



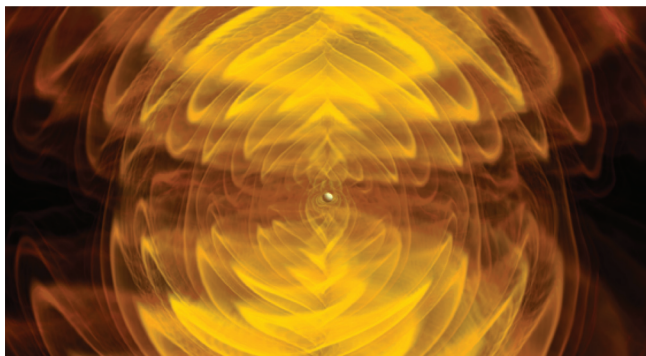
PRESEK



- PLAVAJOČA NITKA
- KONSTRUKCIJE TRIKOTNIKOV
- VRTLJIVA ZVEZDNA KARTA
- NAGRADNA KRIŽANKA



Vrtenje v neskončnosti



→ Trki črnih lukenj proizvajajo najmočnejše gravitacijske valove po velikem puku in tako ponujajo edinstveno možnost za preverjanje teorije splošne relativnosti. Toda do nedavnega nihče ni vedel, kakšni so ti valovi, saj jih še nihče ni uspel odkriti. Velik računski preboj, ki združuje neevklidsko geometrijo in diferencialne enačbe, pa je uspel simulirati trke in odkriti vzorce valov. To zlivanje matematike s superračunalniki, ki sicer ni tako impresivno kot tisto s črnimi luknjami, bo imelo pomembne posledice na astrofiziko, in sicer bodisi s potrditvijo splošne teorije relativnosti bodisi z napeljevanjem k novim teorijam.

Novi modeli, ki zmorejo obdelati različne spine in mase črnih lukenj, razdelijo proces trka v tri faze. V prvi in v zaključni fazi model reši enačbe splošne relativnosti in opravi integracije na analitičen način. V srednji fazi, ko so črne luknje med seboj oddaljene za nekaj polmerov, pa jih reši numerično. S pomočjo spremembe koordinat rešitve postanejo dopustne in povezujejo število podatkovnih točk s pomembnostjo območja. Eno izmed odkritij teh najnovejših simulacij je, da so nekateri trki dovolj močni, da vržejo črne luknje izven galaksije.



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 37, šolsko leto 2009/2010, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2009/2010 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Ines Kristan

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

© 2010 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1779

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Vrtenje v neskončnosti

MATEMATIKA

- 4-9** Konstrukcije trikotnikov z danimi tremi podatki

(Martina Trost in Bojan Hvala)

- 10** Vsota treh kubov – Bistrovidec

(Marko Razpet)

FIZIKA

- 10-12** Plavajoča nitka

(Andrej Likar)

- 13-15** Koliko toplote? Kako jo izračunati? – Poizkuševalnica za pravega fizika – odgovor naloge

(Mojca Čepič in Ana Gostinčar Blagotinšek)

- 18** Kako plavajo? – Poizkuševalnica v kuhinji

(Mojca Čepič)

- 19** Razmisli in poskusi

(Mitja Rosina)

ASTRONOMIJA

- 20-21** Vrtljiva zvezdna karta

(Stanka Kočar)

RAČUNALNIŠTVO

- 24-30** Obdelava meritev in risanje grafov z R

(Primož Peterlin)

RAZVEDRILO

- 16-17** Nagradna križanka

(Marko Bokalič)

- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 37/4

(Marko Bokalič)

- 15, 21** Barvni sudoku

- 30** Futošiki

TEKMOVANJA

- 22-23** Prvo državno tekmovanje iz znanja astronomije

(Andrej Guštin)

- priloga** 1. tekmovanje iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – šolsko tekmovanje

- priloga** 1. tekmovanje iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) – šolsko tekmovanje

- priloga** 1. tekmovanje iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – državno tekmovanje

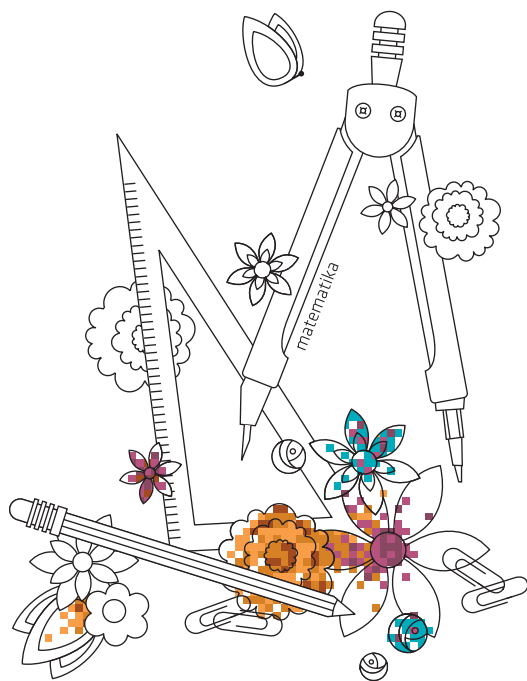
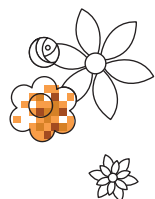
- priloga** 1. tekmovanje iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) – državno tekmovanje

- priloga** 30. mednarodno matematično tekmovanje mest – jesenski krog 2008/09

(Gregor Cigler)

SLIKA NA NASLOVNICI: Glej stran 31 (Foto: MART 2009/UAD/ADO).

Konstrukcije trikotnikov z danimi tremi podatki



MARTINA TROST IN BOJAN HVALA

→ Pomemben del elementarne geometrije je posvečen konstrukcijskim nalogam. To so naloge, kjer moramo z uporabo določenih geometrijskih orodij na podlagi določenih vhodnih podatkov narisati zahtevani objekt.

Na primer: konstruiraj trikotnik s podatki $a = 5$ cm, $\beta = 35^\circ$, $v_a = 3$ cm. Objekt, ki ga želimo narisati, je trikotnik, podane imamo tri podatke, konstrukcijo pa izvajamo s šestilom in ravnilom.

V literaturi najdemo tudi obravnavo konstrukcij z drugačnim naborom orodij. Včasih se, recimo, omejimo samo na uporabo ravnila ali pa samo šestila; včasih namesto šestila uporabljamo t.i. *zarjavelo šestilo*, s katerim lahko narišemo le krog točno določenega radija. Obstaja tudi bogata teorija konstrukcij s prepogibanjem papirja. Vse to so posplošitve osnovne ideje, ko konstrukcije izvajamo z ravnilom in šestilom. Zato velja dogovor, da če ni drugače poudarjeno, pri konstrukcijskih nalogah predvidevamo uporabo ravnila in šestila.

Glede vhodnih podatkov imamo dve glavni možnosti: bodisi izvajamo konstrukcijo na podlagi nabora številskih podatkov, bodisi na podlagi podanih elementov (točk, premic, krožnic) v ravnini. V našem članku bomo obravnavali prvo možnost. Konstrukcijskim nalogam, kjer pri podanih treh značilnih točkah trikotnika želimo konstruirati oglišča tega trikotnika, se bomo posvetili kdaj kasneje.

Pri zgoraj omenjenem problemu konstrukcije trikotnika s podatki $a = 5$ cm, $\beta = 35^\circ$, $v_a = 3$ cm bi

se utegnili pojaviti vprašanje, ali je potrebno tudi vhodne podatke, v našem primeru kot, konstruirati s šestilom in ravnilom. Izkaže se, da kota 35° na ta način ni mogoče konstruirati. Podobno bi se lahko pojavilo vprašanje konstrukcije dolžinskih podatkov pri dani enoti. Da bi se izognili tovrstnim dilemam, si lahko mislimo, da so vhodni podatki podani geometrijsko. Dejstvo, da imamo podan kot, pomeni, da imamo v ravnini narisani kot, ki ga lahko s pomočjo šestila in krožnih lokov prenesemo drugam (in ga potemtakem ni potrebno šele konstruirati). Dejstvo, da imamo podano dolžino določene daljice, pa pomeni, da imamo v ravnini narisano daljico, katere dolžino lahko vzamemo v šestilo in jo tako prenašamo. Izhodišče za rešitev zgornje konstrukcijske naloge sta torej narisani kot β in dve daljici, ki sporočata velikost stranice a in višine v_a . Od tu naprej si lahko pomagamo le s šestilom in ravnilom.

Objekt, ki ga želimo konstruirati, je trikotnik. Glede na to, da obravnavamo sorazmerno preprosto vprašanje, konstrukcijo trikotnikov pri danih treh podatkih, je pravo presenečenje, da v svetovni strokovni literaturi ni veliko celovitih prikazov te problematike. Avtorjema tako na primer ni znana nobena celovita obravnava te tematike v angleškem jeziku. Še najbližje temu je članek [1], ki pa ne vsebuje vseh podatkov: mnoga znana dejstva so tam navedena kot odprta vprašanja. Obstajajo pa celovita dela v ruščini [5, 6] in portugalsčini [7], ki so bila osnova za pripravo tega članka.

V Sloveniji se s to tematiko najbolj intenzivno ukvarja prof. Dušan Modic. Pred leti je objavil članek [2], knjiga [3] pa je izšla pred kratkim in bo natančneje predstavljena v eni prihodnjih številčk Preseka.

Cilj tega prispevka je torej predstaviti globalno sliko stanja, nato pa se posvetiti nekaterim konkretnim konstrukcijskim nalogam.

Najprej bomo izbrali množico podatkov, iz katerih bomo izbirali tri vhodne podatke konstrukcijske naloge. Nato bomo sistematično nanizali vse možne trojice podatkov in dobili vse smiselne konstrukcijske naloge. Nazadnje se bomo posvetili statusu konstrukcijske naloge, to je odgovoru na vprašanje, ali je trikotnik pri danih podatkih možno narisati s šestilom in ravnilom ali ne.

Seznam trikotniških konstrukcij

Seznam trikotniških konstrukcij naredimo na pod-

lagi izbora trojice podatkov iz množice podatkov v trikotniku. Odločimo se za množico

- $\{\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c, s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, r, R\}$,

pri čemer so:

- α, β, γ – koti trikotnika,
- a, b, c – stranice trikotnika,
- v_a, v_b, v_c – višine trikotnika,
- t_a, t_b, t_c – dolžine težiščnic trikotnika,
- $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ – dolžine delov simetral notranjih kotov znotraj trikotnika,
- r, R – polmera včrtane in očrtane krožnice.

Izbor ravno teh podatkov je naša lastna izbira. V nekaterih člankih v literaturi se pojavlja še več podatkov, navedenim so, recimo, dodani polovica obsega s in pa polmeri r_a, r_b, r_c trikotniku pričrtanih krogov. Spet v drugih člankih pa je podatkov manj, nekje so se odpovedali dolžinam simetral kotov znotraj trikotnika ali pa obema polmeroma.

Za našo obravnavo torej izbiramo tri podatke iz množice 17-ih podatkov. Možnih izbir je $\binom{17}{3} = 680$. To pa še ne pomeni, da imamo toliko bistveno različnih konstrukcijskih nalog. Nekateri različni trojice nam namreč dajo povsem analogne konstrukcijske naloge. Tako gre pri trojicah $\{\beta, a, c\}$, $\{\gamma, a, b\}$ in $\{\alpha, b, c\}$ za isto konstrukcijsko nalogo, kjer sta dani dve stranici in vmesni kot. Ko iz množice 680 konstrukcij izločimo simetrične ponovitve, dobimo skrčen seznam 150 bistveno različnih konstrukcijskih problemov. Vsak je definiran z neko trojico podatkov. Vseh 150 konstrukcijskih problemov je naštetih v tabeli 1. Začnemo s tremi koti, torej tremi podatki iz prve alineje seznama 17-ih nastopajočih podatkov zgoraj. Nadaljujemo z dvema kotoma in še enim podatkom, ki ga izbiramo najprej iz množice v drugi alineji, potem tretji alineji in tako sistematično naprej.

Klasifikacija konstrukcij

Konstrukcijske probleme lahko glede na možnost konstrukcije z ravnilom in šestilom razdelimo v tri skupine.

PROBLEMI Z ODVEČNIM PODATKOM (O) so problemi, kjer dva podatka v trojici že določata tretjega. Primer



→ je trojica $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ treh kotov v trikotniku. Vemo, da morajo ti trije podatki zadoščati zvezi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Če imamo trojico, ki zvezi zadošča, je pri danih dveh kotih tretji že določen. V tem primeru konstrukcijski problem reši neskončno mnogo podobnih trikotnikov. Če podatki v trojici enakosti ne zadoščajo, potem rešitev konstrukcijskega problema ni.

Poleg te konstrukcijske naloge v to kategorijo spada še dve nalogi, ki ju najdemo v tabeli 1 pod številka 15 in 32.

REŠLJIVI PROBLEMI (R) so problemi, ki so izvedljivi z ravnilom in šestilom. Če trikotnik z danimi tremi podatki obstaja, ga lahko konstruiramo s šestilom in ravnilom. Skupno je v tej kategoriji 96 problemov.

NEREŠLJIVI PROBLEMI (N) so problemi, ki jih ne moremo izvesti samo s šestilom in ravnilom. Čeprav trikotnik z danimi tremi podatki obstaja, do njegovih oglišč v splošnem ne moremo priti le z uporabo šestila in ravnila. Primer takega problema je konstrukcija trikotnika pri podanih dveh stranicah in radiju včrtanega kroga. Skupaj je takih problemov 51.

V tabeli 1 je seznam vseh 150 konstrukcijskih nalog s pripisanim statusom. Dokaze, da vsak od primerov sodi v označeno skupino, lahko najdemo v člankih [4, 5, 6, 7]. Dokaz dejstva, da je konstrukcija mogoča, je seveda lažji od dokaza, da ni. V pozitivnem primeru namreč konstrukcijo enostavno opišemo. Pri dokazu dejstva, da konstrukcija ni mogoča, pa si pomagamo z algebro. S šestilom in ravnilom lahko namreč konstruiramo presečišča premic in krožnic, torej točke, katerih koordinati sta rešitev algebrskega sistema dveh enačb, od katerih je vsaka bodisi linearna bodisi kvadratna. Na podlagi tega je jasno, v kakšni odvisnosti od začetnih podatkov so v tem primeru lahko končni podatki trikotnika, npr. njegove stranice. Če na podlagi računov izpeljemo, da rešitev ni take oblike, iz tega lahko sklepamo, da konstrukcija s šestilom in ravnilom ni mogoča.



