



PRESEK

- VESOLJSKI
TELESKOPI
- PITAGOREJSKE
TROJICE
- ZNAMENITE
KRIVULJE
- NAGRADNA
KRIŽANKA



ISSN 0351-6652



Roboti

➔ Roboti vseh oblik in velikosti lahko zdaj opravljajo različne naloge, od enostavnih, kot je sesanje dnevne sobe, do zapletenih, kot je odkrivanje toplotnih tokov na dnu oceanov. Geometrija, statistika, teorija grafov, diferencialne enačbe in linearna algebra so nekatera od področij matematike, ki pomagajo pri navigaciji in procesu odločanja, tako da lahko roboti delujejo avtonomno in delajo opravila, ki jih sami ne moremo, ali pa raje ne opravljamo.

Robot na spodnji sliki pozdravlja obiskovalce, jih spremlja na njihovi poti in jim medtem posreduje novice in najnovejše vremenske napovedi. Take sposobnosti zahtevajo algoritme za vid, prepoznavanje vzorcev, prepoznavanje govora in vedenje v negotovih situacijah, ki bi lahko zmedle robota. Večina raziskovalcev meni, da smo še daleč od stvaritve strojev, ki bi se obnašali kot ljudje, vendar bodo izpopolnjeni algoritmi izboljšali zmogljivost robotov, ki so nam že služili v veselju, pri reševanju ob katastrofah in v operacijskih dvoranh, kjer zdravniki uporabljajo robotske roke za zahtevnejše operacije. ✕



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

➔ Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 36, šolsko leto 2008/2009, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2008/2009 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Polona Šterk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1900 izvodov

© 2009 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1742

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbiti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Roboti 2

■ MATEMATIKA

Do pitagorejskih trojic – geometrijsko
(Marko Razpet) 4-6
Bistrovidec – Rešitev naloge (Sandi Klavžar) 6

■ FIZIKA

O lomnem zakonu – drugače (Janez Strnad) 11-13
Poizkuševalnica v kuhinji – Difuzija, Kaj je to?
– odgovor naloge (Mojca Čepič) 13-14
Poizkuševalnica v kuhinji – Makro difuzija in
evrodifuzija (Mojca Čepič) 14-15,
18-19
Razmisli in poskusi (Mitja Rosina) 20

■ ASTRONOMIJA

Štirje mušketirji v vesolju (Rasto Snoj) 21-23
Predstavitve novih knjig (Andrej Guštin) 31

■ RAČUNALNIŠTVO

Stare krivulje, moderna orodja (Ciril Petr) 24-29

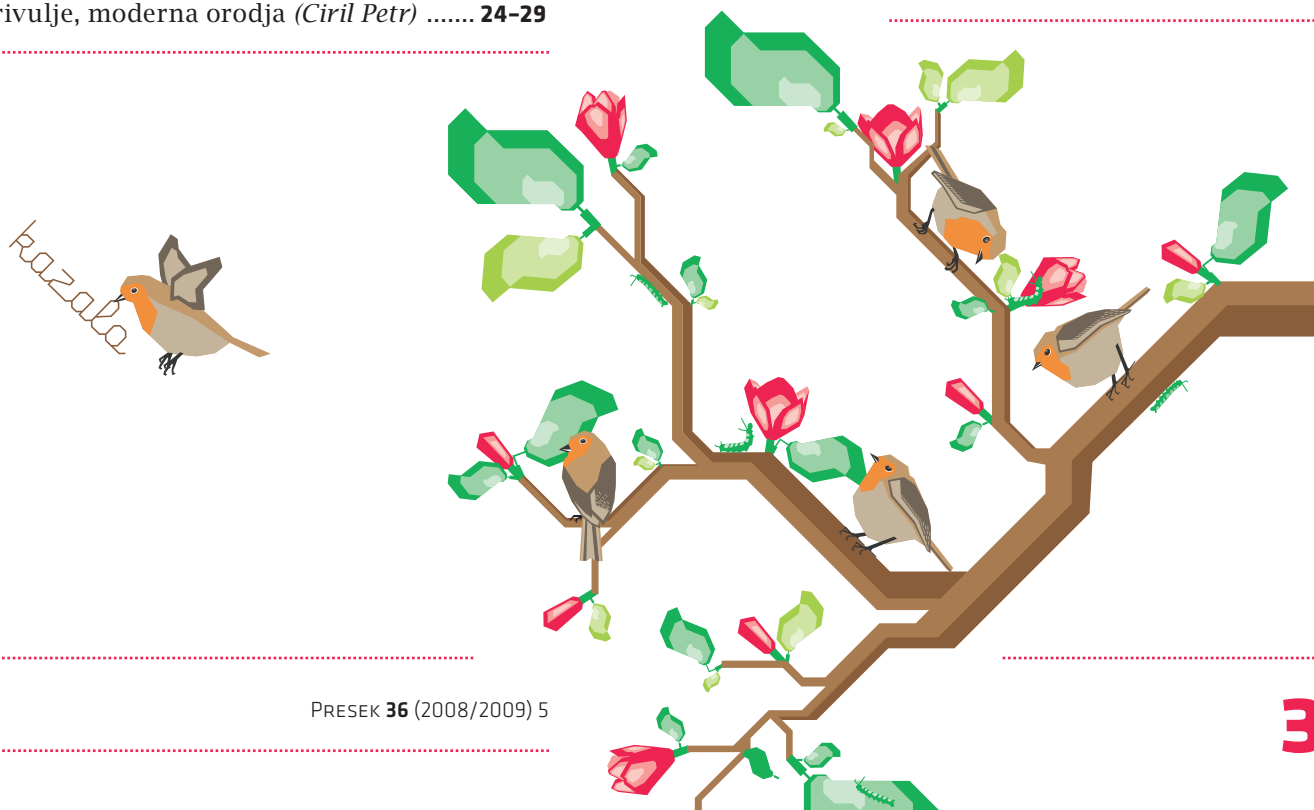
■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (Marko Bokalič) 16-17
Rešitev nagradne križanke Presek 36/4 30
Sudoku 10

