

4

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

PRESEK LETNIK 37 (2009/2010) ŠTEVILKA 4



PRESEK



- TAROK, VERJETNOST IN UPANJE
- NEWTONOVA PARABOLA
- DELI IN VLADAJ
- NAGRADNA KRIŽANKA

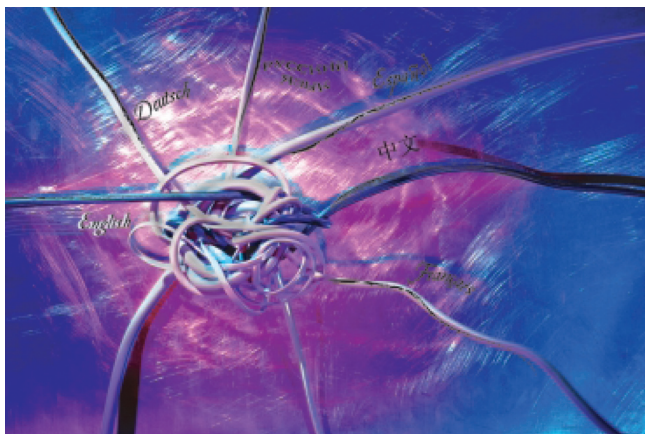


ISSN 0351-6652



Prevajanje: iz arabščine v zulu

↓↓↓



→ Hitrost nastajanja novih dokumentov (na primer na internetu) je mnogo večja, kot je zmožnost človeških prevajalcev, zato postaja *strojno prevajanje* nujnost. Za učinkovito in dobro prevajanje strojni prevajalci uporabljajo verjetnost, statistiko in teorijo grafov v kombinaciji z zbirkami podatkov, ki vsebujejo milijarde besed in fraz v mnogih jezikih. Tako matematika, ki jo pogosto imenujemo tudi univerzalni jezik, tvori most med jeziki.

Ko je besedilo prevedeno, se pojavi vprašanje: kako dober je prevod? Numerične mere učinkovitosti pomagajo avtomatizirati ta del procesa prevajanja in nam s tem tudi privarčujejo čas in denar. Rezultati vrednotenja pomagajo izboljševati algoritme za prevajanje, tako da bi legendarni strojni prevod besedila „The spirit is willing but the flesh is weak“ iz angleščine v ruščino in nazaj v angleščino: „The vodka is good but the meat is rotten“ ostal le legenda.

× × ×

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 37, šolsko leto 2009/2010, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2009/2010 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Ines Kristan

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

© 2010 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1774

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Prevajanje: iz arabščine v zulu

MATEMATIKA

- 4-6** Tarok, verjetnost in upanje
(Aleksander Simonič in Dejan Širaj)
- 7-9** FAMNITovi izleti
(Katja Klobas)

FIZIKA

- 12-15** Newtonova parabola
(Andrej Likar)
- 18-19** Topla in hladna voda v tekočem stanju
(kapljevina)
(Aleš Jesenšek)
- 20** Koliko toplote? – Poizkuševalnica za pravega fizika
(Mojca Čepič in Ana Gostinčar Blagotinšek)
- 20-22** Kateri najpočasneje tone – hja, beli kot sneg vendar – odgovor naloge
(Mojca Čepič in Ana Gostinčar Blagotinšek)
- 22** Razmisli in poskusi
(Mitja Rosina)

ASTRONOMIJA

- 23-26** Po takem tiru se giblje Luna
(Tomaž Kranjc in Nada Razpet)

RAČUNALNIŠTVO

- 27-30** Reševanje problemov s pristopom *deli in vladaj*
(Andrej Taranenko)

RAZVEDRILO

- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 37/3
(Marko Bokalič)
- 9, 22** Barvni sudoku
(Izidor Hafner)

TEKMOVANJA

- 10-12** 9. tekmovanje dijakinj in dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike
(Darinka Žižek)
- priloga** 9. tekmovanje za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike – področno tekmovanje
- priloga** 9. tekmovanje za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike – državno tekmovanje
- priloga** 9. tekmovanje za dijake srednjih poklicnih šol v znanju matematike

SLIKA NA NASLOVNICI: Letošnja zima je bila prava in upamo, da ste jo uspeli izkoristiti. V tej številki najdete odgovor na vprašanje, zastavljeno v drugi letošnji številki Preseka. Na sneg, ki smo ga za izvedbo poskusa potrebovali, smo čakali kar nekaj časa, na koncu pa nam je le uspelo. Tisti, ki v mrazu raje ostanete doma na toplem, se lahko preizkusite v taroku in si preberete matematični prispevek, objavljen v tokratni številki.



Tarok, verjetnost in upanje



ALEKSANDER SIMONIČ IN DEJAN ŠIRAJ

→ Kdor pozna tarok, je gotovo že slišal za pravilo „brez taroka ni taroka“. Bi znali izračunati verjetnost, da se to zgodi?

Pogost zaključek igranja je t.i. „škis-partija“. Koliko iger naj v povprečju pričakujemo po odigrani škis-partiji?

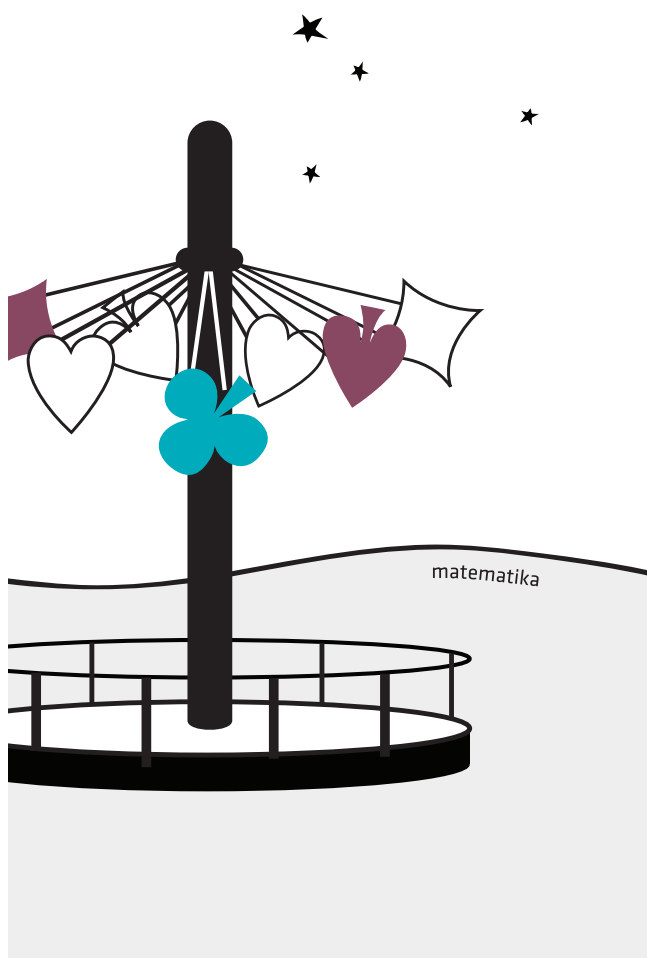
V članku bomo obravnavali zgornja problema, nikar pa se ne ustrašite, saj bomo za tiste, ki ne poznate taroka, na hitro ponovili pravila, ki jih potrebujemo. Od bralca pričakujemo nekaj matematičnega predznanja, vsaj poznavanje osnovnih pojmov kombinatorike in verjetnosti.

Tarok je možno igrati v tri ali v štiri. Mi bomo obravnavali igro s štirimi igralci. Pri taroku je 54 kart: vsaka od običajnih štirih barv jih prispeva osem, 22 pa je drugačnih kart, imenovanih taroki. Vsak igralec dobi na začetku igre 12 kart, šest pa jih sestavlja poseben kupček, ki se imenuje talon.

Brez taroka ni taroka

Pravilo pravi, da se igra ne more začeti, če kateri koli igralec med svojimi kartami nima nobenega taroka (v tem primeru sledi ponovno mešanje). Vprašanje je, kolikšna je verjetnost, da se to zgodi.

Ker so vse razdelitve kart enako verjetne, lahko uporabimo klasično definicijo verjetnosti, ki pravi, da je verjetnost nekega dogodka kvocient med številom za ta dogodek ugodnih izidov in številom vseh mogočih izidov. Torej moramo ugotoviti, koliko je vseh možnih razdelitev kart in koliko od teh je takih, pri katerih je vsaj en igralec brez taroka. Tukaj si pomagamo s kombinatoriko. Prvemu igralcu izberemo poljubnih 12 kart od 54, pri drugem imamo na izbiro



le še 42 kart in tako naprej do talona. Tako je število vseh mogočih izidov enako

$$\blacksquare n = \binom{54}{12} \binom{42}{12} \binom{30}{12} \binom{18}{12} \binom{6}{6}.$$

Tistemu, ki nima taroka, karte izbiramo le med barvami, naprej pa gre enako kot prej (v nadaljnjem izbiranju je dopuščeno, da je še en igralec brez tarokov). Za število ugodnih izidov dobimo

$$\blacksquare m = \binom{32}{12} \binom{42}{12} \binom{30}{12} \binom{18}{12} \binom{6}{6}.$$

Sedaj ni težko izračunati iskane verjetnosti

$$\blacksquare P = \frac{m}{n} = \frac{\binom{32}{12}}{\binom{54}{12}} \approx 0,0006583.$$

Verjetnost je pričakovano precej majhna, a še zdaleč ne tako majhna, da kak igralec tega ne bi mogel doživeti. Verjetnost P pravi, da bi se tak dogodek v 10000 igrah zgodil malo manj kot sedemkrat (in dejansko sta avtorja to situacijo že nekajkrat izkusila).

Škis-partija

Sedaj pa si pogledjmo še problem, ki se pojavi na koncu igre. Pogosto se igranje taroka zaključi s škis-partijo, ki pomeni naslednje: kdor v tisti igri dobi škisa (to je najvišji tarok in zato izjemno pomembna karta), bo mešal zadnjo igro (meša se po vrsti), če pa je škis v talonu, se postopek ponovi. Radi bi izračunali, koliko iger naj v povprečju pričakujemo po odigrani škis-partiji. To vprašanje zahteva nekaj teorije.

Slučajne spremenljivke in matematično upanje

V mnogih primerih lahko poskusu priredimo spremenljivko, ki v vsakem poskusu sicer zavzame natanko eno od možnih vrednosti, a katera bo ta, pred poskusom ne moremo natanko napovedati. Ker je vrednost odvisna od slučaja, opisano spremenljivko imenujemo *slučajna spremenljivka*. Navadno jih označujemo z velikimi tiskanimi črkami.

Množico vrednosti, ki jih slučajna spremenljivka lahko zavzame, bomo imenovali *zaloga vrednosti*. Pri nas bo zaloga vrednosti vedno končna ali števno neskončna. Predpis, ki pove, kolikšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame določeno vrednost iz svoje zaloge vrednosti, imenujemo *porazdelitveni zakon*.

litveni zakon. Zalogo vrednosti in porazdelitveni zakon lahko skupaj pregledno predstavimo z *verjetnostno shemo*:

$$\blacksquare X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

Pri tem so $x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ elementi zaloge vrednosti, $p_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ pa verjetnosti dogodka, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti x_i . Seveda velja $\sum_i p_i = 1$.

Poglejmo si met poštene igralne kocke. Za slučajno spremenljivko vzamemo število pik, zato ima verjetnostna shema obliko

$$\blacksquare Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Sedaj je vse pripravljeno za vpeljavo *matematičnega upanja slučajne spremenljivke* X , ki ga označujemo z $E(X)$:

$$\blacksquare E(X) \stackrel{\text{def}}{=} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n + \dots$$

V primeru neskončne zaloge vrednosti $E(X)$ ne obstaja vedno. V bistvu je matematično upanje tehtana (ponderirana) aritmetična sredina vrednosti slučajne spremenljivke, zato mu pravimo tudi povprečna vrednost slučajne spremenljivke, pri čemer so uteži posamezne verjetnosti. Pove nam naslednje: če neki poskus ponovimo zelo velikokrat in si vsakič zabeležimo vrednost slučajne spremenljivke, bo na koncu njeno povprečje blizu matematičnemu upanju.

Spomnimo se primera s kocko in izračunajmo matematično upanje za število pik.

$$\blacksquare E(Y) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$$

Seveda je jasno, da 3,5 pik ne moremo vreči, a rezultat ne govori o tem. Pravi namreč, da če kocko vržemo npr. tisočkrat zapored, smemo pričakovati, da bo vsota pik vseh metov okoli 3500.

Vrnitev na škis-partijo

Vrnimo se na problem škis-partije. Slučajna spremenljivka je število iger po škis-partiji in izračunati želimo njeno matematično upanje oziroma povprečno vrednost. Imenujmo igralca, ki meša škis-partijo, mešalec. Prvi igralec za mešalcem dobi 12 kart, in ker je vseh kart 54, je verjetnost, da prav on dobi



škisa, $12/54 = 2/9$. To pomeni, da je verjetnost dogodka, da se bo odigrala še natanko ena igra, $2/9$. Ker tudi vsi ostali igralci dobijo enako število kart, so verjetnosti za 2, 3 in 4 igre prav tako $2/9$ (pri čemer škis ni v talonu). Preostane še verjetnost $1/9$ za to, da je škis v talonu. V tem primeru odigramo eno igro, verjetnosti za nadaljnje igre pa so spet enake. Zato za iskano matematično upanje E dobimo naslednjo neskončno vsoto:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{2}{9} \cdot 4 + \\ &\quad + \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{2}{9} \cdot 4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} (1 + \dots) \dots \right). \end{aligned}$$

Če označimo $a = \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{2}{9} \cdot 4 = \frac{20}{9}$, dobimo

$$\begin{aligned} E &= a + \frac{1}{9} \left(1 + a + \frac{1}{9} \left(1 + a + \frac{1}{9} (\dots) \dots \right) \dots \right) = \\ &= a + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \left(a + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{9^2} \left(a + \frac{1}{9} \right) + \dots = \\ &= \left(a + \frac{1}{9} \right) \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{a + \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{21}{8} = 2,625. \end{aligned}$$

Neskončna vrsta v zadnji vrstici se imenuje *geometrijska vrsta*. Ta je konvergentna, saj je količnik dveh zaporednih členov $1/9$, kar je med -1 in 1 .