TABELA 1.
Seznam trikotniških konstrukcij



	konstrukcija	status
1.	α, β, γ	O
2.	α, β, a	R
3.	α, β, c	R
4.	α, β, v_a	R
5.	α, β, v_c	R
6.	α, β, t_a	R
7.	α, β, t_c	R
8.	α, β, s_α	R
9.	α, β, s_γ	R
10.	α, β, r	R
11.	α, β, R	R
12.	α, b, c	R
13.	β, b, c	R
14.	α, c, v_a	R
15.	α, c, v_b	O
16.	α, c, v_c	R
17.	γ, c, v_b	R
18.	γ, c, v_c	R
19.	α, c, t_a	R
20.	α, c, t_b	R
21.	α, c, t_c	R
22.	γ, c, v_a	R
23.	γ, c, t_c	R
24.	α, a, s_α	R
25.	α, c, s_α	R
26.	α, c, s_β	R
27.	α, c, s_γ	N
28.	γ, c, s_α	N
29.	α, c, r	R
30.	α, c, R	R
31.	γ, c, r	R
32.	γ, c, R	O
33.	α, v_a, v_c	R
34.	α, v_b, v_c	R
35.	α, v_a, t_a	R
36.	γ, v_a, t_a	R
37.	α, v_c, t_a	R
38.	γ, v_b, t_a	R
39.	γ, v_c, t_b	R
40.	α, v_a, s_α	R
41.	α, v_a, s_β	N
42.	γ, v_a, s_α	R
43.	α, v_b, s_γ	N
44.	α, v_c, s_α	R
45.	α, v_a, r	R
46.	α, v_a, R	R
47.	α, v_c, r	R
48.	α, v_c, R	R
49.	α, t_a, t_b	R
50.	γ, t_a, t_b	R



	konstrukcija	status		konstrukcija	status
51.	α, t_a, s_α	R	101.	c, t_c, r	N
52.	α, t_a, s_β	N	102.	c, t_c, R	R
53.	α, t_b, s_α	N	103.	c, s_α, s_β	N
54.	α, t_b, s_β	N	104.	c, s_α, s_γ	N
55.	α, t_b, s_γ	N	105.	α, s_α, r	N
56.	α, t_a, r	R	106.	α, s_α, R	R
57.	α, t_a, R	R	107.	a, s_β, r	N
58.	α, t_b, r	N	108.	a, s_β, R	N
59.	α, t_b, R	R	109.	c, r, R	R
60.	$\alpha, s_\alpha, s_\beta$	N	110.	v_a, v_b, v_c	R
61.	$\gamma, s_\alpha, s_\beta$	N	111.	v_b, v_c, t_a	R
62.	α, s_α, r	R	112.	v_a, v_c, t_c	R
63.	α, s_α, R	R	113.	v_a, v_b, s_α	N
64.	α, s_β, r	R	114.	v_a, v_b, s_γ	R
65.	α, s_β, R	N	115.	v_a, v_b, r	R
66.	α, r, R	R	116.	v_a, v_b, R	N
67.	a, b, c	R	117.	v_a, t_a, t_b	R
68.	b, c, v_a	R	118.	v_c, t_a, t_b	R
69.	b, c, v_c	R	119.	v_a, t_a, s_β	N
70.	b, c, t_a	R	120.	v_a, t_b, s_α	R
71.	b, c, t_c	R	121.	v_a, t_b, s_β	N
72.	b, c, s_α	R	122.	v_a, t_b, s_γ	N
73.	b, c, s_β	N	123.	v_c, t_c, s_γ	R
74.	b, c, r	N	124.	v_c, t_a, r	R
75.	b, c, R	R	125.	v_c, t_a, R	N
76.	b, v_a, v_c	R	126.	v_c, t_c, r	R
77.	b, v_b, v_c	R	127.	v_c, t_c, R	R
78.	c, v_a, t_a	R	128.	v_a, s_α, s_β	N
79.	c, v_a, t_c	R	129.	v_c, s_α, s_β	N
80.	c, v_b, t_a	R	130.	v_c, s_α, r	N
81.	c, v_c, t_c	R	131.	v_c, s_α, R	N
82.	c, v_c, t_a	R	132.	v_c, s_γ, r	R
83.	a, v_a, s_α	R	133.	v_c, s_γ, R	R
84.	c, v_a, s_α	R	134.	v_c, r, R	R
85.	a, v_b, s_α	N	135.	t_a, t_b, t_c	R
86.	c, v_b, s_α	R	136.	t_a, t_b, s_α	N
87.	c, v_c, s_α	N	137.	t_a, t_b, s_γ	N
88.	b, v_c, r	R	138.	t_a, t_b, r	N
89.	b, v_c, R	R	139.	t_a, t_b, R	N
90.	c, v_c, r	R	140.	t_a, s_α, s_β	N
91.	c, v_c, R	R	141.	t_c, s_α, s_β	N
92.	c, t_a, t_b	R	142.	t_a, s_α, r	N
93.	c, t_a, t_c	R	143.	t_a, s_α, R	R
94.	c, t_a, s_α	N	144.	t_a, s_β, r	N
95.	c, t_b, s_α	N	145.	t_a, s_β, R	N
96.	c, t_b, s_γ	N	146.	t_a, r, R	N
97.	c, t_c, s_α	N	147.	$s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$	N
98.	c, t_c, s_γ	R	148.	s_α, s_β, r	N
99.	c, t_a, r	N	149.	s_α, s_β, R	N
100.	c, t_a, R	R	150.	s_α, r, R	N

Potrebno matematično predznanje

Za izvedbo različnih konstrukcij kategorije R potrebujemo različno matematično predznanje. Za določene probleme zadošča znanje *osnovnošolske matematike*. Takih problemov je 29. To so problemi 2–9, 11–13, 16, 20, 21, 25, 26, 30, 34, 36, 38, 44, 48, 67, 69, 71, 75, 81, 91, 102.

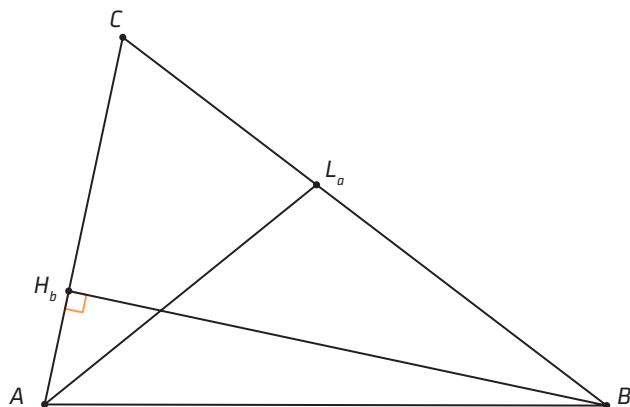
Sledijo srednje težki problemi, za katere je potrebno več znanja, ki sodi v *srednješolsko* snov. Sem spada 40 konstrukcij: 10, 14, 17–19, 23, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 42, 46, 47, 57, 62, 68, 70, 76–80, 82, 84, 86, 88, 89, 92, 93, 100, 111, 112, 117, 118, 127, 132, 135.

Preostali problemi so zahtevnejši in zahtevajo bodisi dodatno znanje elementarne geometrije bodisi zahtevnejše in izvirnejše pristope.

Tri konstrukcije za pokušino

V tem razdelku bomo predstavili tri konstrukcijske probleme. Prvega bomo ugnali neposredno, pri preostalih dveh pa bomo spoznali dve preprosti, a pogosto uporabljani ideji.

Konstrukcijski problem 86: konstruirajmo trikotnik s podatki c, v_b, s_α .

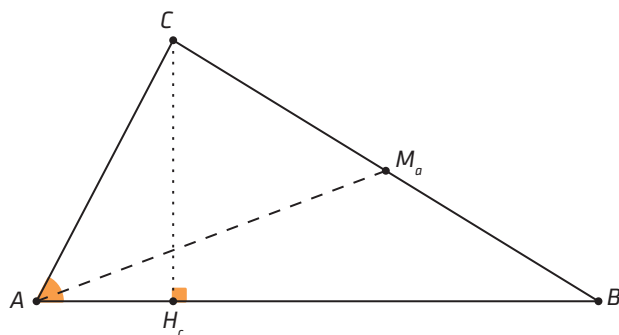


Nožišče višine na stranico b označimo s H_b , presečišče simetrale kota α s stranico a pa z L_a . Ali lahko na podlagi danih podatkov konstruiramo kak (pomožen) trikotnik na sliki? Lahko, konstruiramo lahko pravokotni trikotnik AH_bB . (Najprej narišemo višino na stranico b , v točki H_b potegnemo pravokotnico in s šestilom iz točke B odmerimo stranico c .) S tem dobimo kot α . Narišemo njegovo simetralo,



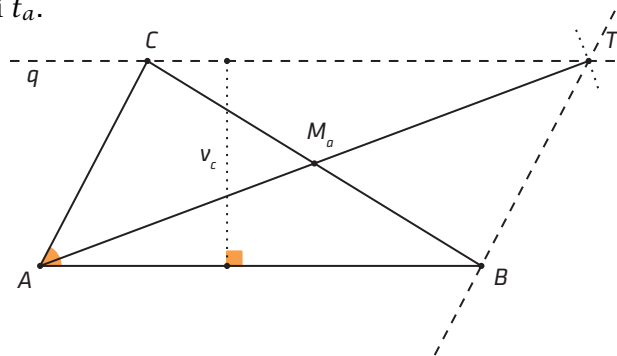
→ odmerimo s_α in dobimo točko L_a . Točka C je zdaj presečišče poltrakov AH_b in BL_a . S tem je trikotnik ABC konstruiran.

Konstruktivski problem 37: konstruirajmo trikotnik s podatki α, v_c, t_a .



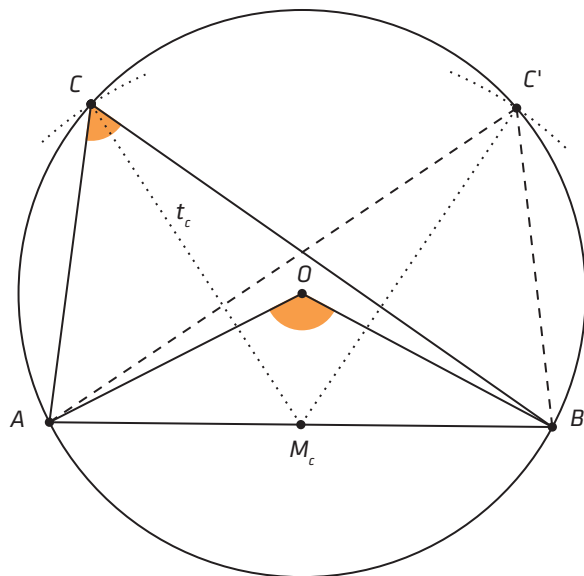
Razpolovišče stranice a označimo z M_a , nožišče višine na stranico c pa s H_c . Tokrat na podlagi kota α in višine v_c sicer lahko konstruiramo pomožni trikotnik AH_cC , vendar potem ni jasno, kako bi uporabili podatke o težiščnici.

V razmerah, ko imamo podano težiščnico, je včasih ugodno, če trikotnik z dvema vzporednicama dopolnimo do paralelograma. V konkretnem primeru trikotnik ABC dopolnimo do paralelograma $ABTC$. Ker se v paralelogramu diagonali razpolavljata, je diagonala AT paralelograma enaka dvakratni težiščnici t_a .



Konstrukcija je zdaj na dlani. Izberemo točko A in narišemo kot α . Nosilki daljice AB na oddaljenosti v_c narišemo vzporednico q in dobimo točko C . Iz točke A s šestilom odmerimo $2t_a$; kjer lok seka premico q , je točka T . Od tod zlahka pridemo do točke B ; bodisi s pomočjo vzporednice stranici AC skozi točko T bodisi s pomočjo razpolovišča M_a daljice AT .

Konstruktivski problem 23: konstruirajmo trikotnik s podatki γ, c, t_c .



V primerih, ko imamo podano stranico in nasprotni kot, si pogosto pomagamo z očitano krožnico trikotnika ABC . Središče te krožnice označimo z O . Kot γ je namreč obodni kot nad lokom AB , zato središčni kot nad istim lokom meri 2γ . Če je kot γ oster, je ABO enakokraki trikotnik s kotom 2γ ob vrhu. Preostala kota torej merita $90^\circ - \gamma$. Na ta način lahko narišemo trikotnik ABO , saj imamo dano stranico c in dva priležna kota. Tako dobimo trikotniku ABC očitano krožnico. Iz razpolovišča daljice AB odmerimo t_c in kjer ta seka očitano krožnico, je točka C . V splošnem dobimo dve rešitvi.

Če je kot γ top, je slika za spoznanje drugačna, postopamo pa zelo podobno.

Konstruktivski problemi in računalnik

V dobi visoke tehnologije je možno tudi konstrukcijske naloge elegantno izvajati z računalnikom. Za to nam je na voljo cela vrsta zmogljivih orodij za dinamično geometrijo, kot so GeoGebra, Riš, Cabri Geometre, Cinderella in drugi. O nekaterih možnostih teh programov je pisal tudi že Presek. Tako je bil v člankih D. Kobala [8] predstavljen program Riš. Prav ta program nam omogoča, da definiramo konstrukcijske naloge in v njih predvidimo možna konstruk-

cijska orodja. Če želimo izvajati konstrukcije samo z ravnilom, v programu dovolimo le uporabo opcije za risanje premice skozi dani dve točki. Če dovolimo tudi šestilo, dodamo možnost risanja krožnic s poljubnim središčem in polmerom, ki je enak razdalji med dvema danima točkama na sliki. Zarjavelo šestilo bi pomenilo možnost risanja krožnic z danim središčem in enim samim, vnaprej predpisanim polmerom. Dodaten čar teh programov je možnost, da ob pravilni konstrukciji dobimo povratno informacijo, da je naloga rešena.

Reševanje konstrukcijskih nalog z uporabo opisanih programov si lahko ogledate na spletni strani:

<http://matematika-racunalnistvo.fnm.uni-mb.si/konstrukcije/index.html>

kjer je avtorica tega prispevka pripravila nabor konstrukcijskih nalog, obravnavanih v tem članku. Še večji nabor konstrukcijskih problemov pa je možno preizkusiti (in se v seznam reševalcev vpisati) na spletni strani, ki jo ureja italijanski matematik Giovanni Artico:

<http://www.polarprof.org/geometriagon/start.asp?l=en&h=2>.

Še nekaj nalog za naše bralce

1. Pri konstrukcijskih problemih z odvečnim podatkom (O) so nastopajoči trije podatki povezani. V primeru konstrukcijskega problema 1 smo zvezo že zapisali in komentirali. Poiščite zvezi med tremi podatki tudi v primerih konstrukcijskih problemov 15 in 32.

