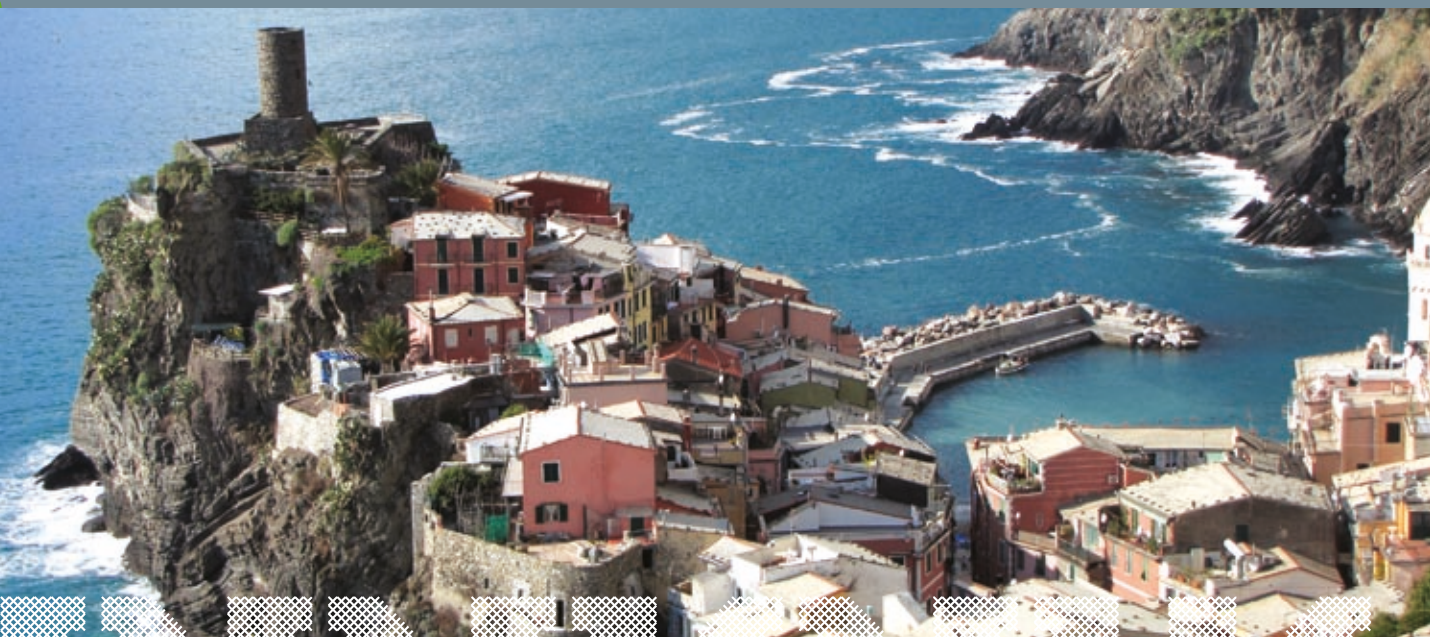




PRESEK

- OČETJE IN MNOŽENJE
- LOTOSOV POJAV
- MEHKA LOGIKA
- NAGRADNA KRIŽANKA



Investiranje na denarnih trgih



→ V zadnjih dvajsetih letih smo bili priča porajanju mnogih novih finančnih instrumentov, kot so na primer izvedeni finančni inštrumenti (financial derivatives). To so matematična orodja, katerih vrednost je izpeljana iz nečesa drugega. Nekateri jih ocenjujejo za tvegane, vendar je njihov namen ravno zmanjšati tveganja z njihovo delitvijo z drugimi.

Trenutno vrednost bodoče opcije približno izračunamo z integralom več spremenljivk. Na žalost računaska zahtevnost integrala več spremenljivk eksponentno narašča s številom komponent opcije. Zato so običajne metode za aproksimacijo hitro prezahtevne za računalniško računanje. Nove metode (kvazi Monte Carlo metode, ki uporabljajo zaporedja nizke neskladnosti) zahtevajo manj vzorcev in hkrati zagotavljajo večjo natančnost. Te metode so dejansko omogočile zaželeno izračune.



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 38, šolsko leto 2010/2011, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vladimir Bensa, Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2010/2011 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk in Ines Kristan

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1900 izvodov

© 2010 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1794

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeni velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Investiranje na denarnih trgih

MATEMATIKA

- 4-7** Očetje in množenje
(*Alenka Lipovec*)
- 8-10** Gaussova cela števila, 1. del
(*Daniel Eremita*)

FIZIKA

- 13-15** Lotosov pojav
(*Janez Strnad*)
- 18** Mikroklima sobe – Poizkuševalnica doma
(*Mojca Čepič*)
- 19** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)

ASTRONOMIJA

- 22-25** Planetarni balet
(*Aleš Mohorič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 26-29** Mehka logika, 1. del
(*Damjan Strnad*)

RAZVEDRILO

- 11** Svet v steklenici – Naravoslovna fotografija
(*Mojca Čepič*)
- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 38/1
(*Marko Bokalič*)
- 7, 12** Sudoku
- 21, 29** Barvni sudoku
- 18** Futošiki

TEKMOVANJA

- 10-11** 46. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje
(*Klavdija Mlinšek*)
- 20-21** 48. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (*Ciril Dominko*)
- 25** 2. državno tekmovanje iz znanja astronomije (*Andrej Guštin*)
- 31** 42. mednarodna fizikalna olimpijada v Zagrebu, Hrvaška (*Ciril Dominko*)
- priloga** 10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje
- priloga** 54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje
- priloga** 10. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje
- priloga** 10. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – področno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Slika na naslovnici se navezuje na novo temo Naravoslovna fotografija. Na sliki je Cinque Terre – ozko in strmo obalno področje ob Ligurskem morju v Italiji, ki leži severno od La Spezie. Posnetek je nastal, ko se je fotograf spuščal iz višine okoli 250m nad morjem v Vernazzo.

Očetje in množenje



ALENKA LIPOVEC

→ „Če položim ploščice takole (slika 1), koliko ploščic potrebujem?“

S tem preprostim vprašanjem je oče Jana Einarja Nordgreena začel sinovo matematično pot. Jan Einar Nordgreen trenutno poučuje matematiko na Kajmanskem otočju, tisto poletje, ko sta z očetom polagala ploščice, pa je štel deset let.

„Potrebujemo $4 + 3 + 2$ oziroma 9 ploščic,“ se je oglasil Jan davnega leta 1962.

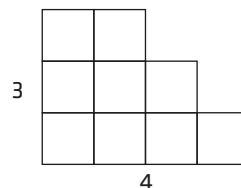
Oče se je pritožil: „Ali moraš seštevati? Vas danes v šoli ne učijo več množiti?“

„Seveda nas, a to ni pravokotnik. Množenje je le za pravokotnike, oče.“

„No, bolje bo, da hitro na novo definiraš množenje tudi za take vzorce, kajti to poletje bova položila mnogo ploščic. Ne bom imel časa za seštevaje. Želim, da je od sedaj naprej štiri krat tri devet.“

Jan ni vedel, kolikokrat so v preteklosti že na novo definirali množenje, zato je v glavi začutil rahlo omotico. Očetova ideja se mu je zdela vsaj neizvedljiva, če že ne neumna. Da bi želje oziroma boljše rečeno ukaza, ne spoštoval, na to Jan niti pomislil ni. Pričel je premišljevali.

SLIKA 1.



Narival je
nekeaj rše
v blato in
rezultate
preverjal na
njem papir
vrčke, v
kateri je
prenašal
matematiko

„Če je štiri krat tri devet, koliko je potem en krat ena ali pet krat dve?“ Narisal je nekaj skic v blato in rezultate prerisal na rjav papir vrečke, v kateri je prenašal malico.

Prvi dan je izračunal svojo poštevanke in jo zapisal v tabelo. Zgornjega dela tabele ni izpolnil, saj se mu je zdelo, da tri krat pet nima smisla. Celo njegov oče ne bi znal položiti treh ploščic v prvo vrsto, dveh v drugo, ene v tretjo, nič v četrto in minus ene ploščice v peto vrstico.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	3								
3	3	5	6							
4	4	7	9	10						
5	5	9	12	14	15					
6	6	11	15	18	20	21				
7	7	13	18	22	25	27	28			
8	8	15	21	26	30	33	35	36		
9	9	17	24	30	35	39	42	44	45	
10	10	19	27	34	40	45	49	52	54	55

TABELA.

Prva kritika Oče je bil najprej s tabelo zadovoljen. Toda že čez dve minuti je povprašal:

„Ali lahko najdeš formulo, fant? Menda ne pričakuješ, da se bom tabelo naučil na pamet!“

„Zakaj pa ne,“ je povprašal Jan, „tudi formule za običajno množenje nimamo.“

„Mulc, ne izzivaj. Želim formulo!“ je oče zaključil pogovor.

Jan se je spraševal, čemu ni formule za običajno množenje. Morda pa formula obstaja in mu jo je njegov učitelj le zamolčal, je razmišljal. Morda so se učitelji dogovorili, da formule ne razkrijejo, da bi šola ne bila prelahka?

Pričel je iskati vzorec v računih. Med ogledovanjem enakosti

$$10 \otimes 6 = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5$$

ga je naenkrat prešinilo, da v enakosti niso katera koli števila; števila so predstavljala starost njegovih bratov in sester. Jan je bil star deset let, Carlos devet,

Patricija osem, Eugene sedem, Samuel šest in Gabriela pet. Ko so se igrali, je Jan moral vedno v par z Gabrielo, Carlos s Samuelom in Patricija z Eugenom. Le tako je bila igra pravična. Vsota let v vsaki ekipi je bila 15, in ker so bile tri ekipe, je bila skupna starost otrok $10 \otimes 6 = 15 \cdot 3 = 45$. Jan je za „očetovo množenje“ uporabljal znak $\otimes$ in $\cdot$ za množenje, ki ga je spoznal v šoli. Toda nič ni pomagalo, da je Jan ugotovil, da je $10 \otimes 6 = 15 \cdot 3$! Bil je še svetlobna leta daleč od formule. Treba je bilo najti povezavo med števili.

Kmalu ga je prešinilo: 3 je polovica od 6, 15 pa dobiš kot za 1 zmanjšano vsoto števil 10 in 6. Hitro je preizkusil še nekatere račune in zadovoljno ugotovil, da pravilo deluje.

Preden je o svojem odkritju lahko poročal očetu, je potreboval formulo, formula pa je pomenila črke. Za Jana so bile črke za zgodbe in ne za matematiko, toda vedel je, kaj pričakuje oče. Dva dolga tedna se je mučil, a na koncu je lahko prisiljal k očetu s formulo:

$$\blacksquare \quad m \otimes n = \frac{n}{2} \cdot (m + n - 1).$$

Druga kritika „Ta tvoja formula grdo izgleda. No ja, če drugega ne zmoreš, bo že moralo biti.“ Jan ni pričakoval takšne reakcije. Počutil se je kot v boksarskem ringu. Končni udarec je prišel deset sekund kasneje.

„Jasno je, da velja $7 \otimes 2 = 7 + 6 = 13$, toda tvoja formula pravi, da je $7 \otimes 2 = \frac{2}{2} \cdot (7 + 2 - 1) = 1 \cdot 8 = 8$. Kakšno formulo si mi prinesel fant?“

Jan je bil šokiran. Kako se lahko njegova čudovita formula tako obnaša pred očetom? Ponovno je pričel razmišljati o formuli. Imela je dva dela, število skupin in skupno starost otrok v skupini. Kateri izmed teh dveh delov je bil vsiljivec? (Da bi bila lahko oba dela napačna, je bil prehud zalogaj za desetletnega fantiča.) Očetov knockout je izhajal iz $7 \otimes 2$, tukaj je bila skupina ena sama. Kot je kazalo, prvi del ni bil kriv za napako. Toda skupna starost je bila $7 + 6 = 13$, kar očitno ni bilo enako $7 + 2 - 1$. Gnili paradižnik je torej bil del $(m + n - 1)$. Jan je občutil olajšanje. Sedaj je moral le še popraviti formulo. Drug del formule, je razmišljal, mora biti *starost najstarejšega otroka + starost najmlajšega otroka*. Najstarejši otrok je star m let, a najmlajši? Po nekaj dneh je s preiskušanjem ogromno možnosti zaključil, da mora najmlajši otrok šteti $m - n + 1$ let. Če boste natanko premislili, boste ugotovili, da izraz drži.