■ TEKMOVANJA

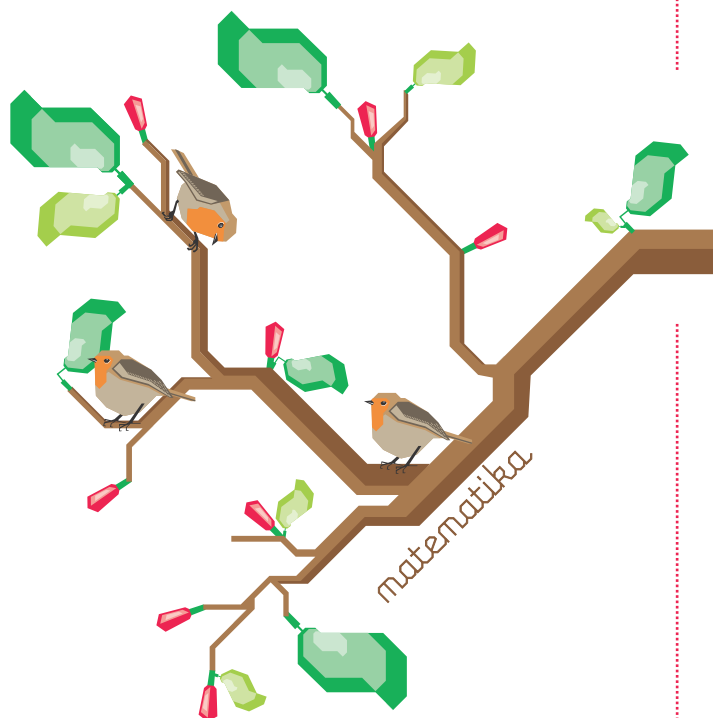
44. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje
(Klavdija Mlinšek) 6-7
8. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in
strokovnih šol v znanju matematike
(Darinka Žižek) 7-9
8. tekmovanje dijakin in dijakov srednjih
poklicnih šol v znanju matematike
(Dušanka Vrenčur) 9-10
Mednarodni matematični kenguru 2008 priloga
44. državno tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje priloga
8. področno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol ... priloga
8. državno tekmovanje v znanju matematike za
dijake srednjih tehniških in strokovnih šol priloga

SLIKA NA NASLOVNICI: Na tokratni naslovnici najdemo utrinek iz prebujajoče se narave. V članku iz računalništva pa si lahko preberemo o L-sistemih, s katerimi opisujemo razvojne faze rastlin.

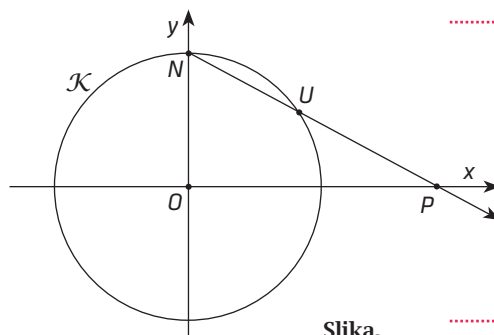


Do pitagorejskih trojic –geometrijsko

MARKO RAZPET



➤ Pitagorejsko trojico (a, b, c) sestavljajo naravna števila a , b in c , za katera velja relacija $a^2 + b^2 = c^2$. Vemo pa tudi, da je tedaj trikotnik, ki ima stranice dolge a , b in c enot, pravokoten in da je c dolžina hipotenuze, a in b pa sta dolžini katet. Pri tem je seveda $a < c$ in $b < c$. Ker za tak trikotnik velja *Pitagorov izrek*, imenujemo (a, b, c) *pitagorejska trojica*. Števila a, b, c bomo imenovali kar stranice, natančneje a in b kateti, c pa hipotenuza pitagorejske trojice (a, b, c) . Vsem je zagotovo znana pitagorejska trojica $(3, 4, 5)$, ker je $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Slika.

Sedaj bomo z geometrijsko metodo poiskali vse pitagorejske trojice. V ta namen v pravokotnem kartezicnem koordinatnem sistemu xy načrtamo krožnico $\mathcal{K}$, ki ima središče v koordinatnem izhodišču $O(0, 0)$ in polmer $r = 1$, torej enotsko krožnico. Njena enačba je seveda $x^2 + y^2 = 1$. Očitno je $N(0, 1)$ točka, v kateri pozitivna polovica osi y preseka krožnico $\mathcal{K}$. Opazujmo poltrake s krajiščem v točki N , ki sekajo krožnico $\mathcal{K}$ v točki $U(u, v)$ in os x v točki $P(p, 0)$. Pri tem $v \neq 1$. Ker so točke N , P in U na isti premici, obstajajo povezave med njihovimi koordinatami. Poiščimo jih! Če je $P = O$, je $p = 0$

in $U(0, -1)$. Zato vzemimo primer $p \neq 0$. Tedaj lahko zapišemo enačbo premice skozi točki P in N v odsekovni ali segmentni obliki: $x/p + y/1 = 1$. Njeno presečišče $U(u, v)$ s krožnico $\mathcal{K}$ najdemo tako, da pri znanem številu p rešimo sistem enačb

$$\blacksquare \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \frac{x}{p} + y = 1.$$

Iz druge enačbe dobimo najprej $x = p(1 - y)$, iz prve enačbe pa nato $p^2(1 - y)^2 = (1 - y)(1 + y)$. Ker primer $y = 1$ ne pride v poštev, lahko enačbo okrajšamo s faktorjem $1 - y$ in zato velja enačba $p^2(1 - y) = 1 + y$, ki jo razrešimo na y ter dobimo $y = (p^2 - 1)/(p^2 + 1)$ in $x = p(1 - y) = 2p/(p^2 + 1)$. S tem smo našli točko $U(u, v) \in \mathcal{K} \setminus \{N\}$:

$$\blacksquare \quad u = \frac{2p}{p^2 + 1}, \quad v = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}. \quad (\text{A})$$

Obratno iz znanih koordinat točke $U(u, v) \in \mathcal{K} \setminus \{N\}$ lahko poiščemo eno samo točko $P(p, 0)$ na osi x . Dobimo $p = u/(1 - v)$. Tudi za $p = 0$ oziroma $u = 0, v = -1$ najdemo obakrat pravičen rezultat.

Tako smo pravzaprav našli povratno enolično preslikavo φ enotske krožnice brez ene točke na množico realnih števil $\mathbb{R}$:

$$\blacksquare \quad \varphi(u, v) = \frac{u}{1 - v}, \quad \varphi^{-1}(p) = \left(\frac{2p}{p^2 + 1}, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right). \quad (\text{B})$$

Očitno se koordinate točk pri tem transformirajo racionalno. To pa ima za posledico, da se vsaka točka $U(u, v) \in \mathcal{K} \setminus \{N\}$ z racionalnima koordinatama u in v preslika v racionalno število in obratno - vsakemu racionalnemu številu p pripada natančno ena točka $U(u, v) \in \mathcal{K} \setminus \{N\}$ z racionalnima koordinatama u in v .

Odslej se bomo omejevali na del krožnice $\mathcal{K}$ v prvem kvadrantu, ki ga preslikava φ povratno enolično preslika na poltrak $(1, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Vzemimo, da je $p > 1$ racionalno število. Potem ga lahko pišemo v obliki ulomka α/β , kjer sta α in β naravni števili in $\alpha > \beta$. Po (A) dobimo

$$\blacksquare \quad u = \frac{2\alpha/\beta}{(\alpha/\beta)^2 + 1} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{in}$$

$$\blacksquare \quad v = \frac{(\alpha/\beta)^2 - 1}{(\alpha/\beta)^2 + 1} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ker pa pri tem velja pogoj $u^2 + v^2 = 1$, imamo

$$\blacksquare \quad (2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2.$$

Tako smo spoznali, da za vsak par naravnih števil α, β , ($\alpha > \beta$) lahko najdemo pitagorejsko trojico (a, b, c) , če vzamemo

$$\blacksquare \quad a = 2\alpha\beta, \quad b = \alpha^2 - \beta^2, \quad c = \alpha^2 + \beta^2. \quad (\text{C})$$

Vrstni red katet lahko tudi zamenjamo. Obratno, vsaki pitagorejski trojici (a, b, c) lahko poiščemo ustrezno racionalno število p . Iz zveze $a^2 + b^2 = c^2$ namreč takoj dobimo relacijo $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. Točka $U(a/c, b/c)$ je očitno na krožnici $\mathcal{K}$ in $U \neq N$, ker je $b/c < 1$. Torej je $p = (a/c)/(1 - b/c) = a/(c - b)$ iskano racionalno število, za katero je $\varphi^{-1}(p) = (a/c, b/c) \in \mathcal{K} \setminus \{N\}$.