2.-11. Opišite rešitev naslednjih konstrukcijskih problemov: 38, 48, 29, 76, 18, 127, 80, 100, 31 in 112. Problemi so nanizani (po subjektivnem občutku) od lažjih proti težjim.

Literatura

- [1] G. Berzsényi, *Constructing triangles from three given parts*, Quantum 4 (1993/94), 6, str. 30, 55.
- [2] D. Modic, *Seznam trikotniških konstrukcij*, Občni zbor DMFA Slovenije, 2003, str. 42–44.
- [3] D. Modic, *Trikotniki*, Math, Ljubljana, 2009.
- [4] O. Krötenheerdt, *Zur Theorie der Dreieckskon-*

struktion, Wiessenschaftliche Zeitschrift der Martin Luther-Univ., Halle-Wittenberg, 1966, str. 677–700.

- [5] V. B. Fursenko, *Leksikografičeskoe izloženie konstruktivnyh zadač geometrii treugolnika*, Matematika v škole, No. 5, Moskva, 1937, str. 4–30.
- [6] V. B. Fursenko, *Leksikografičeskoe izloženie konstruktivnyh zadač geometrii treugolnika*, Matematika v škole, No. 6, Moskva, 1937, str. 21–45.
- [7] L. Lopes, *Construções Geométricas de Triangulos*, delovna verzija knjige, dostopno na spletu: <http://blog.escolademestres.com/qedtexte> (pridobljeno februarja 2009)
- [8] D. Kobal, *Riš, Ravnilo in šestilo – Rišem in študiram 1–6*, Presek 35 (2007/08), Št. 1, str. 28–30, Št. 2, str. 28–29, Št. 3, str. 29–30, Št. 4, str. 29–30, Št. 5, str. 28–30 in Št. 6, str. 29–30.

× × ×

DODATEK K PRISPEVKU IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE

↓ ↓ ↓

UREDNIŠTVO

→ Bralci so nas opozorili, da je v prispevku *Tarok, verjetnost in upanje*, objavljenem v prejšnji številki Preseka, v razdelku *Brez taroka ni taroka* izračunana verjetnost, da vnaprej izbrani igralec ostane brez taroka.

Število ugodnih izidov (m), da vsaj eden od igralcev ne dobi taroka, izračunamo takole:

$$m = \binom{4}{1} \binom{32}{12} \binom{42}{12} \binom{30}{12} \binom{18}{12} \binom{6}{6} - \binom{4}{2} \binom{32}{12} \binom{20}{12} \binom{30}{12} \binom{18}{12} \binom{6}{6}.$$

Ustrezna verjetnost, $P = m/n \approx 0,00263$, je približno štirikrat večja od tiste, ki je bila izračunana v prispevku. Torej se na dolgi rok igra brez taroka v povprečju zgodi na eno od 380 iger.

Pri zgornjem izračunu smo upoštevali načelo vključitev in izključitev, pri čemer smo upoštevali, da več kot dva igralca ne moreta ostati brez tarokov. Binomska simbola $\binom{4}{1}$ in $\binom{4}{2}$ v izrazu poskrbita za izbiro igralcev brez tarokov.

× × ×

Vsota treh kubov

↓ ↓ ↓

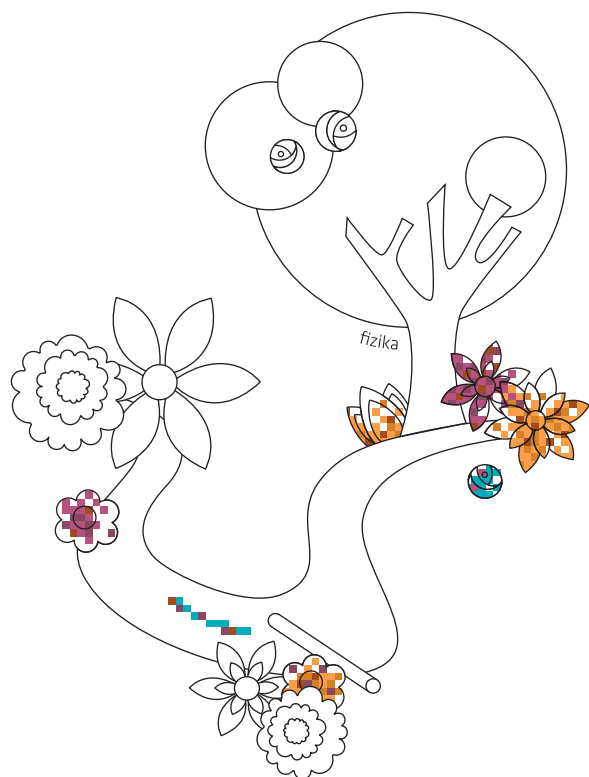
MARKO RAZPET

→ Znano je, da enačba $x^3 + y^3 = z^3$ ni rešljiva v naravnih številih (Fermatov zadnji izrek). Vsota dveh kubov torej nikoli ni kub.

Pač pa je vsota treh kubov lahko kub, se pravi, da je enačba $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ rešljiva v naravnih številih, in to na nešteto načinov.

DOKAŽI: če je $x = n^3 + 1$, $y = 2n^3 - 1$, $z = n^4 - 2n$ in $u = n^4 + n$, potem so za vsako naravno število $n \geq 2$ števila x, y, z in u tudi naravna in velja relacija $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$. Poišči nekaj številskih primerov.

× × ×



Plavajoča nitka

↓ ↓ ↓

ANDREJ LIKAR

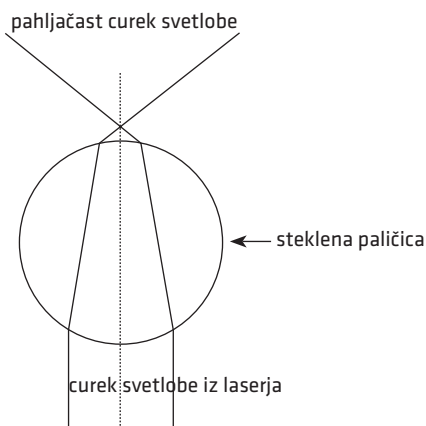
→ Pred več kot sedemdesetimi leti (leta 1936) je W. Schmidt v reviji Nature opozoril na nenavaden pojav na vodni gladini. Ko preko gladine počasi tekočega potoka položimo tenko palico, nekaj decimetrov pred njo opazimo droben dvig gladine. Imamo vtis, da poprek na gladini plava drobna nitka ali las (glej sliko 1). Opazimo jo v odbiti svetlobi, v globoki vodi pa se vidi svetla proga na ravnem dnu, ko se svetloba ob nitki lomi na prehodu iz zraka v vodo.

Na članek dolgo ni bilo odziva. Potem je v tej isti reviji leta 1947 profesor Ivan Kuščer, dolgoletni učitelj na sedanjem Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani, postregel z razlago tega pojava. Opazil je, da se zelo drobni delci, ki plavajo na gladini, takoj za nitko hipoma ustavijo. Površina od ovire do nitke torej miruje. Droben dvig vode na meji med gibajočo se in mirujočo gladino je torej posledica zastojnega tlaka, ki se pojavi vedno, ko se tok gibajoče tekočine na danem mestu nenadoma ustavi. Na gladini potoka namreč plava množica zelo majhnih delcev, ki jim z oviro preprečimo nadaljnjo pot. Naberejo se pred oviro in tako ustavijo tanko plast tekočine ob gladini. Nitko najprej opazimo tik ob oviri, potem pa nekaj časa potuje navzgor in se umiri. Voda pod to plastjo skoraj nemoteno teče in zaradi viskoznosti vleče mirujočo gladino za seboj. Spreminjanje površinske napetosti na gladini med oviro in nitko obdrži delce v mirovanju. Če na gladino kapnemo detergent, ki zmanjša površinsko napetost, se nitka takoj preseli tudi kak meter po toku navzgor. Profesor Kuščer je razlago podkrepil z računi, ki pa jim na tem mestu ne kaže slediti.

Ko smo ob potoku, je vredno pokazati pojav še komu. Droben dvig gladine opazimo v svetlobi, ki se odbije od vodne gladine. Nepravilnost pri odboju lepo zaznamo le, če opazujemo zrcalno sliko sonca,

**SLIKA 1.**

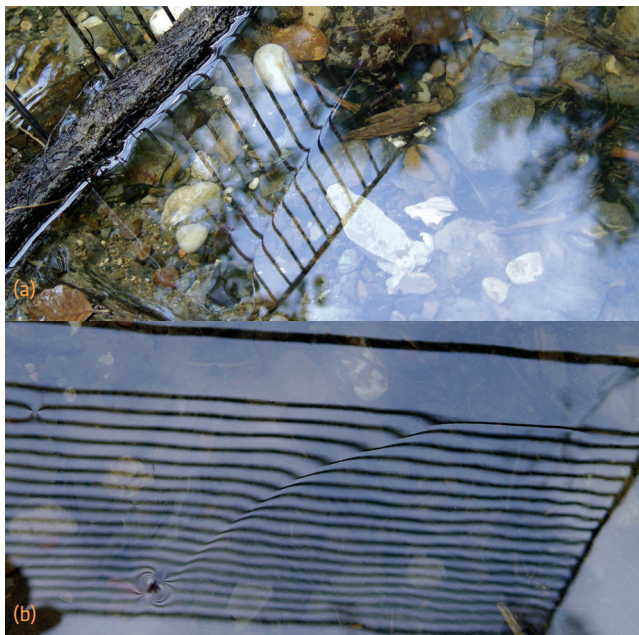
Takole opazimo plavajočo nitko na vodni gladini, ki smo jo pregradili s paličo. Voda teče od desne proti levi, pregrada je na levi strani slike.

**SLIKA 3.**

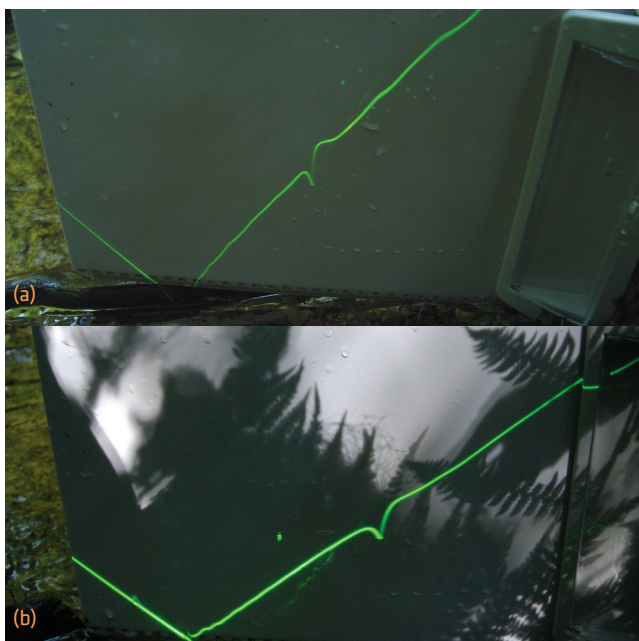
Laserski curek iz kazalnika z okroglo stekleno paličico razpršimo v pahljačast curek, ki na steno nariše tanko ravno črto.

grmovja ali drevja. Odsev vrste navpičnih palic nitko še posebno lepo poudari (glej sliko 2a). Tudi vodoravno postavljene palice močno poudarijo nitko (glej sliko 2b).

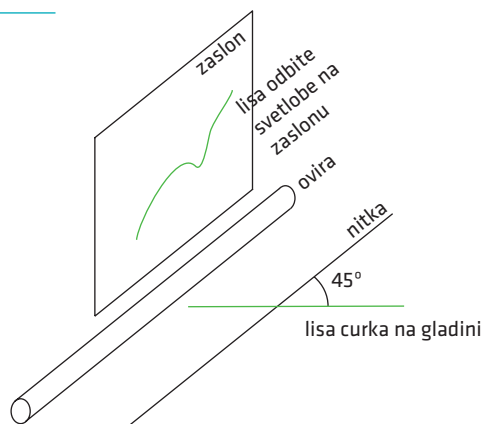
Zanimiva naloga je izmeriti profil nitke. Gladino smo preiskali s svetlobo iz laserskega kazalnika z zeleno svetlobo (50 mW), ki ga navadno uporabljajo učitelji astronomije, ker z njim lepo pokažejo ozvezdja. Na okrogli paličici smo svetlobo razpršili v pahljačast curek (glej sliko 3). Tak curek usmerimo na gladino preko nitke. Svetlobo, odbito od gladine, ujamemo na zaslon, ta pa na njem nariše značilno krivuljo (glej sliko 4). Povsem ravna gladina bi odbila curek tako, da bi zarisal na zaslonu ravno črto. Iz odklonov lahko preprosto določimo nagib gladine v dani točki. Poznati moramo le vpadni kot svetlobe, ki

**SLIKA 2.**

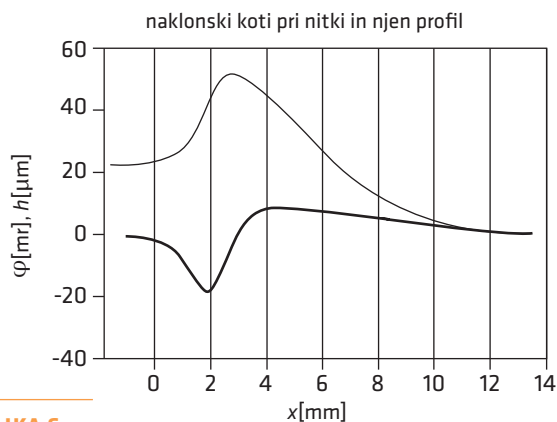
Plavajočo nitko lepo poudarimo, če na gladini opazujemo zrcalno sliko navpičnih (a) ali vodoravnih vzporednih palic (b).

**SLIKA 4.**

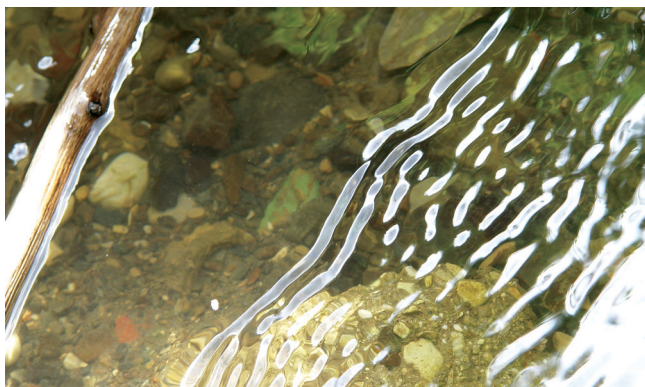
Značilna krivulja na zaslonu, iz katere določimo nagib gladine v bližini nitke (a). Na sliki (b) je bila gladina mirnejša.