Janova nova formula se je torej glasila: $m \otimes n = \frac{n}{2} \cdot (m + m - n + 1)$ in Jan jo je zapisal raje kot $m \otimes n = m \cdot n - \frac{n}{2} \cdot (n - 1)$, ker se mu je zdelo, da tako formula izgleda lepše. Preden jo je pokazal očetu, jo je preizkusil na vseh številih v tabeli, saj ni želel novega presenečenja.

Tretja kritika „Ta formula ni tako grda kot prejšnja, ki si jo skuhal. In celo dela. Kar bister poba si. Ponošen sem nate.“ Jan se še sedaj očetove pohvale spominja kot najslajšega trenutka svojega otroštva.

V šoli je Jan o „svojem množenju“ pripovedoval vsakomur, ki ga je le želel poslušati. Prijatelj je ni navdušila uporabnost formule, Janu so zavidali dejstvo, da je imel svojo lastno formulo, kot je imel Joe novo kolo ali Tim psa. Jan je formulo ponosno vrezal v nekaj dreves ob poti iz šole.

Praštevila. Nekega dne ga je učitelj vprašal nekaj, česar Jan ni razumel.

Dejal je: „Ali ima tvoje množenje praštevila?“

Ko je Jan sedel na bregu reke in ribe niso hotele prijemati, se je vprašal: „Koga lahko vprašam, da bom odgovoril učitelju? Kdo mi lahko pomaga?“

„Nikogar in nihče,“ je bil odgovor.

Jan je bil edini strokovnjak za svoje množenje. To se mu je sicer zdelo imenitno, a ideje, kako naj najde odgovor, ni imel niti najmanjše. Vedel je, da so 2, 3, 5, 7 in 11 praštevila. Vedel je, da imajo praštevila natanko dva delitelja in da imajo zaradi tega prav posebno mesto med števili. Edino število, ki ima le enega delitelja, število 1, se je Janu zdelo nekaj še bolj posebnega. Pogledal je v svojo tabelo. Število bo praštevilo, če ga ne moremo najti nikjer drugje kot v prvem stolpcu poštevanke, je sklepal.

„Ali je 7 praštevilo v mojem sistemu?“ se je vprašal. „Nikakor ne, kajti $7 = 4 \otimes 2$.“

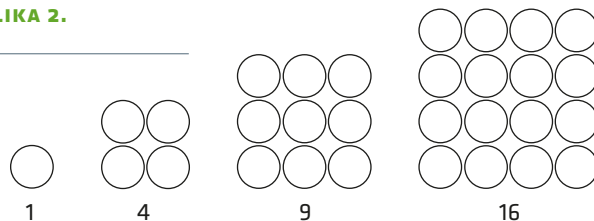
Število 7 je imelo štiri delitelje: 1, 7, 2 in 4 in je bilo zato v Janovem sistemu sestavljeno število, kar se je Janu zdelo nadvse imenitno. Tudi števila 3, 5 in 11 niso bila praštevila. Prvo Janovo praštevilo je bilo 2, sledila pa so 4, 8 in 16. V najbližje drevo je izrezljal: *2 je praštevilo*.

Jan se je vse poletje ukvarjal z lastnostmi „svojega množenja“. Poglejmo, kaj vse ga je zanimalo.

1. Soda in liha števila. Katera števila so soda in katera liha v Janovem sistemu?

2. Popolni kvadrati. Števila 1, 4, 9, 16, 25... so popolni kvadrati. Iz njih lahko zgradimo kvadrate.

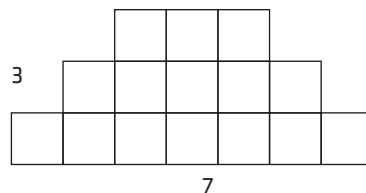
SLIKA 2.



Katera števila so popolni kvadrati v Janovem sistemu?

3. Drugačen vzorec polaganja ploščic. Kako bi računal Jan, če bi oče naenkrat pričel polagati ploščice v vzorcu, ki je na sliki?

SLIKA 3.



Ob prebiranju zgodbi o Janu ste se morda spraševali, kje živijo očetje, ki svojim sinovom namesto odnašanja smeti nalagajo matematične probleme. Eden od možnih odgovorov je, da v Belgiji, Janovi domovini; drug možen odgovor pa leži v še eni zgodbi.

Verjetno ste v Janovem razmišljanju opazili podobnost z znano anekdoto o tem naj bi mladi Jochan Friedrich Carl Gauss izračunal na pamet vsoto zaporednih naravnih števil. Zelo verjetno so vam v šoli že pokazali, kako je mladi Gauss izračunal vsoto $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Nekateri pa pripovedujejo malo drugačno zgodbo. Ko je Gauss štel deset let (kakšen slučaj, toliko let je štel tudi Jan), je učitelj, da bi bil v razredu mir, zastavil naslednji račun:

$$81\,297 + 81\,495 + 81\,693 + \dots + 100\,701 + 100\,899$$

Pisalo se je leto 1787. V šoli je bila navada, da učenec, ki prvi reši nalogo, svojo tablico (takrat so pisali s kreda na tablice) položi na kateder, naslednji na vrh itd. Ko je učitelj komaj končal z narekovanjem, je Gauss z besedami "To je trik!" postavil tablico na kateder. Razložil je takole:

$$100\,899 + 81\,297 = 182\,196$$

■ $100\,701 + 81\,495 = 182\,196$

Ker je razlika med števili vedno 198, so vsote vedno enake. Sešteti moramo 100 števil, torej je rezultat $50 \cdot 182\,196 = 9\,109\,800$. Vidite podobnost v razmišljanju Gaussa in Jana? Oba sta združevala števili, ki sta ležali simetrično. Nikoli ne bomo izvedeli, ali je tudi Gauss pomislil na otroške igre, ko je uporabil ta koncept.

Kot kaže, so včasih anekdote nekoliko prirejene. Morda zato, da so bolj zanimive, ali preprosto zato, da matematiko v njih lažje razumemo. Gotovo bi bilo dolgočasno računati s tako velikimi števili (še posebej, ker dandanes računamo mnogo slabše kot v Gaussovih časih).

Mnogo manj znano prirejanje zgodovine omenja Peter Ross, profesor matematike iz Amerike. Piše, da je dolga leta verjel, da Nobelove nagrade iz matematike ne podeljujejo zato, ker naj bi neki švedski matematik pobegnil z Nobelovo ženo. Kot maščevanje za to dejanje naj bi Nobel ne želel, da se nagrada podeljuje tudi na področju matematike. Zgodbo je Ross slišal od profesorja matematike na univerzi in je vanjo verjel, vse dokler slučajno ni odkril, da Alfred Nobel sploh ni bil poročen. Kot kaže, pa če je še tako težko verjeti, se Nobel na matematiko enostavno ni spomnil.

Za nas pa je vseeno, ali verjamemo ali ne, da je oče Janu zares zastavljal take naloge. Pomembno je le, ali si sami želimo, da bi nekoč v kakšno drevo izrezljali svojo lastno formulo.

Rešitve

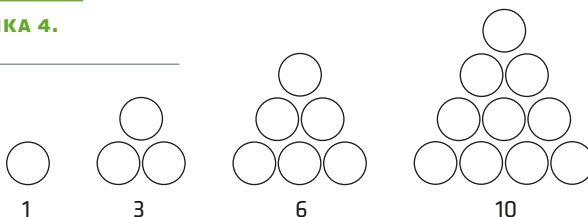
1. Število je sodo, če je deljivo z dve, in liho v nasprotnem primeru. Iz tabele lahko razberemo, da so soda števila 3, 5, 7, 9; liha pa 2, 4, 6, 8, ... Kot kaže, so v Janovem sistemu soda in liha števila zamenjala vlogi.

2. Kvadratna števila ali popolni kvadrati v Janovi tabeli so 3, 6, 10, 15, ..., saj je $3 = 2 \otimes 2$, $6 = 3 \cdot 3$, $10 = 4 \cdot 4$. Ta števila imenujemo tudi trikotna števila. Imajo mnogo zanimivih lastnosti. Ali vidite povezavo z vsotami prvih naravnih števil?

3. Formula za takšno množenje je $m \odot n = m \cdot (m - n + 1)$, smiselno je za $m \geq 2n$, praštevila so enaka običajnim praštevilo, soda števila so vsa soda

števila, ki so večja od 4, popolnih kvadratov ni.

SLIKA 4.



Literatura

- [1] E. T. Bell, *Men of mathematics*, New York: Simon and Schuster, 1986.
- [2] J. E. Nordgreen, *The most beautiful moment*, Mathematics Teaching 170 (2000) 23–27.
- [3] P. Ross, *Why Isn't There a Nobel Prize in Mathematics*, Math Horizons 4 (1995) 9.

xxx

Sudoku

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A				3	6		9	5	
B	6								
C				2	8				
D	5		8				4		
E	7		3	1		4	5		9
F	9		9				1		3
G					9	2			
H									7
I		4	1		7	5			

xxx

Gaussova cela števila, 1.del



DANIEL EREMITA

→ Gaussova cela števila je prvi natančno proučil slovit nemški matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Svoje ugotovitve je predstavil v delu z naslovom *Theoria residuorum biquadraticorum* leta 1832. Množica Gaussovih celih števil predstavlja razširitev množice celih števil. Videli bomo, da lahko v množici Gaussovih celih števil na podoben način kot v množici celih števil definiramo relacijo deljivosti in pojem praštevila (t. i. Gaussovega praštevila). Ugotovili bomo, da se Gaussova števila v mnogih pogledih obnašajo precej podobno kot običajna cela števila. V prvem delu prispevka bomo vpeljali množico Gaussovih celih števil, v njej definirali relacijo deljivosti in izpeljali osnovne lastnosti te relacije. Drugi del prispevka, ki bo izšel v prihodnji številki Preseka, bo namenjen Gaussovim praštevili. Proučili bomo povezavo med Gaussovimi praštevili in običajnimi praštevili ter predstavili zanimiv nerešeni problem, ki je star že skoraj 50 let.

Še preden povemo, kaj so Gaussova cela števila, bomo na kratko osvežili svoje znanje o kompleksnih številih. Spomnimo se, da so kompleksna števila vsa števila oblike $a + bi$, kjer sta a in b realni števili ter $i^2 = -1$. Kompleksna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) i,$$

kjer je $c + di \neq 0$.

Definirajmo še pojem konjugirane vrednosti in absolutne vrednosti kompleksnega števila.

Definicija 1. Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je kompleksno število $a - bi$, ki ga označimo s simbolom $\bar{z}$.

Definicija 2. Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je realno število $\sqrt{a^2 + b^2}$. Absolutno vrednost kompleksnega števila z označimo s simbolom $|z|$.

V nadaljevanju nas bo bolj kot absolutna vrednost zanimala t. i. norma kompleksnega števila.

Definicija 3. Norma kompleksnega števila $z = a + bi$ je število $a^2 + b^2$. Označimo jo z $N(z)$.

V naslednji nalogi lahko naši bralci izpeljejo nekaj osnovnih lastnosti norme kompleksnega števila.