Drugi način za izračun našega matematičnega upanja je, da izračunamo verjetnosti za posamezno število iger, pri tem pa štejemo nepretrgoma. Da se odigra dve igri, obstaja možnost, da škisa dobi prvi igralec za mešalcem (verjetnost $2/9$), ali možnost, da je bil v talonu in ga je v drugem krogu dobil mešalec (verjetnost $\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9}$). Če tako nadaljujemo s preštevanjem možnosti za posamezno število iger, dobimo za matematično upanje naslednjo neskončno vrsto:

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{9} \right) + 3 \cdot \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \right) + \\ &\quad + 4 \cdot \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} \right) + \\ &\quad + 5 \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \right) + \\ &\quad + 6 \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^5} \right) + \dots \end{aligned}$$

Če označimo $b = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} = \frac{820}{729}$, prve tri

člene pa izračunamo, dobimo

$$E = \frac{356}{243} + \frac{2b}{9} \left(4 + \frac{5}{9} + \frac{6}{9^2} + \frac{7}{9^3} + \dots \right).$$

Dobili smo neskončno vrsto, ki je zelo podobna neskončni geometrijski vrsti, zato lahko našo vrsto seštejemo na premeten način tako, da jo razbijemo na posamezne vsote, ki pa jih znamo sešteti (zaradi absolutne konvergence jih lahko poljubno seštevamo):

$$\begin{aligned} 4 + \frac{5}{9} + \frac{5}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \frac{5}{9^4} + \dots &= \frac{37}{8} \\ \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \dots &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \dots &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9^2} \\ \frac{1}{9^4} + \dots &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9^3} \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Če seštevamo po stolpcih, dobimo zgornjo vrsto. Ta seštevek pa je enak seštevku po vrsticah. Tako na desni strani ponovno dobimo neskončno geometrijsko vrsto z vsoto $297/64$. Končno izračunamo $E = 21/8$ (bralca naprošamo, da vse izpuščene izračune preveri).

Dobili smo rezultat malo nad 2,5. To je bilo tudi pričakovati, saj bi dobili rezultat točno 2,5, če ne bi upoštevali talona. Slednji nam rezultat malo poveča saj lahko po njegovi zaslugi igramo več kot štiri igre. Dobljeni rezultat si razlagamo tako: če bi strasten igralec (še boljše veliko igralcev) celo življenje beležil število iger po škis-partiji in nato izračunal povprečje, bi bilo to zelo verjetno povsem blizu 2,625.

S tem smo odgovorili na obe vprašanji iz uvoda. Poleg tega smo vpeljali močno in uporabno orodje – matematično upanje, za katerega upamo, da ga bodo znali bralci uporabiti tudi pri drugih problemih, povezanih z verjetnostjo.

Literatura

[1] J. Čibej, *Matematika. Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika*, DZS, Ljubljana 2001.

× × ×

www.presek.si

× × ×

FAMNITovi Izleti



KATJA KLOBAS

→ 25. septembra se je v koprskem Centru eksperimentov zbrala množica ljudi. Kaj je tako napolnilo koprski Center eksperimentov?

Ta dan je potekalo uvodno predavanje iz cikla *FAMNITovi Izleti v matematično vesolje*. Gre za poljudna predavanja o „matematiki in njeni vlogi v sodobnem svetu“. Potekajo praviloma en petek v mesecu, ob 18. uri na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije v Kopru (FAMNIT).

Bistvo cikla v uvodniku programske knjižice zelo lepo povzame prof. dr. Dragan Marušič: „Predstavljati sodobne probleme in delo matematika na poljuden in širši javnosti dostopen način je lahko danes svojevrsten izziv tudi za vrhunskega raziskovalca. Živimo namreč v času, ko so izjemni tehnološki dosežki vsakomur dostopni zgolj s pritiskom na gumb in smo kar nekako ponosni, da nam ni treba nič vedeti o njihovem delovanju. Tako zlahka pozabimo na tisočletna odkritja matematikov, filozofov, zvezdogledov, zemljemercev, inženirjev, kozmologov, ekonomistov, računalničarjev in drugih, katerih spoznanja oblikujejo današnji svet.

Ali je sploh še mogoče mladim približati pravo matematiko – ta čudoviti jezik idej, ustvarjalnosti in domišljije – ko pa se zdi, da je za dijake pomembno le še rutinsko reševanje maturitetnih nalog brez kakršnegakoli razumevanja časa in okolja, v katerem matematika nastaja?

Verjamem, da lahko z letošnjim ciklom Izletov v matematično vesolje nagovorimo tudi tiste, ki o tem dvomijo. Veseli me, da so se našemu povabilu k sodelovanju odzvali predavatelji, ki imajo kljub mladosti že pestre mednarodno obarvane življenjepise, so predani raziskovalci in zavzeti pedagogi, hkrati pa so tako ali drugače povezani tudi z našo fakulteto. Želim si, da bi tovrstna večerna srečanja postala neskončno dolg izlet: tradicionalno druženje primorskih brihtnih glav ob zanimivih znanstvenih odkritjih in nabrušenih predavateljih z različnih slovenskih in tujih ustanov.“



SLIKA 1.

Naslovnica programske knjižice



SLIKA 2.

Prvo predavanje iz cikla je napolnilo koprski center eksperimentov, zato so bila nadaljnja predstavljena v prostore FAMNITa. (foto: Pavel Fičur)

Do zdaj smo imeli priložnost poslušati štiri predavanja. Prvo, z naslovom *Matematika: Od zapletene simbolnosti do preproste vsakdanjosti* je potekalo 25. septembra v Centru eksperimentov. Prof. dr. Dragan Marušič je predstavil uporabnost matematike v vsakdanjem življenju. Začel je s slikovnimi dokazi preprostih algebrskih izrazov, končal pa z iskanjem hamiltonskih poti na dodekaedru. Med drugim smo izvedeli, da je poklic matematika na vrhu Wall Street Journal-ove lestvice najboljših poklicev in zakaj blagajniški čitalec včasih zapiska.





SLIKA 3.
Zbiranje listkov s števkami
od 1 do 99 na drugem pre-
davanju. (foto: Pavel Fičur)

Dr. Aljaž Ule je imel 16. oktobra na FAMNITU predavanje z naslovom *Teorija iger: matematika strateškega odločanja*. Odločanje v okoljih, kjer več udeležencev sprejema odločitve hkrati, ni enostavno, kljub temu pa je mogoče z matematičnimi postopki predvideti njihovo ravnanje. Predavatelj nam je predstavil zakonitosti odločanja ljudi v takih okoljih. Za nas je pripravil tudi nagradno igro. Vsak si je moral izbrati poljubno število od 1 do 99, nagrado pa so dobili tisti, ki so izbrali število, najbližje dvema tretjinama povprečnega števila. Med pomembnejšimi pojmi, ki smo jih spoznali, je Nashevo ravnovesje, stanje, v katerem so vsi, ki se v danem primeru odločajo, zadovoljni z odločitvijo.

Mag. Boštjan Kuzman je 13. novembra v predavanju z naslovom *Zakaj je $\pi = 4$ in druge zgodbe o razdaljah* povzel zgodovino števila π . π je najverjetneje najbolj znana matematična konstanta, že Arhimed je dokazal, da je konstanta, ki se pojavlja pri ploščini in obsegu kroga, ista. Mnogi zanesenjaki so stoletja iskali vse boljše izračune števila π . Eden izmed bolj zanimivih je 3,2, katerega so leta 1882 v ameriški zvezni državi Indiana skoraj uzakonili za uradnega. Če je π razmerje med obsegom in premerom kroga, naletimo na težavo, definirati moramo razdaljo. Seveda se z definicijo razdalje to razmerje spreminja. Predavatelj nam je predstavil tudi različne definicije pojma razdalja, kot sta kraljeva razdalja



SLIKA 4.
Zaključek tretjega predava-
nja (foto: Martin Milanič)



SLIKA 5.
Obisk Izletov je še vedno šte-
vilčen. (foto: Martin Milanič)

(koliko potez potrebuje kralj na šahovnici, da doseže neko polje) in taksi razdalja (pot do posamezne točke, če je dovoljeno le premikanje v dve smeri).

11. decembra je potekalo četrto predavanje *Na kratko o teoriji števil*. Dr. Primož Šparl nas je popeljal skozi pestro zgodovino teorije števil. Pričel je v antični Grčiji, pri Pitagorejcih, ki so med drugim raziskovali popolna števila, ta so enaka seštevkom vseh svojih pravih deliteljev. Predstavil nam je nekaj znanih izrekov, med katerimi je tudi zadnji Ferma-

tov izrek, ki ga je dokazal šele Andrew John Wiles (s pomočjo Richarda Taylorja) v 90-ih letih 20. stoletja.

Za mnenje o predavanjih smo povprašali nekaj poslušalcev.

Neva Ećimović, prof. matematike na Gimnaziji Koper je povedala: *Predavanja so primerna za srednješolce, teme so zanimive. Dosti je odziva, kar pomeni, da je zanimanje kar veliko. Organizatorji so se zelo potrudili.*

Lara, dijakinja: *Vsa predavanja so se mi zdela zanimiva, ker me matematika zanima in ker sem izvedela precej novih stvari. Najbolj všeč mi je bilo drugo predavanje, kjer si moral za igro napisati eno številko, in sem za svojo številko 23 dobila Kinder jajček.*

Angelika, dijakinja: *Všeč mi je, da vsako predavanje posega v drugo področje matematike in da so na primeren nivoju, ne preveč strokovnemu niti preveč poljudnemu, tako da so razumljiva, zanimiva in poučna hkrati. Do zdaj mi je bilo najbolj všeč predavanje $\pi = 4$, ker nam je predavatelj na res zelo zanimiv način predstavil zgodovino števila π in razložil, kaj sploh razdalja je ter nas seznil še z „drugimi“ razdaljami, kot sta npr. taksi in kraljeva razdalja.*

V načrtu je še pet predavanj:

- 15. januar; *Iskanje filogenetskih dreves: smo matematiki in opice v sorodu?*, Martin Milanič, UP FAMNIT
- 12. februar; *Donos in tveganje: matematikove finančne dileme*, Rado Pezdir, UP FAMNIT
- 12. marec; *Vam je všeč brokoli?*, Štefko Miklavič, UP FAMNIT
- 9. april; *O nogometnih žogah ali zakaj matematike zanima tudi kemija*, Klavdija Kutnar, UP FAMNIT
- 7. maj; *Od matrik do barvanja grafov*, Bojan Kuzma, UP FAMNIT

Izleti pomenijo prijetno popestritev petkovih poldnevov. Zanimiva, skrbno pripravljena predavanja gotovo predstavljajo novost na obali. Zanimanje je še vedno presenetljivo veliko, kar daje odgovor

na vprašanje, ki si ga je postavil prof. dr. Dragan Marušič v uvodniku programski knjižici: „Ali je sploh še mogoče mladim približati matematiko?“. Zdi se, da je.

Dodatne informacije o Izletih lahko dobite na

<http://izleti.famnit.upr.si>

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

IZIDOR HAFNER

→ V 8 x 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2 x 4) nastopalo vseh 8 števil.

		8		7		1	2
	5		7				
	2					5	
				8	3		
4						8	1
3			2				4
5			6				
					4		

xxx

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

xxx

9. tekmovanje dijakinj in dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

↓ ↓ ↓

DARINKA ŽIŽEK

→ V šolskem letu 2008/2009 je bilo izvedeno 9. tekmovanje dijakinj in dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike, tekmovanje B. Prepričani smo bili, da se bo število udeležencev tekmovanja ustavilo na številki 5000, vendar nas je letošnje število tekmovalcev presenetilo. Število se je kljub manjšemu številu dijakov v šolah povečalo za več kot 100. Takšno zanimanje je dokaz, da smo se pred leti pravilno odločili, ko smo pričeli s tem tekmovanjem. Zavedamo se tudi, da s spreminjanjem šolskih programov prihaja do razhajanj pri predelani snovi, kar lahko povzroči težave pri sestavi primernih nalog.

RAVNI TEKMOVANJA. Tekmovanje poteka na treh ravneh:

- šolsko (Evropski matematični kenguru),
- regijsko, ki je organizirano v osmih centrih in
- državno tekmovanje.

OBLIKE OZIROMA VRSTE NALOG. Naloge na šolskem tekmovanju so izbirnega tipa, na regijskem so naloge izbirnega tipa in kompleksne naloge, na državnem tekmovanju pa je pet kompleksnih nalog. Naloge za vse ravni tekmovanja pripravi državna tekmovalna komisija.