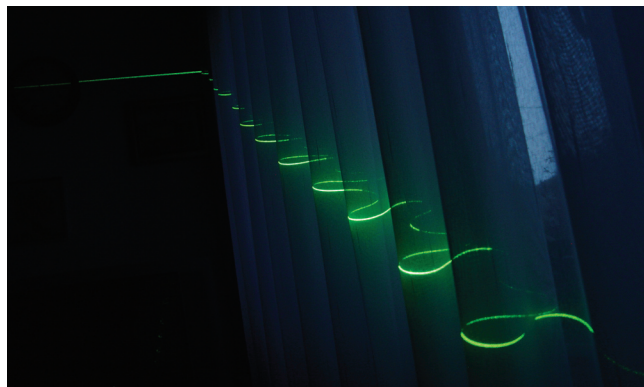
SLIKA 5.
Razpršeni curek usmerimo preko nitke.



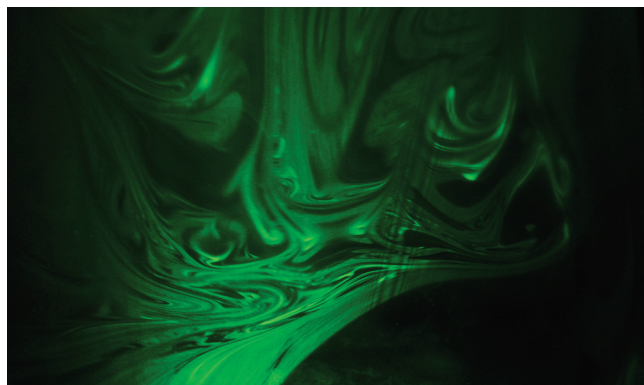
SLIKA 6.
Nagib gladine preko nitke in njen profil, ki smo ga določili iz enega od posnetkov. Ker je gladina rahlo vzvalovana, se višina gladin na obeh krajiščih nitke ne ujema. Hitrost vode je $1,3\text{ms}^{-1}$, potok pa teče od desne proti levi.



SLIKA 7.
Nitko pri hitrem toku vidimo kot mejo med vzvalovanim in mirnim delom gladine.



SLIKA 8.
S pahljačastim curkom lahko opazujemo neravne površine, kot so zavese.



SLIKA 9.
V pahljačastem curku se lepo pokaže turbulentno gibanje dima.

je bil pri nas okrog 45° , oddaljenost zaslona od nitke (25 cm), oddaljenost steklene paličice od nitke in kot, pod katerim curek seka nitko, pri nas 45° (glej sliko 5). Iz tako določenih nagibov gladine ni težko priti do profila nitke (glej sliko 6). Slednji se kar dobro ujema z izračunanim, ki ga najdemo v *Enajsti šoli fizike* profesorja Kuščerja (Presek IX (5), 1981/82). Čeprav so nagibi gladine zelo majhni (nekaj stotink radiana), nitko kljub temu brez težav opazimo, ker je na razdaljah kakega metra, od koder vodno gladno navadno opazujemo, odklon žarkov zaradi nitke kar velik. Nitko vidimo nekoliko drugače pri hitrem toku (slika 7). Gladina je vzvalovana le pred nitko.

Pahljačast curek laserske svetlobe je sam zase zanimiva igračka. Na sliki 8 smo posneli liso, ki jo tak curek nariše na zavese, na sliki 9 pa je prikazano turbulentno gibanje dima. ✕✕✕

Koliko toplote? Kako jo izračunati?

ODGOVOR NALOGE

↓↓↓

MOJCA ČEPIČ IN ANA GOSTINČAR BLAGOTINŠEK

→ Kot smo omenili že zadnjič, fiziki nismo najbolj zadovoljni samo z ostrim očesom in dobro sposobnostjo opazovanja. Zelo radi tudi odhitimo po pripomočke, s katerimi nekatere lastnosti pri opazovanem pojavu izmerimo.

Pri opazovanju pojavov v naravi se pogosto zgodi, da pripomočkov nimamo pri roki, pojav je tak, da ga ne moremo ponoviti v „umetnih“ okoliščinah in pogosto smo prisiljeni čakati na naključje, ki bo omogočilo ponovno opazovanje pojava in morda izvesti katero od meritev.

Letošnja zima nam je postregla s kupi snega in poskusov s snegom smo si lahko privoščili kar nekaj. Sedaj, ko to piševa, se zima končuje, pobira še zadnji sneg, a kar nekaj idej je še ostalo za opazovanja in merjenja v prihodnji zimi, če bo snežena.

Ker pa smo se pri našem opazovanju tokrat izjemoma lotili tudi meritev in predlagali bralcem, da iz posredovanih podatkov nekaj tudi sami izračunajo, ponujava tokrat odgovor, kaj se je dalo izračunati, hkrati pa dodajava še nekaj novih meritev, ki dodatno osvetljujejo opažanja.

Zaradi nazornosti ponovno objavljamo fotografijo pokrovčkov, ki so potonili v sneg. Vprašanje se je glasilo: *Koliko toplote je prejel sneg pod pokrovčki?*

Najprej se posvetimo razmisleku, ki ga ob zanj zanimivem problemu običajno naredi fizik. Fizik ne bo razmišljal takoj o tem, koliko toplote je prejel sneg, temveč o tem, kaj se je podnevi sploh dogajalo in zakaj smo zvečer videli, kar smo videli (slika 1). Kakšna je zgodba? Za zgodbo potrebujemo mnogo besed,



SLIKA 1.

Koliko so potonili pokrovčki zaradi ogrevanja s soncem?

včasih tudi grafov in tabel. Kasneje fizik pretvori zgodbo v enačbe, ki omogočijo račune in primerjave z meritvami, ali pa iz meritev, kot smo omenili zadnjič, povzame neznane podatke. Enačbe za fizika pogosto pomenijo tudi zgodbo zapisano v nekaj vrsticah. Zagotovo pa je vedno pomembno, da znamo vsebino enačb povedati tudi tistim, ki jim „enačbščina“ ni najljubši od jezikov sporazumevanja.

Kakšna je bila torej zgodba? Sonce je čez dan sijalo na sneg in na pokrovčke. Iz slike 1 lahko sklepamo, da se je pod nekaterimi pokrovčki sneg bolj talil kot pod drugimi in bolj kot sneg tam, kjer ni bil pokrit. Voda, ki je nastala iz staljenega snega, je verjetno stekla v prostore med zrni snega in pokrovček se je zato pogrezal v sneg. Zato, da se je sneg stalil, je moral prejeti določeno količino toplote in sicer več toplote je prejel tisti, pod katerim se je stalilo več snega. Zdi se, da je najpomembnejša razlika med površino nepokritega snega in pokrovčki barva. Vsekakor pa je barva edina razlika med pokrovčki samimi. Očitno je sneg pod črnim pokrovčkom prejel več toplote kot sneg pod belim. Pomembno je torej bilo, koliko svetlobe je pokrovček vpiljal, se zaradi tega nekoliko segrel in toplotni tok je tekel v sneg z nižjo temperaturo pod njim, nekoliko pa verjetno tudi v zrak nad pokrovčkom.

Kako izračunati, koliko je bilo te toplote? Ker vemo, koliko toplote je potrebno, da se stali 1 kg ledu, bi morali vedeti, koliko gramov snega se je stalilo. Ker sneg nima takšne gostote kot led, jo moramo izmeriti, izmeriti pa je treba tudi prostornino stal-



jenega snega. V vprašanju smo te podatke že navedli, sedaj pa navedimo še račun. Fiziki radi zapišemo enačbe, ki nam omogočajo neposredno povezavo med znanimi podatki in tem, kar bi iz podatkov radi izvedeli. Za mlajše učence, še posebej učence v osnovni šoli, take izpeljave pogosto izgubijo informacijo, ki bi jo želeli posredovati. Zato bomo v nadaljevanju načrtno izračunali zanimive podatke postopoma, z vmesnimi rezultati, ki hkrati tudi osvetljujejo dogajanje.

Podatki:

- prostornina snega 0,8 l je tehtala 310 g,
- gostota običajnega ledu je 0,9 kg/l,
- talilna toplota ledu je 336 kJ/kg,
- črni pokrovček se je pogreznil za 3 cm,
- sivi pokrovček se je pogreznil za 0,5 cm,
- beli pokrovček se ni pogreznil,
- uporabili smo pokrovčke za navaden jogurt, ki ga je mogoče kupiti v 2 dl plastičnih lončkih, katerih premer je 7,5 cm.

Najprej ugotovimo, kolikšna je bila prostornina snega, ki se je stalil pod črnim in sivim pokrovčkom. Manjkajočo prostornino snega ponazorimo s prostornino valja, katerega osnovnica je pokrovček jogurtovega lončka, višina valja pa globina, za katero se je pokrovček pogreznil v sneg. Za črni pokrovček velja

$$\begin{aligned} \blacksquare V &= \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi (7,5 \text{ cm})^2}{4} \cdot 3 \text{ cm} = \\ &= 44 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} \approx 130 \text{ cm}^3, \end{aligned} \quad (1)$$

pri sivem pa je bila prostornina staljenega snega le šestina zgoraj izračunane, saj se je pokrovček pogreznil le za pol cm, torej 22 cm³. Koliko je to? Pod belim pokrovčkom se je stalilo 130 cm³ snega oziroma nekoliko več kot desetinka decilitra, pod sivim pa toliko, kot je vsebina nekoliko širše brizge.

Zanima nas še, koliko je tehtal sneg, oziroma koliko gramov ledu se je skrivalo v tem, sedaj praznem, prostoru. Iz prve vrstice podatkov lahko izračunamo gostoto snega

$$\blacksquare \rho_{\text{sneg}} = \frac{m_{\text{sneg}}}{V_{\text{sneg}}} = \frac{310 \text{ g}}{800 \text{ cm}^3} = 0,3875 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 0,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (2)$$

Vidimo, da ima sneg, ki je že precej bolj predelan, kot je bil opazovani, gostoto precej manjšo od gostote ledu. Pod pokrovčki se je stalilo

$$\begin{aligned} \blacksquare m &= \rho_{\text{sneg}} \cdot V = 0,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 120 \text{ cm}^3 = \\ &= 48 \text{ g} \approx 50 \text{ g} \end{aligned} \quad (3)$$

snega, pod sivim pokrovčkom pa le šestina te mase, torej 8 g. Rezultate zaokrožimo, ker je naš namen le oceniti, kolikšna je bila približna masa staljenega snega. Toplota, ki je bila za taljenje potrebna, je

$$\blacksquare Q = m \cdot q_t = 50 \text{ g} \cdot 336 \frac{\text{J}}{\text{g}} \approx 17\,000 \text{ J}. \quad (4)$$

To ni videti malo. Za ilustracijo – to je toliko toplote, kot je odda prižgana električna plošča z močjo 1000 W, to je manjša od plošč na električnem štedilniku, v 17 sekundah. Prav mnogo torej tudi ni. Sneg pod sivim pokrovčkom pa je absorbiral okoli 3000 J toplote.

Za dodatno informacijo smo z merilcem svetlobnega toka izmerili razmerje med vpadno in odbito svetlobo za vse tri pokrovčke, ter za sneg sam. Vpadna svetloba je znašala 21 000 luksov. Luks je enota, v kateri merimo gostoto energijskega toka svetlobe. Podatki za odbito svetlobo so v spodnji tabeli:

vrsta površine	odbiti svetlobni tok [luks]	razmerje med odbitim in vpadnim tokom
beli	6000	0,28
sivi	5000	0,23
črni	2200	0,10
sneg	6500	0,30
alu folija	15000	0,71

TABELA.



SLIKA 2.

Folija je na sredini izbočena, ker se je sneg pod njo manj talil.



SLIKA 3.

Levo: Sneg je skopnel, ali se pod folijo še kaj skriva? Desno: Ko folijo odmaknemo, je pod njo še kupček nestaljenega snega.



Iz tabele lahko razberemo nekaj informacij. Svetloba se najbolj odbija od aluminijaste folije, kar bi lahko pričakovali. Zato lahko tudi napovemo, če niste preizkusili, da se sneg pod aluminijasto folijo stali kasneje kot tam, kjer ni pokrit, in se trd pokrovček prekrit s folijo dvigne nad sneg. Poskus smo izvedli s folijo, katere robovi so bili mehki in so se snega ves čas dotikali. Rezultate poskusa s folijo v snegu in kasneje, ko je sneg že skoraj v celoti izginil, lahko vidite na slikah 2 in 3.

V tabeli vidimo tudi, da je odbiti svetlobni tok črnega pokrovčka nekajkrat manjši od sivega in belega. Vidimo tudi, da je odbiti svetlobni tok belega približno podoben od snega odbitemu svetlobnemu toku, zato je beli pokrovček tonil z enako hitrostjo

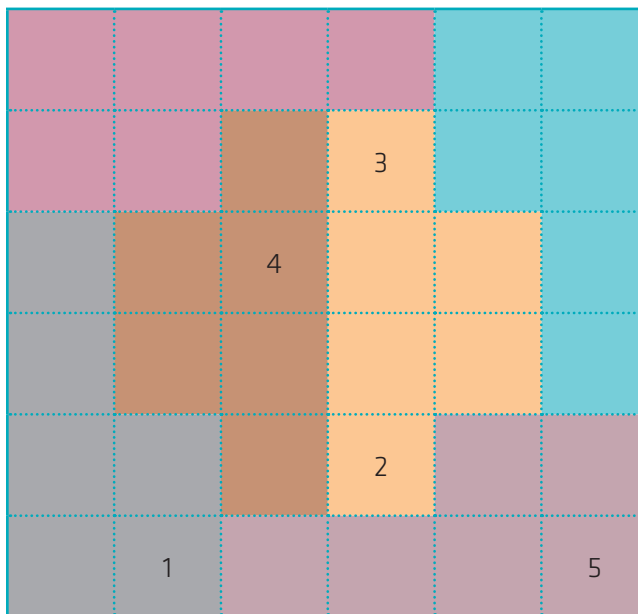
kot površina nepokritega snega. Naivno bi pričakovali, da morajo biti odbojnosti zelo tesno povezane s tem, koliko posamezen pokrovček potone. Žal povezava ni tako enostavna, meritev s preprostim luksmetrom je precej nenatančna, ker luksmeter zajema še svetlobo iz okolja, prav tako pri taljenju samem nastopajo še druge okoliščine, npr. veter, pa gretje pokrovčka samega itd. Zato lahko meritve primerjamo le semikvantitativno, kar pomeni, da lahko za opazovane lastnosti povemo le, ali so enake oziroma večje ali manjše od primerjanih. Pokažemo lahko le, da črni pokrovček res odbija mnogo manj svetlobe od ostalih, ne moremo pa iz podatkov izračunati in napovedati, koliko snega se bo pod pokrovčkom natančno stalilo, kadar je take in take barve.