Naloga 1. Dokaži, da za poljubni kompleksni števili z in w velja:

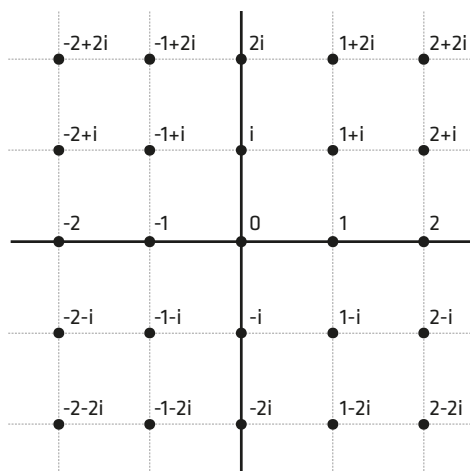
- (i) $N(z) = |z|^2 = z\bar{z}$,
- (ii) $N(z) \geq 0$,
- (iii) $N(z) = 0$ natanko tedaj, ko je $z = 0$,
- (iv) $N(zw) = N(z)N(w)$.

Vpeljimo sedaj množico Gaussovih celih števil.

Definicija 4. (Gaussova cela števila) Kompleksna števila oblike $a + bi$, kjer sta a in b celi števili, imenujemo *Gaussova (cela) števila*. Množico vseh Gaussovih števil označimo z $\mathbb{Z}[i]$.

Množica Gaussovih števil je torej podmnožica množice kompleksnih števil. Predstavimo jo lahko v kompleksni ravnini kot množico vseh točk s celoštevilskimi koordinatami.

Zlahka se prepričamo, da so vsota, razlika in produkt



SLIKA 1.

Gaussova cela števila

dveh poljubnih Gaussovih števil prav tako Gaussova števila. To pa ne velja nujno za deljenje. Če, na primer, Gaussovo število $1 + 2i$ delimo z Gaussovim številom $1 + i$, dobimo

$$\blacksquare \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i,$$

kar pa ni Gaussovo število.

Deljivost Gaussovih števil

Podobno kot v množici celih števil tudi v množici Gaussovih števil definiramo relacijo deljivosti.

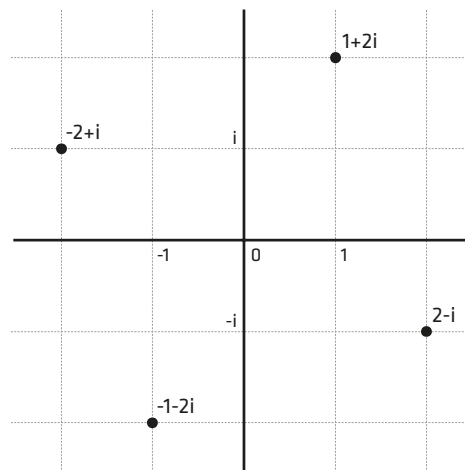
Definicija 5. Naj bosta α in β poljubni Gaussovi števili. Pravimo, da število α *deli* število β , če obstaja tako Gaussovo število γ , da je $\beta = \alpha\gamma$. Če α deli β , pišemo $\alpha \mid \beta$. V nasprotnem primeru pišemo $\alpha \nmid \beta$.

Zgled 1. Število $2 + i$ deli število $3 - i$, saj je $3 - i = (2 + i)(1 - i)$.

Zgled 2. Zgoraj smo videli, da $1 + i$ ne deli števila $1 + 2i$.

Zgled 3. Gaussovo število i deli vsa Gaussova števila $a + bi$, saj je $a + bi = i(b - ai)$. Tudi števila $1, -1, -i$ delijo vsa Gaussova števila.

Spomnimo se, da sta v množici celih števil 1 in -1 edini števili, ki delita število 1 . Katera so pa Gaussova števila, ki delijo število 1 ? Preden odgovorimo na to vprašanje, definirajmo še naslednja pojma.



SLIKA 2.

Asociirana števila Gaussovega števila $1 + 2i$.

Definicija 6. Gaussovo število ε imenujemo *enota*, če ε deli število 1 . Če je ε enota, potem pravimo, da je število $\varepsilon\alpha$ *asociirano število* števila α .

Števila $1, -1, i, -i$ so zagotovo enote, saj delijo število 1 . A velja še več.

Izrek 1. Števila $1, -1, i, -i$ so edine enote v množici Gaussovih števil.

Dokaz. Predpostavimo, da je $\alpha = a + bi$ enota. Potem obstaja tak $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, da je $\alpha\beta = 1$. Če upoštevamo nalogo 1 (iv), ugotovimo, da je

$$\blacksquare 1 = N(1) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Ker sta $N(\alpha)$ in $N(\beta)$ naravni števili, sledi $N(\alpha) = 1$ in $N(\beta) = 1$. Torej je $a^2 + b^2 = 1$. Ker sta a in b celi števili, je ta pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko je par (a, b) enak enemu od parov $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ ali $(0, -1)$. Tako smo dokazali, da je α enota natanko tedaj, ko je enako enemu od števil $1, -1, i, -i$. $\square$

Sedaj, ko poznamo vse enote v množici Gaussovih števil, lahko določimo vsa asociirana števila poljubnega Gaussovega števila.

Posledica 1. Naj bo α poljubno Gaussovo število. Potem so $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$ vsa asociirana števila števila α .

Zgled 4. Asociirana števila števila $1 + 2i$ so: $1 + 2i, -1 - 2i, i(1 + 2i) = -2 + i, -i(1 + 2i) = 2 - i$.

→ Relacija deljivosti v množici Gaussovih števil ima nekatere podobne lastnosti kot običajna relacija deljivosti v množici celih števil.

Naloga 2. Dokaži, da za poljubna Gaussova števila $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ velja:

- (i) $\alpha \mid \alpha$,
- (ii) če $\alpha \mid \beta$ in $\beta \mid \alpha$, potem sta α in β asociirani števili,
- (iii) če $\alpha \mid \beta$ in $\beta \mid \gamma$, potem $\alpha \mid \gamma$,
- (iv) če $\gamma \mid \alpha$ in $\gamma \mid \beta$, potem $\gamma \mid \alpha x + \beta y$ za poljubna $x, y \in \mathbb{Z}$.

Seveda je norma $N(\alpha)$ nenegativno celo število za vsako Gaussovo število α . Na koncu prvega dela izpeljimo še zvezo med relacijo deljivosti v množici $\mathbb{Z}[i]$ in tisto v množici $\mathbb{Z}$.

Trditev 1. Naj bosta α in β poljubni Gaussovi števili. Če α deli β , potem $N(\alpha)$ deli $N(\beta)$.

Dokaz. Predpostavimo, da $\alpha \mid \beta$. Tedaj obstaja tako Gaussovo število γ , da je $\beta = \alpha\gamma$. Če sedaj uporabimo zgoraj omenjeno multiplikativno lastnost norme (glej nalogo 1 (iv)), dobimo

$$N(\beta) = N(\alpha\gamma) = N(\alpha)N(\gamma).$$

To pa pomeni, da celo število $N(\alpha)$ deli celo število $N(\beta)$. $\square$

Literatura

- [1] E. Gethner, S. Wagon, B. Wick, *A Stroll Through the Gaussian Primes*, American Mathematical Monthly **105** (1998), 327–337.
- [2] J. Grasselli, *Algebraična števila*, DMFA, Ljubljana, 1983.
- [3] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and its applications*, 5th ed., Pearson/Addison Wesley, Boston, 2005.

× × ×

www.presek.si

46. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje



KLAVDIJA MLINŠEK

→ **Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 17. aprila 2010, pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1 % vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.**

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 64, v osmem 57 in v devetem 65 zlatih Vegovih priznanj. Zlato Vegovo priznanje prejmejo sedmošolci, ki so osvojili najmanj 32 točk od 50 možnih točk, osmošolci, ki so osvojili 31 točk od 50 možnih točk, in devetošolci, ki so osvojili najmanj 36 od 50 možnih točk. Najboljših 20 devetošolcev se je udeležilo Poletne šole matematike, ki je bila od 25. do 29. junija 2010 v Bohinju.

Nagrade, ki so bile podeljene 19. maja v Koloseju, so prejeli najboljše tekmovalci, in sicer:

7. RAZRED

I. nagrada

- KATARINA ČERNAČ, OŠ Miroslava Vilharja Postojna

II. nagrada

- FLORJAN CAMLEK, OŠ Prežihovega Voranca Jesenice
- EGON PERŠAK, OŠ Lenart v Slovenskih Goricah

III. nagrada

- KATJA GOSAR, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana
- MIHAEL RAJH, OŠ Polzela
- JAKOB JURIJ SNOJ, OŠ Belokranjskega odreda Semič

8. RAZRED**I. nagrada**

- POLONA AUPIC, OŠ Zbora odposlancev, Kočevje
- KLARA NOSAN, II. OŠ Celje

II. nagrada

- ELA HUDOVERNIK, OŠ Gorje

III. nagrada

- MIHA BASTL, OŠ Frana Roša, Celje
- NINA GARTNER, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
- NINA KLANJŠČEK, OŠ Franceta Bevka, Tolmin
- ANAMARIJA OGRINEC, OŠ Toma Brejca, Kamnik

9. RAZRED**I. nagrada**

- ŽIGA KRAJNIK, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka
- JERNEJ LESKOVAR, OŠ Ljudski vrt Ptuj

II. nagrada

- PATRICIJA BRATUŽ, OŠ Lucijana Bratkoviča Bratuša, Renče
- AJDA REMŠKAR, OŠ Križe

III. nagrada

- VID MEGUŠAR, OŠ Železniki
- ANA HEDL, OŠ Zreče
- PETER ADAMIČ, OŠ Trbovlje

× × ×

Svet v steklenici



MOJCA ČEPIČ



→ Naravoslovec hodi po svetu z odprtimi očmi in s fotoaparatom. Pogosto vidi zanimive prizore, ki so opažena realizacija naravnih pojavov, obravnavanih v učbenikih.

Fotoaparat se znajde v roki kar sam, slika kasneje spominja na lepe dogodke, pogosto pa vzbuja tudi čudenje. Včasih pojava ne moremo razumeti že na kraju samem, slika pa nam ga pomaga razumeti kasneje. Torej, hodimo naokoli tudi s fizikalno odpr-



timi očmi in naj nam ne bo žal ustavljanja zaradi fotografiranja! Pošljite fotografije, ki se vam zdijo zanimive, pošljite poleg še malo razlage, kako je slika nastala in kaj se na njej dogaja, pospremite jo z vprašanjem, zakaj vidimo na sliki, kar pač vidimo.

Slika velike steklenice je nastala na čudovitem izletu, ki ga priporočam vsakomur. Cinque Terre se imenuje ozko in strmo obalno področje ob Ligurskem morju v Italiji, ki leži severno od La Spezie. S skupnim imenom je povezanih pet manjših krajev: Monterosso al Mare, Vernazza, Corniglia, Manarola in Riomaggiore, ki jih povezujeta pešpot in železnica, skrita v skoraj neprekinjen tunel. Pot je dolga okoli 20 km z mnogimi vzponi in spusti, deloma pa zahteva tudi precej stabilen korak. Oči in srce se napase ob čudovitih pogledih, utrujeni pa lahko vedno del poti prevozijo z vlakom. Vsekakor je vožnja z vlakom nujna za povratek na izhodišče.

Posnetek je nastal, ko smo se spuščali iz višine okoli 250m nad morjem v Vernazzo. Pot se je vila tudi med hišami s čudovito razglednimi verandami. Na eni od njih je stala steklenica, v njej pa smo videli na glavo postavljeno Vernazzo. Na obrnjeni sliki je lepo viden polotok s stolpom, ki nadzira vas. Zaradi oblike steklenice je voda v njej delovala kot leča, ker pa je oblika steklenice precej nepravilna, slika ni najbolj jasna. Na kraju samem se je oko neposredno ustavilo še na „predmetu“, ki ga vidimo obrnjeno. Žal na fotografijo obojega ni bilo mogoče ujeti v enem posnetku. Idilična vasica je zato posneta posebej in objavljena na naslovnici.