Izvedba 9. tekmovanja

ŠOLSKO TEKMOVANJE. Izpeljano je bilo 19. marca 2009, udeležilo se ga je 5127 dijakov, kar pomeni povečanje števila tekmovalcev glede na prejšnja tek-

movanja. Na tem nivoju je bilo podeljenih 1616 bronastih priznanj.

REGIJSKO TEKMOVANJE. 1030 tekmovalcev je tekmovanje nadaljevalo na regijskem tekmovanju, ki je bilo organizirano 1. aprila 2009 v regijskih centrih.

Regija	Gostitelj tekmovanja
Celjska regija	Šolski center Slovenj Gradec, Srednja strokovna in zdravstvena šola
Dolenjska regija	Kmetijska šola Grm in biotehniška gimnazija, Novo mesto
Gorenjska regija	Biotehniški center Naklo, Srednja šola
Ljubljanska regija 0	Srednja poklicna in strokovna šola Bežigrad, Ljubljana
Ljubljanska regija 1	Ekonomska šola Ljubljana
Mariborska regija	Srednja šola za oblikovanje Maribor
Pomurska regija	Šolski center Ptuj, Elektro in računalniška šola
Primorska regija	Srednja šola Vena Pilonaj Ajdovščina

Na regijskem tekmovanju je bilo podeljenih 415 srebrnih priznanj.

DRŽAVNO TEKMOVANJE. 18. aprila 2009 smo izvedli 9. državno tekmovanje, ki je bilo na Tehniškem šolskem centru Kranj. Državnega tekmovanja se je ude-

ležilo 155 tekmovalcev iz srednjih tehniških in strokovnih šol širom Slovenije. Državna tekmovalna komisija je podelila 103 zlata priznanja. Najboljšim tekmovalcem v posamezni tekmovalni kategoriji smo na svečani podelitvi v Ljubljani 21. maja 2009 podelili 22 nagrad. Dobitniki nagrad so:

1. NAGRADA

1. letnik

- URH JEVŠOVAR, Šolski center Novo mesto, Srednja zdravstvena in kemijska šola

2. letnik

- TANJA ŠTULAR, Gimnazija in veterinarska šola, Ljubljana

3. letnik

- JAKOB CVETKO, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo

4. letnik

- ROBI CVIRN, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- IRENA DRENŠEK, Ekonomska šola Novo mesto
- VESNA DRENŠEK, Ekonomska šola Novo mesto
- DAVID JESENKO, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- ŽIGA MEDOŠ, Šolski center Ljubljana, Srednja strojna in kemijska šola
- SIMON PAJK, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija
- ROK ROŽIČ, Srednja ekonomska šola Maribor

2. NAGRADA

1. letnik

- ANDRAŽ BABNIK, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana
- MARKO TURŠIČ, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana

2. letnik

- ANDREJ VIDIC, Srednja šola za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana

3. letnik

- LUKA LAZNIK, Šolski center Celje, Srednja šola za gradbeništvo

4. letnik

- TAMARA OBREZA, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo

3. NAGRADA

1. letnik

- NEJC KLEMENC, Gimnazija in srednja kemijska šola Ruše
- BOŠTJAN KOPINŠEK, Šolski center Celje, Srednja šola za gradbeništvo

2. letnik

- PRIMOŽ HREN, Šolski center Celje, Srednja šola za strojništvo in mehatroniko
- DAVID KOCJAN, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

3. letnik

- MATIC KNAP, Šolski center Velenje, Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola
- MATEJ PINTARIČ, Srednja elektro-računalniška šola Maribor

4. letnik

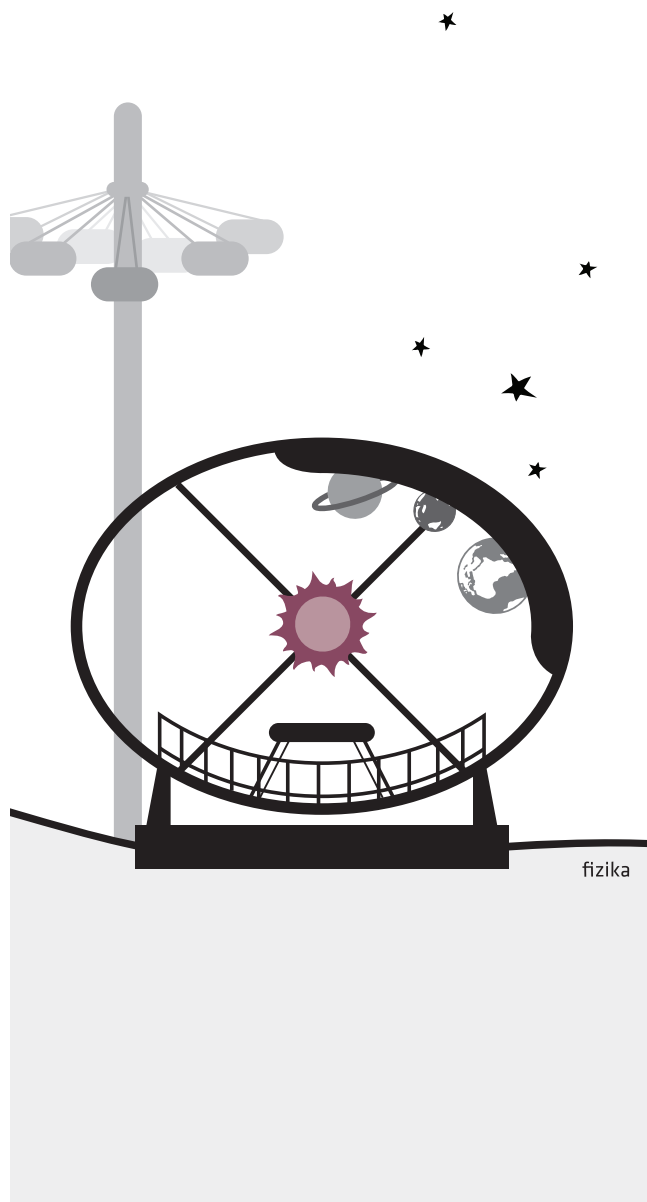
- ŠPELA BAH, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- URBAN RAK, Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana

Ob tej priložnosti se vsem, ki so pripomogli k uspešni izpeljavi vseh tekmovanj najlepše zahvaljuje



→ mo in jih vabimo k nadaljnemu sodelovanju, prav tako vabimo k organizaciji tekmovanj nove organizatorje. Prepričani namreč smo, da se bo spricho tako velikega zanimanja tekmovanje ohranilo tudi v prihodnje.

xxx



Newtonova parabola

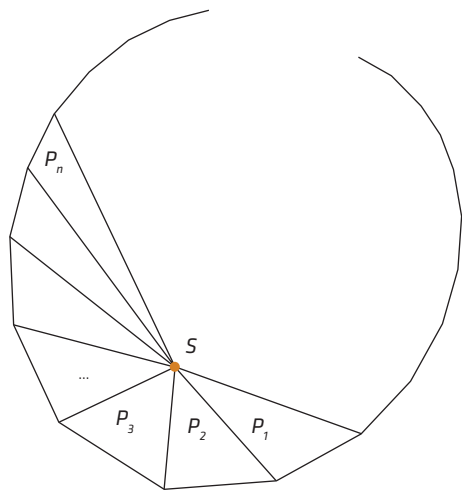
↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ V drugi polovici 17. stoletja je Isaac Newton teoretično pojasnil tire planetov na poti okrog Sonca in sile, ki tako gibanje omogočajo. Dopisovanje z Robertom Hookeom o tej temi ga je vzpodbudilo, da se je vprašanja resno lotil. Hooke je sicer pravilno trdil, da je tir planeta pod vplivom sile, ki kaže proti Soncu in ki pojema s kvadratom razdalje med planetom in Soncem, elipsa.

Trditev je v skladu s Keplerjevimi zakoni, ki so bili takrat že znani. V enem od njih je Kepler dognal, da je tir planeta eliptičen, v gorišču elipse pa je Sonce. Sila, ki je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje, je bila logična in zelo mikavna možnost, saj sledi neposredno iz tretjega Keplerjevega zakona za krožne tire, kar je tedaj tudi že bilo znano. Naloga, ki se je je lotil Newton, je že z računskega stališča še danes zahtevna, kljub obilici matematičnega orodja, ki nam je na voljo. A s fizikalnim premislekom, ki ga ni težko razumeti, in z nekaj znanja analitične geometrije, ki prav tako sodi med matematično orodje srednješolca, bomo zmogli hoditi po stopinjah velikega fizika in matematika.

Newton je najprej želel razumeti prvi Keplerjev zakon, ki trdi, da je ploščinska hitrost planeta pri gibanju okrog Sonca konstantna. Pojem ploščinske hitrosti je nenavaden in ga kaže pojasniti. Mislimo si, da veznica planeta in Sonca pušča na ravnini, po kateri se giblje planet, svojo sled. V kratkem času Δt opiše veznica lik podoben trikotniku z vrhom v Soncu in kratko, skoraj ravno osnovno ploskvijo. Liku lahko izračunamo ploščino, če ga obravnavamo kot ostrokotni trikotnik. Ploščinska hitrost je tedaj razmerje med ploščino in časom Δt . Newton je silo na planet usmeril proti Soncu in si predstavljal, da deluje v kratkih enakomernih sunkih. Uvidel je, da

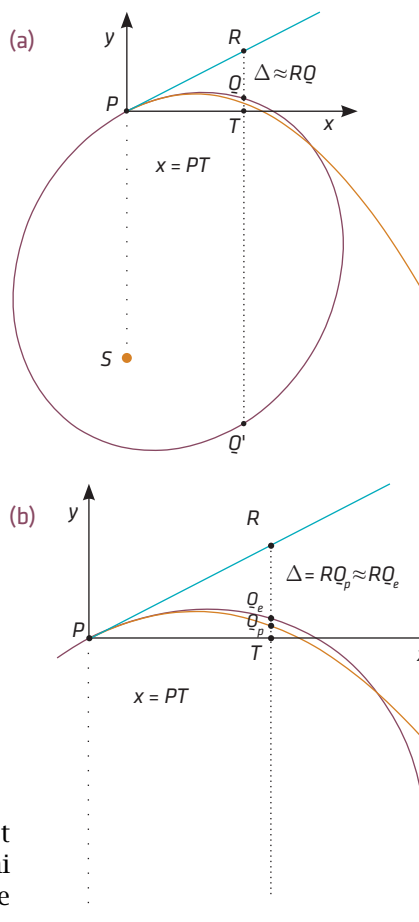


SLIKA 1.

Ko na telo deluje sila, ki kaže proti negibnemu središču S , v enakomernih sulkih, popiše veznica telesa in točke S med zaporednimi sunkoma vedno enake ploščine: $P_1 = P_2 = \dots = P_n$. Newton je v Principih zelo preprosto pokazal, da je to res. Dovolj vneti bralec bi morda to znal pokazati tudi sam.

se ploščinska hitrost res ohranja ne glede na velikost sunkov, če so ti le ves čas usmerjeni proti isti negibni točki – Soncu. Ker se med sunkoma planet giblje po premici, je pri dokazovanju izračunal ploščine trikotnikov, ki jih je veznica zarisala pri gibanju (glej sliko 1). Pokazal je, da so njihove ploščine med seboj enake. Z naraščanjem pogostosti sunkov se približamo pravi razmeram, kjer sila deluje ves čas. Njegovo izvajanje ni zapleteno in ga zmore ponoviti nekoliko bolj zagret srednješolec. Prvi Keplerjev zakon moramo uporabiti pri reševanju osrednjega vprašanja: kako je sila med planetom in Soncem odvisna od razdalje med njima, če ves čas kaže proti Soncu, planet pa se giblje po eliptičnem tiru?

Pri reševanju je Newton naredil odločilni korak: privzel je, da se tir planeta, ki se sicer giblje po elipsi, na zelo kratkem odseku poti ne razlikuje dosti od tira pri poševnem metu, torej paraboli. Tako sila na planet kot njena smer se na kratkem odseku tira namreč skoraj ne spreminjata, kar so ravno razmere pri poševnem metu. To izjemno pomembno stališče ni bilo novo, vpeljal ga je že Christian Huygens pri izpeljavi sil pri kroženju. Razvoj fizike in matematike v naslednjih stoletjih je pokazal, da je tovrstno



SLIKA 2.

Ko planet doseže poljubno izbrano točko P , nadaljuje pot po tiru. Če bi tedaj sila na planet ostala ves čas enaka, bi se planet gibal po paraboli (rjava črta). Razmere pri gibanju po paraboli pa so računsko preproste. Razmere blizu planeta kaže povečana slika (b). Vidimo, da se parabola zelo tesno prilaga pravemu tiru. Točki Q_e in Q_p se pri vse manjšem x hitro zlijeja v eno.

„analitično“ stališče izjemno plodonosno.