Za $\alpha = 2$ in $\beta = 1$ dobimo $a = 4, b = 3, c = 5$, torej znano pitagorejsko trojico $(4, 3, 5)$ oziroma $(3, 4, 5)$. Za $\alpha = 3$ in $\beta = 1$ najdemo $a = 6, b = 8, c = 10$ in s tem pitagorejsko trojico $(6, 8, 10)$, ki pa se le za faktor 2 loči od prejšnje, ustrezna pravokotna trikotnika pa sta si podobna. Zato je dovolj poiskati pitagorejske trojice (a, b, c) , za katere je največji skupni delitelj $D(a, b, c) = 1$. V primeru $\alpha = 3$ in $\beta = 2$ dobimo $a = 12, b = 5, c = 13$, tako da je tudi trojica $(12, 5, 13)$ pitagorejska.

Pitagorejska trojica (a, b, c) je *primitivna*, če je $D(a, b, c) = 1$. Kako izbrati števili α in β v (C), da bomo dobili primitivno pitagorejsko trojico? Če sta α in β hkrati k -kratnika, kjer je k poljubno naravno število, večje od 1, potem po formulah (C) izračunamo števila a, b, c , ki so hkrati deljiva s k^2 in zato ne sestavljajo primitivne pitagorejske trojice. V posebnem primeru sodi števili α in β ne dasta primitivne pitagorejske trojice.

Če sta α in β hkrati lihi števili, potem sta vsota in razlika njunih kvadratov deljivi z 2 in po formulah (C) dobimo za a, b, c sama soda števila, ki spet ne sestavljajo primitivne pitagorejske trojice. Preostane samo še možnost, da je α sodo in β liho število ali pa α liho in β sodo število, pri tem pa $D(\alpha, \beta) = 1$ ter $\alpha > \beta$. Tedaj po formulah (C) pridemo do vseh primitivnih pitagorejskih trojic.

Še en primer: za $\alpha = 5$ in $\beta = 2$ imamo $a = 20, b = 21, c = 29$.

NALOGA. Preveri naslednje trditve:

1. V vsaki primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je hipotenuza c liho število.





2. V vsaki primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je natanko ena od katet deljiva s 3.
3. V vsaki primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je natanko ena od katet deljiva s 4.
4. V vsaki primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je natanko ena stranica deljiva s 5.
5. Edina primitivna pitagorejska trojica, ki ima stranice v aritmetičnem zaporedju, je $(3, 4, 5)$. ✖

Rešitev naloge

BISTROVIDEC

SANDI KLAJŽAR

- ➔ 1. Bloki drevesa sovpadajo z njegovimi povezavami, zato je število $b(x)$ stopnja vozlišča x .
2. Naj bo n število vozlišč drevesa T . Z $d(x)$ označimo stopnjo vozlišča x . Ker je po prvi točki $b(x) = d(x)$, velja

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad b(T) &= 1 + \sum_{x \in V(T)} (b(x) - 1) = \\ &= 1 + \sum_{x \in V(T)} d(x) - n. \end{aligned} \quad (1)$$

Število blokov drevesa T je enako številu njegovih povezav. Ker ima T n vozlišč, z indukcijo hitro preverimo, da ima $n - 1$ povezav. Zato je

$$\blacksquare \quad b(T) = n - 1. \quad (2)$$

Enakost (2) vstavimo v (1) in po preureditvi dobimo

$$\blacksquare \quad \sum_{x \in V(T)} d(x) = 2(n - 1). \quad (3)$$

3. V drugi točki smo opazili, da ima drevo z n vozlišči $n - 1$ povezav. Zato enakost (3) pravi, da je vsota stopenj v grafu enaka dvakratniku števila povezav. Ta trditev pa velja tudi v poljubnem grafu G . Pravimo ji *osnovna lema teorije grafov*. Zapišimo jo še s formulo:

$$\blacksquare \quad \sum_{x \in V(G)} d(x) = 2 \cdot |E(G)|. \quad \text{✖}$$

44. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

KLAVDIJA MLINŠEK

➔ Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 19. aprila 2008, pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti 1 % vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija. V lanskem šolskem letu smo prvič organizirali državno tekmovanje za sedmošolce, ki so ga učenci z navdušenjem sprejeli.

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 17 od 50 možnih točk; osmošolci, ki so osvojili 24 od 50 možnih točk; in devetošolci, ki so osvojili najmanj 33 od 50 možnih točk.

Nagrade so prejeli najboljši tekmovalci, in sicer:

1. NAGRADA

■ 7. razred

- FILIP KOPRIVEC, OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika
- SAMO KRALJ, OŠ Brinje, Grosuplje
- ROK OBLAK, OŠ Stražišče, Kranj

■ 8. razred

- MATIJA SKALA, OŠ Belokranjskega odreda, Semič

■ 9. razred

- KATARINA BAŠKOVIČ, OŠ Dob, Dob
- VENDI GROBELŠEK, OŠ Šmarje pri Jelšah, Šmarje pri Jelšah
- VID KOVAČEC, OŠ Kolezija, Ljubljana
- MATJAŽ LEONARDIS, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana
- ŽIGA LUKŠIČ, OŠ Dolenjske Toplice, Dolenjske Toplice
- JAKOB NOVAK, OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana
- MANCA POTOČNIK, OŠ Železniki, Železniki
- JERNEJ ŠTUKELJ, OŠ Mirana Jarca, Črnomelj
- VERONIKA VODEB, OŠ Šmarje pri Jelšah, Šmarje pri Jelšah

2. NAGRADA

■ 7. razred

- ANDREJA BENEDEJČIČ, OŠ Franceta Bevka, Tolmin
- MATIJA ŠKRLEP, OŠ Mengeš, Mengeš

■ 8. razred

- SARA PIA MARINČEK, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana

■ 9. razred

- JURE SLAK, OŠ Brezovica, Brezovica pri Ljubljani

3. NAGRADA

■ 7. razred

- TOMAŽ JONATAN LEONARDIS, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana

■ 8. razred

- GAJA TOMSIČ, Državna srednja šola Ivana Trinka, Gorica (I)
- JURE HOSTNIK, OŠ Šmartno, Šmartno pri Litiji
- MARKO STRUČIČ, OŠ Jurija Dalmatina, Krško
- ROK ŠALAMUN, OŠ Litija, Litija
- SARA VATOVEC, OŠ dr. Bogomirja Magajne, Divača

■ 9. razred

- ALJAŽ BASTIČ, OŠ Ivana Cankarja, Trbovlje
- LUKA BIRK, OŠ Sostro, Ljubljana
- GREGOR LAKNER, OŠ Šmarje pri Jelšah, Šmarje pri Jelšah
- BLAŽ MAKORIČ, OŠ Dobrovo, Dobrovo
- METKA PETRIČ, OŠ Tabor, Logatec ✕

8. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

DARINKA ŽIŽEK

➔ V šolskem letu 2007/2008 je bilo izvedeno 8. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike, tekmovanje B. Tekmovanja se udeležujejo dijaki štiriletnih programov, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, tudi programa 3 + 2. Opažamo, da se za tekmovanje zanima vedno več dijakov omenjenih šol; to pa je tudi cilj tovrstnih tekmovanj.