XXX

REŠITEV SUDOKU

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	1	8	2	3	6	7	9	5	4
B	6	3	7	5	4	9	8	2	1
C	9	5	4	2	8	1	7	3	6
D	5	1	8	9	3	6	4	7	2
E	7	6	3	1	2	4	5	8	9
F	4	2	9	7	5	8	1	6	3
G	8	7	6	4	9	2	3	1	5
H	2	9	5	8	1	3	6	4	7
I	3	4	1	6	7	5	2	9	8

XXX

List, ki je
malo nagnjen
tudi v drugo
ostane suh.
Kapljice vode
privlačijo
delce nečistoče
jih razgrajajo
in odplavajo.
živica



Lotosov pojav

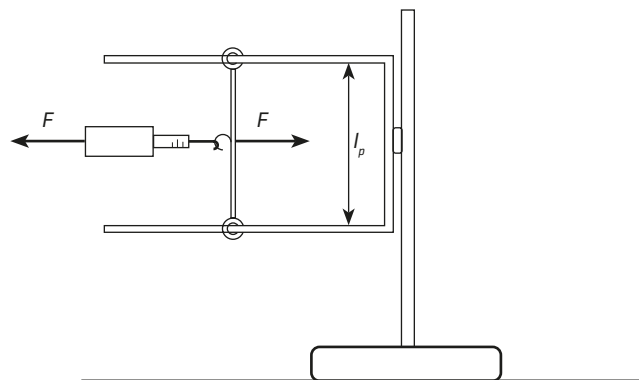


JANEZ STRNAD

→ Na vodi plavajo igle in britvice, ki so gostejše od vode, po njeni gladini brzijo vodni drsalci in druge žuželke. Vodna raztopina detergenta se peni, odstrani nečistočo in omogoči, da ločijo rudo od jalovine. Voda z raztopljenimi snovmi se dviga v tankih ceveh in omogoča rastlinam, da živijo. Našteti pojavi so povezani s **površinsko napetostjo**, značilno za gladino in kaplje tekočin.

V notranjosti tekočine molekule z vseh strani obdajajo molekulo, na površini pa jo obdajajo samo z ene strani. Nekaj privlačnih vezi z drugimi molekulami moramo prekiniti, da molekulo iz notranjosti tekočine spravimo na površino. Da povečamo površino, moramo dovesti delo. Dovedeno delo je vselej enako, če površino dane tekočine enako povečamo in delo dovajamo počasi pri konstantni temperaturi. Delo dobimo v celoti povrnjeno, ko površino zmanjšamo na prvotno vrednost. Na račun dovedenega dela se poveča **površinska energija** tekočine. Poveča se za γ , ko površino povečamo za 1 m^2 . Delo opravimo tako, da delujemo s silo na mejo površine. Površinska napetost je na en meter meje preračunana sila.

Osnovni poskus naredimo tako, da na pravokoten okvir napnemo opno tekočine, in ugotovimo, da moramo na prečko delovati s silo F , da prečko obdržimo v ravnovesju.¹ Prečko počasi premaknemo za s v pravokotni smeri, povečamo površino za $S = ls$ in opravimo delo $A = Fs = \frac{F}{l}ls = \gamma S$ (slika 1). Upoštevati moramo, da ima opna dve površini, zato je $l = 2l_p$, če je l_p dolžina prečke.



SLIKA 1.

Na pravokotni okvir, po katerem brez trenja drsi prečka z dolžino l , napnemo opno milnice. Na prečko moramo delovati s silo $F = 2\gamma l_p$, da uravnovesimo silo opne.

Ugotovitve zapišemo z enačbami:

- $A = W_{pov} - W'_{pov} = \gamma S = \frac{F}{l}ls$,
- $S = sl$,
- $\gamma = \frac{W_{pov} - W'_{pov}}{S} = \frac{F}{l}$.

Pogosto površino tekočine primerjajo z opno iz prožne trdne snovi. Kdor naredi to, mora poudariti razliko. Pri napenjanju prožnega traku sila narašča s podaljškom traku, pri površini tekočine pa napetost ni odvisna od povečanja površine. Pri določeni snovi je vedno enaka, odvisna je le od temperature; z naraščajočo temperaturo pa napetost pojema. Površinsko napetost zmanjša tudi nečistoča.

Mejni kot. Opazujemo kapljo tekočine na vodoravni trdni podlagi. Pri dovolj veliki kaplji lahko privzamemo, da se tekočina, trdna snov in plin, to je zrak, stikajo v ravni črti. Na podlagi nastaneta tanka plast tekočine in tanka plast zraka, na tekočini pa tanka plast zraka. Na majhen del tekočine z

→ nadaljevanje na 14 strani

¹Voda ima pri sobni temperaturi razmeroma veliko površinsko napetost $0,072 \text{ J/m}^2 = 0,072 \text{ N/m}$ in ni primerna za poskuse z opnami in mehurčki. Površinsko napetost zmanjšamo z dodatkom mila ali detergenta in s tem olajšamo nastanek open in mehurjev.



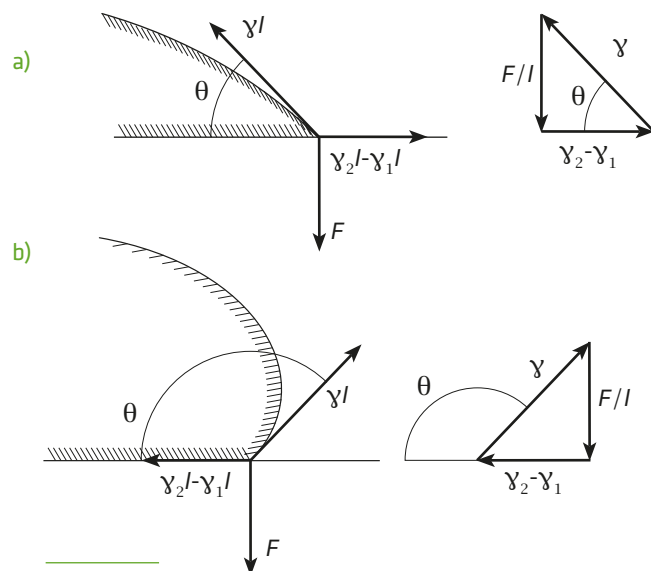
dolžino l ob meji delujejo štiri sile. To so tri sile površinske napetosti na meji tekočine in zraka γl , na meji tekočine in podlage $\gamma_1 l$ ter na meji podlage in zraka $\gamma_2 l$ v tangentialnih smereh in še sila podlage F v prečni smeri (slika 2). V ravnovesju napetosti in sile γ , $\gamma_2 - \gamma_1$ in F/l sestavljajo pravokotni trikotnik z *mejnim kotom* θ med površino kaplje in podlago. S slike dobimo enačbi

$$\gamma \sin \theta = F/l \quad \text{in} \quad \gamma \cos \theta = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Če trdna snov močno privlači tekočino, je $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$ in je mejni kot oster ($0 < \theta < 90^\circ$). Tekočina *omoči* trdno snov. Če trdna snov slabo privlači tekočino ali jo odbija, je $\gamma_2 - \gamma_1 < 0$ in je mejni kot top ($90^\circ < \theta < 180^\circ$). Tekočina *ne omoči* trdne snovi. Po enem od dogovorov je trdna snov *superhidrofilna*, če je mejni kot manjši od 5° , *hidrofilna*, če je manjši od 30° , *hidrofobna*, če je večji od 90° , in *superhidrofobna*, če je večji od 150° . Mejni kot je odvisen od tekočine in od trdne snovi, plin nanj malo vpliva.

Že v davnini so opazili, da listi lotosa in nekaterih drugih rastlin odbijajo vodo in da kapljice dežja z njih sperejo umazanijo. Lotos so častili v starem Egiptu ter ga častijo v Indiji in na Daljnem Vzhodu. Najprej so mislili, da se na telesu nabere tem manj nečistoče, čim bolj gladko površino ima telo. Šele leta 1964 so pomislili na možnost, da je drugače. Postali so pozorni na hrapave površine, ki odbijajo vodo. Raziskovali so vedenje vode in kupa s parafinom prevlečenih steklenih kroglic. Leta 1977 so z vrstičnim elektronskim mikroskopom podrobno preiskali površino listov lotosa in nekaterih drugih rastlin. Za to ima zasluge nemški botanik Wilhelm Barthlott s svojimi sodelavci, ki je uvedel ime *lotosov pojav*.

Ugotovili so, da ima lotosov list na površini značilno zgradbo z dvema stopnjama hrapavosti. Površino sestavljajo ena do dve stotini milimetra široke in visoke brbončice, obložene s tisočkrat manjšimi kristalčki voska (slika 3).



SLIKA 2.

Mejni kot kaplje iz tekočine, ki omoči podlago, je manjši od 90° (a), kaplje iz tekočine, ki ne omoči podlage, pa večji od 90° (b).



SLIKA 3.

Lotosov list ima na površini brbončice z velikostno stopnjo stotine milimetra, ki jih pokrivajo tisočkrat manjšimi kristalčki voska (a). Vodne kapljice polzi po nagnjenem lotosovem listu (b). Na superhidrofobni hrapavi površini se le majhen del kapljice dotika trdne snovi (c). Na YouTube kratek film *Demonstration of the lotus effect* kaže presenetljivo vedenje vode na listu slonjega ušesa, znanega kot sladki krompir taro.

Ta zgradba na dveh ravneh odbija vodo, ki se na površini oblikuje v okrogle kapljice. List, ki je malo nagnjen, tudi v dežju ostane suh. Kapljice vode privlačijo delce nečistoče, jih zajamejo in odplavijo. Nekateri menijo, da se kapljice po površini ne kotalijo, ampak kar drsijo. Tako lotosov list ostane čist, čeprav raste v blatni vodi. Površina lotosovega lista je za vodo superhidrofobna. Že dalj časa je znano, da mehučki zraka na meji tekočine in hrapave trdne snovi povečajo mejni kot. Zaradi hrapave zgradbe se kapljica lista dotika samo na zelo majhnem delu svojega tlorisa. Za nekatere rastline navajajo, da meri dotikalna površina samo 2 do 3 odstotke tlorisa kapljice, pri lotosu naletimo celo na podatek o 0,6 odstotka. Predstavljati si smemo, da kapljica leži na vrhovih izboklin kot fakir na deski z žebli. Za rastline je ta lastnost pomembna, ker jih obdrži čiste in umazanija ne zastre sončne svetlobe. Poleg tega jih varuje pred gljivicami in algami. Podobno lastnost kažejo tudi krila metuljev in žuželk, ki jih sami ne morejo čistiti.

Nanotehnologija raziskuje pojave v svetu nanometrov, to je milijonin milimetra, in išče možnosti za uporabo. V njenem okviru so lotosov pojav izkoristili po letu 1990. Barthlott je uspešno prijavil patent.² Odkrili so precej novih superhidrofobnih snovi. Lani so v Nemčiji lotosov pojav, ki je medtem postal blagovna znamka, prišteli med petdeset najpomembnejših odkritij. Družbe po svetu so izdelale premaze za fasade, strešnike, barve, pršila za oblačila, prte. Premazi na antenah zmanjšajo vpliv dežja in snega. Leta 1999 so izdelali fasadno barvo, ki so jo uspešno uporabili že na več kot pol milijona fasad. Obetajo, da bodo v prihodnosti prodali največ *samočistilnih tkanin* za jadra, šotore, strehe.