Na sliki 2a in podrobneje na sliki 2b so prikazane razmere pri gibanju planeta po eliptični poti okrog Sonca v smeri urinega kazalca. Ko planet doseže izbrano točko P , naj deluje nanj konstantna sila, ki je vzporedna s smerjo PS , torej od točke P do žarišča elipse S , kjer je Sonce. Če sile ne bi bilo, bi telo nadaljevalo svojo pot po tangenti na elipso v točki P (modra črta). Zaradi sile pa telo pada po paraboličnem tiru (rjava črta), zanj pa velja znana Galilejeva zveza:

$$\Delta = \frac{g}{2} t^2.$$

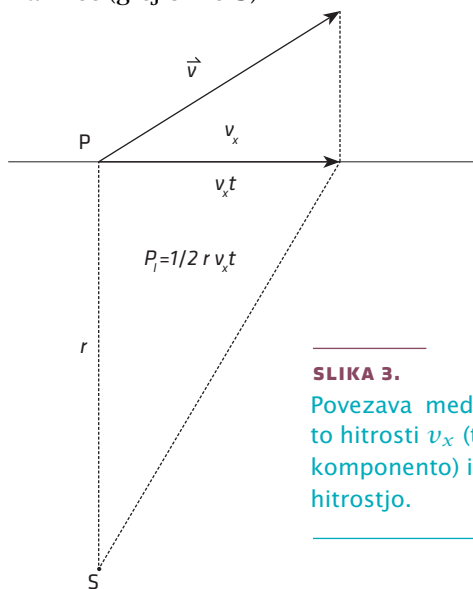
Čas t izrazimo s komponento hitrosti v_x , ki je pravokotna na smer PS

$$t = \frac{x}{v_x}$$

in zato

$$\rightarrow \quad \Delta = \frac{g}{2} t^2 = \frac{g x^2}{2 v_x^2}.$$

Hitrost v_x pa ni kakršnakoli. Ploščina P_l , ki jo zariše veznica med planetom in goriščem S v času t , je namreč (glej sliko 3)



SLIKA 3.
Povezava med komponento hitrosti v_x (tangencialno komponento) in ploščinsko hitrostjo.

$$\blacksquare P_l = \frac{r v_x t}{2}.$$

Razdaljo od planeta do gorišča S smo označili z r . Ker je ploščinska hitrost $K = P_l/t$ konstantna, velja

$$\blacksquare v_x = \frac{2K}{r}.$$

Sedaj imamo

$$\blacksquare \Delta = \frac{g r^2}{8 K^2} x^2$$

in tako je pospešek g

$$\blacksquare g = \frac{8 K^2}{r^2} \frac{\Delta}{x^2}.$$

Newton se je sedaj znašel pred nalogo, ki terja določiti mejno vrednost razmerja

$$\blacksquare \frac{\Delta}{x^2}$$

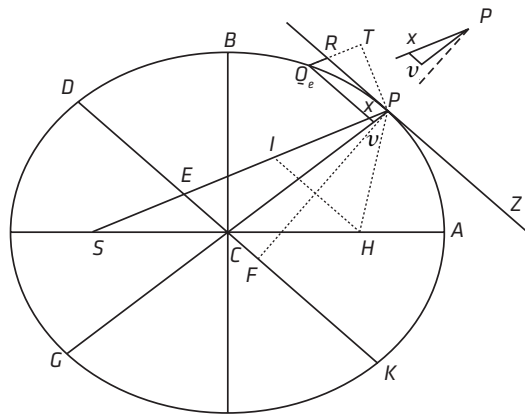
za poljubno izbrano točko P na elipsi, ko se x približuje vrednosti nič. Takrat se eliptični tir in parabola vse tesneje prilegata, kot vidimo nazorno na sliki 2b. Verjetno je že zaslutil, da je pri elipsi to razmerje

enako za vse njene točke. Mejno vrednost razmerja bomo označili z L^{-1} .

Newton se je naloge lotil povsem geometrijsko, pri čemer je ključno vlogo odigral izrek, ki trdi, da velja pri elipsi za poljubno točko v na daljici PG

$$\blacksquare \frac{P_v G_v}{Q_v^2} = \text{konst.}$$

Oznake točk in daljic smo privzeli po originalni sliki iz Newtonovih Principov (slika 4). Daljica PG gre

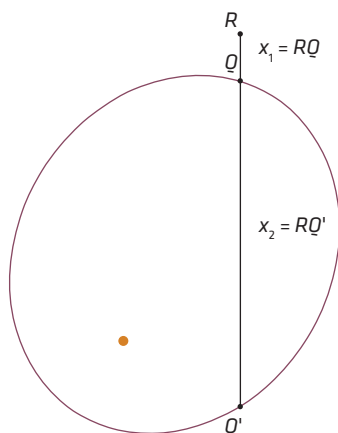


SLIKA 4.
Newtonova slika razmer pri gibanju planeta okrog Sonca. Na njegovi sliki se planet giblje v nasprotni smeri urinega kazalca.

skozi izbrano točko P in skozi središče C , daljica Q_v pa je vzporedna tangenti RPZ . Zanimivo Newtonovo izvajanje najdemo podrobno razloženo v Principih, seveda v moderni izdaji iz leta 1999, ki je opremljena z obširnimi komentarji.

Tu bomo ubrali drugo, danes morda nekoliko bolj pregledno pot, ki bi jo lahko tudi Newton. Analitično geometrijo, to je opis geometrijskih pojmov z enačbami, je namreč razvil Rene Descartes že v prvi polovici 17. stoletja. Najprej izpeljemo izrek, ki spominja na potenco kroga. Iz točke R izven elipse potegnimo premico, ki seka elipso v dveh točkah, Q in Q' (glej sliko 5). Pri nas naj bo ta premica vzporedna s premico PS . Brez težav izpeljemo enačbo, ki bi ji lahko rekli potenca elipse. Če označimo z x_1 razdaljo RQ , z x_2 pa RQ' , velja

$$\blacksquare x_1 x_2 = \frac{(1 + k_0^2) a^2 b^2}{a^2 k_0^2 + b^2} \left(\frac{y_P^2}{b^2} + \frac{x_P^2}{a^2} - 1 \right).$$



SLIKA 5.

K „potenci elipse“. V literaturi najdemo ta izraz le v zvezi s krožnico. Produkt razdalj RQ in RQ' pa se tudi pri elipsi razmeroma preprosto izraža s parametroma a in b , ki opisujeta elipso, in smernim koeficientom premice.

Z a smo označili veliko polos elipse, z b malo, s k_0 smerni koeficient premice RQQ' , z x_P in y_P pa koordinati točke P . Pri krogu je $a = b = R$ in dobimo znano enačbo za potenco kroga

$$x_1 x_2 = y_P^2 + x_P^2 - R^2.$$

Produkt $x_1 x_2$ je pri krogu pač neodvisen od smeri premice, če le seka krožnico ali pa se je dotika.

Pri računu razmerja $\frac{\Delta}{x^2}$ upoštevamo, da velja

$$\Delta = x_1 = RQ$$

in

$$x = PT.$$

Obe razdalji povežemo tako, da poiščemo sečišče premice, ki je vzporedno premaknjena glede na premico PS , in tangente, torej koordinati točke R in sečišče te premaknjene premice in pravokotnice na PS , torej točko T . Iz tako določenih točk takoj lahko izračunamo

$$L^{-1} = \frac{x_1}{x^2} = \frac{1}{x_2 x^2} (x_1 x_2).$$

Ker iščemo mejno vrednost tega razmerja pri vse manjšem x , bosta premici PS in njena premaknjenska vse bližje. Za x_2 lahko vstavimo kar razdaljo PQ' in, glej čudež, končno res dobimo kar se da preprost rezultat:

$$L^{-1} = \frac{a}{2b^2}.$$

Računi, ki pripeljejo do tega, terjajo nekaj „knjigovodske“ spretnosti. Količino L so nekdaj po latinsko imenovali „latus rectum“, danes pa je ta izraz že precej pozabljen. Za radovedne: katera dolžina je to?

Vidimo, da je pri študiju gibanja zelo smotno proučevati le majhno okolico pravega tira in ga nadomestiti s parabolo. Računi tako postanejo preprosti. Stališča te vrste prevejajo vso matematično analizo.

× × ×

Stare številke revije Presek

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Izkoristite možnost dodatnih popustov pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in elektronski pošti narocila@dmfa.si.







	NERODA PO DOLENJSKO	DELOVNI POMNILNIK RAČU- NALNIKA	IGOR LUKŠIČ	PO PRISEGI ZNAN STAROGR. ZDRAVNIK	REKA, KI TEČE SKOZI PARIZ					TOVARNA STIKAL NA IZLAKAH PRAKANTON V SVICI				ŠVICARSKI MATE- MATIK (LEON HARD)	RAJMOND DEBEVEC	KLOROFIL	SKLAD- NOST, KONGRU- ENCA	ŽENSKO IME, KI SIMBO- LIZIRA SMRT
				NASAD PRI HJIŠI NEKD. ČEŠ. PREMIER (MILOŠ)				VESOLJNI SVET LETUVIŠČE NASPROTI KOPRA										
				11			OKRAJŠANI ARTHUR				STARO- VEŠKA DEZELA JUDOV							
			NAŠ PEVEC (MILAN) PREKRIVA TELO SESALCEV							ERAZEM LORBEEK NAŠ VESLAČ (DENIS)					GIBANJE PO ZRAKU AMERIŠKA IGRALKA (LINDSAY)			
4		DOGOVOR						ANTON ŽABKAR GORSKA POSTO- JANKA				TROPSKA SMOLA PREDES- NIK PZS (FRANC)	9					
		PAS PRI KIMONU			MERIMO GA V PASKALIH		10			VRSTA USPAVALA HRV. OTOK Z BOŽAVO IN SALLJEM								
ST. ENOTA ZA REAKC. PRESEK V FIZIKI NATRIJ					LETINA									HINDUJEC				
					CIPA									RADIJSKA VODITE- LJICA VERBOLE				
				OTON ŽUPANČIČ	LAHKA LISTASTA RUDNINA	PERZJSKI KRAK HALKIDIKE S SAMO- STANI	PERZJSKI POLOSEL AVSTRIJ. SKLADAT. (GÖTTFRIED)				8		SVETO- PISEMSKI OČAK					SVETOVNA STAROST, VEČNOST



				METULJI Z VZORCEM OČES NA SPRED. KRILIH	IVAN LOTRIČ INDONE- ZIJSKI OTOK		
JURE IVANUŠIČ			OBLOGA IZ DESK DRŽAVNIK EISEN- HOWER				
EDINI IZDELEK DOLGOČENE VRSTE							SIMBOL ZA GALI
DEŠET BOŽJIH ZAPOVEDI							
CELINA ONSTRAN ATLANT. OCEANA	13						

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **19. marca 2010**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

× × ×

Topla in hladna voda v tekočem stanju (kapljevina)

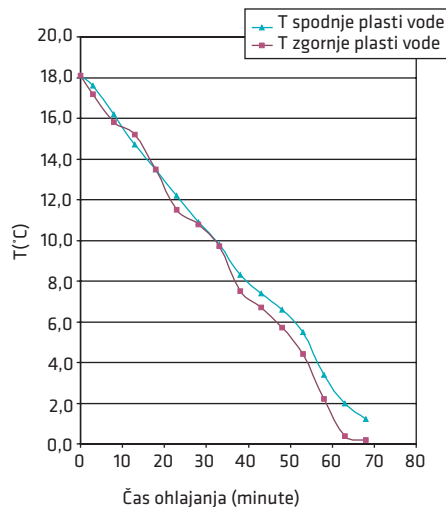
↓ ↓ ↓

ALEŠ JESENŠEK

→ Voda pri sobni temperaturi je redkejša in s tem lažja od hladnejše vode. Topla voda v obliki kapljevine se zato zadržuje nad hladno vodo. Pri višji temperaturi je voda redkejša, ker so molekule vode zaradi termičnega gibanja bolj oddaljene druga od druge.

Visok kozarec (500 ml) iz umetne snovi smo napolnili s tekočo vodo temperature okrog 20°C in ga postavili v vključeno skrinjo za zamrzovanje. V kozarcu smo vertikalno namestili dva senzorja in merili razliko temperature med sosednjima plastema vode. Dobili smo zanimive podatke (glej sliko 1). Pričakovali smo, da bo vrhnji senzor vedno zaznal višjo temperaturo vode, a so bile meritve nestabilne (glej diagram). Pomislili smo, da so naključne zaradi naše „spretnosti“, zato smo jih želeli izboljšati.

Izdelali smo sistem iz kovinske (aluminijeve) posode za žar in v njej ponovno vertikalno namestili obstoječa senzorja. Pri ohlajanju se je topla voda zadrževala ob zgornjem senzorju. V območju okrog 4°C je nenadoma prišlo do spremembe. Ob zgornjem senzorju, v zgornjem delu posode, se je pričela zadrževati hladnejša voda (slika 2). V učbeni-

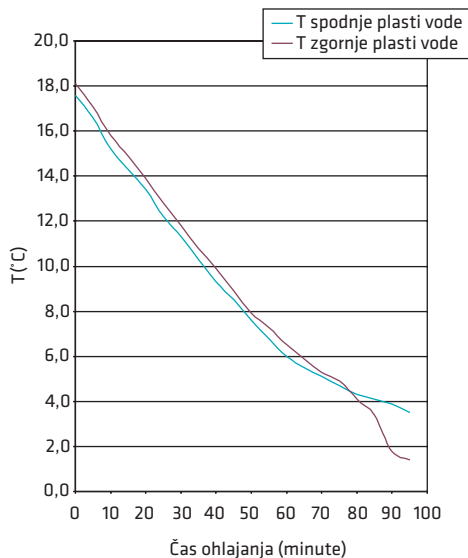


SLIKA 1.

Temperaturi ohlajanja dveh plasti vode v visoki čaši (plasti sta si oddaljeni 10 mm). Temperatura v zmrzovalniku od -8 do -15°C .

kih smo zasledili, da je to zaradi anomalije gostote vode pri tej temperaturi značilen pojav.

