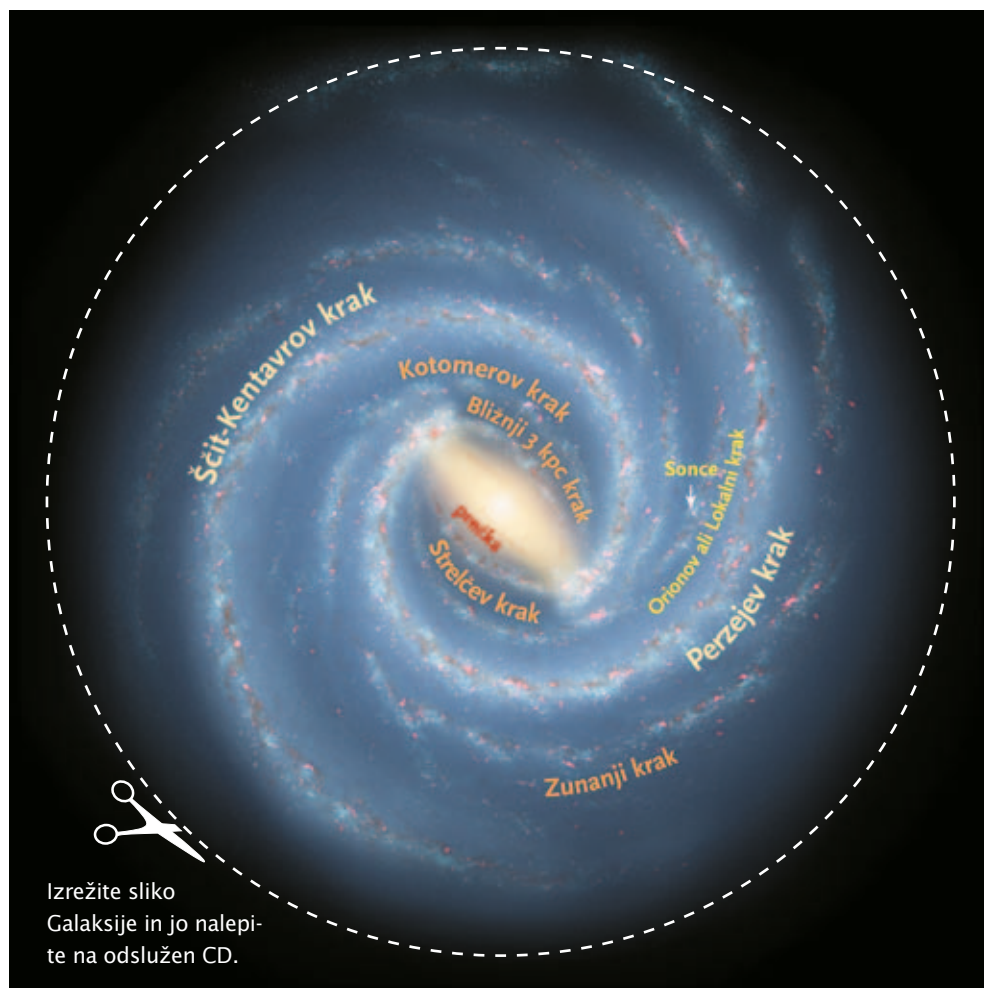


BOJAN KAMBIČ

→ Našo Galaksijo danes že kar dobro poznamo, saj jo astronomi že več kot stoletje redno in skrbno opazujejo v vseh delih elektromagnetnega spektra. Vemo, da ima središčno odebelitev, ki jo krasí gostejša prečka zvezd, obkrožena z obročem plinov in prahu, v katerem se v velikem številu rojevajo nove zvezde. Z obeh koncev prečke se širita dva večja spiralna kraka, ki se ovijata okoli središčne odebelitve. Družbo jima dela še nekaj manjših krakov in odcepov. V Orionovem ali Lokalnem kraku leži naše Osončje, ki je od središča oddaljeno okoli 26.000 svetlobnih let. Sistemu spiralnih krakov pravimo disk galaksije. Ta v premeru meri kar 130.000 svetlobnih let, njegova povprečna debelina pa je le 1000 svetlobnih let. Debelejši je proti središču Galaksije, na mestu, kjer je naše Sonce, pa je debel le še nekaj sto svetlobnih let. Koncentracija zvezd je največja v središčni odebelitvi, v disku pa zunaj spiralnih krakov in proti robu hitro pada. Ocenjeno število zvezd v Galaksiji se giblje med 200 in 400 milijardami.