Japonski raziskovalci so ugotovili, da zelo tanka plast titanovega oksida, ki ga sicer uporabljajo kot belo barvo, deluje katalitično, ko jo obsevajo s svetlobo na bližnjem ultravijoličnem delu spektra (z valovno dolžino, manjšo od 388 nanometrov). Vodo razstavi na vodik ter organske snovi, tudi celične opne, razgradi na ogljikov dioksid in vodo. Take površine preprečujejo bakterijam, da bi se ugnezdile na njih. Raziskovalci so ploščico s tanko prevleko titanovega dioksida za nekaj časa močno se-

grel. Ploščico je voda popolnoma omočila, če so jo obsevali z ultravijolično svetlobo. Ta svetloba je izbila nekaj kisikovih atomov O s površine, preostale hidroksilne skupine OH pa so ustvarile majhna superhidrofilna območja. Tudi ta pojav prispeva k čisti površini. Zelo tanka plast titanovega dioksida je prozorna, kar omogoča, da naredijo steklo in zrcala, ki se sama čistijo. V Nemčiji so na prometnih znakih na avtocestah uporabili samočistilno steklo. V Združenih državah so s skladovnico tankih plasti polimera in kremenata naredili steklo, ki se na vlagi ne orosi in ki ne odbija nič svetlobe.

V Južni Koreji so iz zelo tankih plasti polimera in kremenata izdelali superhidrofobno površino. Površina pa je postala superhidrofilna, ko so jo obsevali z ultravijolično svetlobo. Na površini so dodali malenkost snovi z molekulami s posebnimi atomskimi skupinami. Površina je bila superhidrofobna, ko so bile skupine na površini. Po obsevanju z ultravijolično svetlobo so se skupine obrnile navznoter in je površina postala superhidrofilna. Na vidni svetlobi je plast zopet postala superhidrofobna. Opisane pojave začenjajo izkoriščati.

Nazadnje omenimo pojav, pri katerem tudi uporabljajo superhidrofobne snovi. Pri gibanju ladij in drugih teles po tekočini ali pri pretakanju tekočine po ceveh nastane *upor*. Zmanjšati so ga poskusili z vbizgavanjem mehurčkov plina v tekočino ali z dodatkom polimernih snovi, kar je povečalo stroške. Več obeta površina ladij ali cevi, ki jo naredijo hrapavo in pripravijo tako, da je za tekočino, denimo vodo ali nafto, superhidrofobna. S tem znatno zmanjšajo upor. Obetajo si, da bodo s tem zmanjšali porabo energije za pogon ladij ali prenos tekočine po ceveh. Pojav raziskujejo v laboratorijih in upajo, da ga bodo kmalu lahko izkoristili. Kaže, da bo nanotehnologija upravičila sredstva, ki so jih vložili v njen razvoj.

× × ×

www.presek.si
www.dmfa.si
www.dmfa-zaloznistvo.si

× × ×

²Najprej je izdelal *žlico za med* s prevleko, ki se je med ni oprijel.



Nagradna križanka



										VEJA ANTROPOLOGIJE, KI SE UKVARJA S PREUČEVANJEM ZNAČILNOSTI LOBANJE	IME, KI SE LE V DVEH ČRKAH RAZLIKUJE OD ROBERT	VULKAN NA SICILIJ	SREDNJE-VESKA FILOZOFIJA	JAPONSKI PISATELJ NOBELOVEC (KENZABURO)	NAJVIŠJA TOČKA	SENZACIONALNA ZADEVA
										UDELEŽENKA KRESOVANJA					3	
										FIZIK, KI JE RAZVIL MODEL ATOMA (ERNEST)						
										PRODUKT ŽGANJA KALCIJEV. KARBO-NATA				VDIRALEC V RAČUNALNIŠKE SISTEME		
										7				NAŠ NEKDANJŠI TEKAČ ČEZ OVIRE (STANKO)	MITIČNI INDIJSKI PRINC DVOŠMISELNOST	
										AMERIŠKA IGRALKA (PATRICIA)						
										IRIDIJ SREDSTVO ZA SPAJKANJE, SPAJKA		AMERIŠKI IGRALEC (ALAN) NORV. PRE-STOLNICA				
																"KONEC" KONCA PREDSTOJNIK SAMOSTANA
AVTOR MARKO BOKALIČ	OSREDNJI DEL JAJCA	KRIVULJA KOTALEČ. KROGA PO DRUGEM KROGU	MOČNO ŽGANA GLINA ZA PEČI	IRSKA TERORISTIČNA ORGANIZACIJA	OZNAKA NAŠE METRO-POLE	SPOROČILO OBVESTILO	GOSTA BOMBAŽNA TKANINA ZA PERNICE	KRAJ NAD VIPAVO GRŠKI JUNAK, AJANT				STROPNI NOSILEC				
VOZILO ZA NUJNO POMOČ, REŠILEC		5										ITAL. POKRAJINA OB GENOV. ZALIVU IZVEDENEC				
SPREMENJANJE TEKOČINE V PARO PRI VRELIŠČU					CEKIN					VEDA O KEM. SESTAVI ZEMLJE						
NEKDANJA TENIŠKA IGRALKA JAUŠOVEC					MATE-MATIK VIDAV							REKA V TOSKANI SLABOT-NOST, BOLEHNOST				
ITAL. PISATELJ (UMBERTO; ROMAN IME ROŽE)				NESKLON-LJIVO ŽENSKO IME					14					KRAJ MED RIBNICO IN VELIKIMI LAŠČAMI		
VLAK-NINSKA TVORBA				ENOTA ZA MOČ DRŽAVA V SREDNJI AMERIKI				SKRBNIK ZA INVENTAR V DOMU ALI PODJETJU	STAROVEŠ. MATERIAL ZA PISANJE PRIRAST DOBRIN					DISCIPLIN. UKREP		VERDIJEVA OPERA MOČ SAHISTA V TOČKAH
ZAPOREDNI ČRKI			PASTIRSKI BOG PREBIVALEC KRŠKEGA				IME LETAL EDVARDA RUSJANA			RAZKROJ Z EL. TOKOM SL. PIONIR UKV-TEHNIKE (MARJ)				9		
NASIČENI OGLJIKOVODIKI				10			VELETOK V ZDA NEKD. FIN. PREMIER AHO								"KONEC" PORAZA KONFLIKT	
NAŠ KNJIGARNAR IZ 18/19. ST. (VILJEM HENRIK)					POKOJNI OLIMPIONIK ŠTUKELJ					SVET MEJNI PREHOD PRI DRAVOGRADU						
HUMORISTKA PUTRIH					ŠTEVILO, KI SE POTENCIRA ZNAK ZA AMERICIJ	8						SOSEDI ČRKE P UNITED STATES		POKRAJINA NA ZAHODU S. ITALIJE OZNAKA KUTINE		
						KOTNA FUNKCIJA								IZ ZIDU IZSTOPAJOČA PODPORA		11
POKRAJINA V SRED. DELU VIETNAMA						PRITOK IRTIŠA PRI OMSKU			SLAVA, SPOŠTOVANJE				JESENSKO OPRAVILO V VINOGRADU			

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **15. novembra 2010**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

Mikroklima sobe



MOJCA ČEPIČ

→ V radijskih oddajah ali v časopisih pogosto slišimo ali vidimo besede, kot so lokalni vetrovi, mikroklima. Pomen teh besed nas opozarja, da se poročilo ukvarja z vetrovi, temperaturami, vlažnostjo, ki so značilni za manjša območja, pogosto tudi za območja velikosti posamezne ulice ali trga.

V današnji poizkuševalnici bomo poskusili raziskati mikroklimo domače sobe. Vsak od nas ve, da so nekatera mesta v sobi prijetnejša (imajo npr. pozimi višjo temperaturo, na drugih neprijetno vleče). Poskusili bomo izmeriti dvoje: smer gibanja zraka v sobi in temperaturo na različnih krajih v sobi. Gibanje zraka bomo poskusili tudi semikvantitativno primerjati, torej narediti primerjavo hitrosti zraka na različnih mestih v sobi.



Potrebščine:

- fotografija in skica sobe,
- sveča in vžigalice ali vžigalnik,
- termometer (lahko je navaden sobni termometer).

Opazovanje je pravzaprav precej enostavno. Prižgemo svečo in jo postavimo na različna mesta v sobi. Iz oblike plamena, torej kam in koliko se nagiba, sklepamo na smer in hitrost premikanja zraka na kraju, kjer gori sveča. V skico in fotografijo vrišemo puščice, ki nakazujejo smer gibanja zraka. Iz načina gorenja sveče lahko tudi primerjamo, kdaj je „mikroveter“ močnejši (ima zrak večjo hitrost) in kdaj šibkejši. Na sliki bo označenih več različno velikih

puščic. Nekatere fizikalne količine ponazarjamo s polji puščic. O tem več v odgovoru.

Podobno ponovimo, najbolje na istih mestih, s termometrom. Termometer položimo ali postavimo na mesta, na katerih nas zanima temperatura, in jo čez kakšno minuto odčitamo. Na mestih, na katerih smo izmerili temperaturo, le-to v sliki ali skici tudi zapišemo.

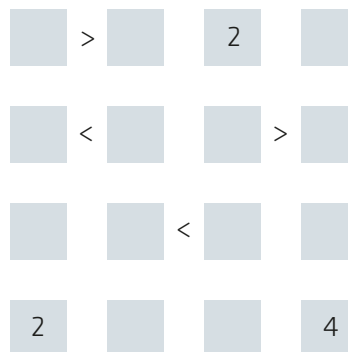
Hkrati se poskusimo tudi spomniti, kako se na teh istih krajih počutimo. Ali je občutek, da je del sobe npr. hladen, res vedno povezan tudi z nižjo temperaturo?

xxx

Futoški



→ V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n , tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter, da bodo izpolnjene vse relacije.



REŠITEV

4	1	3	2
1	4	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

xxx

Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA

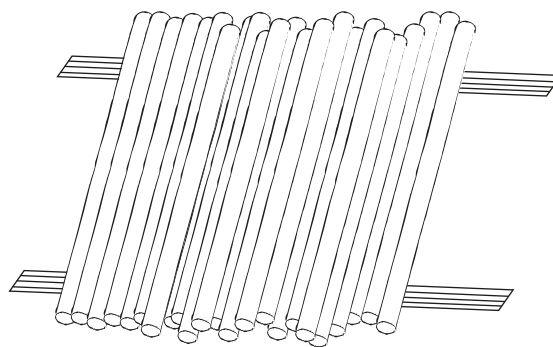


40. Slamnata streha. „Luknja pri luknji tiči, pa vendar vodo drži.“ (iz zbirke *Sto ugank*, 1915)

Zloži eno plast slamic na dve prečki in jih pritrdi z nitko ali lepilom. To „streho“ nagni za kot 30° in jo rahlo polij z vodo. Ali drži vodo (ki potem odteka na koncih)? Zakaj? Kaj pa, če močnejše „dežuje“ (pobrizgaj s prho)? Poskusi tudi z dvojno plastjo slamic, tako da zgornje ležijo v presledkih med spodnjimi.

SLIKA 2.

Muzej na prostem v Pleterjah (foto: Katja Vehar)



Knjige Stephena Hawkinga

V slovenskem prevodu je izšlo že več knjig profesorja Stephena W. Hawkinga, namenjenih širšemu krogu bralcev. Podrobnejše predstavitve posameznih del najdete na spodnjem internetnem naslovu in v preteklih številkah revije Presek.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/hawking/>

ILUSTRIRANA KRATKA ZGODOVINA ČASA, Prenovljena in razširjena izdaja



260 strani
veliko ilustracij
barvni tisk
format
 $19,6 \times 25,5$ cm
trda vezava
26,08 EUR

KRATKA ZGODOVINA ČASA

Prenovljena in razširjena ob deseti obletnici

192 strani
format
 14×20 cm
mehka vezava
12,52 EUR



BERILO H KRATKI ZGODOVINI ČASA

152 strani
format 14×20 cm
mehka vezava
7,30 EUR

48.fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije



CIRIL DOMINKO

→ **Regijsko tekmovanje** je bilo izvedeno 26. marca 2010 istočasno na osmih srednjih šolah v posameznih regijah: Šolski center Slovenj Gradec, Gimnazija; Gimnazija Brežice; Gimnazija Jesenice; Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Gimnazija Poljane, Ljubljana; Šolski center Ptuj, Elektro in računalniška šola; Gimnazija Koper in Gimnazija Jurija Vege Idrija.