RAVNI TEKMOVANJA. Tekmovanje poteka na treh ravneh: šolsko tekmovanje (Evropski matematični ken-guru), regijsko tekmovanje, ki je organizirano v os-mih centrih, in državno tekmovanje.



OBLIKE OZIROMA VRSTE NALOG. Naloge na šolskem tekmovanju so izbirnega tipa, na regijskem tekmovanju so naloge izbirnega tipa in kompleksne naloge, na državnem tekmovanju pa je pet kompleksnih nalog. Naloge za vse ravni tekmovanja pripravi državna tekmovalna komisija.

■ Izvedba 8. tekmovanja

Šolskega tekmovanja, ki je bilo izpeljano v četrtek, 20. marca 2008, se je udeležilo 5030 dijakov, toliko kot lansko leto. Podeljenih je bilo 1571 bronastih priznanj.

Na **regijskem tekmovanju**, ki je bilo organizirano 2. aprila 2008, je tekmovanje nadaljevalo 1120 tekmovalcev.

REGIJA	GOSTITELJ TEKMOVANJA
Celjska regija	Šolski center Velenje – Poklicna in tehniška šola za strokovne dejavnosti
Dolenjska regija	Ekonomska in trgovska šola, Brežice
Gorenjska regija	Tehniški šolski center Kranj
Ljubljanska regija 0	Srednja poklicna in strokovna šola Bežigrad, Ljubljana
Ljubljanska regija 1	Šolski center za pošto, ekonomijo in telekomunikacije, Ljubljana
Mariborska regija	Srednja gradbena šola, Maribor
Pomurska regija	Srednja poklicna in tehniška šola, Murska Sobota
Primorska regija	Šolski center Postojna

Na regijskem tekmovanju je bilo podeljenih 390 srebrnih priznanj.

Državno tekmovanje smo izvedli 19. aprila 2008 na Šolskem centru Srečka Kosovega v Sežani. Tega dela tekmovanja se je udeležilo 139 tekmovalcev. Državna tekmovalna komisija je podelila 47 zlatih priznanj.

Najboljšim tekmovalcem v posamezni tekmovalni kategoriji smo na svečani podelitvi v Ljubljani 15. maja 2008 podelili nagrade. Podelili smo 25 nagrad.

www.presek.si

Dobitniki nagrad so:

1. NAGRADA

■ 1. letnik

- DAVID KOCJAN, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

■ 2. letnik

- MATEJ PINTARIČ, Srednja elektro-računalniška šola, Maribor

■ 3. letnik

- ŠPELA BAH, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- IRENA DRENŠEK, Ekonomska šola Novo mesto
- ŽIGA MEDOŠ, Šolski center Ljubljana, Srednja kemijska šola
- DAVID MOHAR, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana
- TAMARA OBREZA, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- DAVOR REPEC, Šolski center Ptuj, Poklicna in tehniška elektro šola
- VIKTORIJA TERNAR, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer
- ROK VINTAR, Šolski center Krško-Sevnica, Srednja poklicna in strojna šola, Krško

■ 4. letnik

- PATRICIJA KERIN, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo

2. NAGRADA

■ 1. letnik

- PRIMOŽ HREN, Šolski center Celje, Srednja šola za strojništvo in mehatroniko
- ROK PAHIČ, Srednja strojna šola, Maribor
- TANJA ŠTULAR, Biotehniški izobraževalni center Ljubljana, Gimnazija in veterinarska šola

www.presek.si

■ 2. letnik

- JAKOB CVETKO, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- JOŽE KULOVIC, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

■ 3. letnik

- ROBI CVIRN, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- URBAN RAK, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana

■ 4. letnik

- JERNEJ KRANER, Biotehniška šola Maribor

3. NAGRADA

■ 1. letnik

- MARKO HORVAT, Šolski center Ptuj, Poklicna in tehniška strojna šola

■ 3. letnik

- JURE SELJAK, Šolski center Ljubljana, Srednja kemijska šola
- NEJC ŠTALEC, Srednja lesarska šola, Škofja Loka

■ 4. letnik

- MAJA PETRIČ, Srednja šola za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo Ljubljana
- MARKO RMAN, Šolski center Celje, Srednja šola za elektrotehniko in kemijo
- DANIJEL RODIČ, Tehniški šolski center Kranj

Letošnjega tekmovanja se je udeležilo približno enako število dijakov kot lanskega. Takega zanimanja smo zelo veseli.

Ob tej priložnosti se vsem, ki so pripomogli k uspešni izpeljavi vseh tekmovanj, najlepše zahvaljujemo in jih vabimo k nadaljnemu sodelovanju, prav tako pa vabimo k organizaciji tekmovanj nove organizatorje. ☒

8. tekmovanje dijakinj in dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike

DUŠANKA VRENČUR

➔ Na šolskih tekmovanjih je lani tekmovalo 1460 tekmovalcev. *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije* ter *Srednja šola Srečka Kosovela Sežana* sta bila organizatorja 8. državnega tekmovanja v znanju matematike za 62 najboljših dijakinj in dijakov srednjih poklicnih šol iz 36-ih slovenskih poklicnih šol. Podeljenih je bilo 21 zlatih priznanj; na svečani podelitvi pa je organizator prvim trem najboljše uvrščenim iz vsakega letnika podelil priznanja in praktične nagrade.

Prejeli so jih:

1. NAGRADA

■ 1. letnik

- TINE RAKUŠA, Srednja ekonomsko-poslovna šola, Koper

■ 2. letnik

- JURIJ KOVAČIČ, Tehniški šolski center Nova Gorica, Strojna, prometna in lesarska šola
- ALEŠ ŽUN, Tehniški šolski center Kranj

■ 3. letnik

- PRIMOŽ BENKO, Šolski center Velenje, Poklicna in tehniška strojna šola



2. NAGRADA

1. letnik

- ŠPELA TROBIŠ, Srednja šola za gostinstvo in turizem Celje

2. letnik

- SABINA JAGRIČ, Grm Novo mesto – center biotehnike in turizma, Kmetijska šola Grm in biotehniška gimnazija