To je le nekaj osnovnih podatkov o naši vesoljski domovini.





Izrežite sliko
Galaksije in jo nalepi-
te na odslužen CD.

SLIKA 1.

Ilustracija naše Galaksije temelji na današnjem vedenju in najnovejših opazovanjih v vseh delih elektromagnetnega spektra. Tako nekako bi naše vesoljsko domovanje videli oddaljeni opazovalci v smeri ozvezdja Lev ali Volar. Galaksija je spiralna s prečko, njena trenutna oznaka je SAB(rs)bc II. SAB pomeni, da prečka ni dobro razvita in vidna. (rs) nam pove, da je okoli središča galaksije obroč plinov in prahu, bc pa pomeni, da spiralni kraki niso tesno oviti okoli središča. Ta klasifikacija pa verjetno še ni dokončna. Astronomi predvidevajo, da bodo nadaljna opazovanja pokazala, da je prečka bolj izrazita in dobro vidna, tako da se bo klasifikacija iz SAB spremenila v SB.

Ljudje od nekdaj radi izdelujemo modele. To je zanimiv in poučen hobi, še posebej, če se potrudimo in naredimo pomanjšani model, ki je popolna kopija svojega originala. Vsi poznamo pomanjšana letala, ladje, rakete ali avtomobile, mi pa se pozabavajmo z modelom naše Galaksije. Verjetno ga ni človeka, ki bi si lahko predstavljal resnične velikosti in oddaljenosti v Osončju, kaj šele v Galaksiji. Naš model naj bo torej tak, da ne bo niti premajhen niti prevelik. Zamislimo si, da naša Galaksija v premeru meri en kilometer. To je razdalja, ki jo prehodimo v desetih

minutah in ki jo lahko na odprtem terenu zaobjamemo s pogledom. Pri tem modelu smo resnične razdalje skrčili za faktor 10^{18} . Če hočemo dobiti pravi model, moramo enako storiti tudi z velikostmi. Poglejmo, kaj smo dobili.



SLIKA 2.

Model naše Galaksije, narejen iz CD-ja. Vidimo lahko le razporeditev svetlobe po galaksiji, ne pa tudi posameznih zvezd, katerih velikosti so pri takem modelu v podatonskem svetu. Puščica kaže mesto, kjer je naše Osončje (foto: Primož Kalan).

V modelu, kjer je premer Galaksije kilometer, meri Neptunova krožnica, ki je nekakšno merilo za velikost Osončja, le stotinko milimetra, medtem ko je Sonce veliko le nekaj nanometrov! Ne moremo ga videti, opazimo lahko le njegovo svetlobo, ki se širi na vse strani. Soncu najbližjo zvezdo Alfo Kentavra najdemo 4,3 centimetra proč. Druge zvezde so raztresene naokoli v vseh smereh. Najsvetlejša zvezda na nebu Sirij je oddaljena 8,5 centimetra. Vega je 25 centimetrov proč, Regul 76 centimetrov, Severnica pa 4 metre. Svetle zvezde Orionovega pasu so oddaljene med 8 in 13 metri. Od svetlejših zvezd na-

šega neba sta najdlje od nas Delta in Eta Velikega psa – 17 in 30 metrov. Vidimo lahko, da so najsvetlejše zvezde tudi najbližje, čeprav to ni pravilo.

Do središča Galaksije je 250 metrov, središčna odebelitev pa meri 150 metrov v premeru. Disk galaksije je v povprečju debel 20 metrov, a na mestu, kjer smo mi, je njegova debelina okoli 5 metrov! Halo okoli Galaksije, kjer najdemo večino kroglastih kopic, je velik dva kilometra, posamezne kopice pa najdemo tudi do dva kilometra od središča, torej v krogli s premerom štiri kilometre. Bližnji del haloja naseljuje okoli 150 kroglastih kopic, ki si jih lahko predstavljamo kot meter velike sijoče krogle. Najlepša in med opazovalci severnih geografskih širin najbolj priljubljena je zagotovo kopica M 13 v ozvezdju Herkula. V tem modelu je kopica 240 metrov oddaljena od Sonca, njen premer pa je okoli 1,4 metra. Ker leži visoko nad diskom Galaksije, je tudi v modelu kar 200 metrov nad njim. (Ker si težje predstavljamo višine kot razdalje po tleh, si pri višinskih podatkih pomagajte z znanimi višinami, na primer bližnjih hiš, nebotečnikov ali hribov.)