Tako kot že nekaj let je bilo regijsko tekmovanje izvedeno v treh tekmovalnih skupinah – I, II in III. Na tekmovanju je sodelovalo 811 dijakov (od 949 prijavljenih) iz 55-ih srednjih šol. Izdelke je ocenjevalo osem regijskih komisij, v katerih je sodelovalo 85 učiteljev fizike iz sodelujočih šol. Na tekmovanju je bilo podeljenih 274 bronastih priznanj. Komisije iz posameznih regij so predlagale skupno 127 tekmovalcev za državno tekmovanje.

Državno tekmovanje je bilo 10. aprila 2010 na Gimnaziji Jurija Vege Idrija. Tekmovanja se je izmed predlaganih z regijskega tekmovanja udeležilo 123 tekmovalcev iz 34-ih srednjih šol. Tekmovanje je tako kot vsako leto doslej izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa so krili *Društvo, Ministrstvo za šolstvo in šport* ter soorganizatorica državnega tekmovanja – *Gimnazija Jurija Vege Idrija*. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so sodelovali študentje, sodelavci FMF, Oddelek za fiziko in sodelavci Inštituta Jožef Stefan. Na tekmovanju je komisija razglasila dve prvi nagradi, 14 drugih in deset tretjih. Zlato priznanje je prejelo 23 tekmovalcev. Svečana podelitev nagrad je bila 19. maja 2010 na prireditvi v Koloseju v Ljubljani.

Podeljene nagrade in zlata priznanja

SKUPINA I.

I. nagrada

- Ni bila podeljena.

II. nagrada in zlato priznanje

- MIHA ZGUBIČ, II. gimnazija Maribor
- MIHA KAVČIČ, TŠC Kranj
- VERONIKA VODEB, II. gimnazija Maribor
- MARTIN DAVORIN KRŽIŠNIK, Gimnazija Vič, Ljubljana

III. nagrada in zlato priznanje

- SIMON DOBELŠEK, ŠC Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

III. nagrada

- MITJA BREZNIK, ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija
- TADEJ CIGLARIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ŽAN NOVAK, Gimnazija Škofja Loka
- JURIJ TRATAR, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica

SKUPINA II.

I. nagrada in zlato priznanje

- Ni bila podeljena.

II. nagrada in zlato priznanje

- VENO MRAMOR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- DOMEN IPAVEC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- DOMEN KAMPJUT, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATJAŽ LEONARDIS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ANDRAŽ BAJT, TŠC Nova Gorica – Tehniška gimnazija in zdravstvena šola
- MARKO LJUBOTINA, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica

III. nagrada in zlato priznanje

- KLEMEN KLOBOVES, Gimnazija Škofja Loka
- KRISTIJAN KUCHAR, ŠC Velenje, Gimnazija

SKUPINA III.

I. nagrada

- FILIP KOZARSKI, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- PAVEL KOS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

II. nagrada in zlato priznanje

- PETER KOŽELJ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATEJ ALEKSANDROV, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- VALTER BERGANT, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik, Gimnazija
- MITJA ZIDAR, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica

III. nagrada in zlato priznanje

- ŽIGA AVSEC, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer
- MARIN FERARA, ŠC Celje, Gimnazija Lava
- KATJA KLOBAS, Gimnazija Koper

Zlato priznanje

- MATEJ PETKOVIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 7. maja 2010 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Povabljenih je bilo deset najboljših tekmovalcev iz III. tekmovalne skupine. Na 41. mednarodno fizikalno olimpijado, ki je bila od 17. do

25. julija 2010 v Zagrebu, Hrvaška, so se uvrstili: Filip Kozarski, Pavel Kos in Peter Koželj z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Mitja Zidar, Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica in Marin Ferara, ŠC Celje, Gimnazija Lava.

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8 x 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2 x 4) nastopalo vseh 8 števil.

		6					
2		1		3	5		
	5			4			
			7	8			
4	6		2			1	
8		5					
				2			1
	8						6

xxx

www.presek.si

www.dmfa.si

xxx

Konjukcije
dveh planetov
so lahko zelo
pozoste,
konjukcije
treh planetov pa
manj.
astronomija



Planetarni balet

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Avgust 2010 se je prevešal v zadnjo tretjino in na zahodu sem ob večerni zarji opazoval svetlo piko, nizko nad zahodnim obzorjem. V navdihu sem na hitrico napravil posnetek s fotoaparatom, ki ga, kadar slikam zvečer ali ponoči, vedno postavim na stativ.

Nastal je posnetek na sliki 1.



SLIKA 1.

S posnetka kriči svetilka pred lokalom ob cerkvi, nad njo pa se na višini strehe bohota tisti hip najsvetlejša pika na nebu – Večernica, ki jo imajo nekateri za zvezdo, je pa v resnici planet Venera. Ker Venera kroži okoli Sonca bližje kot Zemlja, je ponoči nikoli ne vidimo v zenitu (navpično nad glavo) ampak le kot Večernico ali Danico (Jutranjico) dokaj nizko nad obzorjem. Venera je med najsvetlejšimi objekti na nebu, takoj za Soncem in Luno. Zaradi njene bližine Soncu na Veneri lahko opazujemo mene (kot pri Luni), dočim so Mars, Jupiter ali Saturn vedno videti skoraj okrogli.

Ker me je luč motila, sem si s teleobjektivom izbral boljši kader. Rezultat je posnetek na sliki 2.



SLIKA 2.

Na sliki sem opazil, česar s prostim očesom nisem. Še dve izrazitejši piki povezani z Venero v plesu okoli zvonika. Efemeride mi povedo, da sta to Mars – prepoznam ga tudi po njegovi rdečkasti barvi, ter Saturn. Saturn je precej daleč in ima zato manjši navidezni sij v primerjavi s soplesalcema. Šele okoli opozicije (Saturn je tedaj na nasprotni strani kot Sonce, seveda gledano z Zemlje), bo pogled nanj spektakularen. Na nebu ga ne boste zgrešili, z malo boljšim amaterskim teleskopom pa boste brez težav opazovali njegove prstane. Tem planetom delata družbo najsvetlejši zvezdi ozvezdja Devica: Spika in Gama Devica. Spika je 15. najsvetlejša zvezda na nebu, Gama pa 120. in je čudovita dvojna zvezda z obhodnim časom 169 let.

Mogoče bo kdo pomislil, da je taka poravnava planetov silno redek pojav in vzrok za kakršnekoli katastrofe, ki vam pridejo na misel, a to ne drži. Naj najprej povem, kaj mislim s „poravnavo“. Ker planeti krožijo okrog Sonca približno v isti ravnini, bodo vsi planeti, ki jih lahko opazimo na nebu, ležali več ali manj na isti „črti“, torej na nebu v bližini ekliptike. Tu ne govorim o tej poravnavi. Predstavljajte si, da opazujete Osončje iz smeri, pravokotne na ekliptiko. Planeti so potem lahko poravnani tako, da ležijo na premici skozi Sonce, bodisi na premici skozi Zemljo.

Prvi primer ustreza poravnavi kazalcev na uri, kjer Soncu ustreza središče številčnice, kazalci pa kažejo do posameznih planetov.

Oglejmo si najprej primer poravnave dveh planetov (ustrezno poravnavi urnega in minutnega kazalca). Razmislek bomo poenostavili tako, da bomo privzeli krožne tire planetov v isti ravnini. Začnimo iz poravnane položaja (ob 12h). Zveznica Sonca in prvega planeta se v času t zasuka za kot $\omega_1 t$, kjer je ω_1 kotna hitrost planeta bližjega Soncu. Planeta bosta poravnana, kadar razlika njunih zasukov ustreza večkratniku polnega kota:

$$\omega_1 t = \omega_2 t + n\pi$$

in je n naravno število. Zaporedna poravnava dveh planetov se torej zgodi vsakič, ko preteče čas

$$t = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Za Zemljo in Mars z obhodnima časoma 365 dni in 687 dni je to 389 dni (pri uri je to 32,7 min). Do poravnave na isti strani Sonca poteče dvakrat dlje.

S tremi planeti je račun že bolj zabeljen. Ob poravnavi velja

$$\omega_0 t = \omega_1 t + n\pi = \omega_2 t + m\pi,$$

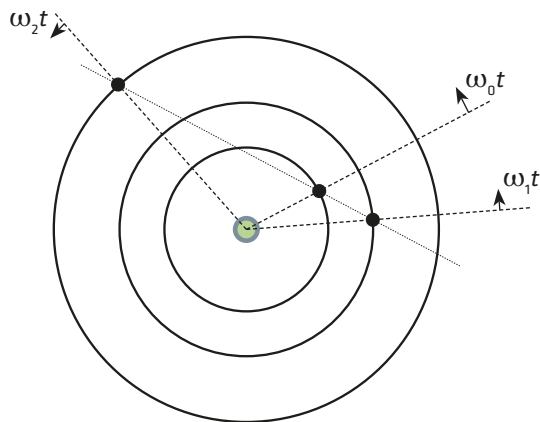
kjer smo z ω_0 označili največjo, z ω_2 pa najmanjšo kotno hitrost planetov udeleženi v plesu; n in m sta celi števili. Do poravnave pride, ko je

$$\frac{m}{n} = \frac{\omega_0 - \omega_2}{\omega_0 - \omega_1}.$$

K prejšnjemu primeru z Marsom in Zemljo priključimo še Venero z obhodnim časom 225 dni in dobimo razmerje $m/n = 1,75$ (zaokroženo na tri mesta). Do čisto natančne poravnave sicer ne pride nikoli več, a če se zadovoljimo s približno poravnavo vseh treh, se ta zgodi po štirih zaporednih poravnava Venere in Zemlje ter sedmih Venere in Marsa.



V drugem primeru so planeti poravnani na premici skozi Zemljo, tako kot kaže slika 3. Poravnane planete vidimo z Zemlje nanižane na majhnem koščku neba, tako kot na sliki 2. Temu astronomi pravijo **konjunkcija planetov**. Konjunkcije dveh planetov so lahko zelo pogoste, večih pa manj.



SLIKA 3.

Izrazimo koordinate posameznih planetov s polmerom njihove orbite in kotom zasuka od začetnega, poravnane položaja:

- $x_0 = r_0 \cos \omega_0 t, \quad y_0 = r_0 \sin \omega_0 t,$
- $x_1 = r_1 \cos \omega_1 t, \quad y_1 = r_1 \sin \omega_1 t,$
- $x_2 = r_2 \cos \omega_2 t, \quad y_2 = r_2 \sin \omega_2 t.$

Tri točke ležijo na premici, ko je naklon premice, ki jo določata točki 0 in 1, enak naklonu premice, ki jo določata točki 1 in 2. Do enakega pogoja pridemo tudi drugače. V splošnem te tri točke opišejo trikotnik. Do poravnave planetov pride, ko se trikotnik izrodi v premico. Ploščina trikotnika, določenega s tremi točkami je podana z absolutno vrednostjo determinante

$$p = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

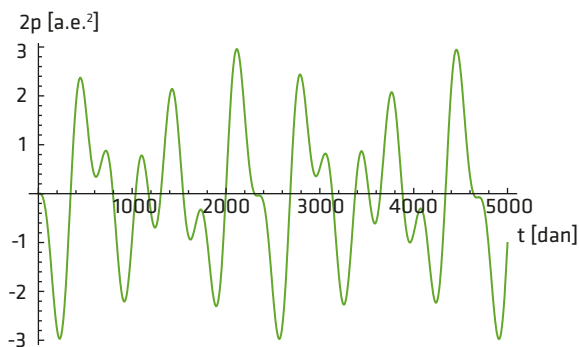
→ Zahteva, da je ploščina enaka nič, da enačbo:

$$(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = 0,$$

kar z nekaj računanja izrazimo

$$r_0 r_1 \sin((\omega_1 - \omega_0)t) + r_1 r_2 \sin((\omega_2 - \omega_1)t) + r_2 r_0 \sin((\omega_0 - \omega_2)t) = 0.$$

Časovni potek ploščine p lahko narišemo (slika 4). Funkcija ni natančno periodična, vendar se jasno vidi, da se poravnave dogajajo v nekem urejenem zaporedju. Prepoznamo periodo 6 let, vmes pa še sedem poravnav.