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 6 x 6 kvadratkov vpišite začetna naravna števila od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve nastopalo vseh 6 števil.



xxx



ČASOPIS, KI IZHAJA NA SEDEM DNI	INDOEV- ROPEJKA	NIZKA FREK- VENCA	DELEC Z VIŠKOM ALI MAN- KOM ELEK- TRONOV	NAJDIŠČE PALEO- LITSKEGA ČLOVEKA V FRANCJI	PRISTA- NIŠČE V JEMNU											
8		OČAK IZ STARE ZAVEZE GRŠKI BOG VETROV														
			ZNAK ZA MANGAN DENARNICA ZA BANKOVCE			ZABAVNO, SATIRIČNO GLEDA- LIŠČE	NICK FALDO	IZPUŠČAJ	OMEJITEV SOGLA- ŠANJA	PETRA MAJDIČ		ROPARSKA SLADKO- VODNA RIBA	SPODNJI ROB STEHE	PTIČE- SLOVEC		
				VISOK PLEMIČ STIK DVEH PLOSKEV PRI TELESU						ZDRAVBI- LIŠKI KRAJ OB SAVINJI						POVRŠIN. RAZJEDA- NJE TAL
KOLIČINSKI PRISLOV	NIZOZEM. KNJIZEV- NIK (MAR- CELLUS)	DOMIŠ- LJAVEC GLAVNO MESTO JEMNA				SLAVADOR DALI				NEMŠKI, ŠKOTSKI, KRAŠKI ?						
						OBDOBJE ZEMELJ. PRAVEKA IVAN VIDAV	5				HRUPEN ČLOVEK DAVEK V FEVDALNI TURČIJI			IRSKA ORGANIZAC. ZIMBAB. DRŽAVNIK (JOSHUA)		
3					REČICA V KOČEVJU					NEMŠKI MATEMATIK (GEORG) PREHOD V DRUGO OBL.			7			
			IGOR LUKŠIČ	MUZA INSTRUM. GLASBE NORDIJSKI PESNIK						9		TESARSKI PODSTAVEK PREMIK DELA TELESA				
NEMŠKI FAŠIST						PREDŠ. SL. PLANINCEV (FRANC) TOPEL VE- TER Z GORA						? OTOK, ? PIANIST, ? IN MRTVI SIMBOL ZA GOSTOTO			ANTON NANUT	
SUMERSKO MESTO						FRANCE MIHELČ AM. SKAK. V DALJAVO (BOB)			VELIK JUŽNOAM. SADEŽ SRČASTE OBLIKE							
	ARKTIČNI PTIČ, NJORKA															
	OZNAKA OGULINA	IZTREB- LJENO EVROPSKO DIVJE GOVEDO	JAP. LITE- RAT (KOB) ITAL. BEGUNCI IZ ISTRE	12				REDKA OBLIKA IMENA EGIPČIJ ALI TILEN	MESTO NA FLORIDI	OTROŠKA DRSALNICA ANG.-AMER. PESNIK (THOMAS)						
						FR. SKLA- DATELJ (EDOUARD) 3. OSEBA SR. SPOLA										
"SREDINA" ČEBULE					GLASBENI MOJSTER SEPE ZNAK ZA TERBJU					14						
PEVEC JOHN									FANT (LJUDSKO)							
KRAJ PRI BLEDU									OČE							

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poštnina je že plačana) do **23. aprila 2010**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

XXX

Kako plavajo?



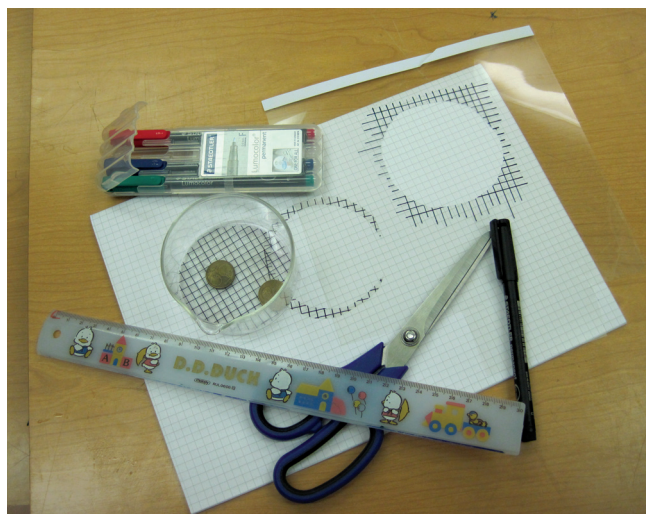
MOJCA ČEPIČ

→ Poglejmo si poskus, ki je nekoliko podoben že izvedenemu poskusu z vodo in semeni. Tokrat bomo poskusili na nekoliko zamotan način ugotoviti, kako je oblikovana vodna površina v bližini plavajočih predmetov.

V ta namen bomo uporabili „resne“ fizikalne trike. Zakaj pravimo resne? V šoli se srečamo z osnovnimi merjenji lastnosti, npr. dolžine, časa ali temperature. A že električni tok merimo z napravo, na kateri na klasičnih merilnikih odčitavamo zasuk, na digitalnih pa beremo številke. Običajno tehnologije, ki se skriva za napravo, sploh ne poznamo. Odčitavamo nek podatek, npr. kot, iz kota pa sklepamo na ampere. Seveda so razmislek in sklep naredili namesto nas že tisti, ki so merilno napravo sestavili. Običajno je, da pri raziskavah neke lastnosti uporabimo podatke meritev popolnoma drugih lastnosti, ki jih je sploh mogoče meriti. Tako imate morda nekateri med vami doma tekočerkristalni termometer, pri katerem barva na določenem polju termometra pove temperaturo. No, tak trik bi radi izvedli pri našem poskusu.

Potrebščine:

- skodelica ali kozarec z ravnim dnom,
- tanek alkoholni flomaster,
- krpe za brisanje polite vode (brez katere verjetno ne bo šlo),
- papirne sponke, lahko različnih vrst,
- lažji kovanci, npr. stari slovenski kovanci za 50 stotinov, stari avstrijski kovanci za 10 grošev, japonski kovanci za 1 jen.



SLIKA.

Kako narediti mrežo na dnu posodice
(Foto: Gregor Tarman)

Za izvedbo poskusov kovanci niso nujni, če pa jih slučajno imate, se z njimi lahko poigrate.

Na dno kozarca ali posodice čim natančneje narišite kvadratno mrežo 5 mm krat 5 mm (kot v malem karo zvezku). Če z rezultatom risanja neposredno na dno niste zadovoljni, vzemite prosojnico, nanjo narišite mrežo z ravnilom, nato pa iz prosojnice izrežite obliko dna in prosojnico položite na dno posodice. Da ne bo odplavala, jo lahko ob strani obtežite. Nato v posodico nalijte vodo nekako 1 cm pod rob.

Na gladino vode previdno položite papirno sponko ali kovanec. Opazujte pravokotno mrežo na dnu posode v bližini sponke. Na vodno gladino lahko položite tudi več sponk ali pa kovinske in s plastiko preoblečene sponke.

V odgovoru bomo pojasnili, zakaj ste videli, kar ste videli in kako lahko te podatke uporabimo za analizo oblike površine vode.



Razmisli in poskusi



MITJA ROSINA



37. Zaigrājmo s kozarci. Kako lepo zazvenijo kozarci, kadar si nazdravimo. Zlasti, če imamo kozarce s peclji in jih držimo pravilno v vozlu valovanja (nekje na sredini ali na odebelini peclja). Gotovo pa si že slišal „virtuoza“, ki je zaigral zahtevno melodijo na kozarcih. Poskusi še ti.

POSKUS. Pripravi osem kozarcev, da jih bo dovolj za celotno tonovsko lestvico. Napolni jih z vodo do različne višine. Višino določi s poskušanjem. Za preprost poskus se lahko zaneš na svoj posluš, lahko pa „uglasiš“ kozarce z glasbenim inštrumentom. Užival boš, ko ti bo uspelo zaigrati melodijo. Za vzbujanje zvoka lahko udarjaš z žlico (najbolje je, da jo držiš za široki del in udarjaš z ročajem).

NASVETI. Najprej razporedi prazne kozarce po višini tona, da bo potem manj dolivanje. Izberi kozarce, ki lepo zvenijo; včasih celo navadni kozarci brez peclja lepše zvenijo od tistih s pecljem. Ker je uglasjevanje zamudno, si zabeleži zaporedne številke kozarcev in višino vode v njih za prihodnjic.

VPRAŠANJE. Ali se z dolivanjem vode višina tona (frekvenca) zviša ali zniža? Zakaj? Zakaj kozarci zazvenijo medlo, če namesto vode natočimo pivo ali šampanjec?

ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

36. Brenkanje na elastiko. Ali si kdaj poskusil zabrenkati na elastiko? Ali višina tona (frekvenca) narašča ali pada, če elastiko raztegneš?

ODGOVOR. Z raztezanjem elastike se frekvenca skoraj nič ne poveča. Pričakoval si, da bo frekvenca naraščala, ko povečuješ silo, saj večja sila hitreje vrača elastiko v ravnotežno lego. Pa še na to ne smemo po-

zabiti, da se elastika z raztezanjem tanjša, masa na dolžinsko enoto se manjša in jo je lažje pospeševati (pospešek je sila deljena z maso). To bi še dodatno povečalo frekvenco. Toda ko elastiko raztegnemo, povečamo valovno dolžino valovanja, frekvenca pa je obratno sorazmerna z valovno dolžino. Ti vplivi se med seboj skoraj izničijo, zato višina tona le počasi narašča z raztezkom.

Hitrost prečnega valovanja na struni ali elastiki je $c = \sqrt{F/\mu}$, kjer je $F = k \Delta \ell$ sila, s katero jo vlečemo, in $\mu = m/\ell$ masa na dolžinsko enoto (elastika se z vlečenjem tanjša). Ker je elastika na obeh koncih vpeta, ima valovanje v sredini „hrbet“ in ustreza dolžina elastike polovici valovne dolžine, $\lambda = 2\ell$. Frekvenca je potem

$$\nu = c/\lambda = \sqrt{F/\mu} / (2\ell) = 2\sqrt{(k/m) \cdot (\Delta \ell / \ell)}.$$

Če velja Hookov zakon (če je k konstanten), se dolžina elastike pokrajša do faktorja $\sqrt{\Delta \ell / \ell}$. Če začnemo z dvojno dolžino elastike (prej je preohlapna in ton ni značilen) in jo raztegnemo na petkratno dolžino, bi se potemtakem frekvenca povečala za faktor 1,26, kar ravno ustreza intervalu dveh celih tonov (velike terce).

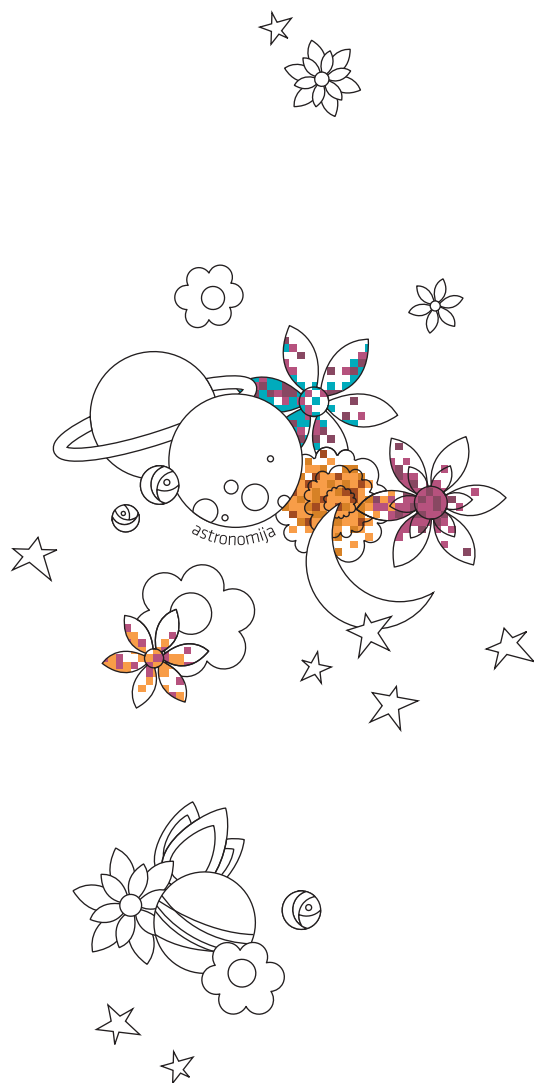
Naša elastika je bila pri majhnih raztezkih mehkejša kot pri Hookovem zakonu, pri velikih pa trša (sila je najprej naraščala počasneje kot linearno, potem pa hitreje).

ℓ [cm]	5	10	15	20	25
$\Delta \ell$ [cm]	0	5	10	15	20
F [N]	0	1,0	1,7	2,5	4,0

Posrečili so se mi trije celi toni, kar kvalitativno dobro ustreza zgornjim izpeljavam. Za boljše „glasbilo“ sem moral vpeti več elastik, ki so bile napete z različno silo (kot pri kitari).



Vrtljiva zvezdna karta



STANKA KOČAR

→ Na pripravah na 1. tekmovanje iz astronomije smo se z učenci posvetili tudi uporabi vrtljive zvezdne karte in z njo naredili več vaj. Takih nalog je malo, zato bodo prav prišle še kateremu učitelju.

Vrtljiva zvezdna karta je nepogrešljiv pripomoček pri opazovanju nočnega neba. Je majhna, prenosna in enostavna za uporabo. Pomaga nam pri osnovni orientaciji po nebu, z nje pa lahko odčitamo tudi nekatere astronomske podatke, na primer vzhode in zahode zvezd in Sonca, začetek in konec astronomske noči itd.