Ne pozabimo, da so v tem modelu celo največje zvezde, ki jih poznamo, mikroskopsko majhne. Če bi se dvignili nad model Galaksije, bi videli sijočo spiralno galaksijo s prečko. A to, kar bi videli, niso posamezne zvezde, temveč le njihova združena svetloba. In prav to vidimo na vseh fotografijah galaksij, ki jih gledamo od daleč. Posamezne zvezde lahko z največjimi profesionalnimi teleskopi vidimo le pri nekaj bližnjih galaksijah!

Kilometrskega modela Galaksije ne moremo zgraditi, lahko si ga le predstavljamo v svoji domišljiji. Če pa izrežete ilustracijo in jo nalepite na CD disk, boste dobili modelček, velik vsega 12 centimetrov. Celotno razmerje med premerom in debelino je kar pravo. Za veren model moramo v središče CD-ja prilepiti 1,5-centimetrsko kroglico iz stiroporja, ki bo predstavljala središčno odebelitev. Pri tako pomanjšanem modelu sploh nima smisla govoriti o tem, kje so posamezne zvezde. Razlikujemo lahko le med središčem in spiralnimi kraki. Od Sonca do središča Galaksije je namreč le 2,6 centimetra. Prej omenjeni halo kroglastih kopic si lahko predstavljamo kot 150 zrnec mivke, raztresenih v krogli s premerom 24 centimetrov. In najlepša med njimi, M 13 v Herkulu, je v tem primeru desetinko milimetra veliko zrnce dva centimetra nad diskom.

