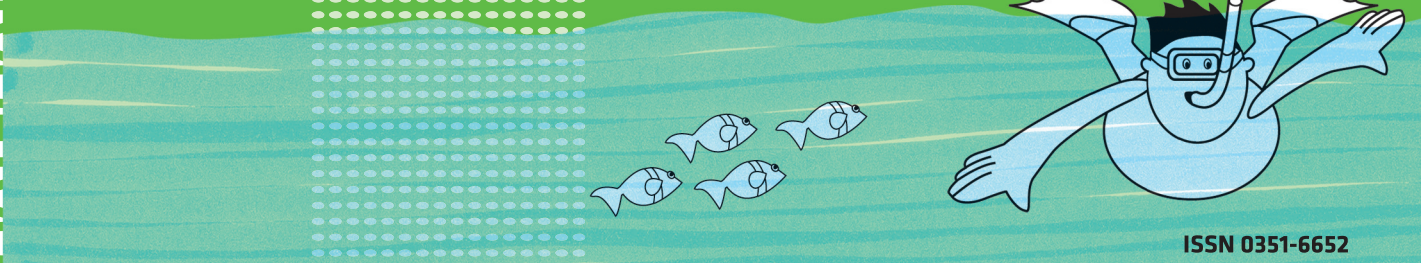




PRESEK

- VODNE LEČE
- ASTRONOMSKE VAJE
- PRESEKOVA MATURA
- NAGRADNA KRIŽANKA



Črtne kode

➔ Teorija števil, področje matematike, ki nam pomaga pri zagotavljanju varnosti komunikacije na internetu, nam zagotavlja tudi enoličnost knjižne (ISBN – International Standard Book Number) in črtne kode (UPC – Universal Product Code). Enoličnost ISBN kode nam pomaga, da lahko z računalniki sledimo knjigam, UPC koda pa natanko določa vsako knjigo, tako da vsak avtor zagotovo dobi svoj del dobička, ki se izplača za vsako prodano knjigo.

Vse številke kode ISBN, razen zadnje, dobimo iz prej določenih števil z množenjem po modulu. Iz vsote vseh teh produktov dobimo kontrolno številko, ki jo potem dodamo na konec števila, ki predstavlja ISBN kodo. Kontrolna številka nas varuje pred mednarodnimi goljufijami, pa tudi pred človeško napako, kot je zamenjava dveh števk. Na ta način so označeni tudi številni drugi dokumenti, na primer vozovnice ali vstopnice za razne prireditve. ✕



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

➔ Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 36, šolsko leto 2008/2009, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2008/2009 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Polona Šterk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1900 izvodov

© 2009 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1749

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbiti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Črtne kode 2

■ MATEMATIKA

Šestkotna sončna ura (*Karel Šmigoc*) 4-5

Presekova matura - Nivo A - Anglija
(*Darka Hvastija*) 5-6

Načrtovanje osnovnih algebrskih izrazov
(*Ajda Fošner*) 6-9

Vabilo na MARS 2009 (*Boštjan Kuzman*) 30

■ FIZIKA

O mokrih zrnastih snoveh (*Janez Strnad*) 10-12

Presekova matura - Električna, toplota -
Mikrovalovna pečica (*Aleš Mohorič*) 13-14

Presekova matura - Električna (*Andrej Likar*) 14

Presekova matura - Mehanika (*Andrej Likar*) 15

Presekova matura - Rešitve 21-23

Razmisli in poskusi - Morski valovi
(*Mitja Rosina*) 15

Poizkuševalnica na vrtu - Vodne leče
(*Mojca Čepič in Ana Gostinčar Blagotinšek*) 18

Poizkuševalnica v kuhinji - Makro difuzija in
evrodifuzija - odgovor naloge (*Mojca Čepič*) 19-21

■ ASTRONOMIJA

Astronomske vaje v mednarodnem letu
astronomije (*Andrej Guštin*) 24-26

■ RAČUNALNIŠTVO

Metoda Monte Carlo in število π
(*Andrej Taranenko*) 27-29

■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) 16-17

Rešitev nagradne križanke Presek 36/5 30

Sudoku 9, 23

■ TEKMOVANJA

Razpis 20. državnega tekmovanja v
razvedrilni matematiki priloga

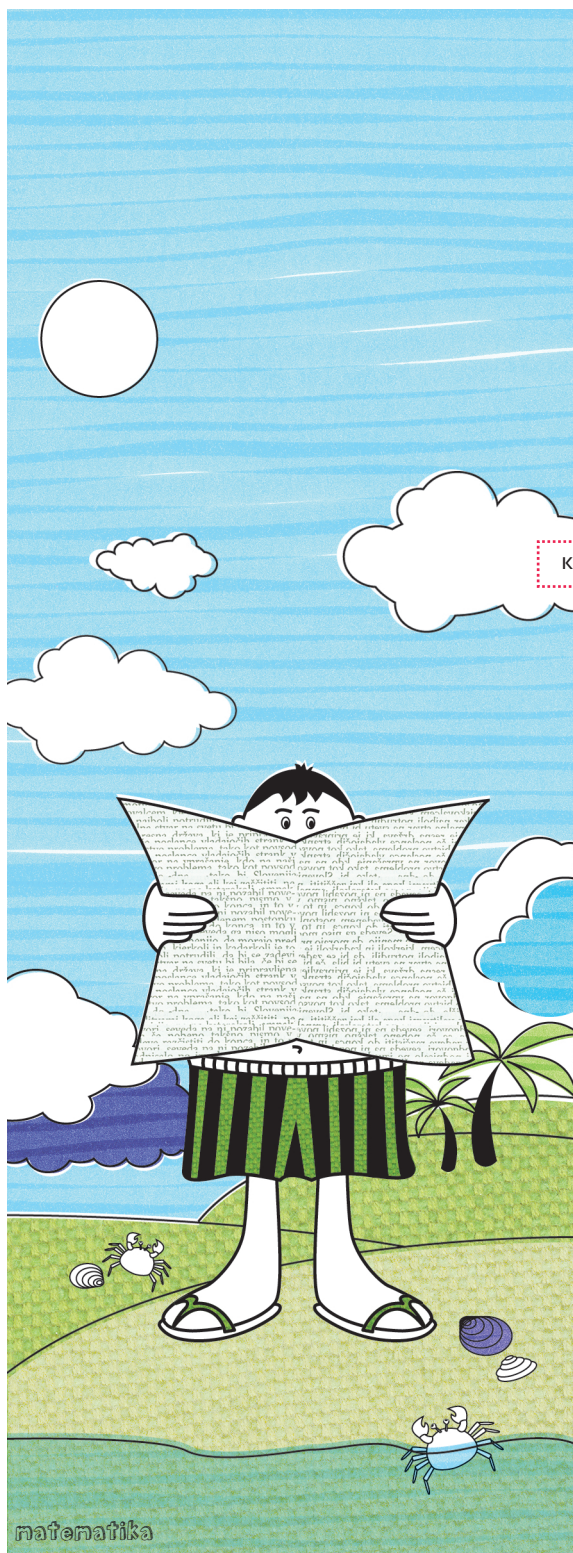
28. mednarodno matematično tekmovanje mest
- pomladanski krog (*Gregor Cigler*) priloga

8. področno tekmovanje v znanju matematike
za dijake poklicnih šol priloga

8. državno tekmovanje v znanju matematike za
dijake poklicnih šol priloga

SLIKA NA NASLOVNICI: Za poletje vam želimo, da bi morali čim manjkrat
gledati na uro. Kot idejo za preživljanje prostega časa pa vam ponujamo
opazovanje Lune ali izdelavo sončne ure. (Foto: Andrej Guštin).





KAREL ŠMIGOC

Šestkotna sončna ura

➔ Učenci astronomskega krožka Osnovne šole Šmarje pri Jelšah so obeležili mednarodno leto astronomije s postavitvijo vodoravne marmornate sončne ure v obliki pravilnega šestkotnika na šolskem vrtu (slika 1).

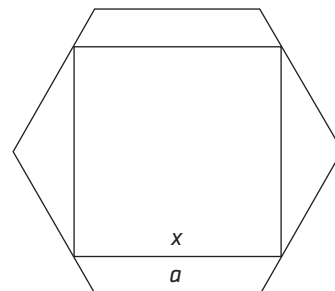


Slika 1.

V šestkotnik so vklesali kvadrat s številčnico in časovnimi linijami. Spomin na Galileja so obeležili tako, da so ob stranicah včrtanega kvadrata vklesali besede, ki jih je izrekel pred inkvizicijskim sodiščem. Ko so ga prisilili, da se je odpovedal nauku, da Zemlja potuje okrog Sonca, je Galileo izjavil *Eppur si muove* – In vendar se giblje.

Pri včrtavanju kvadrata v šestkotnik se je pojavila zanimiva naloga:

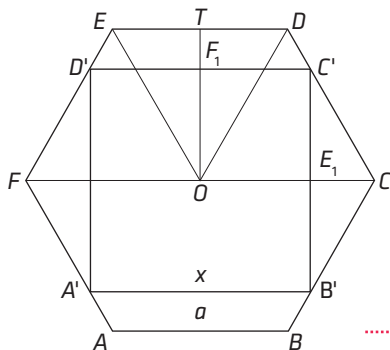
Izrazi stranico včrtanega kvadrata s stranico pravega šestkotnika, če sta dve stranici kvadrata vzporedni s stranicama šestkotnika (slika 2).



Slika 2.

Naloga je primerna za mlajše bralce Preseka in za tiste, ki bi želeli napraviti podobno sončno uro.

REŠITEV.



Slika - rešitev.

a - stranica pravilnega šestkotnika

x - stranica kvadrata

p_3 - ploščina trikotnika $B'CC'$

p_t - ploščina trapeza $C'DED'$

p_4 - ploščina kvadrata $A'B'C'D'$

p_6 - ploščina pravilnega šestkotnika $ABCDEF$

Iz slike je razvidno, da je ploščina šestkotnika enaka vsoti ploščin dveh trikotnikov, dveh trapezov in kvadrata:

$$2p_3 + 2p_t + p_4 = p_6. \quad (1)$$

Osnovnici trapeza $D'C'DE$ sta x in a , njegova višina $\overline{F_1T} = (a\sqrt{3} - x)/2$ in ploščina

$$p_t = \frac{(a+x)(a\sqrt{3} - x)}{4}.$$

Osnovnica trikotnika $B'CC'$ je x , pripadajoča višina $\overline{E_1C} = (2a - x)/2$ in ploščina

$$p_3 = \frac{x(2a - x)}{4}.$$

Ploščina kvadrata je $p_4 = x^2$ ploščina šestkotnika pa

$$p_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Če vstavimo dobljene izraze za ploščine v (1), dobimo po odpravi ulomkov in oklepajev enačbo

$$ax + ax\sqrt{3} - 2a^2\sqrt{3} = 0$$

in od tod

$$x + x\sqrt{3} - 2a\sqrt{3} = 0,$$

iz katere izračunamo stranico včrtanega kvadrata: $x = a(3 - \sqrt{3})$ oziroma $a_4 = ka_6$, če s k označimo številčno vrednost v oklepaju, z a_4 stranico kvadrata in z a_6 stranico šestkotnika. $\otimes$

Nivo A - Anglija

DARKA HVASTIJA

➔ V Preseku nadaljujemo z uredniško obljubo in objavljamo nekaj nalog, ki so podobne težavnosti kot naloge na maturi, kljub temu pa zanimive tudi za ostale Presekove bralce. Pod skupnim naslovom *Presekova matura* lahko v tej številki najdete nekaj matematičnih in fizikalnih nalog.

Angleški maturantje lahko opravljajo maturo iz matematike na več različnih nivojih. Najzahtevnejši nivo je nivo A, A-level. Del tega izpita je tudi mehanika. Dijaki rešujejo probleme iz mehanike, pri katerih morajo uporabiti svoje matematično znanje. Tudi v našem šolskem sistemu je vedno več medpredmetnega povezovanja, zato si na tem mestu pogledimo primer naloge na angleški maturi iz kinematike.

NALOGA. Telo P se giblje po osi x . Hitrost v s katero se giblje, je po t sekundah dana s formulo

$$v = 12 + 4t - t^2.$$

Izračunajte:

1. Pospešek telesa P , ko je njegova hitrost enaka 0.
2. Pot, ki jo telo naredi do trenutka, ko je njegov pospešek enak 0.
3. Pot, ki jo telo naredi v prvih devetih sekundah.

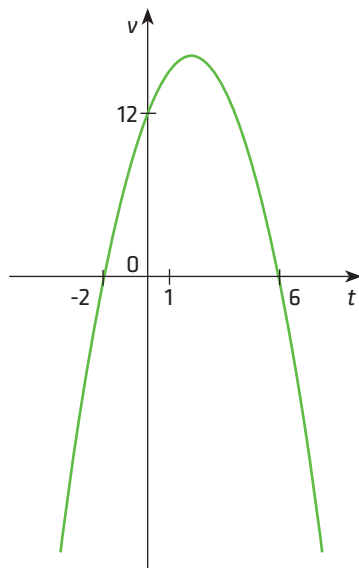


A particle P moves along the Ox axis. Its velocity, v (m s^{-1}), t seconds after leaving the origin O , is given by $v = 12 + 4t - t^2$.

Find

1. the acceleration of P when its velocity is zero,
2. the distance of P from O when its acceleration is zero,
3. the total distance travelled by P in the interval $0 \leq t \leq 9$.