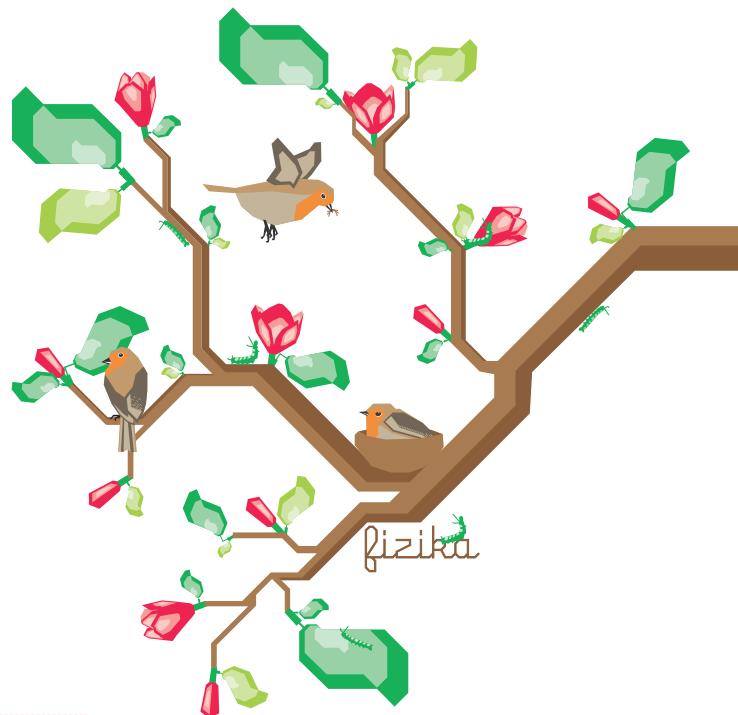
3. letnik

- MIHA ANŽIČ, Srednja šola Domžale, Poklicna in strokovna šola
- PETER DERLINK, Šolski center Škofja Loka, Šola za strojništvo

3. NAGRADA

1. letnik

- BLAŽ ROGELJA, Tehniški šolski center Nova Gorica, Elektrotehniška in računalniška šola



Sudoku

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A		8	6		1				2
B						5	1	8	
C									
D	5			6		8		9	1
E	8								3
F	4	9		3		7			5
G									
H		1	2	5					
I	7				3		9	5	

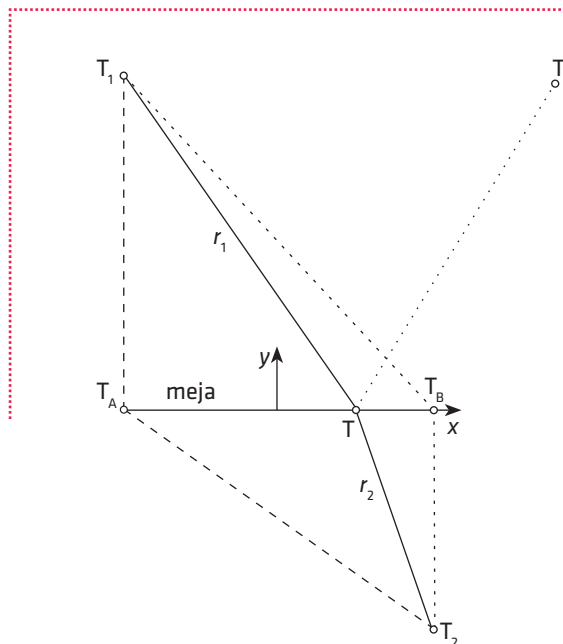
O lomnem zakonu – drugače

JANEZ STRNAD

➔ Četudi še niste počitnikovali ob vodi, ste morda že slišali za staro vprašanje: Katero pot naj ubere kopališki mojster, da bo s kopnega v čim krajšem času prišel do kopalca v vodi, ki je zašel v težave? Obala je ravna, mojster teče s stalno hitrostjo c_1 in plava z manjšo stalno hitrostjo c_2 . Kopalce ostaja na mestu.

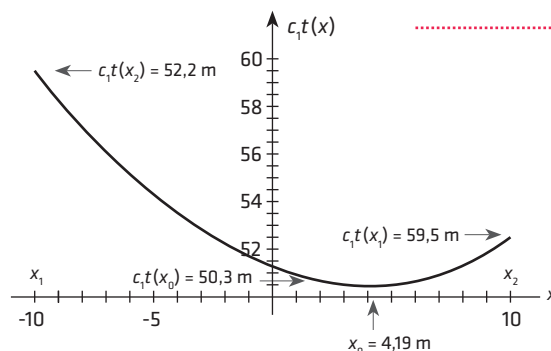
Če sta na začetku mojster in kopalce na isti pravokotnici na obalo, je odgovor preprost. Najugodnejša pot je kar zveznica začetne točke mojstra T_1 in točke kopalca T_2 . Zapletenejši je odgovor, če začetni točki ne ležita na isti pravokotnici (slika 1). Skrajna možnost vodi mojstra po njegovi pravokotnici do točke T_A in nato do kopalca. Pri tem je pot po kopnem najkrajša, pot po vodi pa najdaljša. Zato ta možnost ni ugodna. Druga možnost vodi do točke T_B in nato po kopalčevi pravokotnici. Ta možnost je ugodnejša, ker je zdaj pot po vodi najkrajša. Vprašanje pa je, če je najugodnejša. Odgovor je odvisen tudi od razmerja hitrosti c_1/c_2 .

Za začetek si pogledjmo zgled. Naj bosta pravokotnici na obalo 20 m oddaljeni druga od druge, mojstrova naj bo dolga 22 m in kopalčeva 15 m. Uvedemo ravninski koordinatni sistem z osjo x po obali in izhodiščem na sredi med pravokotnicama. Tako ima točka T_1 koordinati $(x_1, y_1) = (-10 \text{ m}, 22 \text{ m})$ in točka T_2 koordinati $(x_2, y_2) = (10 \text{ m}, -15 \text{ m})$. Mojster doseže obalo v točki T z neznano absciso $(x, 0)$.



Slika 1. Začetno lego kopališkega mojstra v točki T_1 in lego kopalca v točki T_2 opišemo v koordinatnem sistemu.

Zanima nas, kako se v odvisnosti od nje spreminja čas. Čas dobimo, ko delimo pot s hitrostjo. Sestavlja ga dva prispevka: $t = r_1/c_1 + r_2/c_2$ z razdaljama $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}$ in $r_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$. Vstavimo podatke in z računalnikom s programskim paketom *Mathematica* narišemo odvisnost časa $t(x)$ od lege točke T . Če želimo, da zadostuje podatek o razmerju hitrosti c_1/c_2 , preračunamo čas $t(x)$ v razdaljo $c_1 t(x)$, ki bi jo v tem času pretekel mojster. Ugotovimo, da najkrajšemu času ustreza abscisa $x_0 = 4,19 \text{ m}$ in da razdalja $c_1 t(x_0) = 50,3 \text{ m}$ leži med $c_1 t(x_1) = 59,5 \text{ m}$ in $c_1 t(x_2) = 52,2 \text{ m}$ (slika 2).



Slika 2. Čas $t(x)$ je odvisen od abscise x točke T . Graf kaže odvisnost $c_1 t(x)$ za izbrani primer pri razmerju hitrosti $c_1/c_2 = 1,5$. Najkrajši je čas pri $x_0 = 4,19 \text{ m}$.