Nadaljevali smo s prirezano plitko posodo iz stroporja za shranjevanje piščančjega mesa. Ponovno smo vertikalno namestili oba senzorja za merjenje temperatur ter posodo z vodo postavili v delujočo skrinjo za zamrzovanje. Kar smo v nadaljevanju izmerili, nas je močno presenetilo. Nenadoma se je pri ohlajanju začela plast hladnejše vode zadrževati nad toplejšo vodo tudi pri temperaturi nad 4°C . Nismo zasledili vertikalnega mešanja zaradi različnih tem-

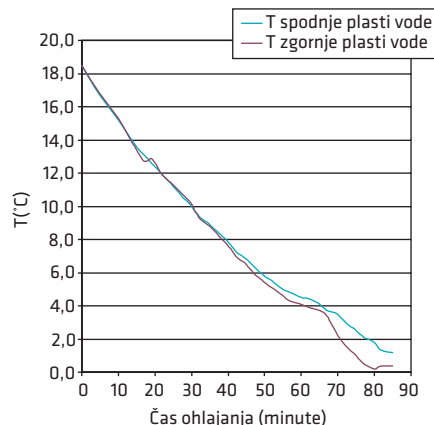
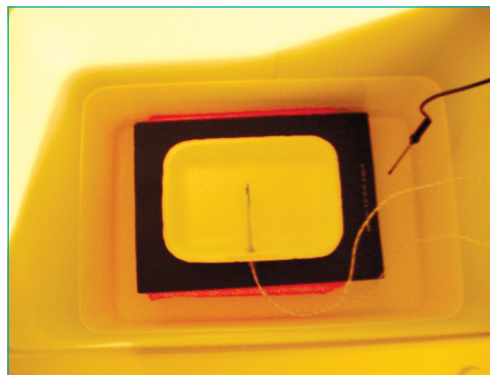


SLIKA 2.

Temperaturi ohlajanja dveh plasti vode v aluminijevi (plasti sta si oddaljeni 20 mm). Temperatura v zmrzovalniku od -6 do -13°C .

peratur in s tem različnih gostot posameznih delov vode. To smo razumeli, kot da se plasti vode različnih temperatur ne razumejo dobro in hočejo ostati vsaka na svoji strani. Hladnejša voda (težja) je ostala nad toplejšo vodo (lažjo).

Naše pričakovanje, da bo toplejša voda vedno nad hladnejšo vodo, se ni uresničilo, kar je razvidno iz slike 3. Pomislili smo, da imata tekoči vodi različnih temperatur tudi različni notranji strukturi, ki ju loču-



SLIKA 3.

Temperaturi ohlajanja dveh plasti vode v posodi iz stiroporja (plasti sta si oddaljeni 13 mm). Temperatura v zmrzovalniku od -7 do -15°C .

jeta in celo premagujeta vpliv težnosti.

Mpembov pojav govori o tem, da včasih toplejša voda hitreje zmrzne kot hladnejša. Pojav so pogosteje opazili pri vodi v plitkih posodah. V vseh primerih so bile posode z vodo izpostavljene podobnemu mrazu.

Plasti vod različnih temperatur se vedno ne mešajo med seboj. Pojav je odvisen tudi od višine posod in od toplotne prevodnosti sten teh posod.

× × ×

www.presek.si

× × ×

Koliko toplote?

↓↓↓

MOJCA ČEPIČ IN ANA GOSTINČAR BLAGOTINŠEK

→ Fiziki v splošnem nismo zadovoljni le z razlagami tipa na desni. V šali jim pravimo „razlage z mahanjem rok“. Radi imamo (v splošnem) dvojce.

„Mahanje rok“ lahko pretvorimo v enačbe, poiščemo potrebne podatke in oblikujemo napoved izida kakšnega poskusa, izraženo v številkah in preverljivo z meritvijo. Lahko pa mahanje rok zapišemo tudi z enačbami in jih uporabimo, tako da iz meritev izračunamo nam neznane fizikalne lastnosti pri opazovanem pojavu.

Pa se preizkusimo v drugi nalogi. Poskusimo ugotoviti, koliko toplote se je preneslo skozi pokrovček v sneg pri prej opisanem poskusu. Dan je bil meglen, sonce je posijalo le za nekaj kratkih uric, a vseeno – na sliki lahko vidite, da je bil rezultat dobro viden.

Poskusite izračunati, koliko toplote je prejel sneg pod pokrovčki? To, kar boste izračunali, pretvorite še v energijo na m^2 površine. Pomagate si lahko z učbeniki za fiziko, kjer obravnavajo taljenje in fazne spremembe.

Za vas smo izmerili nekaj različnih količin predvsem zato, da se podatki nanašajo na okoliščine, v katerih je bilo opazovanje izvedeno. Torej:

- uporabili smo pokrovčke za navaden jogurt, ki ga je mogoče kupiti v 2dl plastičnih lončkih,
- prostornina snega 0,8l je tehtala 310 g,
- gostota ledu je 0,9 kg/l,
- talilna toplota ledu je 336 kJ/kg.

Poskusite odgovoriti še na dve vprašanji: *Zakaj beli pokrovček ni potonil? Ali lahko iz izračunov ocenite albedo za pokrovčke?*

Poskusite napovedati še nekaj: *Kaj bi se zgodilo, če bi na sneg položili zelo gladko kovinsko ploščico ali zrcalo ter počakali nekaj sončnih dni?*

× × ×

Kateri najpočasneje tone – hja, beli kot sneg vendar

ODGOVOR NALOGE

↓↓↓

MOJCA ČEPIČ IN ANA GOSTINČAR BLAGOTINŠEK

→ Nalogo v drugi številki Preseka smo zaključili s komentarjem: „Če bo zima snežena ...“ Zima je snežena, sneg je pomrznil in tak je idealen za naše poskuse in razmišljanje. Samo sončnih dni je bolj malo; s pohodom v pomlad pa bo tudi tedno več.

Poskus sva zastavili na naslednji način: namesto pokrovčkov od konzerve sva uporabili kar pokrovčke od jogurta. Primerni so kakršnikoli pokrovčki, da le niso različni, dobro pa je tudi, da so tanki. Postavitev eksperimenta na Anini garažni strehi, zaščiteni pred morebitnimi radovednimi sprehajalci, si lahko ogledate na sliki 1. Eksperiment sva postavili zvečer pred napovedanim sončnim dnevom, ki pa je žal prinesel kar nekaj megle. Kljub temu so bili rezultati presenetljivi. Slika 2 kaže večerno situacijo. Črni pokrovček se je pogreznil za 3 cm, (veeelikooo!), srebrni za 0,5 cm, beli pa je ostal na površini.

Pokrovčki so se razlikovali v eni sami lastnosti, v barvi površine. Bile so: bela (edigs), črna (alkoholni flomaster) in kovinska, ki bi jo lahko označili kot sivo. Torej, črni tone najhitreje, sivi počasneje, beli pa sploh ne tone.

Ali lahko kaj podobnega najdemo tudi v naravi?



SLIKA 1.

Večerna postavitev eksperimenta. Paličke so skrbele, da pokrovčkov morebiten veter ne bi odpihnil.



SLIKA 3.

Listje, ki je padlo z drevesa na sneg, je temnejše od snega, zato jih je sončna svetloba ogrela in sneg pod njimi se je stalil. Slika je bila posneta neposredno ob obali Bohinjskega jezera, zato je gornji rob kopen.



SLIKA 2.

Rezultat po nekaj uricah sonca. Na paličkah lahko ocenimo globino.

prepustijo, delno pa se absorbira. Neprozorni predmeti se od prozornih ločijo po tem, da ne prepuščajo svetlobe. Energija elektromagnetnega valovanja, kar svetloba pravzaprav je, se z absorpcijo pretvori v notranjo energijo snovi, v kateri se je absorbirala. Delež odbite svetlobe, pove *albedo*. Albedo je 1, če se vsa svetloba odbije, in 0, če se vsa svetloba absorbira. Albedo je odvisen od snovi in običajno tudi od valovne dolžine elektromagnetnega valovanja, ki na predmet iz te snovi pada. Elektromagnetna valovanja valovnih dolžin med 400 in 700 nm zaznavamo z očmi in jih imenujemo vidna svetloba, različne valovne dolžine pa zaznavamo kot različne barve. Odvisnost albeda od valovne dolžine svetlobe je zato vzrok, da je svet pisanih barv. Predmeti zelene barve namreč bolj odbijajo svetlobo „zelenih“ valovnih dolžin kot ostalih. Pri naših poskusih barve niso bile pomembne. Kaj pomeni albedo pri naših poskusih? Če je albedo 1, je predmet natanko take barve, kot je svetloba, ki ga osvetljuje. Ker običajna svetloba vsebuje vse barvne komponente v takih razmerjih, da jo vidimo kot belo, bo predmet osvetljen z običajno, sončno svetlobo, videti bel. Če pa ga bomo osvetlili z rdečo svetlobo, bo videti rdeč. Telo z albedom 0, svetlobe ne odbija in vidimo luknjo v svetlobi. Oko iz določenega dela prostora ne prejema nikakršnih informacij in to pomanjkanje informacij imenujemo „črno“. Vmesne stopnje albeda pomenijo, da se del

Zagotovo. Na sliki 3 so listi, ki so padli na sneg. Ker so temnejši od snega, so se v snegu počasi pogreznili.

Sedaj pa poskusimo razumeti, zakaj se temni predmeti na snegu v sončnem dnevu pogreznejo hitreje, svetli pa počasneje, ali pa sploh ne. Svetloba prinaša s seboj tudi energijo. Vsi dobro vemo, da se na soncu predmeti segrejejo (spomnimo se dobrodejnega učinka „sončka“ na hrbtu ob mrzlem zimskem dnevu). Svetloba se na površinah delno odbije, delno jo predmeti iz prozornih (prosojnih) snovi

vpadne svetlobe absorbira, del odbije, z besedami pa to opišemo kot bolj ali manj svetle oziroma temne sivine. V resnici albedo 1 in 0 ne poznamo, tema vrednostima se lahko le bolj ali manj približamo. Najboljši približek za albedo 1 so razne vrste zrcal, za albedo 0 pa s sajami počrnjene plošče.

Uporabili sva pokrovčke treh vrst – belega, črnega in hrapavega kovinskega, ki ga najbolje opredelimo z oznako siv. Zaradi absorpcije svetlobe so se grela. Ker je bila zato njihova temperatura višja od temperature pod njimi ležečega snega in zraka nad njimi, se je toplota iz pokrovčka pretakala v sneg in v zrak. Medtem ko vpliva toplega pokrovčka na zrak nismo mogli opaziti, je bil vpliv na snegu dobro viden. Sneg se je neposredno pod pokrovčkom stalil, stekel med ledene kristale v snegu in pokrovček se je v snegu nekoliko spustil. Prejšnja zgodba o albedu nam pojasni, zakaj je najhitreje tonil črni pokrovček, absorbiral je namreč največ svetlobe, se zato najbolj segrel in se je pod njim stalilo največ snega.

× × ×

REŠITEV BARVNEGA SUDOKUJA

↓ ↓ ↓

6	3	8	4	7	5	1	2
1	5	2	7	6	8	4	3
8	2	6	3	4	1	5	7
7	4	5	1	8	3	2	6
4	6	7	5	3	2	8	1
3	8	1	2	5	6	7	4
5	1	4	6	2	7	3	8
2	7	3	8	1	4	6	5

× × ×

www.dmfa.si

× × ×

Razmisli in poskusi

↓ ↓ ↓

MITJA ROSINA

→

36. Brenkanje na elastiko. Ali si kdaj poskusil zabrenkati na elastiko? Elastiko si vlekel in popuščal, pa melodije nisi mogel izvabiti. Pričakoval si, da bo višina tona (frekvenca) naraščala, ko povečuješ silo, kot se to dogaja pri struni. Pa se frekvenca skoraj nič ne poveča. Zakaj?

RAZMISLEK. Že res, da frekvenca narašča s silo, toda za razliko od strune elastiko močno raztegnemo in s tem povečamo valovno dolžino. Z valovno dolžino pa je frekvenca obratno sorazmerna. Hitrost prečnega valovanja na struni ali elastiki je $c = \sqrt{F/\mu}$, kjer je F sila, s katero elastiko vlečemo, in $\mu = m/\ell$ masa na dolžinsko enoto (elastika se z vlečenjem tanjša). Frekvenca je $\nu = c/\lambda$.

POSKUS. Vpni enojno elastiko na žebelj na deski ali na nogo mize in izmeri silo kot funkcijo dolžine elastike. Za meritev sile si pripravi preprost silomer iz vijake vzmeti, ki ga umeriš z obešanjem znanih uteži. Če velja Hookov zakon, dobiš sorazmerje $F = k \Delta \ell$. Pri surovi gumi „elastična konstanta“ k pada z raztežkom $\Delta \ell$, postaja „mehkejša“, ker se elastika tanjša, sila pa je sorazmerna s prerezom, ki pada z obratno sorazmerno z dolžino. Običajne elastike pa postajajo trše, k raste z raztežkom, ker se polimeri v elastiki ne morejo prekomerno usmeriti ali raztegniti. Kaj dobiš ti za tvojo elastiko?

Oceni tudi frekvenco pri različnih dolžinah (zanima nas samo razmerje frekvenc). Če imaš posluh, lahko oceniš, pri kolikšnem raztežku pridobiš polton ali cel ton. Poltonu ustreza razmerje frekvenc $\sqrt[12]{2} = 1,06$, celemu tonu pa $\sqrt[6]{2} = 1,12$. Ali ocenjeno razmerje frekvenc ustreza gornjima formulama za frekvenco?