REŠITEV. Hitrost, s katero se telo giblje vzdolž x -osi, je dana s kvadratno funkcijo časa $v = 12 + 4t - t^2 = -(t - 6)(t + 2)$ z ničlama 6 in -2 . Narišimo graf funkcije $v = v(t)$.



Seveda nas hitrost zanima le pri $t \geq 0$. Iz grafa vidimo, da se pri $t = 6$ smer hitrosti spremeni.

1. Naloga sprašuje po pospešku, v trenutku ko je hitrost 0. Pospešek izračunamo tako, da odvajamo funkcijo hitrosti. Odvod funkcije je $4 - 2t$, torej je pospešek linearna funkcija časa. Zanima nas pospešek ko je $t = 6$, ker je takrat hitrost 0. Dobimo $a = -8 \text{ ms}^{-2}$. Predznak $-$ pomeni, da je gibanje pojemajoče. Tak primer gibanja bi bil

npr. met navzgor ob upoštevanju upora.

2. Iščemo pot, ki jo telo naredi do trenutka, ko je pospešek enak nič. Opravljena pot je enaka ploščini lika pod grafom funkcije $v = v(t)$. Pospešek je 0, ko je $t = 2$, torej je pot, ki jo je telo opravilo do tega trenutka

$$s = \int_0^2 (12 + 4t - t^2) dt = 12t + 4\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{88}{3} \text{ m}.$$

3. Ko računamo pot, ki jo telo naredi v prvih devetih sekundah, moramo upoštevati, da je funkcija $v = v(t)$ za $t \geq 6$ negativna. Lik pod krivuljo moramo razdeliti na dva dela (glej sliko). Celotna opravljena pot je

$$s = \int_0^6 (12 + 4t - t^2) dt - \int_6^9 (12 + 4t - t^2) dt$$

in dobimo 117 m. ✖

➔ **Geometrija** (beseda izvira iz grščine in dobesedno pomeni zemljemerstvo) je del matematike, ki nam pomaga razumeti prostor okoli nas. Je matematična veda, ki je posvečena proučevanju prostora, oblik ter velikosti različnih likov in teles.

Prve geometrijske pojme zasledimo že pri narodih, ki so pred več tisočletji živeli v Egiptu in Mezopotamiji. Od 7. stoletja pred našim štetjem se je geometrija intenzivno razvijala v antični Grčiji, kamor so jo iz Egipta zanesli trgovci. Tako je v 3. stoletju pred našim štetjem bilo nakopičenega že toliko gradiva in različnih metod, da so se pojavili prvi poskusi združitve geometrijskih znanj v enoten sistem. Najznamenitejši geometer tedanjega časa, Ptolomejev učenec Evklid, je pokazal, da lahko vso geometrijo izpeljemo iz majhnega števila osnovnih resnic, imenovanih *postulati* oziroma *aksiomi*. Z nekaterimi izboljšavami uporabljamo njegova dognanja pri pouku geometrije še danes.

Čeprav so dandanes v rabi računalniki, ki nam z enostavnim vnosom zadostnega števila podatkov hitro narišejo željene geometrijske like (pri tem se lahko celo pozabavamo z barvanjem, senčenjem, različnimi debelinami črt), pa imamo matematiki še vedno zelo radi naloge, ki od nas zahtevajo, da z upo-

Načrtovanje osnovnih algebrskih izrazov

AJDA FOŠNER

rabo ravnila in šestila načrtamo določen geometrijski objekt. Kot vsaka matematična naloga so tudi načrtovalne naloge sestavljene iz danih veličin (podatkov) in neznanih veličin (neznank), ki jih želimo načrtati. Pogosto se zgodi, da se neznane dolžine izražajo z algebrskim izrazom, v katerem nastopajo dane dolžine. Primer:

Naj bosta a in b dani dolžini ($a > b$). Načrtaj dolžino $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$.

Prav take načrtovalne naloge izhajajo iz Evklidove zamisli ravnine; v ravnini je imel samo dve točki, vse ostale točke pa je dobil s presekom krožnic in podaljšanih daljic – od tod konstrukcije s šestilom in ravnilom. Pri tem omenimo, da Evklid ni definirал ravnine, ampak samo podmnožico točk v ravnini, ki jih je potreboval. Namen tega prispevka je predstaviti prav konstrukcije osnovnih algebrskih izrazov, na katerih temelji načrtovanje bolj zapletenih izrazov.

Še preden nadaljujemo s konstrukcijami osnovnih algebrskih izrazov, omenimo, da lahko s šestilom in ravnilom konstruiramo vzporednico k dani premici p skozi dano točko T : skozi točko T potegnemo poljubno premico, ki seka premico p v točki A . Krožni lok s središčem v A skozi točko T seka premico p v točki B . Lok s središčem v A in radijem $|BT|$ ter lok

s središčem v T in radijem $|AB|$ se sekata v točki C . Štirikotnik $TCAB$ je paralelogram in premica skozi točki T in C je vzporedna premici p . Prav tako lahko s šestilom in ravnilom načrtamo pravokotnico na dano premico p skozi dano točko T : najprej narišemo krožni lok s središčem v točki T in zadosti velikim polmerom, da seka premico p v dveh točkah A in B . Konstrukcijo končamo s simetralo daljice AB , ki gre seveda skozi točko T in je pravokotna na premico p . Na koncu omenimo še, da vedno lahko potegnemo poltrak pod kotom 60° k dani premici skozi dano točko, ki leži na premici (drugo točko poltraka dobimo s konstrukcijo enakostraničnega trikotnika).

■ Seštevanje dolžin

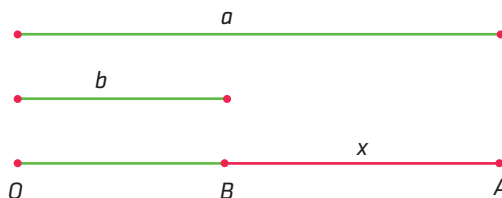
Dani sta dolžini a in b , načrtati pa želimo njuno vsoto $x = a + b$. Dolžino x dobimo enostavno tako, da na premico s šestilom nanesemo najprej dolžino a (dobimo daljico AO dolžine a) in nato še dolžino b (dobimo daljico OB dolžine b), kot kaže slika 1. Tako nastala daljica AB ima dolžino $x = a + b$.



Slika 1. $x = a + b$

■ Odštevanje dolžin

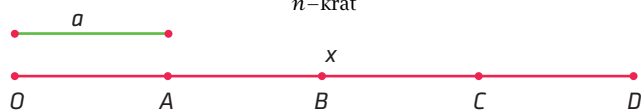
Načrtati želimo dolžino $x = a - b$, kjer sta a in b dani dolžini, $a > b$. Podobno kot v prejšnjem primeru na premico s šestilom nanesemo najprej dolžino a (dobimo daljico OA dolžine a) in nato še dolžino b (dobimo daljico OB dolžine b) kot kaže slika 2. Tako nastala daljica BA ima dolžino $x = a - b$.



Slika 2. $x = a - b$

➔ ■ Množenje dolžine z naravnim številom

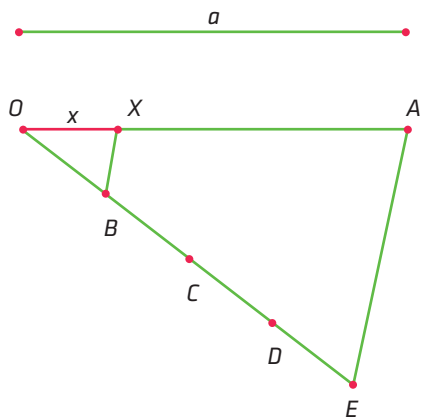
Načrtati želimo dolžino $x = n \cdot a$, kjer je a dana dolžina in n naravno število. Podobno kot v prvem primeru na premico s šestilom n -krat naneseemo dolžino a , saj je $x = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n\text{-krat}}$.



Slika 3. $x = 4 \cdot a$

■ Deljenje dolžine z naravnim številom

Naj bo n naravno število in a dana dolžina. Načrtati želimo dolžino $x = a/n$. Najprej narišemo daljico OA dolžine a . Nato iz krajišča O potegnemo poltrak pod kotom 60° glede na OA in nanj naneseemo n -krat poljubno dolžino b (na sliki 4 je prikazan primer za $n = 4$). Na koncu povežemo točki A in E ter potegnemo vzporednico k nosilki daljice AE skozi B . Ta vzporednica seka daljico OA v točki X in dolžina tako nastale daljice OX je ravno a/n . Zakaj? Ker je $\sphericalangle OEA = \sphericalangle OBX$ in $\sphericalangle OAE = \sphericalangle OXB$, sta trikotnika $\triangle OEA$ in $\triangle OBX$ podobna. Iz tega sledi, da je $|OE| : |OB| = |OA| : |OX|$ oziroma $(n \cdot b) : b = a : x$. Torej velja $|OX| = x = a/n$.

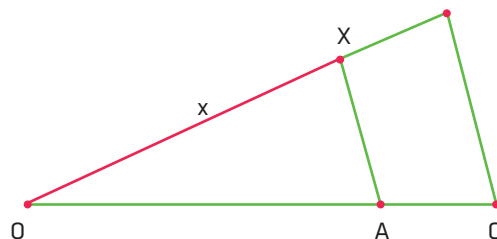


Slika 4. $x = \frac{a}{4}$

■ Množenje in deljenje dolžin

Naj bodo a , b in c dane dolžine. Najprej bomo pred-

stavili konstrukcijo dolžine $x = (a \cdot b)/c$. Na istem poltraku narišemo daljico OA dolžine a in daljico OC dolžine c , kot kaže slika 5. Nato iz krajišča O potegnemo poltrak pod kotom 60° in na njem narišemo daljico OB dolžine b . Nazadnje še potegnemo vzporednico skozi A k premici, ki poteka skozi točki B in C . Če presečišče te vzporednice z nosilko daljice OB označimo z X , potem ima daljica OX dolžino $x = (a \cdot b)/c$. Zakaj? Ker je $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OAX$ in $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OXA$, sta trikotnika $\triangle OCB$ in $\triangle OAX$ podobna. Iz tega sledi, da je $|OX| : |OB| = |OA| : |OC|$ oziroma $x : b = a : c$. Torej velja $|OX| = x = (a \cdot b)/c$.

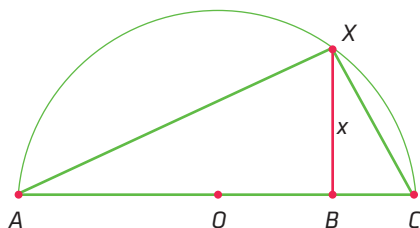


Slika 5. $x = \frac{a \cdot b}{c}$

Če si za dolžino c izberemo enoto, potem lahko na ta način načrtamo produkt poljubnih dveh danih dolžin. In podobno, če si za b izberemo enoto, potem lahko po opisanem postopku načrtamo dolžino $x = a/c$, kjer sta a in c dani dolžini.

■ $x = \sqrt{a \cdot b}$

Naj bosta a in b dani dolžini in $x = \sqrt{a \cdot b}$ dolžina, ki jo želimo načrtati. Najprej na isti premici narišemo daljico AB dolžine a in daljico BC dolžine b . Z O označimo razpolovišče daljice AC . Nato narišemo polkrožnico s središčem v O in radijem $(a + b)/2$ (ta polkrožnica gre seveda skozi točki A in C). Na koncu potegnemo še pravokotnico skozi B na nosilko daljice AC . Ta seka polkrožnico v točki X . Tako dobljena daljica BX ima dolžino $x = \sqrt{a \cdot b}$. Zakaj? Po Talesovem izreku o kotu v polkrogu je $\sphericalangle AXC$ pravi kot. Torej sta trikotnika $\triangle AXC$ in $\triangle ABX$ podobna. Enako velja za trikotnika $\triangle AXC$ in $\triangle XBC$. Iz tega sledi, da sta tudi trikotnika $\triangle ABX$ in $\triangle XBC$ podobna. Torej lahko zapišemo enakost $|BX| : |BC| = |AB| : |XB|$ oziroma $x : b = a : x$. Torej velja $|BX| = x = \sqrt{a \cdot b}$.

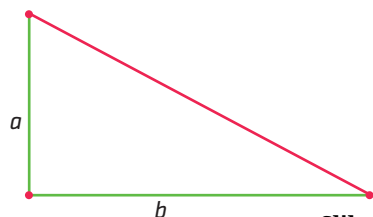


Slika 6. $x = \sqrt{a \cdot b}$

Če si za dolžino b izberemo enoto, potem lahko po zgornjem postopku načrtamo koren poljubne dane dolžine.

■ $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

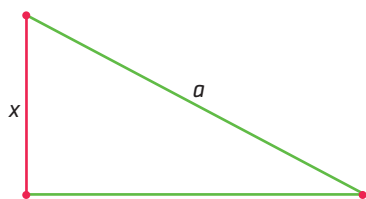
Naj bosta a in b dani dolžini. Načrtati želimo dolžino $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Iz Pitagorovega izreka sledi, da je x ravno dolžina hipotenuze v pravokotnem trikotniku s katetama dolžine a in b .



Slika 7. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

■ $x = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b$

Načrtati želimo dolžino $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, kjer sta a in b dani dolžini in je $a > b$. Podobno kot v prejšnjem primeru iz Pitagorovega izreka sledi, da je x ravno dolžina katete v pravokotnem trikotniku s hipotenuzo dolžine a in drugo kateto dolžine b .