Vrtljiva zvezdna karta je sestavljena iz dveh delov, ki sta vrtljivo speta. Na spodnjem, papirnatem delu, je zvezdna karta, na kateri so narisane najsvetlejšje zvezde oziroma ozvezdja in nekateri zanimivejši ter z manjšimi daljnogledi vidni Messierjevi objekti (meglice, galaksije, razsute kopice, kroglaste kopice in planetarne meglice). Označen je tudi vidni del Rimske ceste, lega Sonca na ekliptiki za vsak dan v letu in mreža ekvatorialnih nebesnih koordinat. Na zunanjem robu je obroč z meseci in datumi. Zgornji del karte je prozorna folija, ki je v karto vpeta v severnem nebesnem polu, približno tam, kjer je na nebu Severnica, in je vrtljiva okoli te točke. Na foliji je narisana oval, ki predstavlja vidni del neba, njegov rob pa matematično obzorje, na katerem so označene strani neba. Na obrobem krogu folije tečejo ure dneva. Če hočemo ugotoviti, kaj je na nebu vidno na določen dan in ob določeni uri, potem folijo zavrtimo tako, da se ura na njej ujema z izbranim datumom. Upoštevati moramo še poletni in zimski čas. Če poleti naša ura kaže npr. 22. uro, moramo na karti čas nastaviti na 21. uro. Torej moramo v poletnem času upoštevati premik za eno uro.

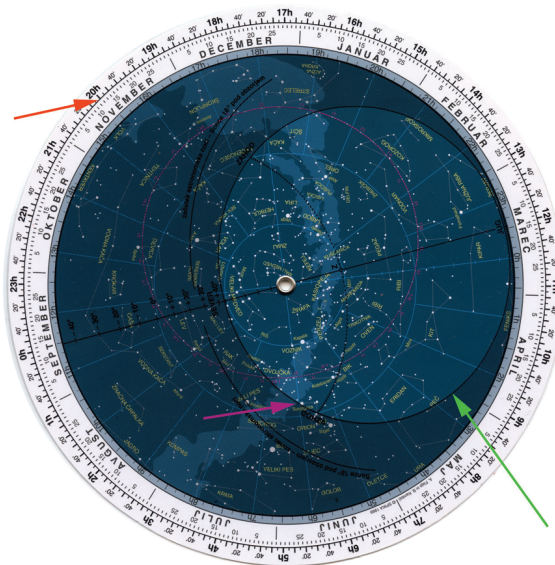
Preden bomo karto uporabljali, se moramo z njo dobro seznaniti. V pomoč so nam lahko naslednji primeri in vaje.

PRIMER. Nastavi zvezdno karto tako, da bo kazala nebo, kot ga vidimo 13. novembra ob 20. uri.

REŠITEV. Vrtljivi del zvezdne karte zavrtimo. Ura opazovanja, ki je označena na foliji, se mora prekriti z datumom na spodnjem delu karte. Torej sta 20. ura in 13. november v isti točki. Vse, kar je znotraj ovala, vidimo v tem času na nebu.

Vaje

1. Nastavi zvezdno karto tako, da bo kazala nebo, kot ga vidimo 20. julija ob 23. uri.
2. Katera ozvezdja so vidna 13. novembra ob 20. uri nad severnim obzorjem?
3. Katera ozvezdja so vidna 13. novembra ob 20. uri nad južnim obzorjem?
4. Katera ozvezdja so v tem času najvišje na nebu?
5. Katera ozvezdja v tem času vzhajajo?
6. Katera ozvezdja v tem času zahajajo?
7. Ali lahko v tem času vidimo najsvetlejšo zvezdo Sirij?
8. Kdaj vzide zvezda Sirij 13. novembra? Natančnost naj bo na 10 minut.
9. Kdaj zaide zvezda Sirij 13. novembra? Natančnost naj bo na 10 minut.
10. Katera ozvezdja so vidna vse leto?
11. Kje se nahaja ozvezdje Leva v začetku februarja opolnoči?
12. Ob kateri uri je Lev 15. marca najvišje na nebu?
13. Ob kateri uri Sonce vzhaja 22. marca?
14. Ob kateri uri Sonce zahaja 22. marca?



SLIKA.

Vrtljiva zvezdna karta. Rdeča puščica kaže na nastavitve datuma in ure (13. november ob 20. uri), zelena puščica označuje obzorje. Vidni del neba za izbrani datum je znotraj ovala, ki ga omejuje obzorje. Lahko opazimo, da tedaj vzhaja zvezda Betelgeza (vijolična puščica), saj se nahaja točno na vzhodnem obzorju (karta: Bojan Kambič).

XXX

REŠITEV



BARVNEGA SUDOKUJA

1	2	3	6	5	4
4	5	2	3	1	6
5	3	4	1	6	2
2	6	1	5	4	3
6	4	5	2	3	1
3	1	6	4	2	5

Prvo državno tekmovanje iz znanja astronomije



ANDREJ GUŠTIN

→ 19. decembra 2009 je na *Fakulteti za matematiko in fiziko* v Ljubljani potekalo prvo državno tekmovanje iz znanja astronomije, organizirano pod okriljem *Društva matematikov, fizikov in astronomov* (DMFA).

Na državno tekmovanje so se uvrstili osnovnošolci in srednješolci, ki so na šolskem tekmovanju 2. decembra 2009 zasedli prvi mesti, nekaj tekmovalcev z nadpovprečnim številom točk pa je povabila tekmovalna komisija. Na šolskem tekmovanju je sodelovalo 1541 učencev in dijakov iz 129 šol. Zanje je skrbelo 142 mentorjev, njihove izdelke pa je ocenjevalo 239 učiteljev in profesorjev. Podeljenih je bilo 509 bronastih priznanj.

Da je astronomija zelo odvisna od vremena, se je pokazalo tudi na državnem tekmovanju, saj je na dan tekmovanja po vsej Sloveniji snežilo in nekateri tekmovalci niso mogli pravočasno priti v Ljubljano. Kljub temu pa je tekmovanje potekalo regularno. Na državno tekmovanje je prišlo 194 tekmovalcev iz 103 šol, ki so tudi prejeli srebrna priznanja. Zlata priznanja si je prislužilo 32 tekmovalcev. Na tekmovanju jih je spremljalo 106 mentorjev. Organizatorji tekmovanja smo za mentorje organizirali tudi strokovno srečanje, na katerem smo dr. Matjaž Željko (organizator tekmovanja pri DMFA), dr. Andreja Gomboc (organizatorka tekmovanja na fakulteti, recenzentka nalog in članica tekmovalne komisije), Mirjana Jesenek Mori (tajnica tekmovanja) in



SLIKA.

Andrej Guštin (pobudnik tekmovanja, sestavljavec nalog in član tekmovalne komisije) predstavili tekmovanje. Mentorji so podali številne pripombe in svoje poglede na tekmovanje. Večina jih je bila navdušenih in v tekmovanju iz znanja astronomije vidi pomemben korak k popularizaciji astronomije.

Tekmovalci in njihovi mentorji so po tekmovanju prisluhnili strokovnemu predavanju dr. Tomaža Zwitterja, medtem pa je komisija popravljala naloge. Kljub temu, da je tekmovanje potekalo prvič in da astronomija ni „pravi“ šolski predmet ter je bilo zaradi tega težko določiti pravo težavnostno stopnjo nalog, se je pokazalo, da so bile naloge ravno pravnje. Tekmovalne pole so bile tako za osnovno kot za srednjo šolo sestavljene iz dveh delov: splošnih vprašanj iz astronomije in računskih nalog, predvsem iz splošne astronomije.

Glede na predloge DMFA in mentorjev ter pridobljene izkušnje na prvem tekmovanju bo pri organizaciji in načinu tekmovanja že letos prišlo do manjših sprememb, o katerih bomo kmalu poročali.

Kljub temu, da se je še spomladi zdelo, da je državno tekmovanje iz astronomije skoraj nemogoče organizirati v tako kratkem času, torej še v mednarodnem letu astronomije, se je zagon slovenskih astronomov v MLA pokazal za izjemno in edinstveno priložnost, da tudi astronomijo uvrstimo v koledar tekmovanj in ji damo več kot zasluženno mesto ob matematiki, fiziki, kemiji. Bliža se tudi čas, ko bomo naše tekmovalce lahko poslali na astronomsko olimpijado. Morda bo do takrat astronomija tudi dobila prostor med šolskimi predmeti.

Zahvaljujemo se vsem, ki so kakorkoli pripomogli pri organizaciji in uspehu prvega državnega tekmovanja iz astronomije; tekmovalcem in mentorjem, ki bodo še naprej glavna gonila sila tekmovanja, še posebej pa Andreji Gomboc, Matjažu Željku, Urošu Kostiču, Mirjani Jesenek Mori in DMFA.

Ob tej priložnosti obveščamo mentorje tekmovalcev iz astronomije, da smo na spletni strani

www.astronomija2009.si

(podstrani tekmovanje iz astronomije in forum) ustanovili neformalni forum, kjer lahko mentorji in drugi razpravljajo, pošiljajo vprašanja v zvezi z nalogami, dobijo rešitve vzorčnih nalog, nasvete itd. Ta forum je mišljen kot nekakšna pripravljavnica za tekmovanje iz znanja astronomije, ki bo dobro zaživela le, če bodo mentorji aktivno sodelovali.

Zlata priznanja so prejeli *osnovnošolci* Andraž Gnidovec in Matevž Zlatnar (OŠ Venclja Perka, Domžale), Blaž Tavčar (OŠ Dutovlje), Tin Troha (OŠ Toneeta Okrogarja, Zagorje), Lara Jerman (OŠ Preserje pri Radomljah), Andraž Oštrek in Žan Zelič (OŠ Matije Čopa, Kranj), Žan Pirc (OŠ Ivana Skvarče, Zagorje), Peter Zakšek (OŠ Domžale), Miha Bastl (OŠ Frana Roša, Celje), Klemen Iskra (OŠ Prule, Ljubljana), Filip Koprivec (OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika), Gregor Spruk (OŠ Stranje), Danaja Gnilšek in Vid Lah (OŠ Ljudski vrt Ptuj), Ana Hedl (OŠ Zreče), Aljoša Gajšek (OŠ Štore), Denis Arnšek (OŠ Lava, Celje), Marvin Herzog (OŠ Pesnica), Žiga Kokelj in Karin Frlic (OŠ Ivana Tavčarja, Gorenja vas), Anja Lah (OŠ Preska), Leon Lombergar (OŠ Frana Albrehta, Kamnik), Alenka Bobnar (OŠ Mirna Peč), Jan Križnič (OŠ Kanal), Lia Šibav (OŠ Dobrovo), Črt Mate (OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica), Tjaša Poje (OŠ Mirana Jarca, Ljubljana) in Urška Poje (OŠ Polje) ter *srednješolci* Matija Skala (Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija, Ljubljana), Filip Kozarski (Gimnazija Bežigrad, Gimnazija) in Ida Kraševc (Gimnazija Šentvid, Ljubljana). Nagrade so prejeli

1. NAGRADA

Osnovna šola

- ANDRAŽ GNIDOVEC, OŠ Venclja Perka, Domžale

- BLAŽ TAVČAR, OŠ Dutovlje
- TIN TROHA, OŠ Toneeta Okrogarja, Zagorje

Srednja šola

- MATIJA SKALA, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija, Ljubljana
- FILIP KOZARSKI, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija

2. NAGRADA

Osnovna šola

- LARA JERMAN, OŠ Preserje pri Radomljah
- ANDRAŽ OŠTREK, OŠ Matije Čopa, Kranj

Srednja šola

- IDA KRAŠEVEC, Gimnazija Šentvid, Ljubljana

3. NAGRADA

Osnovna šola

- ŽAN PIRC, OŠ Ivana Skvarče, Zagorje

Srednja šola

- DOMEN KAMPJUT, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija
- ROK VOGRINČIČ, Gimnazija Murska Sobota

× × ×

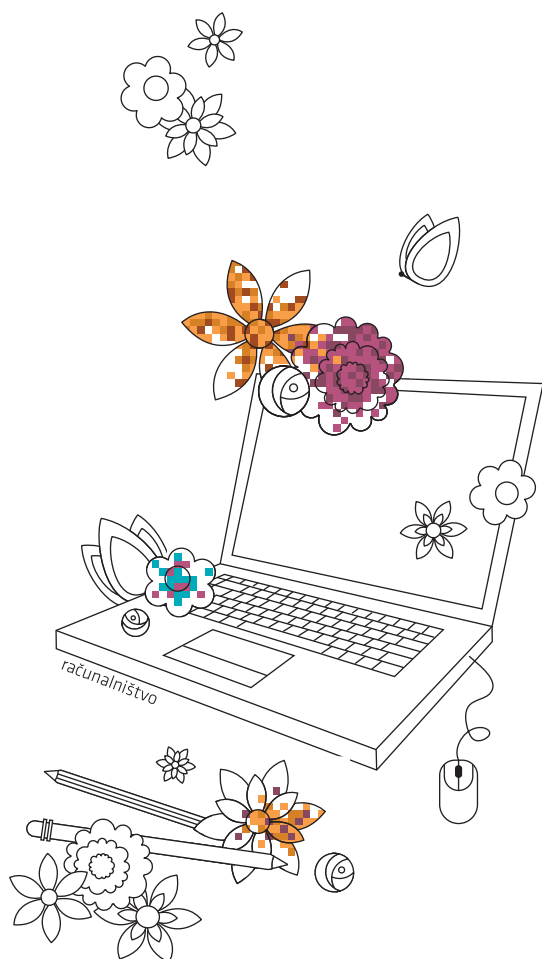
www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

www.dmfa.si

× × ×

Obdelava meritev in risanje grafov z R



PRIMOŽ PETERLIN

→ V prispevku bomo predstavili programsko okolje R na zgledu obdelave fizikalnih meritev in skušali bralca ali bralko prepričati, da je R za grafe to, kar je za besedilo $\text{\LaTeX}$.

Kaj sploh je R? R, s polnim imenom GNU R, je programski jezik ter tolmač in programsko okolje zanj. R ima globoke korenine – temelji na programskem jeziku S, ki so ga začeli sredi sedemdesetih let prejšnjega stoletja razvijati John Chambers, Richard Becker in sodelavci v Bellovih laboratorijih družbe AT&T – prav tam, od koder izvira tudi bolj znan programski jezik z enako kratkim imenom. Osnovna zamisel pri zasnovi jezika S je bilo ponuditi interaktivno okolje za statistiko in obdelavo podatkov – bolj interaktivno kot knjižnice fortranskih podprogramov, ki so bile na voljo. Programski jezik S se je razvijal dalje, kljub temu pa bi bil morda še danes znan le poznavalcem, če se ne bi sredi devetdesetih let Robert Gentleman in Ross Ihaka z univerze v Aucklandu odločila, da napišeta prost tolmač zanj. Program, poimenovan R (je naključje, da se imeni obeh avtorjev začneta prav na to črko?), so hitro posvojili statistiki širom sveta in zanj je na voljo na tisoče statističnih funkcij.