Predvsem nas zanima splošen odgovor. Do njega se dokoplujemo tako, da v mislih za Δx spremenimo absciso točke T na osi x in izračunamo spremembo časa. Zaradi spremembe Δx se spremenita razdalji:

$$\begin{aligned} r_1 + \Delta r_1 &= \\ &= \sqrt{(x + \Delta x - x_1)^2 + y_1^2} = \\ &= \sqrt{[(x - x_1)^2 + y_1^2] + 2(x - x_1)\Delta x} = \\ &= r_1 \sqrt{1 + 2(x - x_1)\Delta x / r_1^2} = \\ &= r_1 + (x - x_1)\Delta x / r_1. \end{aligned}$$

Sprememba Δx je v primerjavi z drugimi abscisami tako majhna, da smemo $(\Delta x)^2$ v primeri z njimi zanemariti. Z enakim opravičilom uporabimo približek $\sqrt{1 + a\Delta x} = 1 + \frac{1}{2}a\Delta x$. Preizkusimo ga tako, da levo in desno stran enačbe kvadriramo in zanemarimo člen z $(\Delta x)^2$. S podobnim računom dobimo

$$\begin{aligned} r_2 + \Delta r_2 &= \\ &= \sqrt{(x_2 - x - \Delta x)^2 + y_1^2} = \\ &= \sqrt{[(x_2 - x)^2 + y_1^2] - 2(x_2 - x)\Delta x} = \\ &= r_2 \sqrt{1 - 2(x_2 - x)\Delta x / r_2^2} = \\ &= r_2 - (x_2 - x)\Delta x / r_2. \end{aligned}$$

Čas se zaradi spremembe Δx spremeni za

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta r_1 / c_1 + \Delta r_2 / c_2 = \\ &= \left(\frac{x - x_1}{c_1 r_1} - \frac{x_2 - x}{c_2 r_2} \right) \Delta x. \end{aligned}$$

Graf za zgled nas pouči, da v neposredni bližini najkrajšega časa sprememba Δx ne vpliva na spremembo časa. Tako za najkrajši čas zahtevamo $\Delta t = 0$ in izraz v velikem oklepaju mora biti enak 0:

$$\frac{x - x_1}{c_1 r_1} = \frac{x_2 - x}{c_2 r_2} \quad \text{ali} \quad \frac{x - x_1}{r_1} = \frac{c_1}{c_2} \frac{x_2 - x}{r_2}.$$

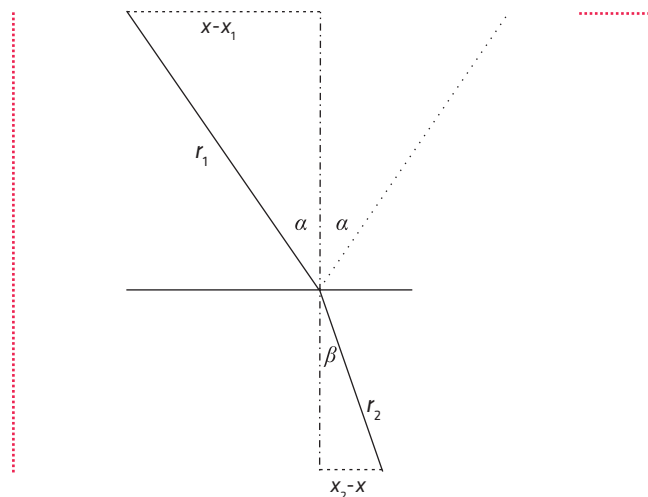
Prva enačba je simetrična: na levi strani je količnik razlike abscis in s hitrostjo pomnožene razdalje. Druge enačbe ni lahko rešiti, ker razdalji r_1 in r_2 vsebujeta neznani x . Za naš zgled jo rešimo z *Mathe-*

matico in dobimo navedeni rezultat: $x_0 = 4,19$ m.

Enačbo lahko prevedemo v bolj uporabno obliko. Razmerje katete pravokotnega trikotnika in njegove hipotenuze vpeljemo kot *sinus* nasprotnega kota:

$$\frac{x - x_1}{r_1} = \sin \alpha \quad \text{in} \quad \frac{x_2 - x}{r_2} = \sin \beta,$$

kjer je α vpadni kot in β lomni kot (slika 3). Nova



Slika 3. Risba kaže žarke pri prehodu svetlobe iz praznega prostora v steklo z lomnim količnikom $n = 1,5$. Vpadni kot meri $\alpha = 32,8^\circ$, lomni pa $\beta = 21,2^\circ$.

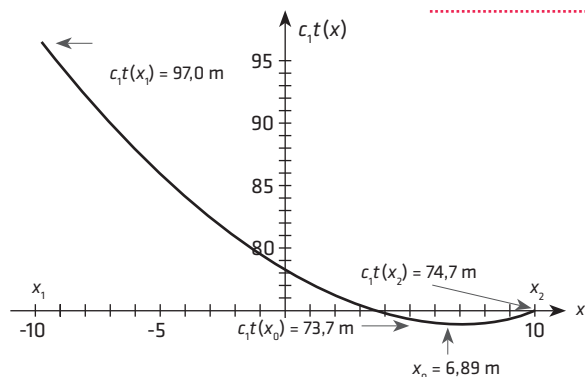
enačba ne vsebuje koordinat. To je *lomni zakon*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Zakon velja za lom valovanja na meji območij, po katerih valovanje potuje z različnimi hitrostima. Razmerje hitrosti vpeljemo kot *lomni količnik*. Če gre za lom svetlobe pri prehodu iz zraka ali praznega prostora v snov, je $c_1/c_2 = n$ *lomni količnik snovi*. Zgled smo naredili z lomnim količnikom stekla 1,5, ki pove, da je hitrost svetlobe v steklu 1,5-krat manjša kot v zraku.

Presek je v prispevku *O naravi svetlobe in o lomu*, 14 (1986/87), str. 194–199 lomni zakon obravnaval na bolj običajen način. Vprašanje o kopaliskem mojestru in kopalcu je bilo samo pretveza, da smo ga izpeljali po drugačni poti. Hitrost pri teku je navadno vsaj trikrat večja kot hitrost pri plavanju. (Čas sve-

tovnega rekorda na 100 metrov prosto pri plavanju je za moške 4,9-krat in za ženske 4,8-krat daljši od časa svetovnega rekorda pri teku na 100 metrov.) Zato bi se mojster ne odločil slabo, če bi v naglici ubral najkrajšo pot po vodi (slika 4).



Slika 4. Risba ustreza premagani poti v najkrajšem času za razmerje hitrosti $c_1 = c_2 = 3$. Količina $c_1 t(x)$ 73,7 m pri najkrajšem času pri abscisi $x_0 = 6,89$ m se samo za 1,3 % razlikuje od količine 74,7 m v skrajnem primeru, ko izbere mojster najkrajšo pot po vodi.