Slika 8. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

Zdaj pa že znamo rešiti nalogo, ki smo jo zastavili v uvodu. Načrtati torej želimo dolžino $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$, kjer sta a in b dani dolžini in je $a > b$. Hitro lahko

opazimo, da je

$$\begin{aligned} \blacksquare x &= \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt[4]{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} = \\ &= \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Torej bomo najprej načrtali dolžini $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$ in $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ter nato še $x = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

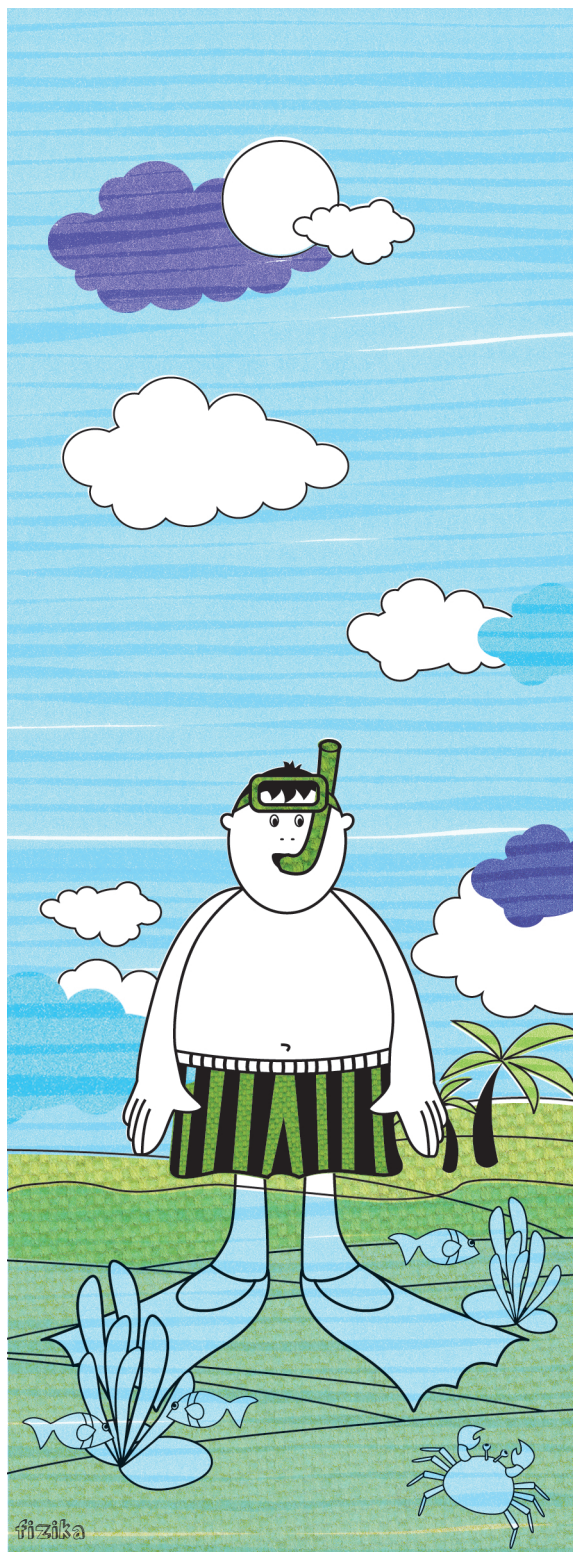
Ob vsem tem se postavlja vprašanje, ali lahko načrtamo vsak algebrski izraz. Odgovor na to vprašanje je da za algebrske izraze, ki so dobljeni iz danih dolžin s končnim številom operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja ter kvadratnega korenjenja. Seveda pa obstajajo tudi nerešljivi problemi. Na tem mestu se lahko spomnimo starogrških problemov, kot so podvojitve kocke, trisekcija kota in kvadratura kroga.

Literatura

- [1] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times, Volume 1*, Oxford University Press, New York 1990.
- [2] P. Legiša, *Matematika 1: Geometrija v ravnini*, DZS, Ljubljana 2000.
- [3] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb 1996.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A									6
B		1						2	3
C	2	4		6			9		
D	6			9				7	
E				4	1	8			
F		9				2			4
G			2			5		6	8
H	8	3						5	
I	9								

Sudoku



JANEZ STRNAD

O mokrih zrnastih snoveh

➔ V drugi številki lanskega letnika je Presek poročal o „živem pesku“, sicer zanimivem, a na prvi pogled postranskem pojavu. Po objavah v znanih fizikalnih revijah pa je mogoče sklepati, da gre za predmet resnih raziskovanj. *Zrnaste, posebno mokre zrnaste snovi* so pomembne v farmaciji, gradbeništvu, poljedelstvu in še kje. Posebno vlogo imajo v geologiji, npr. pri zemeljskih plazovih.

Deli tekočine ob dodatku tekočine zrnec snovi zaradi površinske napetosti delujejo na zrnca in spremenijo lastnosti snovi. Suha mivka je sipka, mokro pa je mogoče oblikovati. Oblika in velikost delov tekočine med zrnici se spreminjata, ko se večja delež tekočine. Presenetljivo pa so mehanske lastnosti snovi domala neodvisne od deleža tekočine. Do take izkušnje so prišli vsi, ki so kdaj gradili gradove iz mivke. Z mivko je mogoče graditi, če je bolj ali manj mokra. Vendar gradove lahko gradimo le, dokler mivki ne dodamo preveč vode. Nad mejnim deležem tekočine začne zrnasta snov teči kot tekočina.

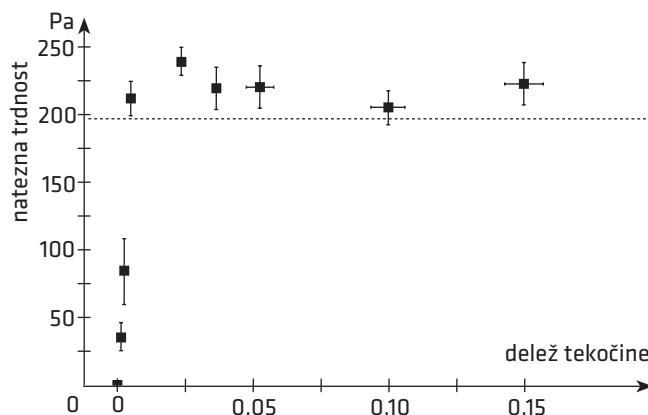
Zdaj je mednarodna raziskovalna skupina po številnih temeljitih poskusih pojasnila nekatere lastnosti mokre zrnaste snovi. Poskuse so izvajali z množico različno velikih steklenih kroglic s povprečnim premerom 0,28 milimetra. Če bi bile namreč vse kroglice enako velike, bi se lahko razporedile v urejeno mrežo, kar bi ustrezalo kristalu, ne pa zrnasti snovi. Merili so več mehanskih lastnosti kroglic, medtem ko so večali delež tekočine med njimi. Pri tem delež pomeni razmerje med prostornino tekočine in celotno prostornino. Med drugim so merili natezno trdnost. V plastično cevko so dali kroglice in jim

dodajali tekočino. Pri znanem deležu tekočine so cevko vse hitreje vrteli v vodoravni ravnini, dokler se stolpec kroglic ni pretrgal. Natezna trdnost so izračunali z izmerjeno mejno hitrostjo pri vrtenju. Pokazalo se je, da se natezna trdnost ni spremenila, ko se je delež tekočine znatno spremenil (slika 1). Tudi pri merjenju nekaterih drugih mehanskih količin so prišli do enakega sklepa.

Le pri zelo majhnem deležu tekočine je natezna trdnost strmo narasla, ko so tega malo povečali. Tedaj je tekočina izpolnila razpoke in neravnosti na površju kroglic, tako da je na njem nastala tanka tekočinska plast. Pri tem je suha zrnasta snov prešla v mokro. Na drugi strani je merjenje seglo malo čez delež tekočine 0,15, ko je tekočina izpolnila dobro tretjino prostornine med kroglicami. Pri še večjem deležu tekočine mokra zrnasta snov, ki je pri manjšem deležu imela lastnost trdnine, dobi lastnosti tekočine, se pravi, da steče. Tam se začne območje zemeljskih plazov in živega peska.

Rentgensko svetlobo so zelo kmalu po Röntgenovemu odkritju leta 1895 uporabili v zdravstvu. Ker se praktično ne lomi, zanjo ni pravih leč. Dobiti je mogoče senčne slike, pri katerih se prostornina predmeta preslika na ravnino filma in se podatki o globini izgubijo. Italijanski radiolog Alessandro Vallebona je pred sto leti razmišljal o tem, kako bi izbrano ravnino predmeta ostro preslikal. Izvir in film je pritrdil na nasprotni krajišči ročice. Ročica se je vrtela okoli osi v ravnini, ki naj bi se ostro preslikala. Film je ves čas ostal sam sebi vzporeden in na njem je nastala ostra slika izbrane ravnine. Vendar so nastale tudi šibkejšie neostre slike vzporednih ravnin. Češki matematik Johann Radon, ki je predaval na univerzah v več nemških mestih in nazadnje na Dunaju, si je leta 1917 v okviru projektivne geometrije zamislil postopek, s katerim se je mogoče znebiti neostrih slik. Po letu 1960, potem ko so razvili zmogljive računalnike, so njegov način uporabili v ZDA. Prvo napravo pa so izdelali leta 1971 v Angliji, v laboratorijih gramofonske družbe EMI. Menda je tovrstno raziskovanje omogočil zaslužek od prodaje plošč Beatlov.

Z razvojem vse zmogljivejših računalnikov ter izvirov in merilnikov za rentgensko svetlobo so način močno izpopolnili. Droben izvir v določeni prečni ravnini predmeta oddaja enobarvno rentgensko svet-



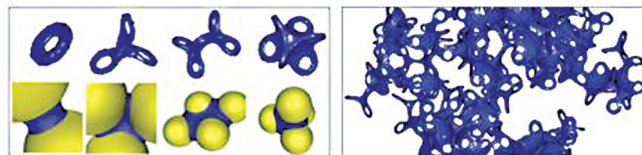
Slika 1. Natezna trdnost stolpca mokrih steklenih kroglic je na širokem območju deleža tekočine neodvisna od tega deleža. Zelo strmo naraste le pri zelo majhnem deležu tekočine, ko suha snov preide v mokro. Na navpično os je nanosena natezna trdnost v pascalih (N/m^2), na vodoravno os pa delež tekočine. Vodoravne in navpične črtice ob merskih točkah opozarjajo na nenatančnost pri merjenju. Ta in naslednji slike so prirejene po članku: M. Scheel, R. Seemann, M. Brinkmann, M. di Michiel, A. Sheppard, B. Breidenbach, S. Hermingshaus, *Morfološka opora stabilnosti mokrih zrnastih kupov*, Nature Materials, marec 2008. Štirje raziskovalci so člani Inštituta Maxa Plancka iz Göttingena, po eden pa član Evropske naprave za sinhrotronsko sevanje iz Grenobla, oddelka za uporabno matematiko univerze v avstralski Canberri in inštituta za teoretično fiziko univerze Erlangen-Nürnberg.

lobo, ki jo na nasprotni strani v tej ravnini zaznava vrsta merilnikov. Izvir in merilnik se v njej večkrat premakneta sem in tja, tako da nastane ostra slika režnja predmeta. Predmet se počasi premika v smeri osi, tako da postopno nastanejo slike vzporednih režnjev. Naposled jih računalnik sestavi v prostorsko sliko predmeta. To je *rentgenska računalniška tomografija* (tome v grščini pomeni reženji). Najprej so jo izkoristili zdravniki. Z njo so si lahko ustvarili prostorsko sliko notranjih organov in zanesljivo prepoznali morebitno bolezen. Leta 1979 sta Anglež Godfrey Hounsfield in Američan Allen McLeod Cormack „za razvoj računalniške tomografije“ dobila Nobelovo nagrado za medicino.

Tomografija se je zelo razvila in razvejala. V *rentgenski mikrotomografiji* si prizadevajo opazovati vse manjše podrobnosti. Uporabijo rentgensko zavorno sevanje elektronov, ki se po krožni tirnici zelo hitro gibljejo v prečnem magnetnem polju po izsesani cevi



sinhrotrona. V tem primeru delcev iz sinhrotrona ne uporabijo kot izstrelke pri raziskovanju reakcij, ampak sinhrotron deluje kot izvir zelo ozkega curka enobarvne rentgenske svetlobe. To rentgensko svetlobo usmerijo na predmet in ga v njej premikajo. Prepuščeno rentgensko svetlobo zaznava polprevodniška slikovna naprava CCD, ki je sestavni del digitalnih fotografskih aparatov. Prostorske slike drobnih predmetov so v veliko pomoč paleontologom, arheologom, zoologom in tudi fizikom. Pri opisanem poskusu so uporabili rentgensko svetlobo Evropske naprave za sinhrotronsko sevanje v Grenoblu.



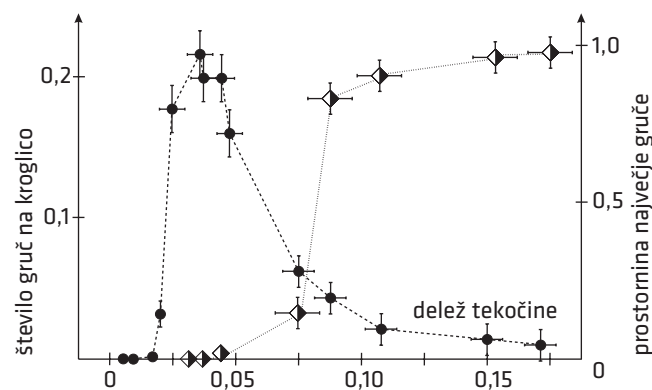
Slika 2. Rentgenska mikrotomografija je razkrila obliko tekočinskih mostov med dvema, tremi, petimi in štirimi kroglicami (po vrsti z leve na desno). Spodnja vrsta kaže tekočino in kroglice, zgornja pa samo tekočino. Pri večjem deležu tekočine nastanejo zelo velike gruč (skrajno desno).