Kje dobimo R? R je prost program: brezplačen in dostopen z izvorno kodo vred. Domače mesto za R in z njim povezane skripte je CRAN (Comprehensi-

ve R Archive Network), <http://cran.r-project.org/>. Izbiramo lahko med že prevedenimi različicami za nekaj pogostejših okolij (Linux, MacOS X, MS Windows) in izvorno kodo. Razen v primeru, da dobro veste, zakaj potrebujete izvorno kodo, bo verjetno prava izbira prevedeni program. Poleg samega prevajalnika/okolja bomo potrebovali še urejevalnik. Če že uporabljate Emacs, bo verjetno pravšnji nabor makroukazov ESS (Emacs Speaks Statistics, „Emacs govori statistiko“), <http://ess.r-project.org/>. Če se vam zdi Emacs prehud zalogaj in poganjate Microsoft Windows, pa je vreden oglada TINN-R, <http://www.sciviews.org/Tinn-R/>.

R zmore več statistike, kot jo bo verjetno kdorkoli z izjemo statistikov kadarkoli potreboval, v tem prispevku pa bomo uporabili njegovo drugo močno stran: grafiko. R pozna kar nekaj metod grafične predstavitve podatkov, in kar je še pomembnejše: izbrane in izvedene so s premislekom. Za zgled bomo obdelali nekaj meritev in na njih prikazali uporabo R.

Pričetek in zaključek dela

Kako poženemo R, je odvisno od izbranega sistema. Navadno kliknemo ikono „R“, v Linuxu pa ga lahko poženemo tudi iz ukazne vrstice z ukazom R:

```
$ R
```

Po zagonu nas program pozdravi s pozivnikom >.

R vsebuje izčrpno dokumentacijo za vgrajene funkcije, ki jo dosežemo s funkcijo `help()` ali preprosto z vprašanjem, ki mu sledi ime iskane funkcije: `?lm`, `?axis` ali `?read.table` vrnejo dokumentacijo za funkcije `lm()`, `axis()` in `read.table()`. Tudi pomoč za operatorje je dostopna po enakem vzorcu, npr. `?"+"`, `?":"` ali `? "<"`.

Program zaključimo z ukazom `quit()` ali njegovo krajšo različico `q()`. Ob zaključku nas program vpraša, ali želimo shraniti delovni prostor.

```
> q()
```

```
Save workspace image? [y/n/c]:
```

Ob pritrdilni (y kot „yes“) in nikalni (n kot „no“) izbiri je tu še zadnja možnost, da si premislimo (c kot „cancel“) in programa ne zaključimo. Če odgovorimo pritrdilno, bo R pred zaključkom dela v trenutno izbrani imenik shranil datoteki `.RData` in `.RHistory`. V

prvi so shranjene definicije spremenljivk, v drugi pa zgodovina ukazov seje. Ko naslednjič poženemo R v istem imeniku, bo povrnil shranjene vrednosti in to objavil s sporočilom:

```
[Previously saved workspace restored]
```

Branje podatkov

Podatki so dostikrat zapisani kar v navadni besedilni datoteki, in sicer navadno v enem od dveh formatov: bodisi so stolpci fiksne širine bodisi pa so polja v zapisu ločena z vejico (CSV, „comma separated values“, z vejico ločene vrednosti).

Obe omenjeni obliki podatkov preberemo s funkcijo `read.table()`. Obvezni argument je ime datoteke s podatki, podamo pa lahko še različne izbire. V naših krajih, kjer so v rabi tako programi, ki uporabljajo ameriški zapis števil z decimalno piko, kot programi, ki po evropsko zapisujejo števila z decimalno vejico, je uporabna izbira `dec`, s katero določimo decimalni znak. S tem povezana je izbira razmejilnika med polji `sep` (kadar so podatki zapisani z decimalno piko, je vejica pogosto razmejilnik med polji). Če prva vrstica še ne vsebuje podatkov, ampak oznake, to upoštevamo z izbiro `header`.

Zgled: podatke imamo zapisane v obliki spodaj:

```
U [V];t1 [s];t2 [s];t3 [s];t [s]
12.5;0.00;0.00;0.00;0.0
10;8.72;8.68;8.53;8.6
...
```

Preberemo jih z naslednjim ukazom:

```
podatki <- read.table("podatki.csv", sep =
";", dec = ".", header = TRUE)
```

R zna seveda brati še mnoge druge zapise, denimo datoteke XML in Excelove preglednice, slednje sicer le v okolju Microsoft Windows z razširitvijo `xls-ReadWrite` (<http://www.swissr.org/>), zna pa se tudi povezati s strežnikom SQL. Možnosti je preveč, da bi tu vse našteali, kaj šele opisali.

Priprava grafa

Linearna odvisnost – prevodnost elektrolita

Začnimo s preprostim zgledom linearne odvisnosti

med koncentracijo in specifično prevodnostjo razredčene raztopine elektrolita. Pri različnih vrednostih neodvisne spremenljivke (v našem primeru je to koncentracija elektrolita) merimo vrednosti odvisne spremenljivke (v našem primeru upornosti posodice z elektrolitom) in pare vrednosti odvisne in neodvisne spremenljivke vnašamo v diagram. V statistiki je takšen diagram znan kot razsevani diagram, v preglednicah pa pogosto kot XY-graf. Cel postopek lahko shranimo v ukazno datoteko – našo poimenujmo elektrolit.R. Rezultat je na sliki 1.

```
koncentracija <- c(1.e-3,2.5e-3,5.e-3,
                  7.5e-3,1.e-2)
upornost <- c(5.31,2.66,1.40,0.92,0.78)

# iz upornosti izračunamo specifično
# prevodnost
k <- 1.e-4*upornost[1]
prevodnost <- k/upornost

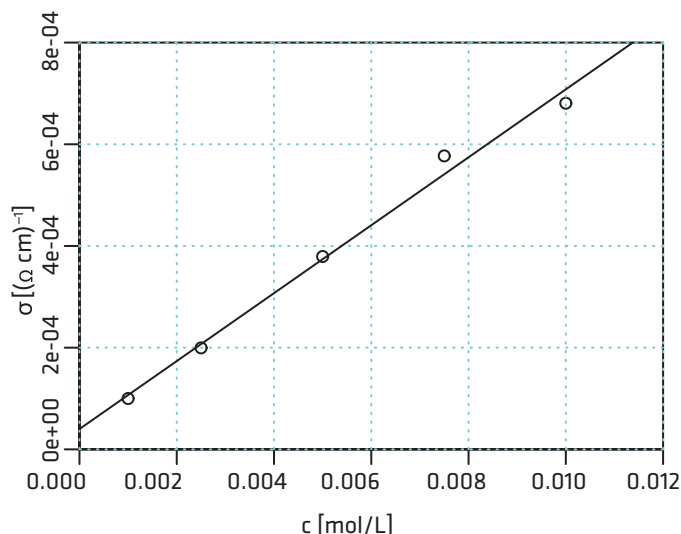
# določimo oznaki na abscisni in
# ordinatni osi
xlabel <- expression(paste(italic(c),
                             " [mol/L]"))
ylabel <- expression(paste(sigma,
                             " [(Ω cm)-1]"))

# izrišemo podatke
plot(koncentracija, prevodnost,
     xlab = xlabel, ylab = ylabel,
     xaxs = "i", yaxs = "i", xlim =
       c(0, 0.012), ylim = c(0, 8.e-4))
grid(col = "darkgray")

# poiščemo premico, ki se najboljše
# prilega merskim točkam
prevodnost.fit <- lm(prevodnost ~
  koncentracija, data = data.frame(
    koncentracija, prevodnost) )

# izpišemo koeficiente
coefficients(prevodnost.fit)

# narišemo premico
abline(prevodnost.fit)
```



SLIKA 1.

Odvisnost specifične prevodnosti elektrolita od njegove koncentracije.

Nekaj v skriptu uporabljenih lastnosti R morda zasluzi pojasnilo:

1. Ker je meritev malo – pet parov točk – njihove vrednosti tokrat kar vnesemo v sam program; z ukazom `c()` zberemo podatke v vektor in narišemo recipročno upornost kot funkcijo koncentracije: Koncentracija je navedena v mol/L, upornost pa v kΩ.
2. Ker poznamo specifično prevodnost 1 mmol/L raztopine elektrolita, $\sigma_0 = 10^{-4} (\Omega \text{ cm})^{-1}$, lahko iz upornosti izračunamo specifično prevodnost elektrolita. Najprej izračunamo pretvorni faktor k med upornostjo in specifično prevodnostjo, $k = R_0 \sigma_0$, ki jo potem uporabimo pri preračunavanju:

```
k <- 1.e-4*upornost[1]
prevodnost <- k/upornost
```

Z indeksom [1] smo izbrali prvi element vektorja upornost. Priročni zapis `k/upornost`, v katerem skalarno količino navidez delimo z vektorjem, kot rezultat vrne vektor, v katerem je posamezna komponenta recipročna vrednost istoležne komponente prvotnega vektorja, pomnožena s konstanto k .

3. Jedro zgleda je ukaz `plot()`, ki odpre okno z grafom. Ker bi obe skali na grafu radi začeli od nič, ukazu `plot()` podamo izbiri `xlim` in `ylim`, s katerima določimo meji vrednosti na abscisi in ordinati. Meje so vektor dolžine 2, ki ga spet sestavimo z ukazom `c()`, npr. `xlim = c(0,0.01)`. Z izbirama `xaxs = "i"` in `yaxs = "i"` pa smo dosegli, da se začne skala grafa prav s prvo oznako (privzeto pušča R na vsaki strani 4% razmaka, kot lahko vidimo na sliki 3).

4. Namesto z imeni spremenljivk v programu bi oznake osi radi opremili z ustaljenimi oznakami. Podobno, kot smo maloprej določili mejni vrednosti na abscisi in ordinati, lahko z izbirama `xlab` in `ylab` določimo tudi oznake na abscisi in ordinati, npr. `xlab = "c [mol/L]"`. Pri sestavljanju bolj zapletenih oznak si lahko pomagamo s funkcijama `paste()` in `expression()`.

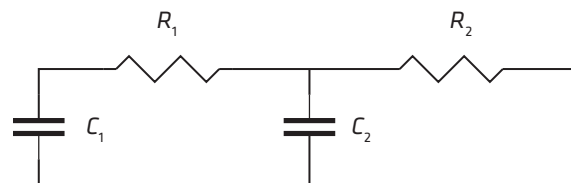
5. Radi bi izračunali premico, ki se najboljše prilega merskim točkam, in jo vrisali na graf. S funkcijo `lm()` izračunamo odmik in naklon premice skozi merske točke tako, da so kvadrati odmikov merskih točk od premice najmanjši (tkim. „metoda najmanjših kvadratov“). Funkcija zapusti izračunano v objektu `prevednost.fit`. Če hočemo imeti koeficienta (odmik in naklon) izpisana, lahko to zahtevamo z ukazom `coefficients()` ali njegovo krajšo različico `coef()`. Če pa želimo premico s tema koeficientoma narisano na grafu, uporabimo ukaz `abline()`.

S tolmačem R izvedemo ukazno datoteko s funkcijo `source()`, ki ji podamo ime ukazne datoteke:

```
> source("elektrolit.R")
```

Nelinearna odvisnost – praznenje kondenzatorja

Odvisnosti niso vedno tako lepo linearne kot v prejšnjem zgledu. Včasih jih je mogoče linearizirati z izbiro nelinearne (npr. logaritemske) skale, z računalnikom pa lahko enostavno izračunamo ne le premico, ampak tudi krivuljo, ki se najboljše prilega merskim točkam. Za zgled si oglejmo časovni potek v vezju z dvema kondenzatorjema (slika 2). Študent pri vaji najprej nabije kondenzator C_1 , potem pa spremlja napetost na tem kondenzatorju, ko se ta prazni. Podatki so shranjeni v zapisu CSV:



SLIKA 2.

Vezje z dvema kondenzatorjema. Pri poskusu velja $C_1 = C_2$ in $R_2 \gg R_1$. C_2 izpraznimo pred začetkom poskusa. Napetost U na kondenzatorju C_1 beležimo kot funkcijo časa t .

```
"t [s]"; "U [V]"
2,3;12,0
8,7;11,0
...
```

Napetost $U(t)$ lahko zapišemo kot vsoto dveh eksponentnih funkcij:

$$U(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}.$$

Iz meritve $U(t)$ moramo določiti oba karakteristična časa, τ_1 in τ_2 . Skript spodaj opravi to nalogo; rezultat pa je prikazan na sliki 3.

```
C1 <- read.table("kondenzator.csv",
  dec=",", sep=";", header = TRUE)

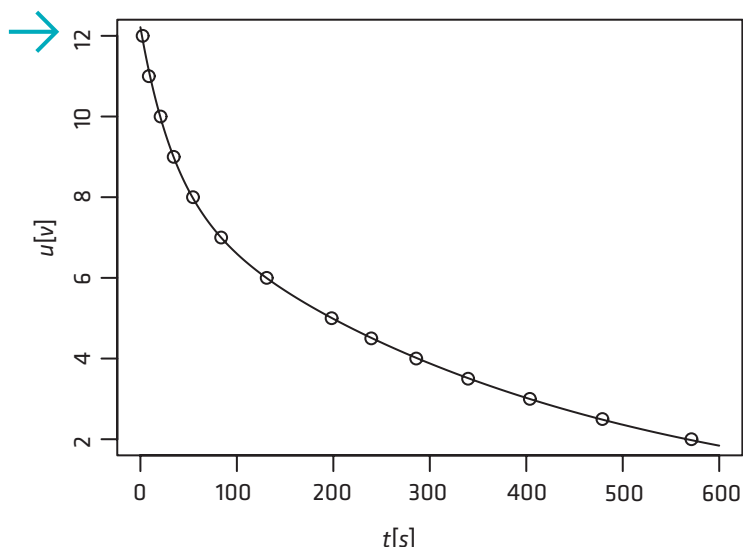
U <- C1$U.V.
t <- C1$t.s.

U.nls <- nls(U ~ A*exp(-t/tau1) +
  B*exp(-t/tau2), start = list(A = 5,
  B = 5, tau1 = 10, tau2 = 100))

par(mar = c(5, 4, 1, 1) + 0.1)

plot(C1, xlab = expression(paste(
  italic(t), " [s]")), ylab =
  expression(paste(italic(U),
    " [V]")), xlim = c(0, 600))

lines(0:600,
  predict(U.nls, list(t = 0:600)))
```

SLIKA 3.

Napetost U na kondenzatorju C_1 (slika 2) kot funkcija časa t ; merski podatki (*) in krivulja najboljšega ujemanja.