× × ×

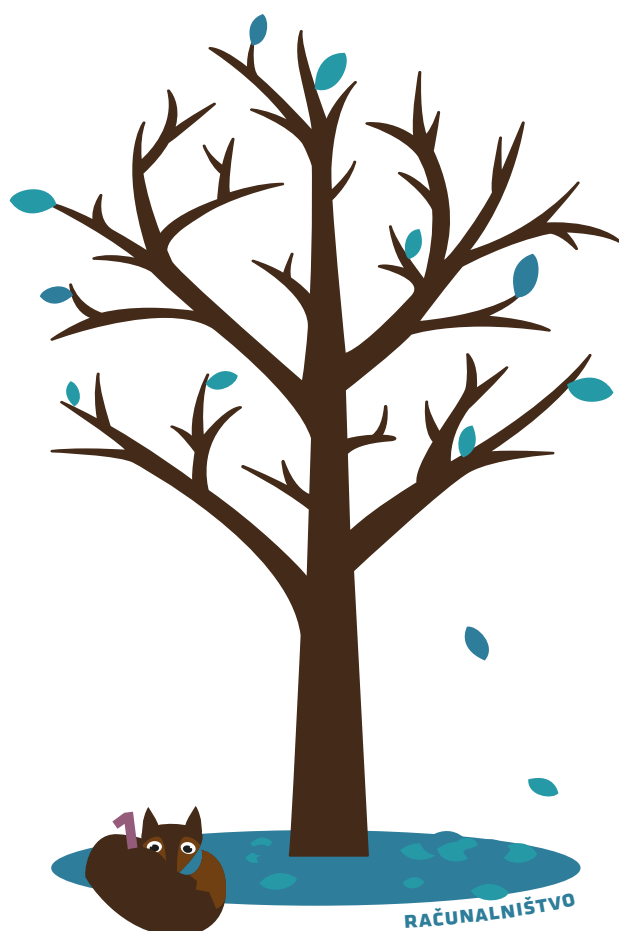
Mehka logika, 2.del

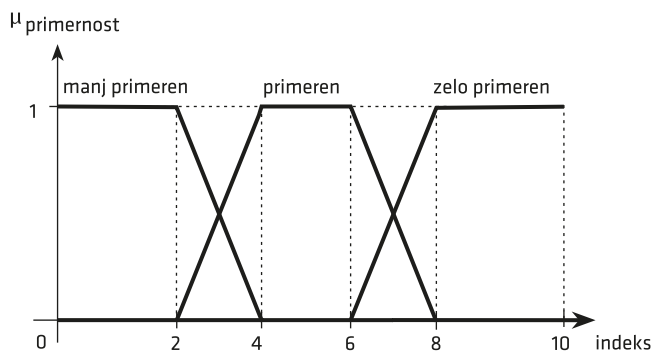


DAMJAN STRNAD

→ V prvem delu članka smo mehko logiko opisali kot primerno orodje za sklepanje s pomočjo računalnika pri t. i. realnih problemih, pri katerih so objekti in relacije med njimi izražene v naravnem jeziku. Uvedli smo pojem mehke spremenljivke in mehke vrednosti. Množica problemsko povezanih mehkih spremenljivk z njim pripadajočimi mehкими vrednostmi omogoča opis lastnosti objektov. Relacije in odvisnosti med temi lastnostmi izražajo pravila, ki predstavljajo osnovo sklepanja. V drugem delu članka bomo z opisom mehkih pravil, računalniškega sistema mehkega sklepanja in njegovo praktično ponazoritvijo opis mehke logike zaključili.

Kot že povedano, je mehka logika primerno sredstvo sklepanja na podlagi pravil, ki jih lahko izrazimo v naravnem jeziku. Vzemimo npr. zelo poenostavljen problem določanja primernosti neke osebe za smučarskega skakalca na podlagi njegove starosti in teže. Primernost za smučarskega skakalca je v tem primeru nova mehka spremenljivka primernost z možnimi vrednostmi `manj_primeren`, `primeren` in `zelo_primeren`. Slika 1 prikazuje definicijo te mehke spremenljivke v odvisnosti od številskega indeksa primernosti z zalogo vrednosti med 0 in 10. Posebnost tega izračuna je, da primernosti ne bomo računali na osnovi podanega številskega indeksa, pač pa bo preslikava potekala v obratni smeri. Najprej





SLIKA 1.

Definicija mehke spremenljivke primernost.

bomo primernost izpeljali iz teže in starosti s pomočjo *mehkih pravil*, nato pa številski indeks izračunali iz ugotovljene primernosti. Primera mehkih pravil sta:

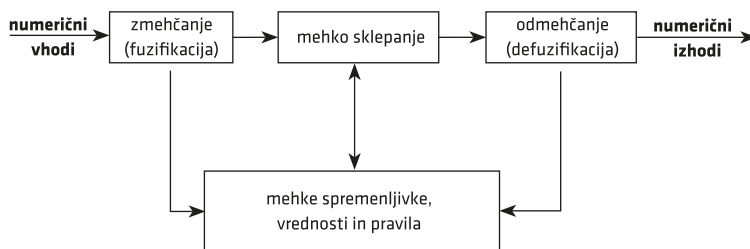
ČE starost = srednje_mlad IN teža ≠ težek
POTEM primernost = primeren

ČE starost = star ALI teža = težek POTEM
primernost = manj_primeren

Osnovno pravilo ovrednotenja mehkega pravila je v tem, da se izpolnjenost pogojev (imenovana *aktivacija*) prenese na sklep. Za Janeza lahko po prvem pravilu sklepamo, da je $\min\{0,6; 1-0,33\}=0,6$ primeren, po drugem pa $\max\{0; 0,33\}=0,33$ manj primeren za smučarskega skakalca. Takšno sklepanje imenujemo *mehko sklepanje*, njegova značilnost pa je, da so sklepi različnih pravil med sabo lahko tudi konfliktni. Kako torej iz njih izpeljati smiselne zaključke?

Struktura sistema mehkega sklepanja je prikazana na sliki 2. Osnova sistema je kompletna definicija mehke domene z vsemi mehкими spremenljivkami, pripadajočimi mehкими vrednostmi in množico mehkih pravil. Sistem na vходу sprejema številске podatke, ki predstavljajo odčitane vrednosti okolja, lastnosti objektov ali karkoli drugega, na osnovi česar izvajamo sklepanje. Ti številski podatki se najprej pretvorijo v pripadnosti vhodnim mehkim množicam. Ta postopek imenujemo *fuzifikacija* ali *zmehčanje*. S pomočjo mehkih pravil potem izpeljemo sklepe, vezane na pripadnost izhodnim mehkim

množicam. Zadnji korak je *defuzifikacija* ali *odmehčanje*, pri katerem mehke sklepe pretvorimo nazaj v izhodni številski podatek, običajno krmilni signal za nadzorovano napravo.