Ali dobiš dovolj tonov za preprosto pesmico? Kako bi naredil boljše „glasbilo“, ki bi imelo večji tonski obseg?

× × ×

Po takem tiru se giblje Luna

↓↓↓

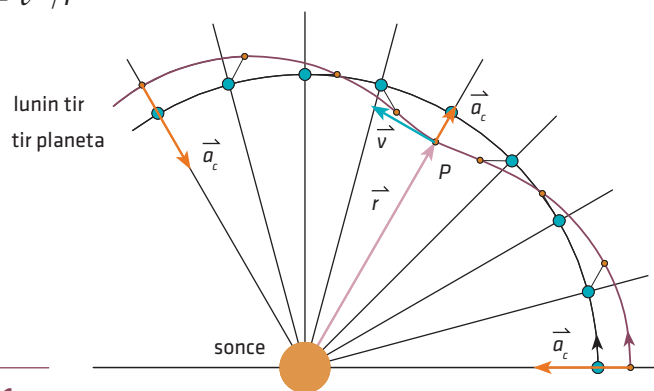
TOMAŽ KRANJC IN NADA RAZPET

→ Kakšen je tir Lune, če bi ga gledali s Sonca? Ali Luna na poti okoli Sonca res opisuje zanke? Izkaže se, da je Lunin tir perturbirana elipsa oziroma krivulja, ki je povsod vbočena proti Soncu in nikakor ne opisuje zank.¹

Tir brez zank

Obravnavajmo sedaj ukrivljenost tira lune, ki ne dela zank, torej primer, ko je $v_1 > v_2$. Vemo, da telo kroži, če ga sila vleče proti središču kroženja. Taki sili pravimo centripetalna sila. Z njo je povezan centripetalni (radialni) pospešek. Ko se telo giblje s hitrostjo v po krožnici s polmerom r , je centripetalni pospešek enak

$$\blacksquare a = v^2/r$$

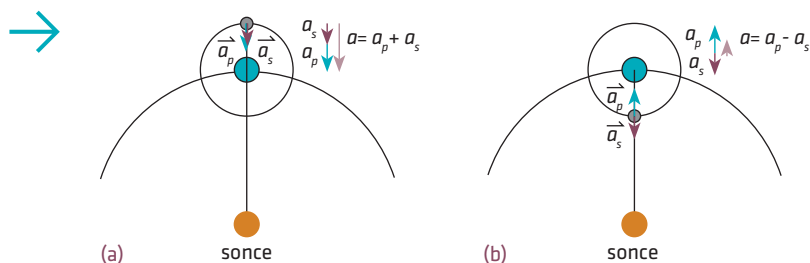


SLIKA 1.

Primer luninega tira, ki ne dela zank. Tir je najbolj ukrivljen, ko je luna najdalje od sonca, in najmanj, ko je luna najbližje soncu.

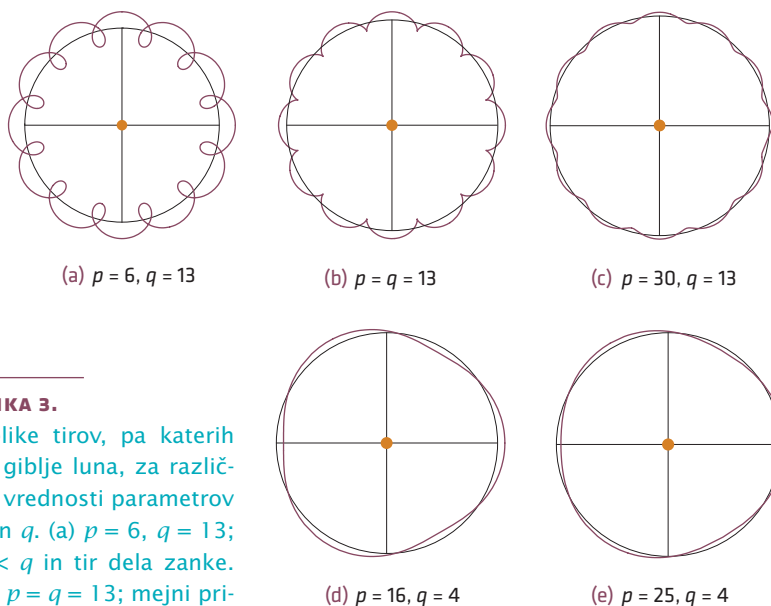
¹Že v prejšnji številki Preseka smo pisali o tem, po kakšnih tirih se lahko gibljejo lune okrog sonca. V tem prispevku nadaljujemo tam, kjer smo zadnjič končali.





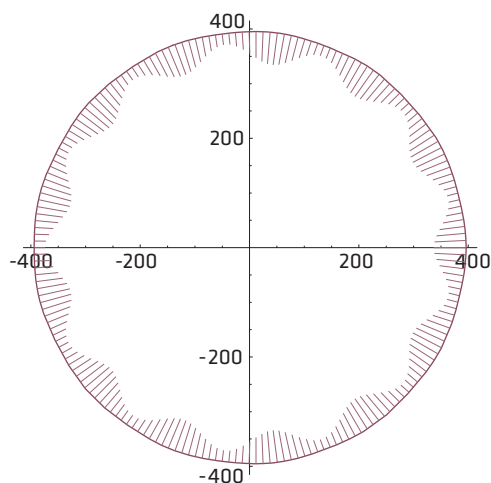
SLIKA 2.

Vpliv planeta in sonca na lunin tir. Ko je luna najdlje od sonca, jo planet in sonce vlečeta v isto smer. Ko je luna med planetom in soncem, jo vlečeta planet in sonce v nasprotnih smereh. Kako bo v taki legi lune ukrivljen njen tir, je odvisno od tega, ali je večja sila sonca ali sila planeta.



SLIKA 3.

Oblike tirov, pa katerih se giblje luna, za različne vrednosti parametrov p in q . (a) $p = 6, q = 13$; $p < q$ in tir dela zanke. (b) $p = q = 13$; mejni primer, ko se zanke skrečijo v točke. (c) $p = 30, q = 13$; $q < p < q^2$, tir ne dela zank, je pa na od sonca bolj oddaljenih območjih konkaven, na območjih bližje soncu pa konvexen. (d) Zaradi preglednosti smo zmanjšali vrednost parametrov: $p = q^2 = 16$ ($q = 4$), mejni primer, ko se konvexni deli izravnavajo: niso več konvexni, a še niso konkavni. (e) $p = 25, q = 4$, $p > q^2$ tir je povsod konkaven, t. j. ukrivljen proti soncu.



SLIKA 4.

Tir naše Lune okoli Sonca. Lunin tir se le malenkostno razlikuje od tira Zemlje, kar je povezano z vrednostma razmerij p in q . Na sliki je v enakih razmikih vzdolž tira prikazan tudi Lunin centripetalni pospešek, ki nakazuje ukrivljenost njenega tira. Tir je najbolj ukrivljen, ko je Luna najdlje od Sonca, in najmanj, ko je najbližje Soncu.

Tir je tem bolj ukrivljen (polmer je tem manjši), čim močnejša je sila, ki vleče telo proti središču kroženja. Centripetalni pospešek je sorazmeren s silo, zato lahko ukrivljenost opisujemo kar s tem pospeškom.

Na luno delujeta dve sili: sila planeta in sila sonca. Rezultanta je vektorska vsota obeh sil; celotni centripetalni pospešek lune ($\vec{a}_c$) je enak vektorski vsoti prispevkov planeta ($\vec{a}_p$) in sonca ($\vec{a}_s$).

Slika 1 kaže primer luninega tira brez zank. Tir je najbolj ukrivljen, ko je luna najdalje od sonca (ko je planet med luno in soncem). Tir je ukrivljen v nasprotni smeri v točki P, ko je luna med planetom in soncem.

Včasih si planet in sonce „pomagata“: ko je planet ravno med soncem in luno, vlečeta sonce in planet luno v isto smer. Centripetalni pospešek lune je tedaj po velikosti kar vsota prispevkov planeta in sonca, $a_c = a_p + a_s$. Lunin tir je tedaj ukrivljen proti planetu in soncu (slika 2a). Ko je luna najdalje od sonca, je njen tir vedno vbočen proti soncu.

Včasih pa si planet in sonce „nagajata“ in vlečeta luno v nasprotnih smereh. Najbolj si nasprotujeta, ko je luna med planetom in soncem: sonce vleče tedaj luno k sebi, planet pa ravno v nasprotni smeri. Celotni centripetalni pospešek lune je spet enak vek-

torski vsoti prispevkov planeta in sonca; ker pa ka-
žeta prispevka v nasprotnih smereh, je velikost po-
speška $a_c = |a_p - a_s|$. Lunin tir je tedaj ukrivljen
proti planetu, če je $a_p > a_s$, in proti soncu, če je
 $a_p < a_s$. Na sliki 2b je lunin tir, ko je luna med pla-
netom in soncem, ukrivljen proti planetu.

Ko je luna najdalj od sonca, vlečeta sonce in planet
luno v isto smer (si „pomagata“) in oba krivita njen
tir v isto smer – proti soncu in hkrati proti planetu.
Kar zadeva ukrivljenost tira, ki ne dela zank, so „kri-
tične točke“ tiste točke, kjer je luna najbližje soncu
(točka P na sliki 1 in primer (b) na sliki 2), saj si tam
planet in sonce nasprotujeta in lahko prevlada eden
ali drugi. Če prevlada planet (in je $a_p > a_s$), je tam
lunin tir ukrivljen proti planetu in stran od sonca. To
pomeni, da je na nekaterih odsekih lunin tir ukriv-
ljen proti soncu (npr. ko je luna najdlje od sonca),
na nekaterih pa proč od sonca (npr. ko je luna med
planetom in soncem). Če pa v „kritični točki“ pre-
vlada sonce (in je $a_s > a_p$), je tudi v taki točki lunin
tir ukrivljen proti soncu. Vpliv planeta ni v nobeni
drugi točki močnejši; če v taki točki prevlada sonce,
potem še toliko bolj prevlada v drugih točkah.

Poskusimo izraziti pogoj $a_p > a_s$ ($a_p < a_s$) s
parametroma p in q . Relacijo $a_p > a_s$ lahko za-
pišemo $a_p/a_s > 1$. Ker je $a_p = v_2^2/r_2$ in $a_s = v_1^2/r_1$,
je $a_p/a_s = (v_2^2/r_2)/(v_1^2/r_1) = (r_1/r_2)/(v_1/v_2)^2$. Že
prej smo ugotovili, da je $v_1/v_2 = p/q$, zato velja

$$a_p/a_s = (r_1/r_2)/(v_1/v_2)^2 = p/(p/q)^2 = q^2/p.$$

Pogoj $a_p < a_s$ (lunin tir je povsod vbočen proti
soncu) lahko torej zapišemo kot $q^2/p < 1$ oziroma
 $q^2 < p$. S tem pa smo izčrpali vse različne možnosti
za obliko luninega tira.

Marsikdo je presenečen ob ugotovitvi, da je Lunin
tir glede na Sonce povsod konkaven. Je to sploh mo-
goče? Pojasnilo najdete v dodatku.

Oblike luninih tirov (vpliv parametrov p in q)

Pogoje glede oblike tira, ki smo jih ugotovili v prej-
šnjih razdelkih, izrazimo z razmerjema p in q . Naj-
prej smo ugotovili, da dela lunin tir zanke, če je
 $v_1 < v_2$ oziroma $v_1/v_2 < 1$. To lahko izrazimo kot
 $p/q < 1$ oziroma $p < q$.

Nadalje smo ugotovili: če tir ne dela zank (in je
 $p > q$), je tir ves čas vbočen proti soncu (konkaven),

če je $a_p < a_s$ oziroma $a_p/a_s = q^2/p < 1$. Drugače
zapisano, veljati mora $p > q^2$.

Nazadnje smo ugotovili še: v primeru, ko tir ne
dela zank ($p > q$), a je $a_p > a_s$ oziroma $p < q^2$, je tir
delno konkaven in delno konveksen.

Tako lahko glede oblike tira opredelimo tri območ-
ja v odvisnosti od parametrov p in q :

$$\blacksquare p < q: \text{ luna dela zanke; } \quad (1)$$

$$\blacksquare q < p < q^2: \text{ luna ne dela zank, tir je deloma } \quad (2)$$

$$\blacksquare p > q^2: \text{ lunin tir je ves čas konkaven. } \quad (3)$$

Na sliki 3 so prikazani različni tipi krivulj, po ka-
terih se lahko giblje luna okoli planeta, v odvisnosti
od vrednosti parametrov p in q .

Kam spada v tej razporeditvi tirov naša Luna? Raz-
merji p in q za našo Luno sta $p = r_1/r_2 \approx 390$,
 $q = t_1/t_2 \approx 13$. To pomeni, da spada Luna v skupino
(3), kjer je $p > q^2$ ($390 > 13^2 = 169$). To je povezano
s tem, da je sila, s katero deluje na Luno Sonce (F_S),
večja od sile, s katero deluje na Luno Zemlja (F_Z).
Hitro se lahko prepričamo, da je $F_S/F_Z = 2,2$.