Z rentgensko mikrotomografijo so raziskali obliko delov tekočine med steklenimi kroglicami. Pri tem so uporabili tudi steklene kroglice, katerih mehanske lastnosti so prej premerili. Tekočino so izbrali tako, da so bile slike z rentgensko svetlobo čim ostrejšje. Navedli so, da je imela približno tolikšno površinsko napetost kot voda in mejni kot manjši od 10° . Čista voda čisto stekleno ploskev popolnoma omoči, tako da je mejni kot 0° . Kemijske sestave tekočine raziskovalci niso omenili.

Oblika delov tekočine med kroglicami se je spreminjala, ko so večali delež tekočine. Med kroglicami se tekočina oblikuje v značilne mostove, ki povezujejo več kroglic. Med dvema kroglicama nastane enojni obroč, med tremi nastanejo trije obroči, ki se le v srednjem delu razlikujejo od treh sestavljenih enojnih obročev. Med petimi kroglicami je sestavljenih pet enojnih obročev. Med štirimi kroglicami v vrhovih tetraedra nastane bolj zapleten most. Pri znatnem deležu tekočine se veliko mostov združi v večje gruč (slika 2). Ugotovitve merjenj so znanstveniki podprli z računi.

V mostu je tlak zaradi površinske napetosti manjši kot zunaj njega v preostalem zraku. Razlika tlakov je tem manjša, čim bolj zapleten je most. Zaradi nje se pojavi med kroglicami, ki jih most povezuje, privlačna sila. Sila je odvisna od površine kroglice pod mostom. Površina narašča z naraščajočim deležem tekočine. Učinek zaradi naraščanja površine izravna učinek zaradi zmanjševanja razlike tlakov. To pojasni, zakaj so lastnosti mokre zrnaste snovi na širokem območju deleža tekočine skoraj neodvisne od tega deleža.

Ugotovili so, da je povprečno število gruč med kroglicami, preračunano na eno kroglico, z naraščajočim deležem tekočine najprej strmo naraslo, potem pa se



Slika 3. Povprečno število gruč, preračunano na eno kroglico, je z naraščajočim deležem tekočine najprej izrazito naraslo, nato pa padlo (polni krožci, leva navpična os), medtem ko je naraščala prostornina največje gruče (napolni krožci, desna os, krivulja je narisana tako, da doseže največjo vrednost 1).

je zmanjšalo. Ob tem je naraščala prostornina največje gruče na račun manjših (slika 3). Poskuse so ponovili tudi z mokrim peskom. V podrobnostih so dobili nekoliko drugačne izide, glavne ugotovitve pa so obveljale tudi za pesek. Po tem so sklepali, da te ugotovitve veljajo nasploh za mokre zrnaste snovi, ki jih sestavljajo različno velika zrnca nepravilnih oblik.

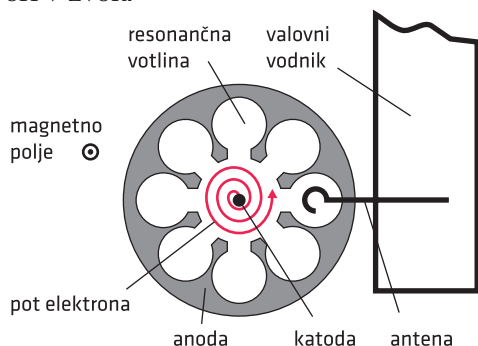
Lastnosti mokrih zrnastih snovi po svetu raziskuje več skupin. V znanih revijah so tako poročali o nastanku plasti v zrnatih mešanica, o ravnovesnem kotu kupa kroglic, o ravnovesnem kotu v dveh razsežnostih, o lastnostih zrnaste plasti pri nihanju v navpični smeri. Mokre zrnaste snovi so zanimive, še bolj zanimiv pa je razvoj merilnih načinov v fiziki v zadnjem času. ☒

Elektrika, toplota

MIKROVALOVNA PEČICA

ALEŠ MOHORIČ

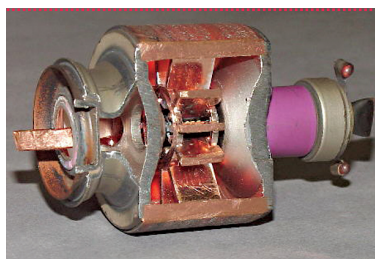
➔ Z mikrovalovno pečico segrevamo hrano. Navadno taka pečica dela z močjo 1 kW. Del energije pretvori v elektromagnetno valovanje, ki ima frekvenco $\nu = 2450 \text{ MHz}$. To lahko preverite v tehničnih navodilih ali na zadnji strani pečice, ki jo imate doma. Bolj znano je elektromagnetno valovanje s frekvencami na območju od 425 do 750 THz – vidna svetloba, ki ima valovne dolžine med 400 in 700 nm. Valovna dolžina valovanja v pečici je $\lambda = c/\nu = 12 \text{ cm}$ (c je svetlobna hitrost). To valovanje uvrščamo med mikrovalove. Ti segrejejo hrano tako, da vzbudijo nihanje in vrtenje molekul vode, ki so v hrani. Energija vrtenja in nihanja zviša temperaturo hrane, ker molekule sodelujejo med seboj. Mikrovalovi nastanejo v magnetronu – posebni pripravi, ki je vir elektromagnetnega valovanja. V pečici izmenično napetost na vходу s transformatorjem spremenimo v visoko enosmerno napetost. Ta pospešuje elektrone, ki izparevajo iz segrete katode, proti anodi. V magnetnem polju stalnega magneta elektroni krožijo kot veter v viharju in v stranskih resonančnih votlinah nastaja elektromagnetno valovanje. Podoben pojav opazite, ko se vozite v avtomobilu z odprtim oknom. Nadležno „floplopanje“ nastane, ko se energija vetra pretvori v zvok.



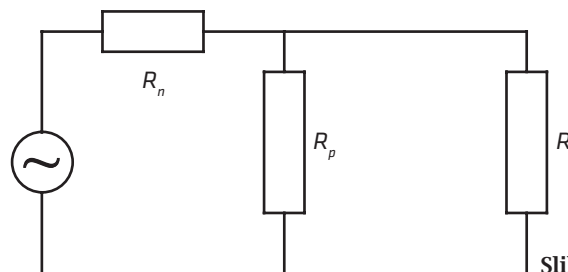
Slika 1. Shema magnetrona, ki v pečici ustvarja mikrovalove; elektrone, ki izstopajo iz segrete katode, radialno električno polje pospeši proti anodi, magnetno polje pa ukrivi njihove tirnice. Vrtinec elektronov v votlinah ustvarja elektromagnetne valove, ki jih antenna prenese v valovni vodnik.

Antena odda mikrovalove v valovni vodnik, ki prenese mikrovalove v notranjost pečice. Notranjost pečice je obdana s prevodnimi stenami, je torej Faradayeve kletka, iz katere valovanje ne more uiti. Mikrovalovi se odbijajo od prevodnih sten in v notranjosti pečice nastane stoječe valovanje. Stoječe valovanje ima hrbte in vozle (pri običajnih velikostih pečice kake tri). Tam, kjer so hrbti, je sevanje najmočnejše in zato bi se tam hrana močnejše grela. Da dosežemo čimbolj enakomerno segrevanje, se krožnik s hrano vrti. Kljub temu, da se krožnik s hrano vrti, pa so pri večjem kosu deli bližje površini bolj vroči kot sredi, ker mikrovalovi v hrano prodrejo le kak centimeter globoko, v baker pa le stotinko milimetra. Sredi pečenke se čez čas segreje zaradi toplotnega prevajanja, pri tekoči hrani (vodi) pa pomaga tudi konvekcija. Jajc v mikrovalovni pečici ne pripravljamo zato, ker pri gretju nastane para. Para skozi lupino ne uhaja dovolj hitro in jajce eksplodira.

Energijski tok, ki ga s seboj nosi električni tok, se na anteni pretvori v energijski tok mikrovalov, ki se na koncu pretvori v notranjo energijo hrane (višanje temperature), podobno, kot se na uporih energija električnega toka pretvori v Joulovo toploto. Zato lahko energijski tok mikrovalov in pretvorbo v notranjo energijo hrane predstavimo z ustreznim električnim tokom skozi upor. Delovanje pečice predstavimo z nadomestnim vezjem, prikazanim na sliki 3, kjer je R_n notranji upor, R_p parazitski upor in R upor hrane, ki jo v pečici grejemo. Parazitski upor predstavlja upor sten in antene.



Slika 2. Prerez magnetrona brez hladilnih plošč in magneta (vir: Home Labor Page www.hcrs.at)



Slika 3.



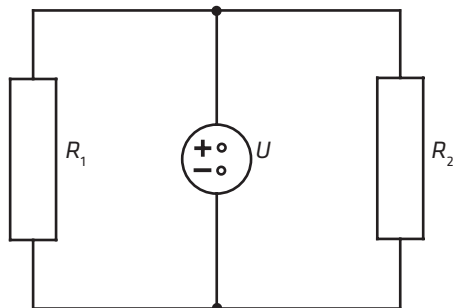
To vezje pojasni, zakaj pečice ne smemo priključiti prazne ali pa vanjo postaviti kovinske posode. Pa pojdimo po vrsti.

1. Kolikšen efektivni tok teče po priključnih žicah pečice med njenim normalnim delovanjem, če je žica priključena na efektivno napetost 220 V?
2. Kolikšen je skupni upor vezja, če pečica deluje z nazivno močjo?
3. Izrazite moč, ki se troši na uporu R , v približku, ko je $R_p \gg R$, R_n .
4. Izračunajte notranji upor, pri katerem pečica deluje optimalno.
5. Kolikšno moč troši prazna pečica?
6. Izračunajte moč pečice, v kateri je kovinski predmet.
7. Koliko časa bi potrebovali za segrevanje 2 dl vode od sobne temperature 20°C do vrelišča? Specifična toplota vode je $4,2 \text{ kJ/kg K}$. ☒

Elektrika

ANDREJ LIKAR

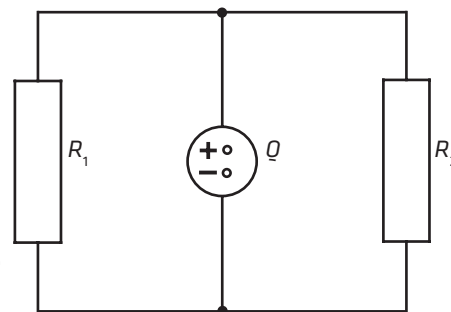
- ☞ 1. Na vezje z uporoma R_1 in R_2 priključimo baterijo z gonilno napetostjo U , kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1.

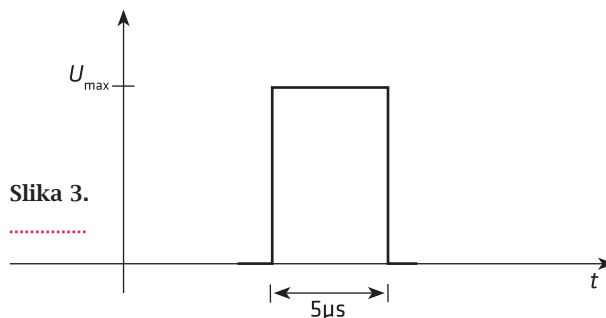
Kolikšen tok teče skozi posamezna upora?

2. Baterijo zamenjamo s sunkovnim izvirom naboja, ki odda v sunku naboj $5 \cdot 10^{-10} \text{ As}$ (glej sliko 2). Koliko naboja steče skozi upor $R_1 = 75 \text{ ohm}$ in skozi upor $R_2 = 25 \text{ ohm}$?



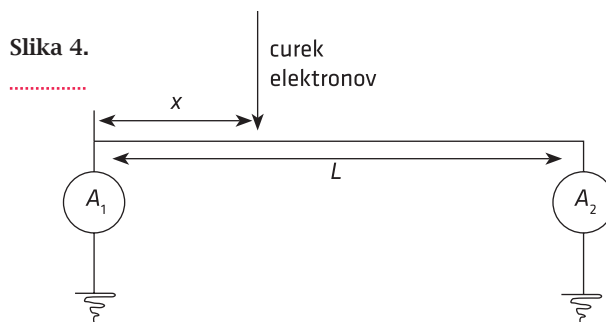
Slika 2.

3. Nabojni sunek ima časovni potek, ki je prikazan na sliki 3. Kolikšna je bila napetost $U_{\max}$?



Slika 3.

4. V evakuirani cevi določamo lego curka elektronov tako, da ga prestrezamo z uporovno žico z dolžino L , kot je prikazano na sliki 4. Na konca žice priključimo občutljiva ampermetra. Njuna odčitka z analogno-digitalnim pretvornikom prenesemo v računalnik. Kako naj napišemo enačbi za program, ki bo iz izmerkov določil tok elektronskega curka, ki se ves čas spreminja, in mesto, kamor udari v žičko? ☒



Slika 4.

Mehanika

ANDREJ LIKAR

➔ V vesolju plava velik kroglast železni meteor s polmerom $r = 10 \text{ km}$ in gostoto $\rho = 7600 \text{ kg m}^{-3}$.