Če je $c_1 = c_2$, do loma sploh ne pride. V tem primeru sorazmerje $(x - x_1)/r_1 = (x_2 - c)/r_2$ pokaže, da se žarek ne zlomi in ostane raven. Seveda, če ni prehoda čez mejo, ni loma. Morda ste opazili, da znak y_2 ne vpliva na izid. Nič se ne spremeni, če namesto negativne ordinate y_2 upoštevamo pozitivno. To pomeni, da do loma ne pride in je $c_1 = c_2$. V tem primeru se točka T_1 na meji prezrcali v točko T'_2 . Nastane odboj, pri katerem je *odbojni kot* enak vpadnemu. To je *odbojni zakon*, ki so ga (poleg zakona o vzvodu in zakona o vzgonu) poznali že v starem veku.

Lomni zakon ima razgibano zgodovino. Po nakazani poti ga je izpeljal matematik Pierre Fermat leta 1662. Kolikor je mogoče ugotoviti, ga je prvi v geometrijski obliki zapisal Abu Said al-Ala Ibn Sahl konec 10. stoletja, a je njegovo delo zatonilo v pozabo. Ponovno sta zakon odkrila Thomas Harriot leta 1601 in Willebrord Snel leta 1621, a ga menda nista objavila. To je storil René Descartes leta 1637, ki pa ga je izpeljal po zgrešeni poti. Mislil je, da je hitrost svetlobe v steklu večja kot v zraku in da se ohrani komponenta hitrosti, vzporedna z mejo. Tedaj so tudi drugi večinoma menili, da svetloba hitreje po-

tuje po steklu, češ da steklo pri prehodu iz zraka privlači in pospeši svetlobne delce iz zraka. Fermat je Descartesu s poudarkom nasprotoval in zagotovil, da je hitrost svetlobe v prozorni snovi manjša kot v praznem prostoru. To je z merjenjem Leon Foucault podprl šele sredi 19. stoletja. Z lomnim zakonom so se ukvarjali še drugi fiziki. Fermat je torej ugotovil, da valovanje ubere med dvema točkama tako pot, da potrebuje zanjo najkrajši čas. Ta pot je pripeljala do odkritja drugih *variacijskih načel*, ki zahtevajo, da ima kaka količina pri opazovanem pojavu najmanjšo ali največjo vrednost, in ki jih danes pogosto uporabljajo. ☒

Difuzija, kaj je to?

ODGOVOR NALOGE

MOJICA ČEPIČ

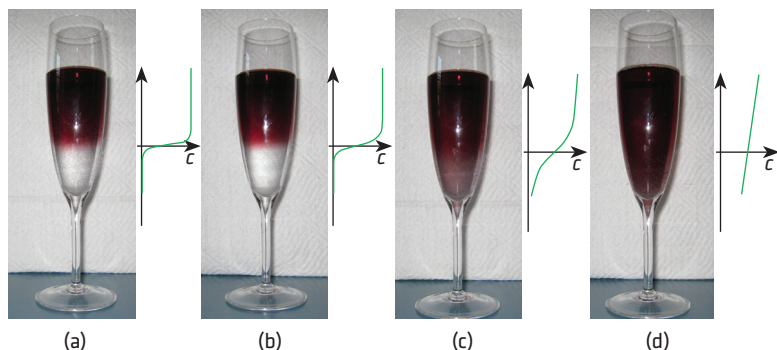
☒ V poizkuševalnici smo si ogledali enega od tokov snovi, ki v naravi tečejo sami od sebe. Snovnih tokov, ki tečejo sami od sebe, najdemo v naravi mnogo: dež pade sam od sebe iz oblakov, ko so zato izpolnjeni določeni pogoji; veter piha ob poletnih dnevih sam od sebe navzgor; potoki in reke tečejo sami od sebe v dolino.

Difuzijski tokovi tečejo sami od sebe v nekoliko drugačnih okoliščinah. Naj navedemo najprej nekaj primerov, potem pa bomo poskusili ugotoviti, kaj imajo ti primeri skupnega z našim poskusom.

Ko stresemo v skodelico vročega čaja sladkor, se de sladkor na dno. Če čaj pomešamo, je prav kmalu sladek ves, če ga pustimo pri miru, pa bo prav neprijetno sladek pri dnu, pri gladini pa sladkosti sploh ne bomo občutili.

Če kanemo v vodo kapljico črnila, bomo še dolgo lahko opazovali njeno obliko.

Poglejmo, kaj se je dogajalo pri našem poskusu. Rdeče vino vsebuje alkohol. Alkohol ima manjšo gostoto kot voda. Tudi vino, ki je mešanica alkohola in vode, ima manjšo gostoto kot navadna voda. A alkohol se z vodo meša. Če preprečimo, da se vino z alkoholom in voda pomešata, plava vino na vodi. Ker



Slika. Opazovanje difuzije vina v vodo. Desno od posameznih slik so shematične ponazoritve odvisnosti koncentracije: (a) začetno stanje, (b) po pol ure (c) po treh urah in (d) po 12-ih urah.

smo uporabili rdeče vino, lahko mešanje opazujemo. Če bi nalili na vodo čisti alkohol, bi morali uporabiti drugačne trike, da bi zasledovali mešanje alkohola in vode, npr. upoštevali bi različne optične lastnosti obeh tekočin.

Na začetku je bila meja med vinom in vodo precej ostra. Slika (a) kaže začetno stanje, vidimo, da se voda od vina dobro loči. Če hočemo opisati, kje je več vina in kje več čiste vode, kot mero uporabimo koncentracijo, npr. koncentracijo vina. Koncentracija prav v našem primeru sicer ni najboljša količina, ker je že vino samo mešanica, a lahko bi govorili tudi o koncentraciji vinskega barvila, ki jo lahko neposredno opazujemo. Shematično je videti potek koncentracije vina v kozarcu na začetku opazovanja približno tako, kot je podano ob sliki (a). Ker nimamo pripomočkov za merjenje koncentracije barvila, alkohola ali katere druge sestavine vina (ne vode), je graf zgolj shematičen. Navpična os predstavlja višino (lego) v kozarcu, vodoravna pa koncentracijo, ki pa zaradi naših pomanjkljivih informacij nima enot.

Počasi se meja zabrisuje, slika (b) je bila posneta pol ure po začetku opazovanja, slika (c) pa tri ure po začetku. Na tretji sliki vidimo, da je spodnji del že precej obarvan. To ponazarja tudi shematični graf, kjer je videti, da se je koncentracija tudi na vinski strani zmanjšala že povsod, spodnji del pa se je povsod že obarval. Zadnja slika (d) je bila posneta po 12-ih urah, ko z očesom koncentracijskih razlik skorajda ni bilo več mogoče ločiti.