SLIKA 2.

Struktura sistema mehkega sklepanja.

V celotni verigi manjka samo še opis defuzifikacije, ki jo je možno izvesti na več načinov. Eden izmed bolj priljubljenih je *metoda uteženega povprečja*, pri kateri številski izhod y izračunamo po enačbi

$$y = \frac{\sum_i \mu_i x_i}{\sum_i \mu_i},$$

kjer so x_i vodoravna težišča trapezov izhodnih mehkih vrednosti, μ_i pa dosežene pripadnosti. Pri tem vodoravno težišče trapeza, ki je podano z vrednostmi A, B, C in D , izračunamo po enačbi

$$x = \frac{\frac{1}{B-A}(2B^3-3AB^2+A^3)+3(C^2-B^2)+\frac{1}{D-C}(2C^3-3DC^2+D^3)}{3(B-A)+6(C-B)+3(D-C)}.$$

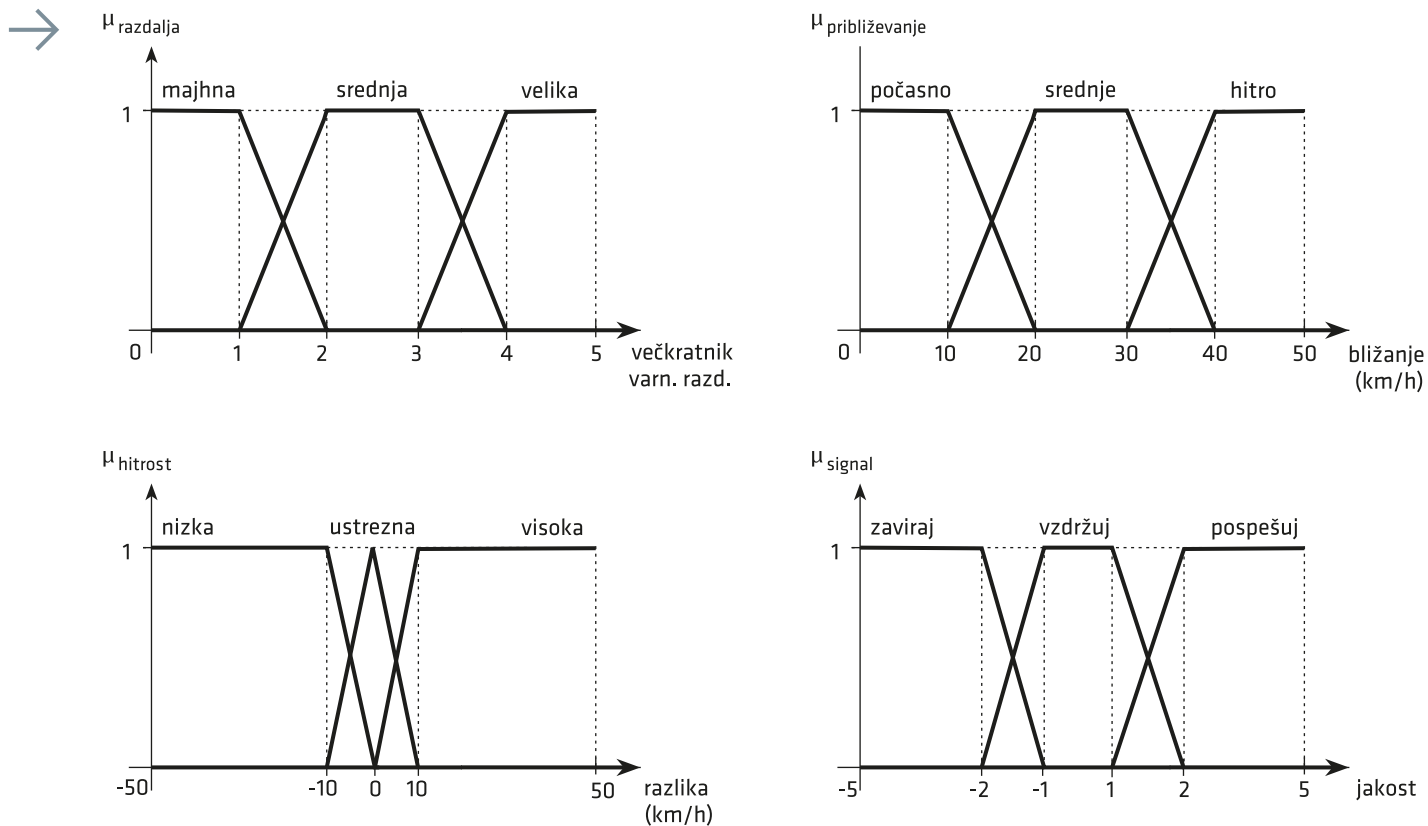
Če je $A=B$ ali $C=D$, potem v števcu prvi oz. zadnji člen odpadeta.