1. Kolikšna je teža kilogramske uteži na njegovi površini?
2. Koliko časa bi utež padala na tla, če bi jo spustili z višine dveh metrov?
3. Koliko časa bi utež potrebovala, da bi obkrožila meteor, če bi se ves čas gibala en meter nad tlemi in bi nanjo delovala le teža? Kolikšna bi bila njena hitrost med kroženjem?
4. Koliko časa pa bi utež potrebovala, da bi na enak način obšla desetkrat večji meteor z enako gostoto?
5. Kolikokrat bi se spremenil obhodni čas, če bi bil meteor železna krogelna lupina z debelino $D = 100 \text{ m}$ in z maso homogenega železnega meteorja s polmerom $r = 10 \text{ km}$? ☒

➔

34. Spekter morskih valov. Ali si kdaj dalj časa opazoval morske valove? Pri močnejšem vetru in na odprtem morju imajo daljšo valovno dolžino, pri blagem vetru in v zaprtem zalivu pa krajšo. Toda vsi valovi niso enaki; pridejo skupine visokih valov in potem spet skupine nižjih. To se posebno lepo vidi, kadar se valovi lomijo; na istem območju obale se lomita le en ali dva vala po kakih desetih blagih valovih.

Valove poganja veter. Očitno mora biti veter hitrejši od valov, da se jim lahko upre v hrbet. Hitrost valovanja pa je odvisna od valovne dolžine:

$$\blacksquare c = \sqrt{g\lambda/2\pi}.$$

Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA

Daljši valovi potujejo torej hitreje (če je valovna dolžina 1 m , je $c = 1,3 \text{ m/s}$, pri valovni dolžini 10 m pa 4 m/s)! Torej je hitrejši veter sposoben poganjati daljše valove. V začetku (recimo, ko se oblikujejo blizu obale) potrebujejo še nekaj časa, da dosežejo značilno valovno dolžino.

Valovi dosežejo hitrost malo manjšo od vetra. Toda veter ne poganja ene same valovne dolžine, temveč cel spekter v ozkem območju. Zato pride do interference. Privzemimo dve značilni področji valovnih dolžin, okrog λ_1 in λ_2 . Če valovanji naložimo, dobimo „utripanje“

$$\blacksquare \frac{\sin 2\pi x}{\lambda_1} + \frac{\sin 2\pi x}{\lambda_2} = \frac{2 \cos 2\pi x}{\Lambda} \cdot \frac{\sin 2\pi x}{\bar{\lambda}},$$

kjer je $\Lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2)$ dvojna dolžina „utripanja“, $\bar{\lambda} = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ pa povprečna valovna dolžina. Na vsakih $n = (\frac{1}{2}\Lambda)/\bar{\lambda}$ valov pride torej nekaj močnejših valov.

Nekoč sem slišal, da je vsak sedmi val močnejši in vsak sedmi vmes šibkejši. Ko sem sam opazoval, je bilo to marsikdaj res, ne pa vedno. **Opazuj še ti ob različnih hitrostih vetra in nam sporoči izsledke na naslov Preseka!**

Pri štetju valov velja naslednje opozorilo. Pri valovih na vodi je fazna hitrost dvakrat večja od grupne hitrosti. To pomeni, da potujejo hribi in doline dvakrat hitreje kot značilne višine valov. Če vidimo v trenutni sliki visoki val kot sedmi po vrsti, moramo čakati 14 valov, da bo do nas prišel val, ki bo tako visok.

Valovna slika se ne ponavlja točno. Posamezni valovi so celo različno „skuštrani“. Gibanje torej ni periodično, je samo „približno periodično“. Takemu gibanju rečemo *kvaziperiodično*. Poleg kvaziperiode sedem do deset valov bomo opazili še višje kvaziperiode, recimo $7 \times 7 \approx 50$ valov, ko bodo prišli posebno visoki valovi. ☒

NAŠ ASTRONOM (FRAN)	OBLIKA LUNE TAKOJ PO ALI PREDMLAJEM	MESTECE V JUŽNI ITALIJI	KRAJ ZMAGE HANIBALA NAD RIMLJANI					GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	ŠIROK KLUBUK IZ SLAME	NIZKO RASTJE POD DREVESI V GOZDU	KRAJ PRI VELENJU	BILJARDNA PALICA	ANICA, ANČKA
1								NENARAVNA PRIKAZEN, IZMALIČENA PODOBA	2				
								IT. FILM. DIVA (SOPHIA)					
								PREDLOG					
	PREMOGOVITUGASKI TETRAEDER			RIMSKI BOG LJUBEZNI	DVOR TURŠKIH SULTANOV	NIKOLA TESLA	NAŠI MOTO-KROSISTI (MATEVŽ, JERNEJ IN PETER)	RAKOTVOREN, KANCE-ROGEN	SOBA V KMEČKI HIŠI MUSLIMAN. BOG			ZAHODNA SOSEDA VELIKE BRITANIJE	REKA V LITVI, KI TEČE SKOZI VILNO
			NOVINAR PRI ČASOPISU							SLOVENSKI IZRAZ ZA MODUS			
		SOMERNICA AVSTRIJ. DRŽAVNA RTV	KOPNO							ALPSKA REKA V FRANCJI VITEZ IZ PREDJAME	4		
11						LADJA ZA PREVOZ VOZIL BARONOVA HČI						SREDNJI ALKILNA SKUPINA, NASTALA IZ ETANA	
KRPAANOVA RODNA VAS PRI SVETI TROJICI				KVARNER-SKI OTOK			AMERIŠKA IGRALKA IN PEVKA ŠIVALNO SREDSTVO			VRHOVNO CERKVENO SODIŠČE		GORSKE REŠ. SANI MADŽAR. PESNIK (JANDS)	
JAVNI NADZORNIK V SPARTI GRŠKA CRKA					KANTAVTOR KOVAČIČ	9			GLAVNO MESTO VENEZUELE				
					MESTO SIKHOV V PANDŽABU				TEŽNI POSPEŠEK				
	V BOHINJU PRIREDILO KRAVJEGA		IVO ANDRIČ LASTNOST DOBRE JEDI			OGRAJENO BORISČE ZA BOKS			NAŠA PEVKA (MARTA)				
					10	PEVEC PESTNER			NASPROTJE RAZLIČNOSTI	14			
				ZAHODNO-EVROPSKI VELETOK UMETNICA SAMOUKINJA			SKUPINA EVROPSKIH NARODOV PLANINA NAD TUHINJEM	18					
											YVONNE LORIOD		
	LUKNJICA ČEBELJA TVORBA					SODNI ZBOR							
	JAPONSKI AVTOMOBIL					NAŠ FILM. REŽISER (FRANCI)			KADAR DOMAČA ALI DIVJA PERNATA ŽIVAL				
	VELIK KROŽNIK ELIPSASTE OBLIKE				15	VIOLINSKI PEDAGOG OZIM JULIA ROBERTS							
	EKSTREM												
	TANTAL					ZASUŠEN IZCEDEK NA RANI							

NAGRADNI RAZPIS

➔ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poštnina je že plačana) do **26. junija 2009**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov paket**. ✕

Vodne leče

MOJCA ČEPIČ IN ANA GOSTINČAR BLAGOTINŠEK

➔ Tokratna poizkuševalnica bo bolj poletna. Čeprav ne bomo delali ledu, pa si bomo pomagali z vrečkami, ki jih za zamrzovanje ledu potrebujemo.

Vodna leča je rastlina, ki včasih preraste ribnike in mlake ter ovira življenje v njih. A tokrat se ne bomo ukvarjali z rastlino, temveč z optičnimi lečami, ki jih lahko naredimo iz vode, ter z vprašanjem, kje jih lahko srečamo v naravi.

■ Potrebščine

- vrečke za led iz polivinila.

Vrečko za led napolnimo z vodo in jo zavežemo (slika 1). Okrogli prostori napolnjeni z vodo bodo naše leče.

Zunaj na soncu položimo vrečko na bel list papirja. Počasi jo iznad lista papirja dvigujemo in si ogledujemo, kaj vidimo pod vrečko. *Pri kateri višini nad listom vidimo na sredini pod okroglimi deli vrečke le svetlo piko?*

Zdaj vrečko nekoliko stisnemo, da se nekateri prostorčki bolj napolnijo z vodo in izbočijo. *Ali se višina nad listom, ko vidimo le svetlo piko na listu, kaj spremeni? Kako? Se zmanjša ali poveča?*

Položimo vodne leče na papir s črkami. Počasi leče dvigujemo in skozi eno od njih opazujemo besedilo. *Kako je v odvisnosti od višine leče nad papirjem videti*



Slika 1.

besedilo? Primerjajmo še z opazovanjem besedila skozi lupo.

Z lupo lahko preslikamo predmete tudi na zaslon. *V kakšnem vrstnem redu in na kakšnih razdaljah moramo postaviti zaslon, predmet in lupo, da lahko sliko predmeta opazujemo na zaslonu?*

Enako lahko naredimo tudi z vodno lečo. Z vodnimi lečami preslikajmo na zaslon prižgano svečo. *Koliko slik nastane? Po čem so vse slike enake? Se po čem razlikujejo?*

Potem pa se ozrimo še okoli sebe. Ob deževnih dnevih visijo na vejah pogosto velike kaplje. Oglejmo si jih. *Kako je videti svet za kapljami, če pogledamo skozi njih?*

Turisti pogosto niso pozorni in ekološko zavedni. Steklenica s preostankom vode lahko deluje kot leča. Oglejmo si tudi to. *Ste že slišali, da je mogoče na ta način povzročiti požar? Kaj mislite zakaj?* ✖

Makrodifuzija in evrodifuzija

ODGOVOR NALOGE

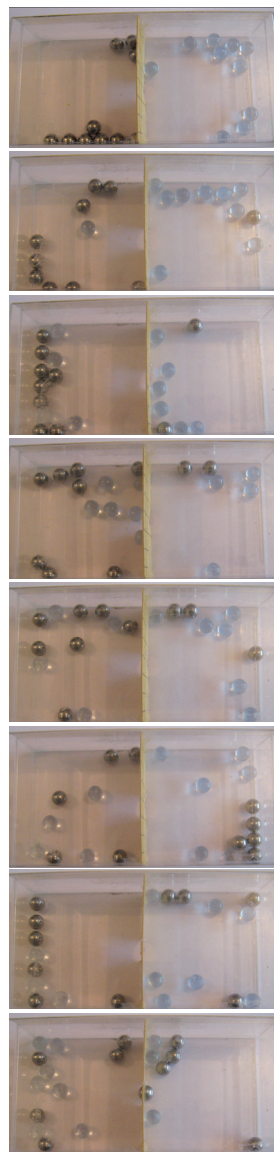
MOJCA ČEPIČ

➔ V prejšnji poizkuševalnici smo vas povabili, da si ogledate, kaj se dogaja s fižolčki, ki so bili na začetku v škatlici porazdeljeni na obeh straneh pregrade. Da smo dogajanje lažje zasledovali, smo na eno stran pregrade dali le temne fižolčke, na drugo pa le svetle.

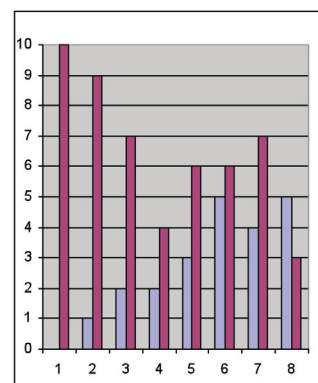
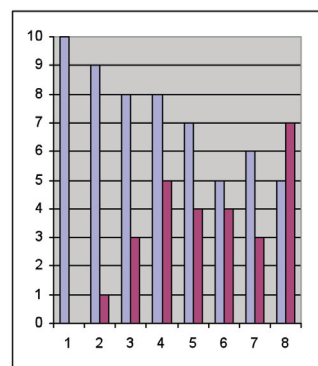
Podoben poskus s kroglicami smo naredili tudi mi. Rezultate lahko vidite na fotografijah na sliki 1. Na vsaki strani pregrade je bilo po deset kroglic. Da smo jih razlikovali, smo izbrali steklene in kovinske kroglice enakega premera. Naredili smo tudi mnogo poskusov s škatlicami, enakimi tisti, ki je bila predstavljena v prejšnji številki Preseka. Razlike v obliki škatlic in to, da smo enkrat uporabili fižolčke, drugič pa kroglice, niso vplivali na to, o čemer se bomo pogovarjali tokrat.

Na sliki 1, na fotografijah, pripadajočih tabelah in grafih lahko vidimo, da se število kovinskih kroglic v levem prekatu zmanjšuje, število steklenih v istem prekatu pa povečuje. Obratno se dogaja v desnem prekatu. Takšno dogajanje je seveda logično. Ko škatlico potresemo, se iz enega prekata premakne ena, največ dve kroglici v drugi prekat in obratno. Čim več je v prekatu kroglic ene vrste, npr. kovinskih, tem večja je verjetnost, da bo prekat zamenjala kroglica ravno te vrste. Tako na začetku, ko so v levem prekatu le kovinske kroglice, vnaprej vemo, da lahko samo kovinske kroglice prečkajo pregrado iz leve na desno, ker drugih na levi sploh ni.

Po nekaj tresljajih, ko se kroglice že nekoliko premešajo, se lahko v desni prekat vrnejo tudi steklene kroglice. Verjetnost za tak dogodek je tem večja, čim več steklenih kroglic je v levem prekatu. V povprečju je po nekaj stresanjih na obeh straneh enako število kroglic. Iz diagramov lahko razberemo, da zadoščajo že tri, morda pet stresanj.