Da bi dobili boljšo predstavbo o obliki tira, po ka-
terem se Luna giblje okoli Sonca, sta na sliki 4 pred-
stavljeni Zemljin in Lunin tir za pravo razmerje pol-
merov r_{ZS} in r_{ZL} . Narisano je tudi Sonce v pravem
razmerju (zato se ga skoraj ne vidi). Vzdolž Luninega
tira je nanosen centripetalni pospešek Lune, ki po-
sredno nakazuje, kako poteka Lunin tir (saj določa
njegovo ukrivljenost). Še enkrat pripominjamo, da
smo računali, kakor bi se Zemlja okoli Sonca in Luna
okoli Zemlje gibali po krožnicah namesto po elip-
sah, zato slika ne predstavlja povsem prave oblike
Luninega tira. Daje pa pravi vtis o tem, kako malo
se, gledano s Sonca, razlikuje od tira Zemlje in kaj
pomeni, da je Lunin tir vedno ukrivljen proti Soncu.

Na sliki 5 smo izrisali še izsek Luninega tira (v
pravi obliki), kjer smo v enakih razmikih vzdolž tira
nanesli poleg centripetalnega pospeška še tangentni
pospešek (ki pove kako se spreminja velikost Lunine
hitrosti) in celotni pospešek (ki je vektorska vsota
radialnega in tangentnega). Označene so tudi Lunine
mene.

Zaključek

V prispevku smo prikazali mogoče oblike luninega
tira, kakršne so videti v opazovalnem sistemu, ki



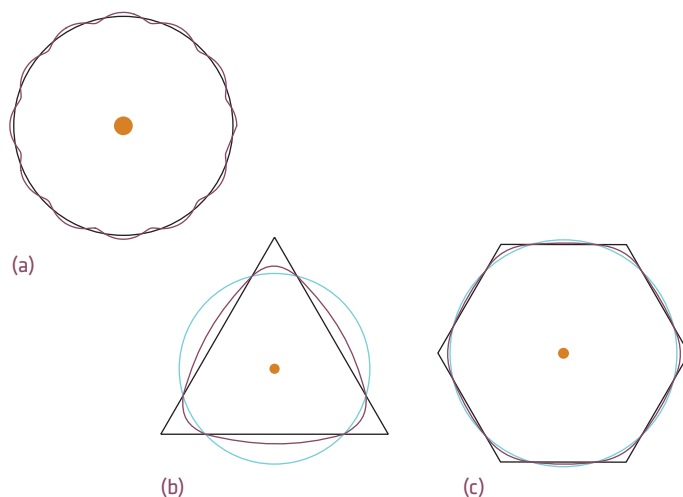
SLIKA 5.

Del Luninega tira. V zaporednih enajstih razmikih vzdolž tira je narisani celotni Lunin pospešek in njegovi komponenti, centripetalni in tangenčni pospešek. Označene so tudi Lunine mene. Iz centripetalnega pospeška lahko razberemo ukrivljenost Luninega tira, iz tangenčnega pa pospeševanje Lune vzdolž tira.

miruje glede na sonce, za poenostavljen primer, ko kroži luna okoli planeta, planet pa v isti ravnini okoli sonca. Oblika tira je odvisna od dveh parametrov, od razmerja polmerov krožnic, po katerih se gibljeta planet okoli sonca in luna okoli planeta (p), in od razmerja njunih obhodnih časov (q). Tir ima lahko tri kvalitativno različne oblike: (1) lahko dela zanke, (2) lahko ne dela zank in je delno vbočen proti soncu in delno stran od sonca, ali (3) je povsod vbočen proti soncu.

Naša Luna se giblje po tiru, ki je povsod vbočen proti Soncu. To je povezano s tem, da Sonce deluje na Luno z večjo silo kakor Zemlja.

Naj omenimo, da parametra p in q nista neodvisna. Povezuje ju 3. Keplerjev zakon. Brez dokazovanja povejmo, da velja $p = \sqrt[3]{m_s/m_p} \sqrt[3]{q^2}$, pri čemer sta m_s in m_p masa sonca in masa planeta.



SLIKA 6.

Ali je lahko lunin tir glede na sonce povsod konkaven? (a) Zdi se, kakor bi lunin tir ne mogel biti povsod konkaven, če je luna, gledano s sonca, enkrat „pred“ planetom, enkrat „za“ njim. Vendar si lahko konkavnost tira predstavimo tako, da na planetov tir položimo mnogokotnik, katerega oglišča so zunaj tira, sredine stranic pa znotraj; če zaobljimo stranice okoli oglišč navznoter, sredine stranic pa navzven, nastane glede na sonce povsod konkavna krivulja, ki pa vendarle prehaja z ene strani tira planeta na drugo stran.

Dodatek

Ali je lahko lunin tir povsod vbočen (konkaven) glede na sonce? Luna, ki kroži okoli planeta, stalno prečka njegov tir okoli sonca: enkrat je luna, gledano s sonca, „pred“ planetom, enkrat „za“ njim (slika 6a). Kako je potem lahko Lunin tir ves čas ukrivljen „navznoter“?

To si najlažje predstavimo, če na tir planeta položimo mnogokotnik tako, da ležijo oglišča zunaj, srednji deli stranic pa znotraj tira (slika 6b kaže to za trikotnik, slika 6c za šestkotnik). Če nato zaobljimo oglišča mnogokotnika nekoliko navznoter in stranice malo navzven, dobimo krivuljo, ki je glede na sonce povsod konkavna, pa vendarle teče delno znotraj, delno zunaj tira planeta. Sliki 6b in 6c kažeta primeri povsod vbočenega tira.

× × ×

Reševanje problemov s pristopom *deli in vladaj*



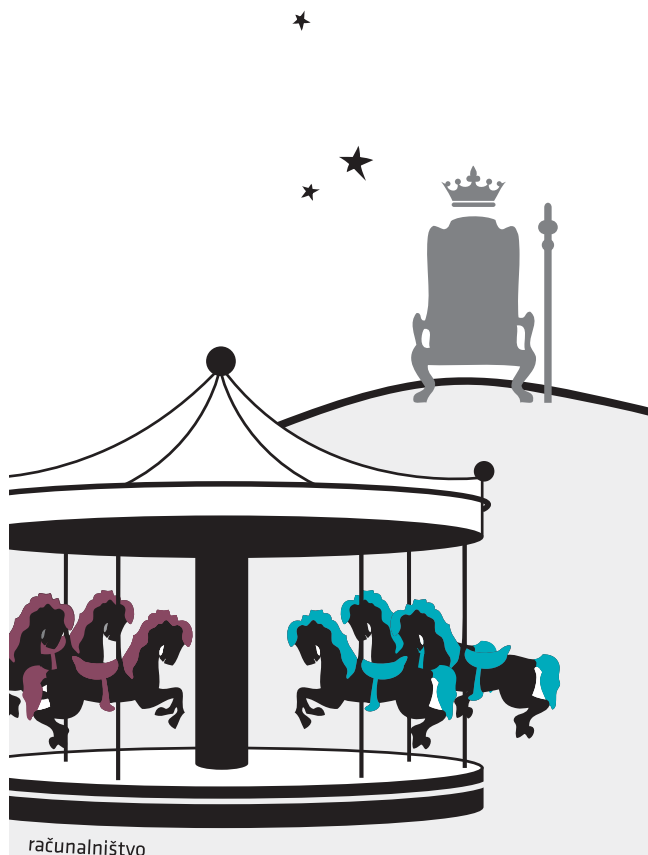
ANDREJ TARANENKO

→ **Deli in vladaj** (angl. *divide and conquer*) je bila uspešna vojaška strategija veliko pred tem, preden je postala postopek za reševanje problemov v računalništvu.

Generali so opazili, da je lažje premagati dve zaporedni vojski s po 50 000 vojakov, kot pa eno vojsko s 100 000 vojakov. Zato so pametni generali napadali tako, da so razbili sovražnikovo vojsko na dva dela in nato napadli eno za drugo.

Deli in vladaj kot pristop k reševanju problemov deluje na enak način. Problem, ki ga rešujemo, moramo razdeliti (faza *deli*) na manjše podprobleme, ki jih nato rešimo (faza *vladaj*). Običajno jih rešimo rekurzivno in nato združimo delne rešitve v končno rešitev začetnega problema. Kadarkoli združevanje rešitev zahteva manj časa kot reševanje podproblemov, dobimo učinkovit postopek. Pri strategiji deli in vladaj se pojavljata dve skupini problemov. V prvo skupino sodijo problemi, pri katerih je rešitev enega od podproblemov rešitev začetnega problema, kar pomeni, da združevanje rešitev sploh ni potrebno. V drugo skupino sodijo problemi, za katere končno rešitev dobimo tako, da z nekim postopkom združujemo rešitve podproblemov.

Klasični primer iz vsakdanjega življenja metode deli in vladaj, kjer je rešitev enega od podproblemov hkrati rešitev začetnega problema, je iskanje besede v slovarju. Slovar odpremo približno na sredini in pogledamo, pri kateri črki smo slovar odprli. Tako se odločimo, ali bomo besedo iskali v prvem delu pre-



računalništvo



ostanka slovarja ali v drugem. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo na stran, kjer se naša beseda nahaja; tam jo brez težav poiščemo. V računalništvu opisani postopek iskanja sovпада z iskanjem elementa v urejenem zaporedju s pomočjo bisekcije.

Za skupino problemov, kjer je rešitev začetnega problema rešitev v enem od podproblemov, kar pomeni, da združevanje ni potrebno, bi lahko postopek *deli in vladaj* opisali s psevdokodom `DelilnVladaj1()`.

Procedure `DelilnVladaj1(problem, resitev)`

```

begin
  if ProblemJeMajhen(problem) then
    resitev = ResiProblem(problem);
  else
    RazdeliProblem(problem, podproblem1, podproblem2);
    if JeResitevVPodproblemu(problem, podproblem1)
      then
        DelilnVladaj1(podproblem1, resitev);
      else
        DelilnVladaj1(podproblem2, resitev);
    end
  end
end

```

Splošni postopek metode *deli in vladaj*, kjer moramo rešitve podproblemov združiti, pa bi lahko opisali s psevdokodom `DelilnVladaj2()`.

Procedure `DelilnVladaj2(problem, resitev)`

```

begin
  if ProblemJeMajhen(problem) then
    resitev = ResiProblem(problem);
  else
    RazdeliProblem(problem, podproblem1, podproblem2);
    DelilnVladaj2(podproblem1, resitev1);
    DelilnVladaj2(podproblem2, resitev2);
    resitev = ZdruziResitvi(resitev1, resitev2);
  end
end

```

Metoda `RazdeliProblem()` razdeli problem na dva podproblema, ki ju po potrebi znova delimo, kar je prikazano z rekurzivnim klicem za oba podproblema. Ko podproblema rešimo, njuni rešitvi združimo v rešitev začetnega problema.

Urejanje z zlivanjem

Poglejmo tovrstni pristop k reševanju problemov na problemu urejanja podatkov, natančneje na postopku, ki ga imenujemo *urejanje z zlivanjem*.

Predpostavimo, da imamo v polju a podanih n ne-

urejenih elementov in jih želimo urediti od najmanjšega do največjega, t.j. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Torej, polje bomo razdelili na manjši polji in združili dobljeni rešitvi manjših polj. V našem primeru bomo naredili naslednje. V fazi *deli* bomo razdelili polje na dve polji približno enakih velikosti in uredili vsako posebej. Na tak način dobimo dve urejeni (manjši) polji, ki ju moramo združiti v eno (večje) urejeno polje.

Faza *vladaj* – združevanje dveh urejenih polj v eno urejeno polje – zahteva kar nekaj dela, primer delovanja vidimo v nadaljevanju. Kot rezultat prvega podpolja smo dobili 2, 5, 11, 18, 25 in drugega 3, 4, 7, 14, 16. Po združevanju dobimo urejeno polje 2, 3, 4, 5, 7, 11, 14, 16, 18, 25.

Primer celotnega delovanja urejanja z zlivanjem vidimo v nadaljevanju. Podano imamo polje a z 10 elementi:

■ $a = (5, 9, 1, 12, 8, 6, 4, 2, 7, 11)$.

Polje v prvi fazi deljenja razdelimo na dve podpolji približno enakih velikosti (v splošnem se velikost polj lahko razlikuje za največ en element):

■ $a_1 = (5, 9, 1, 12, 8)$ in $a_2 = (6, 4, 2, 7, 11)$.

Polja delimo tako dolgo, dokler ne dobimo v polju največ dveh elementov (recimo, da je problem takrat majhen). Polja takih velikosti lahko preprosto uredimo, torej rešimo problem brez nadaljnje delitve. V nadaljevanju za polja takšnih velikosti ne bomo posebej pisali, da jih še uredimo. Polji a_1 in a_2 bi tako dalje delili na

■ $a_{11} = (5, 9, 1)$, $a_{12} = (12, 8)$ in

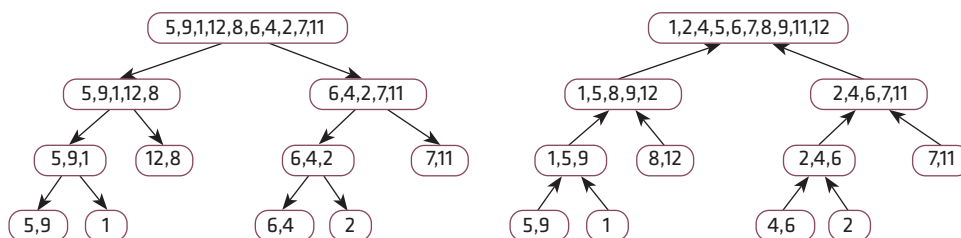
■ $a_{21} = (6, 4, 2)$, $a_{22} = (7, 11)$.