Recimo, da smo za neko osebo ugotovili, da je 0,5 manj primerna, 0,8 primerna in 0,2 zelo primerna za smučarskega skakalca. S pomočjo slike 1 in zgornje enačbe lahko določimo težišče pripadnostne funkcije za manj_primeren pri $x_1 \approx 1,56$, za primeren pri $x_2 = 5$ in za zelo_primeren pri $x_3 \approx 8,44$. Uteženo povprečje je potem enako

$$y = \frac{0,5 \times 1,56 + 0,8 \times 5 + 0,2 \times 8,44}{0,5 + 0,8 + 0,2} = \frac{6,468}{1,5} \approx 4,312.$$

Indeks primernosti te osebe za smučarskega skakalca potemtakem znaša približno 4,3.




SLIKA 3.

Vhodne mehke spremenljivke razdalja, približevanje in hitrost ter izhodna mehka spremenljivka signal.

Oglejmo si še praktični primer, ki bo povzel celotni postopek mehkega sklepanja. Vzdrževanje hitrosti vožnje in oddaljenosti do vozila pred nami sta dve nalogi, ki ju na avtocesti lahko prepustimo računalniku — tempomatu. Obravnavajmo takšen kombinirani tempomat, ki sprejema naslednje vhodne podatke od senzorjev vozila:

- razdaljo do vozila pred nami kot večkratnik varnostne razdalje pri trenutni hitrosti (mehka spremenljivka razdalja z vrednostmi majhna, srednja in velika),
- hitrost približevanja kot razliko med hitrostjo našega vozila in vozila pred nami v km/h (mehka spremenljivka približevanje z vrednostmi počasno, srednje in hitro) in

- razliko med trenutno in želeno hitrostjo vožnje v km/h (mehka spremenljivka hitrost z vrednostmi nizka, ustrezna in visoka).

Tempomat prilagaja hitrost vožnje s pospeševanjem in zaviranjem tako, da motorju pošilja signal z vrednostjo v razponu med -5 (maksimalno zaviranje) in +5 (maksimalno pospeševanje). Izhodno mehko spremenljivko imenujmo *signal* in naj ima možne vrednosti zaviraj, vzdržuj in pospešuj. Slika 3 prikazuje definicije vseh mehkih spremenljivk. Samo logiko krmiljenja opišemo z množico mehkih pravil, ki pokrivajo vse režime delovanja tempomata. Za naš zgled uporabimo naslednjo poenostavljeno množico pravil:

1. Če *razdalja* = majhna IN *približevanje* ≠ počasno POTEM *signal* = zaviraj
2. Če *razdalja* = srednja IN *približevanje* = hitro POTEM *signal* = zaviraj

3. Če hitrost = visoka POTE signal
= zaviraj

4. Če razdalja ≠ majhna IN približevanje
= srednje POTE signal = vzdržuj

5. Če razdalja = velika IN približevanje
≠ hitro IN hitrost = ustrezna POTE signal
= vzdržuj

6. Če razdalja = srednja IN hitrost
= nizka POTE vzdržuj

7. Če razdalja = velika IN hitrost
= nizka POTE signal = pospešuj

Zgornjih sedem pravil ne zajema vseh možnih kombinacij vhodov, kar je sicer v praksi nujno. Opazimo tudi, da imamo po tri pravila za zaviranje in vzdrževanje hitrosti. Pravila 1-3 bi lahko z disjunkcijo pogojev združili v eno samo pravilo, vendar je zgornji način preglednejši. Ker med pravili velja logični ali, pri ugotavljanju aktivacije sklepa za zaviranje privzamemo maksimum njihovih aktivacij. Enako velja za pravila 4-6.