Nekaj komentarja:

1. Funkcija `read.table()` vrne objekt razreda `data.frame`; za vse praktične potrebe si ga lahko predstavljamo kot tabelo. Posamezne stolpce v tabeli naslavljamo v obliki `tabela$stolpec`. Imena stolpcev rekonstruiramo iz zaglavja tabele, pri čemer se vsi znaki, ki v imenu stolpca niso dovoljeni, nadomestijo s piko. Za lažje rokovanje iz ustreznih stolpcev tabele ustvarimo dva vektorja, t in U .

2. Prilagajanje nelinearne funkcije merskim podatkom opravimo s funkcijo `nls()`, ki vrne objekt razreda `nls`. Poleg merskih podatkov in formule podamo tudi začetne približke parametrov krivulje. Če želimo, lahko vrednosti koeficientov A , B , τ_1 in τ_2 izpišemo enako kot v prejšnjem zgledu.

3. Objekt razreda `nls` vsebuje tudi metode za funkcijo `predict()`. Poleg objekta `U.nls` ji podamo še vektor t , v katerega zapišemo z operatorjem `:` ustvarjeno zaporedje $0, 1, 2, \dots, 600$, funkcija `predict()` pa vrne enako dolg vektor, v katerem so zbrane vrednosti interpolirane funkcije pri podanih vrednostih t . Pare vrednosti t in interpoliranih vrednosti s funkcijo `lines()` izrišemo kot povezane točke na grafu; črta

je odsekoma ravna, zaradi majhnega koraka pa je videti gladka krivulja.

Histogram – radioaktivni razpad

Za tretji zgled obdelajmo statistiko radioaktivnega razpada. Ta zgled je nekoliko drugačen. V njem nimamo odvisne in neodvisne spremenljivke, ampak je spremenljivka število zaznanih radioaktivnih razpadov v časovni enoti (v našem primeru 10 s). Če meritev velikokrat ponovimo, dobimo različne vrednosti: npr. 6, 10, 10, 8, 13, 6, 9, 7, ... V primeru, da so vrednosti porazdeljene po Gaussovi porazdelitvi – in radioaktivni razpad je tak – lahko množico N meritev količine x strnemo v dve vrednosti: povprečno vrednost in standardni odklon σ_x . Prvo izračunamo v R s funkcijo `mean()`, drugo pa s funkcijo `sd()`.

Meritve zberemo v histogram.

```
# število zaznanih razpadov v 10 s
x <- scan("radioaktiv.txt")

# odštejemo ozadje, tudi
# normalizirano na 10 s
x <- x - 2.68

avg <- mean(x)
stdev <- sd(x)

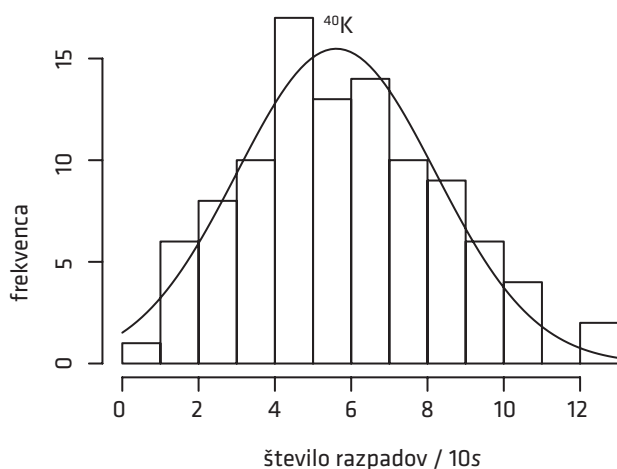
par(mar = c(5, 4, 1, 1) + 0.1)
hist(x, breaks = seq(floor(min(x)),
  ceiling(max(x))),
  main = expression(paste("^40","K")),
  xlab = "\u0161tevilo razpadov / 10 s",
  ylab = "frekvenca")

curve(length(x)*dnorm(x, mean = avg,
  sd = stdev), add = TRUE)
```

Spet nekaj komentarja:

1. Ker je format vhodne datoteke zelo preprost (ena številka v vrstici – število zaznanih razpadov v 10 s), smo uporabili funkcijo `scan()` namesto `read.table()`; x je tako vektor, ne pa tabela.

2. Histogram izrišemo s funkcijo `hist()`. Izbira `breaks` določa meje in velikosti razredov. Privzeto R uporab-



SLIKA 4.

Odvisnost specifične prevodnosti elektrolita od njegove koncentracije

lja Sturgesovo formulo za razdelitev n vzorcev v k razredov:

$$k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil.$$

3. Verjetnostno gostoto normalne porazdelitve (funkcija `dnorm()`) izrišemo prek histograma s funkcijo `curve()` in izbiri `add = TRUE`.

4. Vse „čudne“ znake – mednje sodijo tudi naši šumniki – vnašamo v graf prek ovinka, tako da podamo kodo ISO 10646/Unicode. Štorasto, ker pa navadno v oznakah teh znakov kljub vsemu ni toliko, se da nekako preživeti. Kode naših črk so: `\u010C` (Č), `\u010D` (č), `\u0160` (Š), `\u0161` (š), `\u017D` (Ž) in `\u017E` (ž).

Izpis grafa

Graf zdaj znamo prikazati na zaslonu, radi pa bi, da do njega lahko dostopajo tudi drugi programi. Če bi ga radi vključili v svoje poročilo ali članek, to navadno pomeni, da ga izvozimo v zapisu PostScript:

```
> postscript(file = "radioaktiv.eps",
+   width = 5, height = 4.5)
> source("radioaktiv.R")
> dev.off()
```

Izbiri `width` in `height` določata širino in višino grafa

v palcih. Drugi uporabni formati so PDF (s funkcijo `pdf()`) in različni rastrski formati `bmp()`, `jpeg()`, `png()` in `tiff()`. Pri slednjih argumenta pri `width` in `height` namesto palcev podajata število slikovnih točk.

Zaključek

R je kompleksen predmetno usmerjen programski jezik. Poleg samega tolmača je zanj na voljo na CRAN še prek 2000 dodatnih modulov. Pričujoči prispevek zato že zaradi svoje dolžine ne bi mogel podati celovitega pregleda, četudi bi bil to njegov namen. Pa niti ni bil. Skušali smo le pokazati enega od načinov, kako se lotiti R z namenom, da bi rešili konkreten problem: obdelali bi radi merske podatke in izrisali graf. Zgolj za to nam ni treba poznati tisočev ukazov, dober ducat jih zadostuje. Sčasoma pa bo morda naša želja po znanju rasla in takrat bo pametno poseči po dodatni literaturi. Na spletnem mestu <http://www.r-project.org/> je najti vrsto priročnikov v zapisu PDF, od tiskanih virov pa velja omeniti dva priročnika Venablesa in Ripleya: Uvod v statistične metode [4] in Uvod v programiranje [3]. Zahtevnejši pa sta knjigi tvorca jezika S, Johna Chambersa, ki opisujeta zasnovo in ustroj samega jezika [1] in vgrajenih statističnih funkcij [2].

Začeli smo s tezo, da je R za grafe to, kar je za besedila $\text{\LaTeX}$ (ali $\text{\TeX}$ nasploh), pa z njo še končajmo. Podobnost velja v dobrem in v slabem. Oba sta prosta programa, ki ju namesto korporacije razvija in vzdržuje gosto stkana mreža uporabnikov, ki so, vsaj nekateri, obenem tudi razvijalci programja. Tako R kot $\text{\TeX}$ sta bila zasnovana kot kompletna (Turingova) programska jezika, kar se je glede na namen (npr. stavljenje besedila) spočetka morda zdelo pretiravanje, obenem pa je prav to skupnosti uporabnikov omogočilo razvoj številnih dodatkov, ki povečajo uporabnost enega ali drugega programa. Po drugi strani pa ta kompleksnost pomeni tudi, da se je programa težje priučiti. Kljub temu sta se vsak v svoji niši, verjetno premajhni, da bi se ji „velika“ računalniška industrija resno posvetila, uspešno vgnezdila in bosta tam verjetno vztrajala še kar lep čas.

Niste statistik – se je vseeno vredno naučiti nekaj ukazov R zgolj za razmeroma osnovno obdelavo podatkov in risanje grafov? Verjetno ne, če že uporabljate katerega od programov za ta namen (IGOR Pro, Origin, SigmaPlot, Prism). Morda, če ste pogosto nezadovoljni z grafičnimi izdelki preglednic. Precej ver-



jetno da, če ob tem uporabljate še $\text{\LaTeX}$ – poznavanje skladnje enega vam sicer ne bo pri učenju drugega prav nič pomagalo, filozofija pa je ista: že privzeto obnašanje je bilo izbrano z mnogo tehtnega razmisleka, kljub temu pa je sistem dovolj odprt, da ga lahko vsakdo z dovolj znanja prilagodi čisto svojim specifičnim potrebam.

Literatura

- [1] J. M. Chambers, *Software for Data Analysis: Programming with R*, Springer, New York, 2008.
- [2] *Statistical Models in S*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1991.
- [3] W. N. Venables, B. D. Ripley, *S Programming*, Springer, New York, 2000.
- [4] W. N. Venables, B. D. Ripley, *Modern Applied Statistics with S*, 4th ed., Springer, New York, 2002.

www.presek.si

www.dmfa.si

Futoški

↓↓↓

→ V 4 x 4 kvadratke vpišite naravna števila od 1 do 4 tako, da bodo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopala vsa štiri števila in da bodo izpolnjene vse relacije.

3		>		<	
				<	3
	<				
	1	<			

↓↓↓

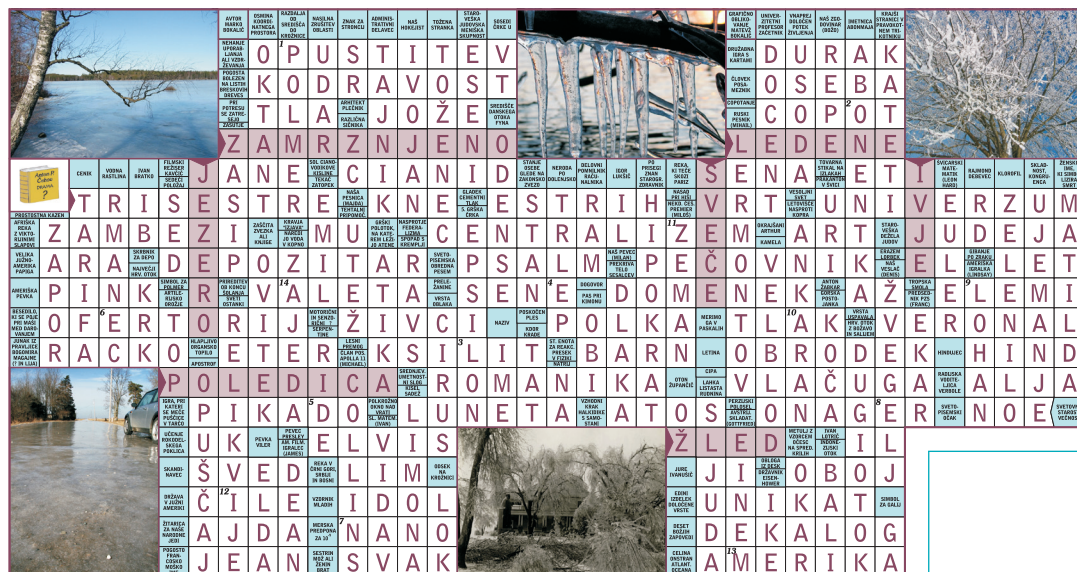
REŠITEV

2	3	1	4
1	4	3	2
3	2	4	1
4	1	2	3

xxx

xxx

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 37/4

→ Za nagradno križanko iz četrte številke 37. letnika Preseka smo prejeli 20 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasil **Poledenela zima**. Izžrebani reševalci, MATEJA BONČINA iz Škofje Loke, ALEN ĐUDARIĆ iz Celja in EMILIJA ROZMAN iz Ljubljane so razpisane nagrade prejeli po pošti.

xxx



Mladinski Astronomski Raziskovalni Tabor – MART 2010



→ Mladinski Astronomski Raziskovalni Tabor – MART 2010 bo v organizaciji UAD in ADO potekal v Domu Medved na Medvedjem Brdu, med 6. in 15. avgustom 2010. Vodilo ga bo 11 izkušenih mentorjev, ki bodo z raznovrstnimi in zanimivimi raziskovalnimi projekti poskrbeli za ustvarjalno delo v sproščenem počitniškem vzdušju. Dobrodošli ste tako popolni začetniki kot izkušeni astronomi, saj projekte in delovne skupine izbirate udeleženci sami, hkrati pa zahtevnost programa prilagajamo predznanju in željam posameznika. S pomočjo domiselnega družabnega programa bomo kot vedno

poskrbeli, da bo MART 2010 za vse udeležence ostal nepozaben dogodek!

Delovne skupine na taboru bodo: Uvod v astronomijo, Astronomska opazovanja, Astrofizika in astronomske simulacije, Astrofotografija, Meteorji, Temno nebo.

Vse informacije o taboru, delovnih skupinah, mentorski ekipi in o prijavi najdete na naših spletnih straneh:

www.uad.si

www.orion-drustvo.si



Knjižnica Sigma

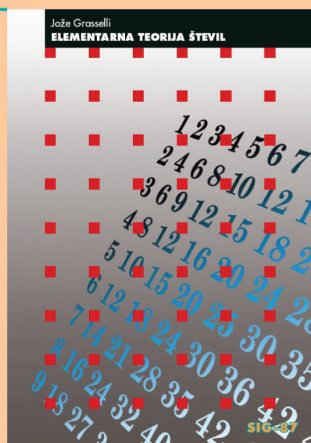
Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Jože Grasselli:

ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL

168 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR



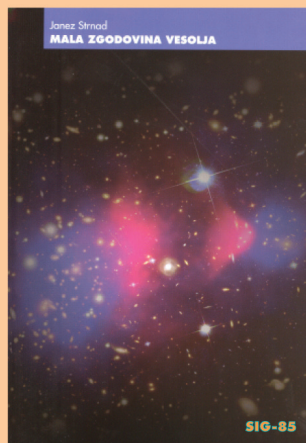
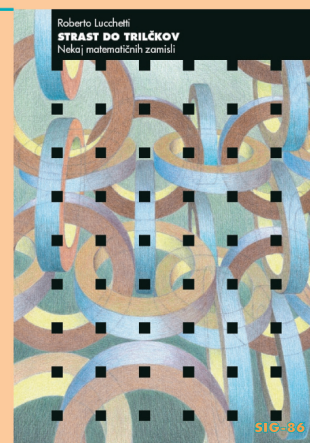
Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

Nekaj matematičnih
zamisli

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Marcel Danesi:

PARADOKS LAŽNIVCA IN HANOJSKI STOLPI

Deset največjih
matematičnih ugank
vseh časov

260 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

17,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.