Kot vidimo, sta polji a_{11} in a_{21} še vedno preveliki, zato ju delimo dalje. Dobimo

■ $a_{111} = (5, 9)$, $a_{112} = (1)$, $a_{12} = (12, 8)$,

■ $a_{211} = (6, 4)$, $a_{212} = (2)$, $a_{22} = (7, 11)$.

Polje a_{111} je že urejeno in prav tako a_{112} . Združimo ju v $a_{11} = (1, 5, 9)$. Podobno je na drugi strani drevesa stanj, a_{211} moramo urediti v $a_{21} = (4, 6)$



SLIKA 1.

Deljenje in združevanje pri urejanju z zlivanjem

in ga združimo z a_{212} v polje $a_{21} = (2, 4, 6)$. Torej imamo

- $a_{11} = (1, 5, 9)$, $a_{12} = (8, 12)$ in
- $a_{21} = (2, 4, 6)$, $a_{22} = (7, 11)$.

Na enak način sedaj združimo polji a_{11} in a_{12} v novo urejeno polje $a_1 = (1, 5, 8, 9, 12)$ in polji a_{21} in a_{22} v novo urejeno polje $a_2 = (2, 4, 6, 7, 11)$. Dobili smo torej:

- $a_1 = (1, 5, 8, 9, 12)$ in $a_2 = (2, 4, 6, 7, 11)$.

Ti dve polji zatem združimo v rešitev problema:

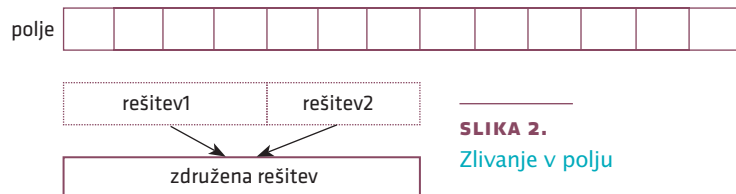
- $a = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12)$.

Delovanje tega primera lahko strnemo na sliki 1, kjer na levi strani vidimo, kako smo delili problem in na desni, kako je nastajala rešitev v fazah združevanja.

Postopek urejanja z zlivanjem lahko strnemo v dveh metodah. V metodi UrediZZlivanjem problem delimo, vmesne rešitve pa združimo v metodi Zlij. Podpolja si v teh metodah predstavimo tako, da vedno podamo prvotno polje ter indeks prvega ($meja_l$) in indeks zadnjega ($meja_d$) elementa v originalnem polju.

```

Procedure UrediZZlivanjem(polje, mejal, mejad)
begin
    if NajvecDvaElementa(mejal, mejad)
    then
        resitev = ResiProblem(polje);
    else
        sredina =  $\frac{meja_l + meja_d}{2}$ ;
        UrediZZlivanjem(polje, mejal, sredina);
        UrediZZlivanjem(polje, sredina, mejad);
        resitev = Zlij(polje, mejal, sredina, mejad);
    end
    
```



SLIKA 2.

Zlivanje v polju

V primerjavi s fazo delitve polja je precej kompleksnejša metoda za zlivanje dveh delnih rešitev (faza *vladaj*). Poteka tako, da si zamislimo dve polji, iz katerih tvorimo tretje tako, da se pomikamo ali po enem ali po drugem polju in sproti tvorimo tretje. Pomikamo se po tistem zaporedju, v katerem se nahaja manjši element. Recimo, da imamo polje $a = (2, 4, 7, 3, 5, 6)$ ter podpolji $a_1 = (2, 4, 7)$ in $a_2 = (3, 5, 6)$. Imamo še indeksa *prvi* in *drugi*, ki vsak trenutek kaže na trenutni element v prvem in drugem zaporedju. Oba najprej postavimo na začetek zaporedja, tako da *prvi* = 1 in kaže na 2 ($a_{prvi} = 2$) ter *drugi* = 4 kaže na 3 ($a_{drugi} = 3$). Novo (urejeno) polje tvorimo tako, da najprej preverimo, kateri indeks kaže na manjšo vrednost. Zatem tisto vrednost prenesemo v novo polje in povečamo indeks, ki je kazal na manjši element, da kaže na naslednji element. Tako, na primer, najprej v novo polje postavimo vrednost 2 (ker $2 < 3$) in zatem indeks *prvi* postavimo, da kaže na naslednji element, t.j. 4. Postopek ponavljamo, dokler ne izčrpamo vseh elementov, paziti pa moramo, ko pridemo na konec enega zaporedja. V tem primeru lahko preostanek drugega zaporedja preprosto prepisemo.

Pri združevanju podpolj moramo upoštevati, da se tretje (združeno) polje prekriva s prvima dvema, kot prikazuje slika 2.

Ker sproti ne moremo tvoriti tretjega zaporedja v istem polju, ga tvorimo v pomožnem polju, ki ga nato prekopiramo nazaj v prvotno polje. To nazorno prikazuje psevdokod Zlij().

Procedure Zlij($a, meja_l, sredina, meja_d$)

```

begin
    prvi = meja_l;
    drugi = sredina + 1;
    tretji = meja_l;
    while (prvi ≤ sredina) and
        (drugi ≤ meja_d) do
        if (aprvi ≤ adrugi) then
            btretji = aprvi;
            prvi = prvi + 1;
        else
            btretji = adrugi;
            drugi = drugi + 1;
            tretji = tretji + 1;
        if (prvi > sredina) then
            PrepisiPreostanekIzDrugegaZaporedja();
        else
            PrepisiPreostanekIzPrvegaZaporedja();
        PrekopirajUrejenoZaporedje(b, a);
    end

```

Igra „Ugibanje števil“

Za konec si zamislite igro, v kateri si nekdo izmisli število, vi pa ga morate ugotoviti. Vsakič, ko poveste neko vrednost, vam tisti, ki si je število izmislil, pove, ali je njegovo število manjše ali večje od vašega, ali pa ste število uganili. Na podlagi njegovih odgovorov ste vedno bližje njegovemu številu, dokler ga ne ugotovite.

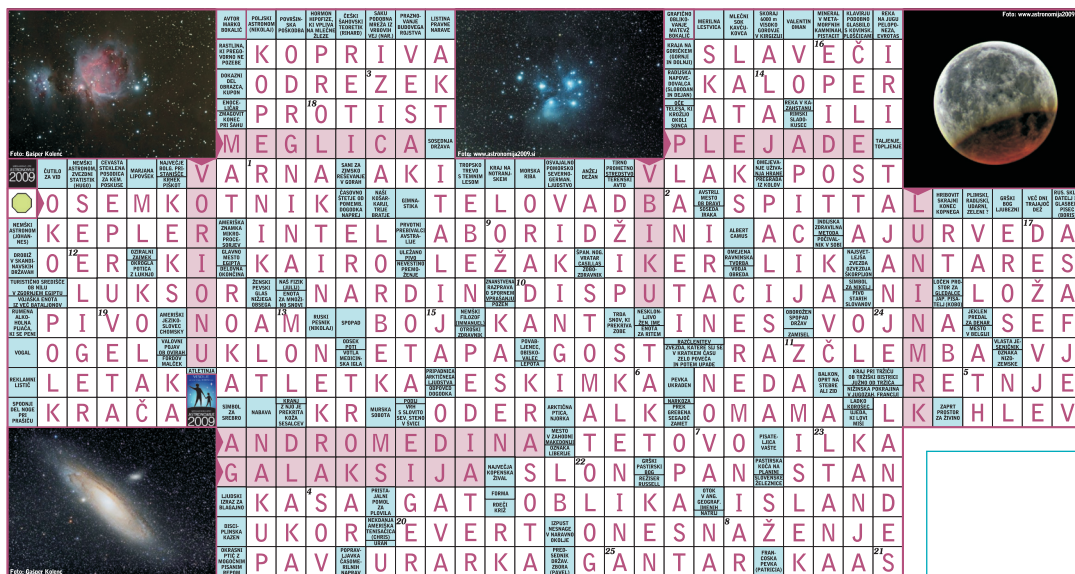
Podobno je možno napisati tudi igro za računalnik, vendar naj bo v tem primeru igra narejena v obratnih vlogah. Število si izmislite vi (recimo cela števila od 0 do 100), računalnik pa naj z zgoraj omenjeno metodo bisekcije poišče vaše število. Računalnik bo torej za vsak vaš komentar, ali je vaše število večje ali manjše od njegovega, s pomočjo bisekcije počasi ožil interval možnih števil, dokler ne bo končno ugotovil vaše število. Če vas bo zamikalo, da spremenite svoje število, medtem ko računalnik še ugotavlja vaše število, naj računalnik to tudi izpiše. Na primer, računalnik je že ugotovil, da je vaše število strogo med 24 in 26, zato izbere vrednost 25, vi pa napišete, da je vaše število večje. V tem primeru naj računalnik izpiše, da goljufate.

www.dmfa-zaloznistvo.si

xxx

xxx

↓↓↓



REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 37/3

→ Za nagradno križanko iz tretje številke 37. letnika Preseka smo prejeli 15 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasil **Razstava od zemlje do vesolja**. Izžrebani reševalci, TOMAŽ BAHČ iz Brežic, URŠKA K. MAVRAR iz Mosta na Soči in MOJCA OŠTIR iz Ljubljane so razpisane nagrade prejeli po pošti.

xxx



ALEŠ MOHORIČ



Glej jih, zvezde!: najlepší prizori na nebu, priročnik za opazovanje v letu 2010

→ Ste kdaj med pogovori s prijatelji doživeli, da je kdo med njimi že vnaprej vedel za Lunin mrk, ki se je imel zgoditi naslednjo noč? Ali pa, da je vredno potrpeti do polnoči, saj nas čaka čudovit roj meteorjev? Dogajanje na nebu znamo napovedati, saj tam, videzu navkljub, vlada red. Seveda prej omenjenih napovedi večinoma ne izračunamo sami, ampak jih najdemo v primerni literaturi – efemeridah. Te periodične publikacije s podatki o legah nebesnih teles so bile včasih, ko so nebesna telesa uporabljali za navigacijo, silno pomembne, dandanes pa izven ozkih strokovnih krogov niso preveč popularne. Odličen nadomestek za ljubitelje – predvsem začetnike – je priročnik za opazovanje nočnega neba „Glej jih, zvezde!“, ki ga je že tretje leto zapored izdala Tehniška založba Slovenije. Priročnik pripravlja izkušeni zanesenjak, francoski astronom Guillaume Cannat, tudi odličen poznavalec astrofotografije. Avtor v poglavjih, ki so razdeljena po mesecih, prikaže najzanimivejše pojave, ki se nam takrat obetajo na nebu. Opise popestri s fotografijami, ki tudi nevedčim nočnega opazovanja slikovito prikažejo, kaj lahko pričakujejo. Poleg tega so v knjigi, kot rozine v potici, natreseni nasveti za nočna opazovanja, orientacijo po nebu, krajša kronika zanimivejših relevantnih zgodovinskih dogodkov, povezanih z astronomijo, dogajanja v medplanetarnem prostoru ter tudi nekaj krajših astronomskih pojasnil. Priročnika ne moremo brati na dušek kot kakšno zanimivo leposlovno knjigo, je pa več kot primerna predvsem za mlajše oziroma začetniške opazovalce neba. **Bralci Preseka lahko knjigo naročite pri DMFA-založništvo po znižani ceni 15,19 EUR.** × × ×



ANDREJ GUŠTIN

Slovo od mednarodnega leta astronomije

Profesionalni in amaterski astronomi z vsega sveta so preteklo leto izjemno dobro izkoristili, tako da je mednarodno leto astronomije postalo največji znanstveni javni dogodek vseh časov. V projektu je sodelovalo 148 držav, astronomi so priredili več tisoč javnih opazovanj, predavanj, televizijskih oddaj in razstav ter tako veselje približali milijonom po vsem svetu. Še posebej uspešni so bili slovenski astronomi, ki so svoje aktivnosti predstavili na zaključni slovesnosti, ki je potekala 14. januarja na Konservatoriju za glasbo in balet v Ljubljani. V svoje akcije so uspeli vključiti skoraj vse slovenske šole, ki so lani prvič dobile sredstva za teleskope, priredili odmevno razstavo v ljubljanskem Tivoliju, otroške likovne in literarne dosežke poslali na mednarodni natečaj, organizirali javna opazovanja, prvo tekmovanje iz znanja astronomije, razstave v NUK-u in Tehniškem muzeju ... Aktivnosti pri nas so finančno podprli predvsem Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo, Fakulteta za matematiko in fiziko v Ljubljani in Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. × × ×

SLIKA.

Ugledni gostje na slovesnosti (Foto: Andrej Guštin)



Za prvih 50 naročnikov nahrbtnik!



revija
GEA²⁰ LET

SVET DOMA, www.gea-on.net

- Najstarejša in najbolj priljubljena izvirna slovenska naravoslovna revija
- Lepote Slovenije, sveta, vesolja
- Največji tehnološki dosežki, izumi, osupljiva odkritja
- Izvrstni članki in vrhunske fotografije domačih avtorjev
- Predlogi za kolesarske in druge izlete
- Pomoč pri pripravi referatov, plakatov, seminarских nalog

Oglasno sporočilo

© Mladinska knjiga Založba, d.d., Ljubljana



**ZA PRVIH
50 NOVIH
NAROČNIKOV:**
treking nahrbtnik
v vrednosti ~~79,54 €~~.
Za nove naročnike
samo 19,99 €!



Mladinska knjiga
ZALOŽBA

Naročanje in informacije 080 11 08

www.gea-on.net