LEVO		DESNO	
temne kroglice	svetle kroglice	temne kroglice	svetle kroglice
10	0	0	10
9	1	1	9
8	3	2	7
8	5	2	4
7	4	3	6
5	4	5	6
6	3	4	7
5	7	5	3



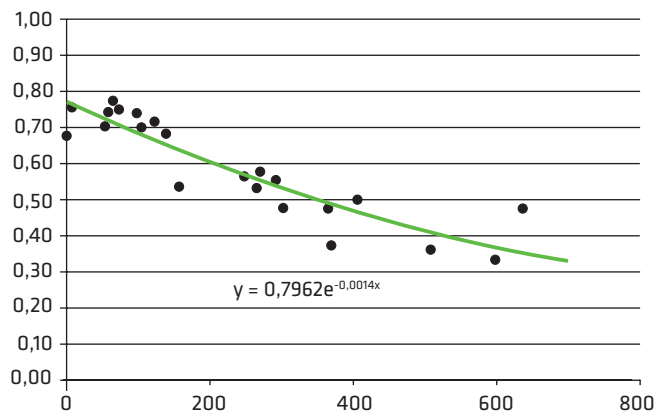
Slika 1. Dogajanje ob stresanju škatlice; slike škatlice si sledijo v zaporedju stresanj, dodana so tudi števila posamezne vrste kroglic v prekatih in njih histogrami. Vidimo, da je v povprečju po nekaj stresanjih število kroglic na obeh straneh enako.



Ker je število kroglic majhno, lahko govorimo le o povprečjih. Po desetih oziroma dvajsetih stresanjih število kroglic na obeh straneh navadno ne bo enako, enkrat jih bo več na levi, enkrat na desni. Tudi vrsta kroglic ne bo enaka, ne bo vedno pol steklenih in pol kovinskih na obeh straneh. A če poskus izvajamo dalj časa in izračunamo povprečno število steklenih in kovinskih kroglic na vsaki strani, vidimo, da sta ti števili blizu polovice kroglic (fižolčkov) posamezne vrste. Čim večje število stresanj bomo uporabili pri izračunu povprečja, tem bolj se bomo približali polovici.

Če je bil kdo med vami posebno vztrajen, se mu je morda po mnogih stresanjih zgodilo, da so se na eni strani znašli vsi temni (ali svetli fižolčki). Če ste poleg tega vztrajali še, da so morali na nasprotni strani biti vsi fižolčki svetli (torej, da v pregradi pri temnih fižolčkih ni bilo nobenega svetlega in obratno), vam moram čestitati za vztrajnost. Sama se s škatlico igram že leta, pa mi „razmešati“ fižolčkov ni nikoli uspelo. Pri majhnem številu fižolčkov se „razmešanje“ včasih še zgodi (poskusite lahko npr. s tremi temnimi na levi in tremi svetlimi na desni). Ko povečujemo število fižolčkov, postaja ta dogodek bolj in bolj redek oziroma ga tudi po vztrajnem stresanju ne opazimo več.

Zgodba, ki jo pri tem poskusu zasledujemo, opisuje pravzaprav difuzijo, le da je število sodelujočih delcev mnogo mnogo manjše kot pri običajni difuziji. Pri difuziji so fižolčki molekule različnih snovi, ki so na začetku neenakomerno porazdeljene po prostoru. Na enih mestih jih je več, na drugih pa manj. Z naključnim gibanjem prehajajo molekule od tam, kjer jih je več, tja, kjer jih je manj. Končno so deleži molekul povsod enaki. Ker je število molekul zelo zelo veliko (v kozarčku vode npr. okoli 10^{23} – 10^{24}), nikoli ne doživimo spontanega razmešanja snovi.



Slika 2. Delež slovenskih kovancev v povprečni slovenski denarnici v odvisnosti od časa pretečenega od vpeljave evra v Sloveniji (merjeno v dnevih).

Drugi del naloge pa se je nanašal na vsebine denarnic. Če ste preverjali, od kod imate kovance v njih, ste ugotovili kar nekaj zanimivosti. Prvič: spoznali oz. naučili ste se prepoznavati kovance iz drugih držav. Drugič: ugotovili ste, da je delež slovenskih kovancev danes že precej majhen. In tretjič: ugotovili ste, da so kovanci nekaterih držav pogostejši.

Kaj se dogaja s vsebino denarnic, smo od uvedbe evra načrtno spremljali na Pedagoški fakulteti v Ljubljani. Takoj po uvedbi evra so študentje, ki so bili pripravljeni sodelovati v raziskavi, približno enkrat tedensko prešteli število kovancev v denarnicah, jih razvrstili po izvoru in jih vpisali v tabelo. Nato smo te številke sešteli in preračunali deleže, ki jih predstavljajo kovanci po izvoru. Kasneje smo štetje ponavljali v večjih časovnih razmakih, na sliki 2 pa lahko vidite rezultate naših meritev po dvoletnem opazovanju.

Iz tega diagrama lahko razberemo marsikaj. Delež tujih kovancev na samem začetku ob vpeljavi evra je bil precej velik in je znašal okoli 20%. Slovenci mnogo potujemo in večina ljudi je imela nekaj evrov doma v predalih, ko pa je evro postal tudi naša valuta, smo jih uporabili. Ugotovimo lahko tudi, da je delež slovenskih kovancev vztrajno padal in da



je po približno 500 dneh padel na polovico začetnega deleža. Danes je v denarnicah moč najti le še okoli 30% ali celo manj slovenskih kovancev. Ker pa je delež slovenskega prispevka k dohodku evrskega območja manj kot pol odstotka, delež kovancev v celotni evro vreči evrskega območja pa je temu sorazmeren, lahko pričakujemo, da bodo slovenski kovanci čez nekaj let redkost tudi pri nas.

Razvrščanja kovancev so pokazala, da je največji delež kovancev nemških, kar je pričakovati tudi v prihodnje, saj je Nemčija država z največjim družbenim proizvodom v evrskem območju. Nato sledijo kovanci italijanskega in avstrijskega izvora. Za slednje je verjetno pomembna bližina meje. Presenetljivo veliko najdemo tudi francoskih, španskih in grških. Kovanci ostalih držav so dogodek, ki si ga zapomnimo.

Pa še odgovor na zadnje vprašanje. V čem so si mešanje kovancev, mešanje fižolčkov in difuzija podobni? Na začetku so pri nas prevladovali slovenski kovanci, preko meja (pregrade) pa so k nam prihajali tuji in odhajali naši. Ker so razmerja med našimi in tujimi kovanci v Evropi precej drugačna kot razmerje med fižolčki v škatli, so tudi končna razmerja deležev precej razlikujejo. Čeprav je kovancev mnogo, se številom, ki jih dosega molekule pri difuziji, niti zdaleč ne približajo. Medtem ko molekul ne moremo videti, kovanice lahko zasledujemo. A vseeno je število kovancev dovolj veliko, da brez posegov bank ne moremo pričakovati vračanja slovenskih kovancev v Slovenijo. Po zatiranje bank pa le-te tega ne počnejo, ne sortirajo in ne vračajo kovancev v države izvora. To tudi nima smisla, saj imajo kovanci v vseh državah enako vrednost. Ker pa bodo slovenski kovanci počasi postali redkost, morda ni odveč spraviti nekaj popolnih kolekcij za spomin. ✖

ALEŠ MOHORIČ IN ANDREJ LIKAR

♦ ELEKTRIKA, TOPLOTA

1. Iz $P = UI$ dobimo $I = 4,54 \text{ A}$, če za moč vstavimo 1000 W .
2. Iz $U = R_c I$ sledi $R_c = 48,4 \Omega$.

Izdelovalci želijo narediti pečico tako, da je parazitski upor R_p čimvečji, saj je takrat pečica najbolj učinkovita.

3. Tok iz izvira je v tem primeru enak toku skozi notranji upor in upor R . Moč na uporu R izračunamo iz $P_R = U_R I$. Padec napetosti na uporu R je $U_R = U - I R_n$, tok, ki teče skozi oba upora, pa je $I = U / (R + R_n)$. Za moč tako dobimo izraz $P_R \approx U^2 R / (R + R_n)^2$. Ta moč je največja, kadar je $R = R_n$ (preverite tako, da narišete graf moči kot funkcijo upora R). Takrat se na notranjem uporu in uporu R troši enaka moč, ki je enaka polovici nazivne moči P : $P_{\text{Ropt}} \approx P_{\text{nopt}} \approx P/2 = U^2/4R_n$. Zdaj razumemo, zakaj je ventilator pomemben sestavni del pečice – poskrbi za hlajenje notranjega upora izvira.
4. Iz $P \approx 2 P_{\text{nopt}}$ in $P_{\text{nopt}} = U^2/4R_{\text{nopt}}$ sledi $R_{\text{nopt}} = 24,2 \Omega$.

Kadar pečico prižgemo prazno, je upor R zelo velik.





5. V tem primeru je

$$P_{n\infty} \approx U^2 R_n / R_p^2 = 2 P R_n / R_p \ll P_{\text{nopt}}$$

ter

$$P_{p\infty} \approx U^2 / R_p \approx 4 P_{\text{nopt}}.$$

Na parazitskem upor upor se troši mnogo večja moč kot v optimalnem primeru. Zaradi tega se lahko okvari oddajnik mikrovalov. Zato pri gretju majhnih porcij v pečico postavite še kozarec vode.

Kadar je v pečici kovinski predmet, je upor R zelo majhen.

6. V tem primeru je padec napetosti na notranjem upor enak napetosti izvira. Moč, ki se troši na notranjem upor, je $P_{n0} \approx U^2 / R_n = 4 P_{\text{nopt}}$. Na notranjem upor se v tem primeru energija troši štirikrat močnejše in pečica deluje z dvojno nazivno močjo. Pri dolgotrajni obremenitvi pregori varovalka, ki ščiti pečico.

7. Upora R ne znamo izračunati tako, kot računamo električni upor prevodne snovi. Zato privzamemo, da je upor takšne količine vode blizu optimalnega upora, in tedaj je za segrevanje vode na voljo polovica nazivne moči. Čas gretja je $t = 2 m c \Delta T / P = 135$ s. Poskus lahko naredite doma. Preverite, ali ustreza napovedi. ✖

✪ ELEKTRIKA

1. $I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{in} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$

2. Privzemimo, da je napetost sunkovnega izvira naboja nekaj časa, denimo t , konstantna, potem pa pade na nič. Za naboja potem dobimo

$$Q_1 = I_1 t = \frac{U t}{R_1}$$

in

$$Q_2 = \frac{U t}{R_2}.$$

Velja tudi

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

in, ker celotni naboj poznamo, lahko zapišemo $Q_1 + Q_2 = Q$ ter izračunamo

$$Q_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ As}$$

in

$$Q_2 = Q - Q_1 = 3,75 \cdot 10^{-10} \text{ As}.$$

Tudi če napetost ni konstantna, je na obeh uporih enaka, zato se rezultat ne spremeni.

3. Iz $Q_1 = I_1 t = \frac{U_{\text{max}} t}{R_1}$

takoj sledi

$$U_{\text{max}} = \frac{R_1 Q_1}{t}$$

in končno $U_{\text{max}} = 1,88 \text{ mV}$.

4. Iz prejšnjih nalog takoj sledi

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{ter} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

in odtod

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Razmerje $\frac{R_2}{R_1}$ je enako razmerju dolžin žice, torej

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{L - x}{x}.$$

Iskani enačbi sta torej

$$I = I_1 + I_2$$

in

$$x = \frac{I_2 L}{I}. \quad \text{✖}$$

➤ MEHANIKA

1. Iz gravitacijskega zakona

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

in mase meteorja

$$m_2 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

sledi

$$F = \kappa m_1 \frac{4\pi r \rho}{3} = 2,12 \cdot 10^{-2} \text{ N.}$$

2. Iz $g = 2,12 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ in

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dobimo $t = 13,7 \text{ s}$.

3. Centripetalna sila je teža, torej velja

$$\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r.$$

Iz tega in z upoštevanjem mase m_2 imamo

$$\omega^2 = \kappa \frac{4\pi \rho}{3}.$$

Obhodni čas $T = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$ sledi iz $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Hitrost dobimo iz $v = \omega r = 14,6 \text{ ms}^{-1}$.