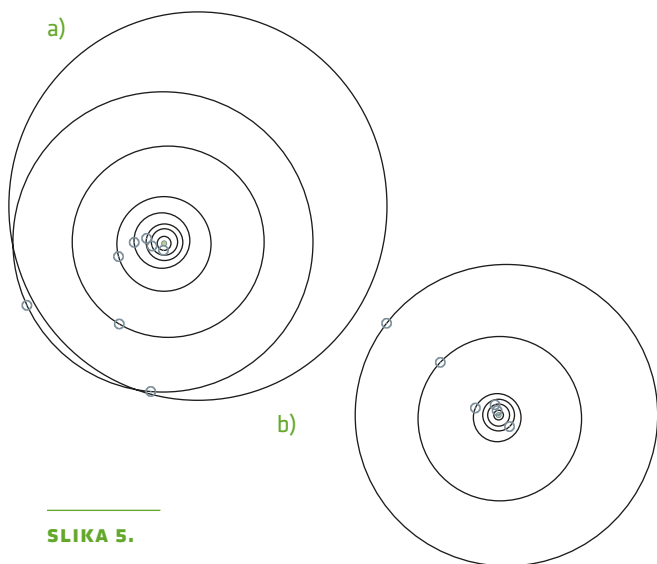


SLIKA 4.

Dejansko poravnava vzdolže ene premice ni možna, saj planeti krožijo po rahlo nagnjenih tirih in tudi njihovi obhodni časi se ne ujemajo na pravi način, zato o „poravnavi“ dostikrat govorimo že, če jih na nekem delu neba vidimo več naenkrat. Notranjih šest planetov Osončja se poravna približno enkrat na 50 do 100 let. Posebej imenitno je, kadar se poravna vseh osem planetov v Osončju. Vzdolž premice se poravnajo enkrat na nekaj sto milijonov let (tu Zemlje ne štejemo zraven), če pa naj bodo še vsi na isti strani Sonca, se to zgodi enkrat na 180 bilijonov ($= 1,8 \times 10^{14}$) let.

Razni miti napovedujejo ob poravnavi marsikaj, a poravnave nezainteresirani sploh ne opazijo. Plima bi se ob poravnavi vseh planetov povišala za dobrih 40 mikronov (manj kot „za las“). Če vas zanima kaj

več, si poguglajte pojem „syzygy“, ampak pazite se „podivjanih“ interpretacij in teorij zarote, ker so večinoma vse butaste. Precej blizu „poravnavi“ smo bili leta 1982, ko so se vsi planeti nahajali v istem kvadrantu (slika 5a) ali pa 5. maja 2000 (Uran in Neptun sta bila iz poravnave izvzeta, Zemlja pa je stala na drugi strani Sonca) – slika 5b.



SLIKA 5.

Zanimiva konjunkcija se je zgodila 1. decembra 2008, ko so Venera, Jupiter in Lunin krajec sestavili smekota na sliki 6.



avtor: Bencmq

SLIKA 6.

Teoretiki zarot vedo povedati, da so za december

2012 že Maji napovedali katastrofalno poravnavo (hm ...česa že?). Poravnave planetov takrat ne bo. To lahko preverite s spletnimi pomagali, ki prikažejo razpored planetov na določen datum. Najdete jih denimo na

<http://space.jpl.nasa.gov>

[http://vesolje.net/planetarij/.](http://vesolje.net/planetarij/)

Ker se takrat ne bo zgodilo nič spektakularnega, se nekateri paničarji zatekajo k še bolj čudnim dogodkom – decembra 2012 naj bi se Sonce poravnalo s središčem Galaksije ... Sonce je vedno poravnano s središčem galaksije, če je pri medsebojni legi dveh teles sploh smiselno govoriti o poravnavi.

xxx

2. državno tekmovanje iz znanja astronomije

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

Po lanskem uspešnem začetku z astronomskim tekmovanjem za šolarje višjih razredov osnovnih šol in srednješolce pod okriljem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, se bliža že novo tekmovanje. Letošnje šolsko tekmovanje bo 2. decembra, državno pa 18. decembra. Državno tekmovanje bo predvidoma na treh lokacijah po Sloveniji. Vse informacije na www.dmfa.si/Tekmovanja.html.

Na spletni strani mednarodnega leta astronomije www.astronomija2009.si poteka tudi neformalni forum za mentorje in tekmovalce.

Vabljeni!

xxx

Mehka logika, 1.del



DAMJAN STRNAD

→ Ob pregledovanju katalogov bele tehnike lahko med tehničnimi specifikacijami pogosto zasledimo podatek, da določen pralni ali pomivalni stroj deluje po principu *fuzzy logic*. Gre za angleški izraz, ki ga v slovenščino prevajamo z *mehka logika*. V tem prispevku bomo pojasnili, kaj se za omenjenim izrazom skriva.

Mehka logika je posplošitev klasične binarne logike, ki omogoča obdelavo negotovih, nepopolnih ali nejasnih informacij s pomočjo računalnika. V praktičnih aplikacijah se najpogosteje uporablja pri krmiljenju elektronskih naprav, kot so bela tehnika, semaforji, ogrevalna in hladilna telesa. Delovanje teh naprav je možno intuitivno opisati s pomočjo majhnega števila preprostih pravil, izraženih v naravnem jeziku. Ta pravila preslikajo parametre okolice, v katerih naprava deluje, v potreben način delovanja naprave. Tak konkreten primer bomo v nadaljevanju tudi opisali, a najprej nekaj teoretične podlage.

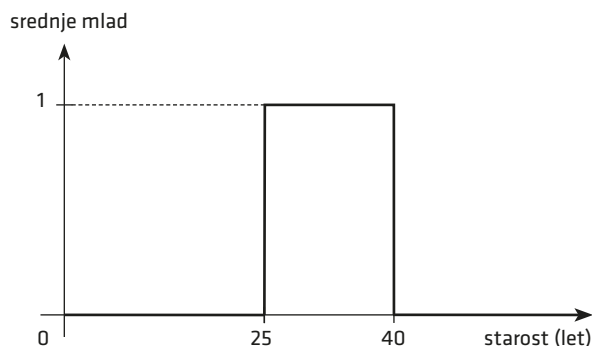
Osnova delovanja računalnikov je binarna in zato je naraven način obdelave podatkov v računalniku uporaba Boolove logike, ki pozna samo vrednosti resnično (*true*) in neresnično (*false*). Podajanje lastnosti in relacij med objekti iz realnega sveta v binarni obliki pa je zelo omejujoče. Vzemimo primer programa, ki iz podatkovne baze znanih prestopnikov izpisuje osebe, ki ustrezajo določenemu opisu. Opis, ki ga poda priča kriminalnega dogodka, sestoji iz tipičnih lastnosti osebe, kot so višina, starost in podobno. Omenjene lastnosti so v podatkovni bazi zapisane kot številski podatki, izpoved priče pa gotovo ne bo tako natančna. Bolj verjetno je, da bo priča osumljenca opisala kot „mlajšega, srednje visokega in nekoliko močnejšega moškega temnejših las“. Medtem ko takšen opis skoraj zadostuje, da si



Pristop s
klasičnimi
množicami in
binarno logiko
ima majhno
pomankljivost.
računalništvo

človek ustvari vizualno predstavo osebe, pa je za računalniško obdelavo v dani obliki neuporaben.

Jezikovni opis je torej potrebno pretvoriti v računalniku bolj primerno obliko. Posamezno značilnost osebe lahko iz njene številske vrednosti pretvorimo v binarno pripadnost določeni množici, npr. množici visokih ljudi, mladih ljudi. Pri tem se pojavi vprašanje, kje postaviti mejo med objekti, ki pripadajo množici, in tistimi, ki so izven nje. Lahko bi, recimo, rekli, da so srednje mladi ljudje tisti med vključno 25 in 40 letom starosti. Če pripadnost množici srednje mladih v odvisnosti od starosti opišemo v obliki grafa, potem opisano situacijo prikazuje slika 1. Na podlagi opisa osumljenca bi nato iz podatkovne baze izpisali tiste osebe, katerih številski parametri ustrezajo vsem omejitvam.


SLIKA 1.

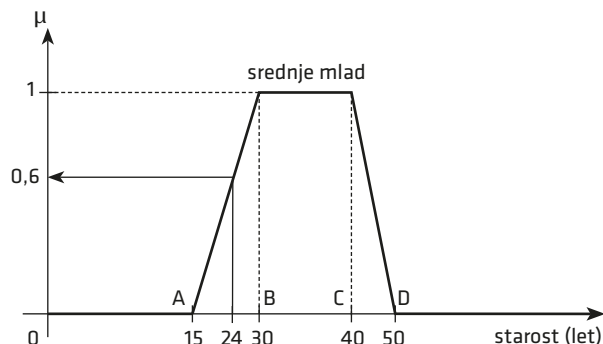
Graf pripadnosti množici srednje mladih v odvisnosti od starosti.

Pristop s klasičnimi množicami in binarno logiko ima vsaj dve veliki pomanjkljivosti. Prva je ta, da so jezikovni izrazi, kot je „srednje mlad“, šibko definirani in jih različni ljudje različno tolmačijo. Če bi 100 ljudi vprašali, ali je 35 letna oseba po njihovem mnenju srednje mlada, bi se jih morda 30 strinjalo, 70 pa ne. Druga slabost je v odsekanosti prehoda med elementi množice. Tako bi bila 25 letna oseba s stališča pripadnosti srednje mladim enakovredna 40 letni osebi, po drugi strani pa popolno nasprotje osebe s starostjo 24 let, čeprav je med njima le (realno neopazno) leto razlike.

Osnovna težava v opisanem primeru je uporaba nejasnih in ohlapno definiranih izrazov v naravnem jeziku za potrebe sklepanja. In vendar se znamo lju-

dje s tovrstnimi izrazi odlično sporazumevati in jih uporabiti na koristen način v postopkih sklepanja ter izpeljave zaključkov in potrebnih akcij. Odstopanja med subjektivnimi predstavami o tem, kakšen je „dokaj topel dan s povečano oblačnostjo in precej hladno morskovo vodo“ znamo učinkovito vključiti v sklep o tem, ali naj si pripravimo kopalno opremo. Za odločanje o slednjem verjetno ne bomo potrebovali računalnika, v praksi pa obstaja še veliko podobnih problemov sklepanja, pri katerih je pomoč računalnika dobrodošla, če ne celo nujna. Skupno tem problemom je, da je pravila sklepanja najlažje opisati v naravnem jeziku, zato potrebujemo ustrezno matematično orodje za njihovo formalno predstavitev v računalniku.

Povedali smo že, da lahko binarno vrednost določene lastnosti objekta obravnavamo kot pripadnost objekta ustrezni množici. Mehka logika temelji na pojmu *mehke množice*, ki je razširitev klasične množice z možnostjo vmesne stopnje pripadnosti objektov. Graf pripadnosti mehki množici ni več stopničasto odsekan, temveč ima zvezni prehod kot na sliki 2, ki prikazuje *pripadnostno funkcijo* za mehko množico srednje mladih ljudi. V našem primeru je ta funkcija trapezoidne oblike, ki je tudi v praksi najpogostejše uporabljana, zato se bomo v naši obravnavi omejili samo na njo.