Kako bi tempomat reagiral v primeru, da od senzorjev prejme naslednje podatke: razdalja do vozila pred nami je 1,8-kratnik varnostne razdalje, hitrost približevanja je 15km/h, trenutna hitrost pa je 8km/h nižja od želene? S fuzifikacijo vhodnih številskih podatkov ugotovimo, da 1,8-kratnik varnostne razdalje pomeni naslednje stopnje razdalje:

- 0,2 majhna,
- 0,8 srednja in
- 0 velika.

Približevanje s hitrostjo 15km/h je:

- 0,5 počasno,
- 0,5 srednje hitro in
- 0 hitro.

Hitrost vožnje, ki je 8km/h nižja od želene (t.j. razlika je -8km/h), je:

- 0,8 nizka,
- 0,2 ustrezna in
- 0 visoka.

Če te vrednosti vstavimo v zgornja pravila, dobimo naslednje aktivacije:

- $\min\{0,2; 1-0,5\}=0,2$ za sklep zaviraj,
- $\min\{0,8; 0\}=0$ za sklep zaviraj,
- 0 za sklep zaviraj,
- $\min\{1-0,2; 0,5\}=0,5$ za sklep vzdržuj,
- $\min\{0; 1-0; 0,2\}=0$ za sklep vzdržuj,
- $\min\{0,8; 0,8\}=0,8$ za sklep vzdržuj in
- $\min\{0; 0,8\}=0$ za sklep pospešuj.

Z uporabo maksimuma med identičnimi sklepi lahko povzamemo, da so navodila krmilniku naslednja: zaviraj z intenziteto 0,2, vzdržuj hitrost z intenziteto 0,8 in pospešuj z intenziteto 0. Po enačbi za izračun težišč dobimo, da je težišče pripadnostne funkcije za zaviraj pri $x_1 \approx -3,24$, za vzdržuj pri $x_2 = 0$ in za pospešuj pri $x_3 \approx 3,24$. Izhodni krmilni signal za motor bo po izračunu uteženega povprečja težišč potem naslednji:

$$y = \frac{0,2 \times (-3,24) + 0,8 \times 0 + 0 \times 3,24}{0,2 + 0,8 + 0} = -0,648.$$

Krmilniki z mehko logiko pri pralnih strojih običajno določajo trajanje programa v odvisnosti od umazanosti in količine perila. Če poznamo ozadje njihovega delovanja, pa si ni težko zamisliti pralnega stroja, ki na podlagi teže in umazanosti perila ter trdote vode prilagaja količino uporabljenega pralnega sredstva in mehčalca. Prav tako v avtomobilu ni več težko zasnovati klimatske naprave, ki prilagaja jakost delovanja in smer pihanja na osnovi zunanje, notranje in nastavljene temperature ter števila in položaja oseb v vozilu.

× × ×

Mavrica



ALEŠ MOHORIČ

→ V rubriki naravoslovne fotografije tokrat objavljamo mavrico, ki je nastala po navodilih iz članka Marije Vencelj, objavljenega v prvi letošnji številki.

Na mavrici sta lepo vidna loka 3. in 4. reda. Aleksandrov temni pas med njima pa na tej fotografiji, kjer je ozadje relativno svetlo, ni izrazit. Mavrica nastane zaradi loma (difrakcije) in razklona (disperzije). Na nebu jo največkrat opazimo na vzhodu ob poznopoldanskih poletnih nevihtah.

Bralce pozivamo, da pošljejo uredništvu na elektronski naslov presek@dmfa.si svoje naravoslovne fotografije, s kratkim opisom okoliščin, v katerih so nastale. Najboljše bomo redno objavljali.



Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti.



Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR

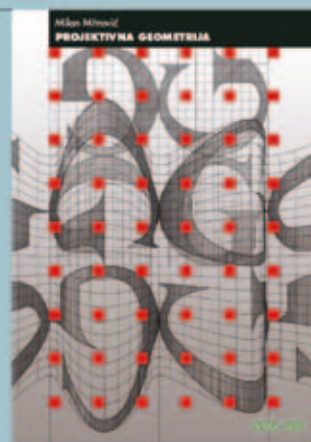


Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

Nekaj matematičnih
zamisli

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.