4. Ker v izrazu za ω ni radija meteorja, je čas od radija neodvisen.
5. Sedaj utež kroži po večjem radiju r_1 , ki ga dobimo iz podatka, da sta masi lupine in prvotnega meteorja enaki

$$\frac{4\pi r^3 \rho}{3} = 4\pi r_1^2 D \rho,$$

od koder imamo

$$r_1 = \sqrt{\frac{r^3}{3D}}.$$

Dobimo $r_1 = 57,5 \text{ km}$. Razmerje $\frac{\omega}{\omega_0}$, kjer je ω_0 kotna hitrost pri polnem meteorju, dobimo iz znane Keplerjeve zveze

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{r^3}{r_1^3}.$$

Razmerji kvadratov obhodnih časov sta potem

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{r_1^3}{r^3}.$$

Razmerje obhodnih časov je iz tega 13,9. ✖

REŠITEV SUDOKU S STRANI 9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	3	8	9	5	2	7	1	4	6
B	5	1	6	8	4	9	7	2	3
C	2	4	7	6	3	1	9	8	5
D	6	2	4	9	5	3	8	7	1
E	7	5	3	4	1	8	6	9	2
F	1	9	8	7	6	2	5	3	4
G	4	7	2	1	9	5	3	6	8
H	8	3	1	2	7	6	4	5	9
I	9	6	5	3	8	4	2	1	7

REŠITEV SUDOKU IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	9	8	6	7	1	3	5	4	2
B	2	3	4	9	6	5	1	8	7
C	1	7	5	4	8	2	6	3	9
D	5	2	3	6	4	8	7	9	1
E	8	6	7	1	5	9	4	2	3
F	4	9	1	3	2	7	8	6	5
G	3	5	9	8	7	6	2	1	4
H	6	1	2	5	9	4	3	7	8
I	7	4	8	2	3	1	9	5	6



Astronomske vaje v mednarodnem letu astronomije

ANDREJ GUŠTIN

➔ V okviru akcij v mednarodnem letu astronomije na spletnem naslovu www.astronomija2009.si nastaja obsežna zbirka astronomskih vaj za populacijo od predšolskih otrok, osnovnošolcev vseh stopenj do srednješolcev oz. gimnazijcev. Vaj se bodo zagotovo razveselili učitelji in mentorji astronomskih krožkov, ki so že pogrešali tovrstno zbirko. Res je v zadnjih letih po zaslugi številnih avtorjev izšlo kar nekaj astronomskih vaj, a je učitelje motila predvsem razpršenost teh vaj po različnih revijah.

Kot primer vaje iz zbirke na spletu predstavljamo sorazmeroma enostavno, primerno za 3. triado devetletke in za srednjo šolo. Meritev ni težko izvesti in čeprav je merska napaka lahko dokaj velika, je pomemben predvsem pedagoški moment. Astronomija namreč ni le bežno kukanje skozi teleskop, temveč znanost s klasičnim procesom spoznavanja: teorija – meritve (opazovanja) – obdelava meritev – rezultat (spoznanje).

■ Zelo enostavna meritev siderskega meseca

Ker Luna kroži okoli Zemlje, ta pa okoli Sonca, čas med, denimo, zaporednima ščipoma ni enak obhodnemu času Lune okoli Zemlje. *Sinodski mesec* je čas celega cikla men (lunacija), npr. čas med zaporednima ščipoma. *Siderski* oz. *zvezdni mesec* pa je čas enega obhoda Lune okoli Zemlje. Z drugimi besedami, to je čas, v katerem Luna zaporedoma pride v isto lego glede na oddaljene zvezde.

Na sliki 1 je poenostavljen dvodimenzionalni prikaz tega gibanja, pri katerem so zanemarjeni naklon Luninega tira na ekliptiko, ekscentričnost orbite in drugi bolj zapleteni elementi orbite. Denimo, da je Z_1 položaj Zemlje v trenutku Luninega ščipa M_1 in je tedaj Luna poravnana z neko zvezdo. Ta zvezda nam je lahko za referenco položaja Lune v prostoru. Luna se z referenčno zvezdo ponovno poravnava (M_2), ko je Zemlja v položaju Z_2 . To pomeni, da je naša spremljevalka v času P naredila en obhod okoli Zemlje. Na nebu jo vidimo v isti legi glede na zvezde. Toda tedaj še ne nastopi ščip, saj se je zaradi gibanja Zemlje okoli Sonca spremenila smer proti Soncu. Luna mora prepotovati še kot α , preden je ščip. Čas med dvema zaporednima ščipoma je na sliki označen kot S . P je torej siderski, S pa sinodski mesec. Razmerje med S in P je

$$\blacksquare \quad S/P = 1 + \alpha/360^\circ. \quad (1)$$

Ker kroženji Zemlje okoli Sonca in Lune okoli Zemlje nista enakomerni (zaradi eliptičnosti orbit se tirni hitrosti Zemlje in Lune spreminjata), se med letom spreminja tudi kot α . Za naše potrebe lahko kljub temu zapišemo povprečni vrednosti:

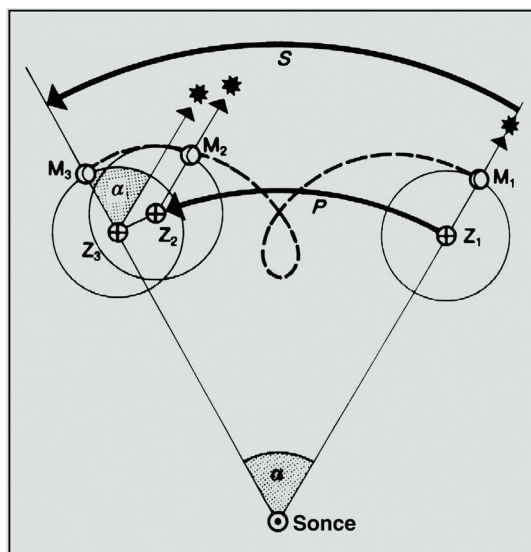
$$\blacksquare \quad P = 27,3 \text{ dneva},$$

$$\blacksquare \quad S = 29,5 \text{ dneva}.$$

V enem dnevu se Luna glede na zvezde premakne za približno 13,2 stopinje in vsak dan vziđe oz. zaide v povprečju 52 minut kasneje glede na zvezde.

Meritve sinodskega (S) meseca so načeloma enostavne, saj ga lahko določimo s spremljanjem Luninih men, npr. z risanjem osvetljenega dela Lunine ploskvice. Ker je tak opazovalni postopek dolgotrajen in zaradi tega navadno neprimeren za aktivnosti v šoli, lahko sinodski mesec odčitamo kar iz efermerid ali zanesljivega koledarja.

Za določitev siderskega meseca (P) moramo izmeriti oz. oceniti čas, ko se Luna vrne v isto lego glede na oddaljene zvezde. Možnosti merjenja navideznega gibanja Lune glede na zvezde je veliko. Natančnejše rezultate dobimo z določanjem lege Lune v čim daljšem obdobju lunacije in vrisovanjem v ekvatorialno zvezdno karto. Meritve lahko poenostavimo že tako, da izmerimo lego Lune glede na zvezde ob dveh zaporednih ščipih (ali prvih krajcih) in s po-



Slika 1. Gibanje Zemlje in Lune v prostoru. Z_1 označuje lego Zemlje, M_1 pa lego Lune ob ščipu. Tedaj je Luna poravnana z neko zvezdo (puščica). Ko Luna enkrat obkroži Zemljo (M_2 – ponovna poravnava z isto zvezdo), naslednji ščip še ne nastopi, saj Zemlja kroži okoli Sonca in se v tem času premakne za P . Šele ko prideta Zemlja in Luna v Z_3 oz. v M_3 , nastopi naslednji ščip. Luna je od M_2 do M_3 prepotovala kot α . (Ilustracija: Bojan Kambič.)

močjo zvezdne karte neposredno odčitamo kot α . Najhitrejša metoda, opazovanja trajajo samo dva zaporedna večera, pa je kar meritev premika Lune v času enega dneva in nato izračun časa, v katerem se Luna okoli Zemlje zasučje za 360° . Seveda bo pri tem prišlo do precejšnje napake pri določanju siderskega meseca, vendar bo namen opazovanj vseeno dosežen: učenci bodo spoznali navidezno gibanje Lune po nebu, njeno približno hitrost, razlog za razliko med siderskim in sinodskim mesecem ter osnovne elemente Lunine orbite.

IZVEDBA VAJE. V dveh zaporednih večerih izmerimo lego Lune glede na svetlejše zvezde in njen položaj vrisemo v zvezdno karto. Izmerjeni kotni premik Lune β (slika 2b) v času t_0 med opazovanjema je del navidezne poti, ki jo ta prepotuje v enem siderskem mesecu. Glede na natančnost te metode (zanemarjen je naklon Luninega tira) privzamemo, da se Luna giblje po ekliptiki in merimo le premik vzdolž ekliptike oz. naredimo projekcijo njene le-

→ ge na ekliptiko. Trajanje siderskega meseca P je potemtakem

$$\blacksquare P = (360^\circ / \beta) \cdot t_0. \quad (2)$$

Če prvi in drugi večer izmerimo lego Lune ob isti uri ($t_0 = 24$ ur) in ugotovimo, da se je v tem času glede na zvezde premaknila za 13 stopinj, je dolžina siderskega meseca

$$\blacksquare P = (360^\circ / 13^\circ) \cdot 24 \text{ ur} = 664,6 \text{ ure} = 27,7 \text{ dneva}.$$

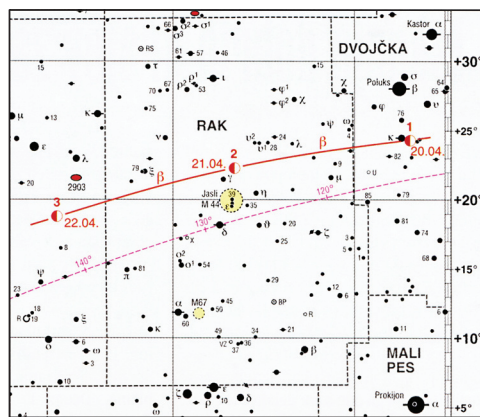
Potrebščine: digitalni fotoaparatus, fotografski stativ, zvezdna karta z vrisano ekliptiko (Zvezni atlas), eferide Lune za tekoči mesec, zvezek za zapiske.

PRIPRAVA NA OPAZOVANJE. Najbolje je, če opazovanja potekajo okoli prvega krajca. Glede na vremensko napoved si izberemo dva dneva okoli prvega krajca, ko bo v večernih urah z veliko gotovostjo jasno vreme. Prvi večer dobro uro po zaidu Sonca fotoaparatus na stojalu usmerimo proti Luni in posnamemo tisti del neba. Čas osvetlitve mora biti daljši od 10 sekund, da se na senzor ujamejo tudi svetlejšše zvezde. Nič hudega, če bo pri tem slika Lune preosvetljena, saj potrebujemo le njeno lego glede na svetlejšše zvezde. V beležko ne smemo pozabiti zapisati časa fotografiranja. Postopek ponovimo še naslednji večer približno ob istem času.

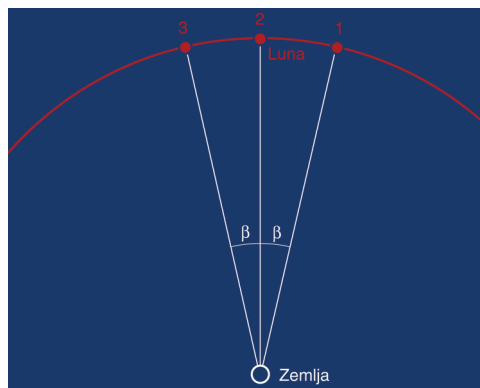
RISANJE IN RAČUNANJE. Legi Lune za prvi in drugi opazovalni dan vrišemo na prej pripravljeno zvezdno karto. To naredimo tako, da digitalna posnetka prenesemo na računalnik in s programom za obdelovanje slik izmerimo razdalje Lune do svetlejših zvezd na sliki. Spretnejši lahko posnetka združijo (poravnajo zvezde na posnetkih) in premik Lune izmerijo kar na zaslonu. Legi Lune nato vrišemo na zvezdno karto in z nje odčitamo kot njenega premika (v kotnih stopinjah) po ekliptiki v enem dnevu. To je vrednost β v enačbi. Nato izračunamo še čas t_0 med meritvama, ki ga dobimo tako:

$$\blacksquare t_0 = 24 \text{ ur} - (t_1 - t_2),$$

kjer je t_1 čas meritve prvega dne, t_2 pa čas meritve drugega dne. Denimo, da smo prvi dan Luno fotografirali ob 22. uri in 45 minut, drugi dan pa ob 22. uri in 30 minut, potem je $t_0 = 24 \text{ ur} - (22.45 - 22.30) =$



(a)



(b)

Slika 2a in 2b. Lega Lune na nebu v treh zaporednih dnevih. Vsak dan je njen kotni premik približno β . Ta kot dobimo s projekcijo leg Lune na ekliptiko. (Ilustracija: Bojan Kambič.)

23 ur in 45 minut. S tema podatkom sinodski mesec izračunamo s pomočjo enačbe (2).

■ Pogovor in vprašanja

■ Izmerjeni sinodski mesec primerjaj s pravo vrednostjo in poskusi ugotoviti, od kod razlike. Nekaj razlogov je omenjenih že v uvodnem delu tega pripevka.

■ Ali je Luna ob naslednji vrnitvi na isto mesto na nebu glede na zvezde tudi v isti fazi?

■ Ali je Luna ob isti fazi tudi v isti legi glede na zvezde?

■ Kolikšen je kot med Soncem in Luno, gledano z Zemlje ob prvem krajcu? ☒

Metoda Monte Carlo in število π

ANDREJ TARANENKO

➔ V tokratnem prispevku bomo spoznali skupino metod s skupnim imenom „metode Monte Carlo“, ki se uporabljajo na različnih področjih znanosti. Njihovo uporabo si bomo pogledali na primeru izračuna približka za število π .

Izraz *metoda Monte Carlo* je zelo splošen izraz, ki zajema veliko računalniških postopkov. Metode Monte Carlo so stohastične metode, kar pomeni, da temeljijo na uporabi naključnih števil ter verjetnosti in statistike. Pogosto jih uporabljamo za simulacijo fizikalnih in matematičnih sistemov. S pomočjo teh metod raziskujemo različne probleme in njihove last-



računalništvo



nosti, zato jih lahko uporabljamo na mnogih področjih, od ekonomije, jedrske fizike, do uravnavanja pretoka prometa. Seveda se načini uporabe teh metod na posameznih področjih med seboj zelo razlikujejo. Ker same metode temeljijo na ponovnih izračunih in uporabljajo naključna oz. pseudo-naključna števila, so bolj primerne za uporabo na računalnikih.