SLIKA 2.

Graf pripadnosti množici srednje mladih.

Pripadnostna funkcija preslika številsko lastnost oziroma parameter x nekega objekta v pripadnost $\mu_M(x)$ določeni mehki množici M (npr. starost v letih se preslika v pripadnost množici srednje mladih





ljudi). Definijsko območje pripadnostne funkcije je omejeno glede na potrebe aplikacije (ko govorimo o starosti državljanov je smiseln razpon od 0 do 120 let, če pa imamo opravka z zaposlenimi osebami, je primernejša omejitev med 15 in 65 leti). Njena zaloga vrednosti je interval $[0, 1]$, kjer pripadnost 0 predstavlja popolno izključenost iz mehke množice, vrednost 1 popolno vključenost vanjo, vmesne vrednosti pa stopnje delne vključenosti. Pogled na sliko 2 nam pove, da oseb mlajših od 15 let ne obravnavamo kot srednje mlade (pač pa verjetno kot mlade), prav tako ne oseb, starejših od 50 let. Njihova pripadnost je zato enaka 0. Osebe med 30 in 40 letom starosti popolnoma ustrezajo opisu srednje mlade osebe, zato je njihova pripadnost enaka 1. Pripadnost med 15-im in 30-im letom starosti linearno narašča, med 40-im in 50-im pa linearno upada.

Kako bi določili pripadnost množici srednje mladih oseb za Janeza, ki je star 24 let? Če želimo na to vprašanje odgovoriti na splošno, najprej uvedimo naslednje oznake za robne vrednosti parametra x na grafu trapezoidne pripadnostne funkcije:

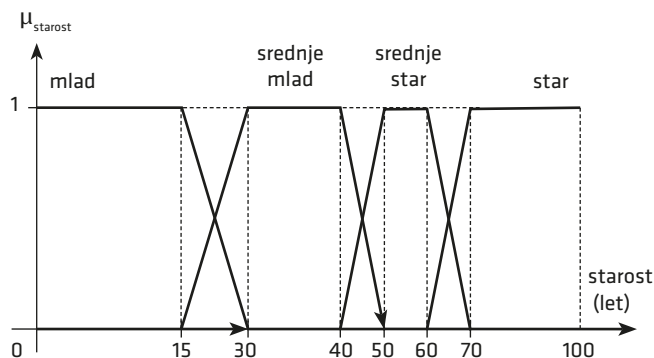
- A je vrednost, pri kateri začne pripadnost naraščati od 0 proti 1,
- B je vrednost, pri kateri pripadnost doseže vrednost 1,
- C je vrednost, pri kateri začne pripadnost upadati od 1 proti 0,
- D je vrednost, pri kateri pripadnost pade nazaj na 0.

Pripadnost mehki množici s trapezoidno pripadnostno funkcijo se v odvisnosti od vrednosti parametra x potem izračuna kot

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq A, \quad x \geq D \\ \frac{x-A}{B-A}, & A < x < B \\ 1, & B \leq x \leq C \\ \frac{D-x}{D-C}, & C < x < D. \end{cases}$$

Sedaj lahko izračunamo, da pripadnost srednje mladim pri $x = 24$ znaša 0,6. Janez je torej 0,6 srednje mlad, kar je možno odčitati tudi z grafa na sliki 2.

Na podoben način kot množico srednje mladih bi

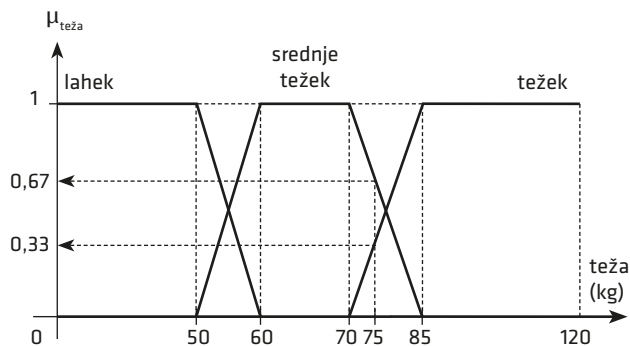


SLIKA 3.

Definicija mehke spremenljivke STAROST.

lahko definirali tudi mehke množice mladih, srednje starih in starih ljudi. Slika 3 prikazuje grafe vseh pripadnostnih funkcij, izrisanih na enem mestu. Skrajno levi in skrajno desni graf sta še vedno primera trapezoidnih pripadnostnih funkcij, pri katerih smo postavili $A = B$ oziroma $C = D$. Tretji poseben primer bi bil $B = C$, ki predstavlja trikotno obliko pripadnostne funkcije. S slike je razvidno tudi, da se pripadnosti sosednjim mehkim množicam prekrivajo. To pomeni, da lahko določena oseba pripada več mehkim množicam iste domene (npr. starostni razredi) hkrati. Prej omenjeni 24 letni Janez je tako 0,4 mlad in 0,6 srednje mlad (ter 0 srednje star oziroma star). Če je oblika prekrivanja simetrična (t.j. za sosednji mehki množici M in N velja $C_M = A_N$ in $D_M = B_N$), potem je vsota pripadnosti vsem mehkim množicam določene domene enaka 1, kar je pogosto zaželeno.

Slika 3 je primer definicije *lingvistične* ali *mehke spremenljivke*, ki je osnovni element mehke logike. Lingvistična spremenljivka je spremenljivka, katere vrednosti (imenovane *mehke vrednosti*) so izrazi v naravnem jeziku. Na sliki 3 je, denimo, opisana spremenljivka *starost*, katere vrednosti so *mlad*, *srednje_mlad*, *srednje_star* in *star*. Posamezna mehka vrednost se preslika v pripadnost eni mehki množici, mehka spremenljivka pa vključuje pripadnost vsem mehkim množicam za ustrezno lastnost objekta. Slika 4 tako prikazuje zgled definicije druge mehke spremenljivke *teža*, ki težo v kilogramih preslika v pripadnosti lahkim, srednje težkim in težkim ljudem. S slike je razvidno tudi, zakaj po tej defini-



SLIKA 4.
Definicija mehke spremenljivke TEŽA.

ciji Janeza s težo 75 kg opišemo kot 0 lahkega, 0,67 srednje težkega in 0,33 težkega.

Naslednji korak pri uvajanju mehke logike je definicija logičnih operacij, ki omogočijo odgovore na naslednja vprašanja: Koliko Janez *ni* mlad? Koliko je mlad *ali* težek? In koliko je srednje mlad *in* lahek? Logične operacije, ki smo jih uporabili v teh vprašanjih, so negacija, disjunkcija (logični ali) in konjunkcija (logični in). Pri množicah temu ustrezajo komplement, unija in presek množic. Pripadnost komplementu je še najlažje izračunati, saj velja

$$\mu_{\overline{M}}(x) = 1 - \mu_M(x).$$

Če je Janez 0,4 mlad, potem ni mlad v obsegu $1 - 0,4 = 0,6$.

V mehki logiki je več možnosti, kako izračunati pripadnost objekta kombinaciji mehkih množic, če poznamo pripadnosti posameznim množicam. Med bolj preprostimi in pogosto uporabljanimi sta uporaba minimuma in maksimuma pripadnosti po naslednjih pravilih:

$$\mu_{M \cup N}(x) = \max\{\mu_M(x); \mu_N(x)\}$$

$$\mu_{M \cap N}(x) = \min\{\mu_M(x); \mu_N(x)\}.$$

Za Janeza lahko sedaj izpeljemo, da je

$$\max\{0,4; 0,33\} = 0,4$$

mlad ali težek ter

$$\min\{0,6; 0\} = 0$$

srednje mlad in lahek. S kombinacijami teh operacij lahko celo ugotovimo, da Janez pripada tistim, ki niso srednje težki, ali pa so težki in mladi, v obsegu

$$\max\{1 - 0,67; \min\{0,33; 0,4\}\} = 0,33.$$

Z opisom logičnih operacij nad pripadnostmi mehkim množicam zaključujemo prvi del članka. V tem delu smo uvedli pojem mehke spremenljivke, ki v mehki logiki služi za opisovanje lastnosti objektov iz realnega sveta. Vrednosti mehke spremenljivke so izrazi v naravnem jeziku, ki za posamezen objekt določajo njegovo pripadnost ustrezni mehki množici. Pripadnosti različnim množicam lahko kombiniramo s pomočjo logičnih operacij, to pa je predpogoj za izvedbo pravil mehkega sklepanja. V drugem delu članka bo sledil opis podajanja in vrednotenja mehkih pravil ter zaokrožitev vseh elementov mehke logike v avtomatski sistem sklepanja.

XXX

REŠITEV BARVNEGA SUDOKUJA

↓↓↓

7	3	6	5	1	2	4	8
2	4	1	8	3	5	6	7
3	5	8	1	4	6	7	2
6	2	4	7	8	1	3	5
4	6	7	2	8	7	1	3
8	1	5	3	6	5	4	2
5	7	3	6	2	4	8	1
1	8	2	4	7	3	5	6

XXX

www.dmfa-zaloznistvo.si

XXX



CIRIL DOMINKO

41. mednarodna fizikalna olimpijada v Zagrebu, Hrvaška

→ Olimpijada je potekala med 17. in 25. julijem 2010 v Zagrebu, Hrvaška. Sodelovalo je 367 tekmovalcev iz 82-ih držav. Naši tekmovalci so osvojili **eno srebrno medaljo, dve bronasti in dve pohvali**.

Slovenijo so na olimpijadi zastopali: Filip Kozarski, Pavel Kos in Peter Koželj z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Mitja Zidar s SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica in Marin Ferara s ŠC Celje, Gimnazija Lava. Izbrani so bili na izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo, na katerega so se uvrstili preko regijskega in državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike. Tako kot v prejšnjih letih je vse stopnje tekmovanja tudi v šolskem letu 2009/10 organiziralo in izvedlo *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije)*.

Od naših tekmovalcev je srebrno medaljo osvojil **Filip Kozarski**, bronasti **Marin Ferara** in **Pavel Kos**, pohvali pa **Peter Koželj** in **Mitja Zidar**. Neuradna primerjava doseženega števila in vrste medalj ter pohval po sodelujočih državah (države ne tekmujejo ekipno) nas uvršča na delitev 33. do 36. mesta.

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sva bila dr. Jurij Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani* in mag. Ciril Dominko, *DMFA Slovenije*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *DMFA Slovenije* in



SLIKA.

Slovenska olimpijska ekipa po svečani podelitvi priznanj. Z leve proti desni: Jurij Bajc (vodja), Peter Koželj (pohvala), Filip Kozarski (srebrna medalja), Pavel Kos (bronasta medalja), Mitja Zidar (pohvala), Marin Ferara (bronasta medalja) in Ciril Dominko (vodja).

Ministrstvo za šolstvo in šport.

Naslednja, 42. mednarodna fizikalna olimpijada, bo od 10. do 18. julija 2011 v Bankoku na Tajskem.

XXX

Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 2,17 EUR, za vse ostale pa 2,71 EUR.

Izkoristite dodatni popust pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti



Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR

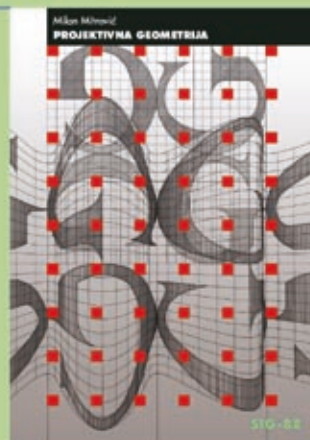


Milan Mitrović:

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

158 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

Nekaj matematičnih
zamisli

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.