Pod pojmom metoda Monte Carlo si lahko predstavljamo postopek sestavljen iz naslednjih korakov:

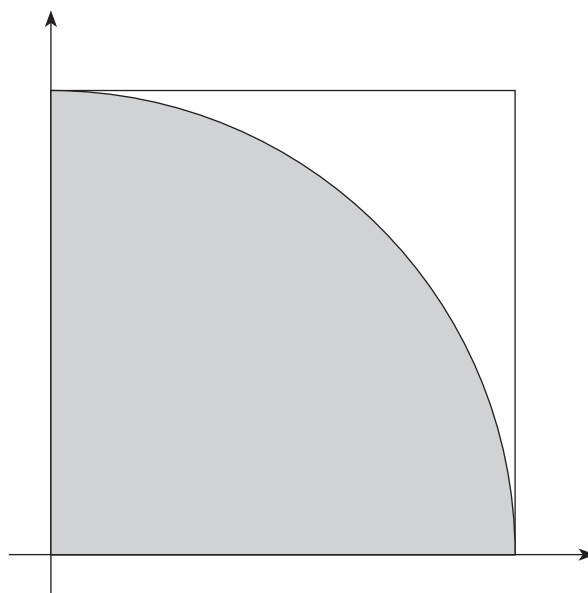
1. Določi domeno, torej množico vseh veljavnih vrednosti.
2. Ustvari množico naključnih veljavnih vrednosti.
3. Na podlagi ustvarjenih vrednosti izvedi izračun.
4. Uporabi izračun pri pridobitvi končnega rezultata.

O naključnih številih smo v Preseku že pisali (radovednega bralca vabimo, da poišče tretjo številko 33. letnika Preseka). Za generiranje naključnih števil na računalniku seveda uporabljamo algoritme in funkcije, zato naključna števila, ki si jih računalnik „izmisli“, v resnici niso naključna. Zaradi tega takšna števila pogosto imenujemo psevdo-naključna števila. Tako računalnik, če mu podamo poljubno začetno število, tvori zaporedja med seboj neodvisnih (psevdo-naključnih) števil. Temu začetnemu številu pravimo *seme* generatorja naključnih števil. Če bi s programom generirali naključna števila, pri čemer bi vedno začeli z istim semenom, bi vedno dobili zaporedje istih števil. Iz teh razlogov seme običajno določimo glede na izbrani podatek iz sistema, pogosto glede na čas, ob katerem smo program zagnali, saj ni verjetno, da bomo uspeli program dvakrat izvesti ob natanko istem času.

Preden se vrnemo k izračunu približka za število π , ponovimo nekaj dejstev, ki jih bomo potrebovali:

- Ploščina kroga s polmerom r je enaka πr^2 .
- Ploščina kvadrata s stranico dolžine r je enaka r^2 .
- Razdalja med točko (x_1, y_1) in točko (x_2, y_2) v ravnini je enaka $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

V koordinatni sistem narišimo kvadrat s stranico dolžine r tako, da ima dve stranici vzporedni z osjo x , levi spodnji kot kvadrata pa naj bo v izhodišču koordinatnega sistema. Sedaj v kvadrat včrtajmo četrtino kroga s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom, ki je enak stranici kvadrata, torej r (glej sliko 1).



Slika 1. Četrtina kroga včrtana v kvadrat

Če izračunamo razmerje med ploščino četrtine kroga v kvadratu in ploščino kvadrata, dobimo

$$\frac{\text{ploščina dela kroga v kvadratu}}{\text{ploščina kvadrata}} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

To razmerje bomo sedaj izkoristili za izračun približka števila π . Recimo, da bomo ustvarili n točk, ki se nahajajo v kvadratu. Razmerje med točkami, ki se nahajajo znotraj včrtane četrtine kroga, in med vsemi točkami, ki smo jih ustvarili v kvadratu, bo približna vrednost zgornjega razmerja, zato bo približna vrednost za $\pi/4$. Torej bo štirikratnik točk znotraj kroga, deljen s številom vseh točk v kvadratu, približek za število π :

$$\pi \approx 4 \frac{\text{število točk v krogu}}{\text{število točk v kvadratu}}.$$

Poglejmo si postopek izračuna v programskem jeziku C++. Pred tem ponovimo, da v C++ obstaja knjižnica `cstdlib`, ki vsebuje funkcijo `rand()`; ta vrne naključno celo število med 0 in `RAND_MAX`, pri čemer je `RAND_MAX` konstanta, definirana v isti knjižnici. Za spreminjanje semena funkcije `rand()` imamo funkcijo `srand(int seme)`. V funkciji predpostavimo, da je $r = 1$, torej dolžina stranice kvadrata je enaka 1. Spodnji program izpiše približne vrednosti, ki jih

po zgornjem postopku izračuna za različna števila točk, ki jih ustvarimo v kvadratu.

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <ctime>
using namespace std;

double pi(int n) {
    int znotrajKroga = 0;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        double x = double(rand())/RAND_MAX;
        double y = double(rand())/RAND_MAX;
        if (sqrt(x*x + y*y) <= 1)
            znotrajKroga++;
    }

    return 4*double(znotrajKroga)/n;
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    srand(time(NULL));
    int i=10;
    do {
        cout << "Po " << i <<
            " korakov je približek enak ";
        cout << pi(i) << "." << endl;

        i *=10;
    } while (i<=1000000);

    return 0;
}
```

Recimo, da bodo vse ustvarjene točke znotraj kroga, torej ne bodo enakomerno porazdeljene po kvadratu, zato bo naš približek slab. Prav tako bo približek slab, če bomo v kvadrat postavili majhno število točk. V samem postopku lahko opazimo še dve lastnosti, ki sta skupni Monte Carlo metodam: odvisnost od dobrega generatorja naključnih števil in počasno približevanje k natančnejšemu približku, ko uporabimo več točk. Približek bo tem večji, čim več točk bomo postavili v kvadrat in čim bolj bodo te točke enakomerno porazdeljene.

Seveda bi lahko na računalniku za izračun približka za število π izrabili kakšno učinkovitejšo formulo, npr.

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1}.$$

Več členov te vsote bi izračunali, natančnejši približek bi dobili. Primerjajmo približke, ki jih dobimo za število π po metodi Monte Carlo, s tistimi, ki jih dobimo z izračunom zgornje vsote. Pri primerjavi bomo upoštevali naslednje: število točk, ki jih postavimo v kvadrat, bo hkrati število členov, ki jih bomo upoštevali pri izračunu zgornje vsote.

n	METODA MONTE CARLO	VSOTA PO ZGORNJI FORMULI
10	3,2	3,25237
100	3,08	3,15169
1000	3,176	3,14259
10000	3,1392	3,14169
100000	3,14484	3,1416
1000000	3,14037	3,14159
10000000	3,14174	3,14159

Kot zanimivost podajmo še približek števila π , ki je natančen na prvih 50 decimalnih mest:

3,1415926535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Za konec še povejmo, kako lahko s kredo in zrni riža izračunamo približek za število π .

1. Na tla narišemo kvadrat in mu včrtamo četrtno kroga, kot je opisano zgoraj.
2. Enakomerno raztresimo zrna riža po kvadratu.
3. Preštajmo zrna, ki so v krogu, število pomnožimo s 4 in delimo s številom vseh zrn.
4. Rezultat, ki ga dobimo, je približek za število π .

Opazimo lahko, da opisani postopek natančno sledi zgoraj podanim korakom splošne Monte Carlo metode. Štetje riževih zrn je lahko res malce zamudno, a kljub temu predlagamo, da poskusite tudi sami. ✖



Želiš na MARS?

BOŠTJAN KUZMAN

➔ MARS je poletni izobraževalni program, namenjen dijakom in dijakinjam, ki jih zanimata matematika in računalništvo. Zasnovan je tako, da poudarja ustvarjalno raziskovanje pomembnih matematičnih problemov in njihovega ozadja, ne pa tehnik reševanja tekmovalnih nalog.

Letošnji MARS je že četrti zapored in bo potekal od 16. do 22. avgusta 2009 v Kopru. Program izvaja DMFA Slovenije v sodelovanju s Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem, vodja programa je mag. Boštjan Kuzman.

Rok za prijavo je 15. junij 2009, število mest je omejeno. Podrobnosti o prijavi, ceni udeležbe in ostale informacije poiščite na spletni strani <http://mars.dmfa.si>.

„Obstajajo torej tudi načini, ko je matematika lahko zabavna, čeprav si večina najbrž misli, da smo ubrisani, ker se prostovoljno udeležimo česa takega...“ (Urša, udeleženka programa MARS 2008)

Izvedbo programa MARS 2009 sofinancira Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo Republike Slovenije, program Promocija znanosti 2008/09. ✖



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 36/5

➔ Za nagradno križanko iz pete številke 36. letnika Preseka smo prejeli 10 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Vesoljski teleskopi**. Izžrebani reševalci, VESNA IRŠIČ iz Ljubljane, DEJAN ŠIRAJ iz Rakeka in ROK VOGRINČIČ iz Tišine so razpisane nagrade prejeli po pošti. ✖

Dogodki v mednarodnem letu astronomije (MLA)

ANDREJ GUŠTIN



■ Zaključene akcije

V prvi polovici leta so bile zaključene nekatere velike mednarodne akcije, ki so potekale v okviru mednarodnega leta astronomije: 100 ur astronomije, Položaj Sonca in oblika Zemlje ...

Med slovenskimi iniciativami pa je zaključena akcija meritev svetlobnega onesnaženja, v kateri je sodelovalo veliko število šol in posameznikov.

Podrobnosti o posameznih dejavnostih, rezultate in slikovni material najdete na spletnem naslovu www.astronomija2009.si.

■ Teleskop za vsako šolo

Ministrstvo za šolstvo in šport je uresničilo obljubo, da v mednarodnem letu astronomije šolam omogoči nakup teleskopov ali dodatne opreme za dejavnosti povezane z astronomijo. Sredstva, namenjena posamezni šoli, 550 evrov, omogočajo pestro izbiro kvalitetnih in za šole primernih teleskopov. Šole morajo nakup izpeljati do konca septembra letos. Pred nakupom pa priporočamo natančno preučitev minimalnih tehničnih zahtev za teleskope, ki jih je pripravil Organizacijski odbor MLA 2009. To je enkratna priložnost, da naše šole končno dobijo primerno astronomsko opremo in bo tako vsak otrok imel možnost opazovanja neba. Ravnatelji, učitelji, mentorji astronomskih krožkov – tega ne smete zamuditi!



■ Astronomski tabori

Astronomsko društvo Javornik prireja že 32. *tradicionalni astronomski raziskovalni mladinski poletni tabor* EVROPA 2009. Tabor bo potekal od 17. do 25. julija 2009 na astronomskem observatoriju na Javorniku. Observatorij je na nadmorski višini 1150 m in je od naselja Col oddaljen 12 km, od Ljubljane pa 70 km. Tabor Evropa 2009 je namenjen vsem mladim, ki jih zanimajo astronomija, fizika, tehnika, fotografija in sorodne vede. Delo v skupinah in raziskovalni projekti so prilagojeni predznanju udeležencev, zato so dobrodošli tako popolni začetniki kot izkušeni opazovalci. Podrobnosti na spletnem naslovu www.adj.si.

Ustvarjalno astronomsko društvo in društvo Orion prirejata *Mladinski astronomski raziskovalni tabor* MART 2009. Potekal bo od 24. julija do 2. avgusta na Pohorju (Ribniška koča). Dom se nahaja na nadmorski višini 1507 m in je od prvega naselja, Ribnice na Pohorju, oddaljen 8 km. To zagotavlja nadpovprečno dobre pogoje za raziskovalno delo in sproščeno druženje. MART 2009 je namenjen osnovnošolcem, dijakom in študentom, ki jih zanimajo astronomija in z njo povezane vede. Več o tem na spletnem naslovu www.uad.si. ✕

40 let Knjižnice Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



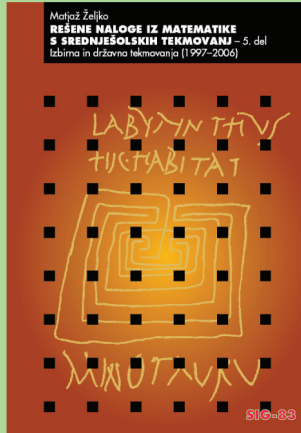
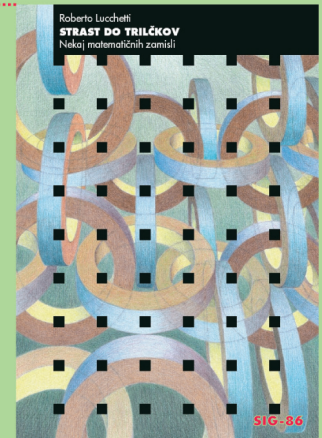
Roberto Lucchetti:

STRAST DO TRILČKOV

**Nekaj matematičnih
zamisli**

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR



Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIM TEKMOVANJ

**5. del: Izbirna in
državna tekmovanja
1997–2006**

172 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

14,99 EUR



Marcel Danesi:

PARADOKS LAŽNIVCA IN HANOJSKI STOLPI

**Deset največjih
matematičnih ugank
vseh časov**

260 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

17,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižnice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.