Zakaj sploh prihaja do toka ene snovi v drugo? Z

modelom difuzije se ukvarja poizkuševalnica v tej številki. Snovni tok se iz področja večje koncentracije na področje manjše koncentracije pojavi zaradi naključnega gibanja molekul. Molekule se gibljejo v vse smeri. Iz področja, kjer je molekul barvila, alkohola, skratka molekul, ki jih povezujemo z vinom, več, jih gotovo več zaide na področje, kjer jih je manj, kot obratno. Zato se sčasoma koncentracija povsod izenačuje. Ko je koncentracija povsod enaka, tokovi zaradi naključnih gibanj še vedno obstajajo. Toda toliko „vinskih“ molekul, kot jih naključno zaide iz zgornjega dela kozarca v spodnjega, jih zaide tudi nazaj in barva se ne spreminja več. ✕



Slika 1. Pripomočki za izdelavo škatlice



Slika 2. Izdelana škatlica – poskus se lahko začne

Makro difuzija in evrodifuzija

MOJCA ČEPIČ

➔ V prejšnji poizkuševalnici smo si ogledali, kako teče snov iz področja, kjer je snovi več, v področje, kjer je te iste snovi manj. Ker v mešanicah in raztopinah merimo vsebnost ene snovi v drugi s koncentracijo, lahko gornje besede zapišemo tudi drugače: difuzijski tok snovi teče iz področja večje koncentracije te snovi na področje manjše koncentracije. V odgovoru na vprašanje smo navedli nekaj primerov difuzijskega toka in opisali smo, od katerih lastnosti je tok odvisen. Takemu opisu, ki povzema dogajanje v naravi, pravimo fenomenološki opis. V tokratni nalogi pa bomo poskusili z opazovanjem in preizkušanjem dogajanja v modelu difuzije razumeti, zakaj difuzijski tokovi sploh tečejo.

■ Potrebščine (slika 1)

- prozorna škatlica,
- košček trdega kartona,
- lepilni trak,
- fižolčki dveh barv enake velikosti (vsaj deset vsake barve).

Iz trdega kartona izreži pregrado, ki je enako velika kot prečni presek škatlice. Vanjo na eni strani izreži odprtino, ki je dovolj velika, da skozi jo lahko zdrsnemo fižolček. V sredino škatlice z lepilnim trakom pritrdi pregrado (slika 2), na vsako stran pregrade pa nasuj fižolčke enake barve. Na eno stran nasuj temne fižolčke, na drugo stran pa svetle. Škatlica predstavlja model mešalnega poskusa, predelek s temnimi fižolčki ponazarja del v kozarcu, kjer je bila večja koncentracija vina, predelek s svetlimi pa del, kjer je bila čista voda.

Za prvi poskus naj bo na vsaki strani deset fižolčkov. Pri ponovitvah poskusa lahko število fižolčkov tudi povečaš, a ne preveč (morda do 20 ali 30). Nato

škatlico dva do trikrat potresi. Treslaji naj ne bodo premočni. Škatlico na hitro premakneš v smeri pravokotno na pregrado za približno 10 cm naprej in nazaj. To imenujmo „enkrat potresi“. Potresanje škatlice in z njim povzročeno gibanje fižolčkov ponazarja (modelira) gibanje molekul v tekočini.

Škatlica s potresanjem vred predstavlja model difuzije. Dogajanja v modelskem sistemu običajno niso natanko enaka kot v pravem sistemu, ki ga želimo raziskovati, so pa podobna. Okoliščine v modelu običajno lažje nadzorujemo, model, če je pametno izbran, lahko znanstveniku olajša pot do razumevanja bolj kompleksnih sistemov v naravi. Zato v današnji nalogi poskušamo raziskati model difuzije.

Preštej, koliko fižolčkov posamezne vrste je na eni strani pregrade. Prešteješ jih lahko tudi na drugi strani, ali pa njih število izračunaš, saj iz škatlice niso mogli pobegniti. Tresenje in štetje nekajkrat ponovi, število svetlih in temnih fižolčkov v posameznem razdelku pa zapisuj v tabelo. Porazdelitev fižolčkov po posameznih zaporednih tresenjih predstavi še s histogramom.

- Kako se spreminja število fižolčkov po potresanjih?
- Koliko fižolčkov je na obeh straneh po desetih oziroma dvajsetih „potresanjih“?
- Ali so se po večjem številu potresanj vsi fižolčki hkrati (morda) vrnili v svoj začetni predelek?

Fižolčke ponovno loči in poskus ponovi. Številke bodo drugačne, a dogajanje bo podobno. Poskus z desetimi fižolčki na vsaki strani ponovi nekajkrat, izračunaj povprečne vrednosti števila fižolčkov po vsakem potresanju (npr. če si delal tri poskuse z desetimi potresanji, izračunaj povprečno število temnih fižolčkov po petih potresanjih tako, da sešteješ vse temne fižolčke, ki so bili po petem potresanju v



Nagradna križanka

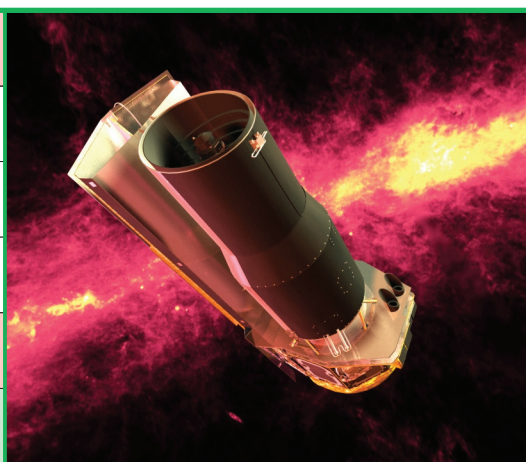


BESEDILO IZ PSALMA, KI SE MOLTI ALI POJE PRI MAŠI, STOPNIŠKI SPEV						ŠČIT ZA ROKO NA ROČAJU MEČA	OMENEK	LEŠEN ROČNI SODČEK (NAREČNO)	NARAVNI LOGA-RITEM	MOJSTER INDIJSKE DUHOVNE PRAKSE	MENIČNO JAMSTVO
NASUTINA LEDENIKA, MORENA											
PRIMEK RUSKE CARSE RODBINE											1
ANGLOAM. PLOŠČIN. MERA									SIMBOL ZA GALIJ JEDRSKA REAKCIJA, FISIJA		
STALNO BIVALISČE CEVAŠT DEL SPOD. OBLAČILA								9			
										ALEŠ ZALAR	GLAVNO MESTO ČEČENIJE

	KOKOŠ S PIŠCANC	JUDOVSKA DRŽAVA NA BLIŽ. VZHODU	UTEME-LJITEJ RADIJSKE ASTRONOM. (KARL G.)	ELDA VILER	VEČJA POŠODA Z ROČAJEM	IGRALKA JANKOVIČ			ČLENOVIT OTOK POD VELEBITOM Z MESTOM NOVALJA			ZAPUS-TITEV ZAPRTEGA PROSTORA	ŠALA, SMEŠNICA	STARO-GRŠKI FIZIK IN MATE-MATIK
GLAVNO MESTO UKRAJINE						IZRAELSKA SAHISTKA KUŠNIR OŽNAKA ŠABCA		NEKAJ, KAR NE IMENU-JEMO, ONEGA	PORIVANJE ČESA VEN GAVDA, TRAPIST, EMENTALEC					
ZAVEDANJE ODGOVOR-NOSTI ZA POSLEDICE DEJANJ											OZIRALNI ZAIMEK POSODA ZA GOJENJE PLAZILCEV			
DVATI-SOČAK NAD POSOČJEM				ČASOVNA ENOTA PISATE-LJICA PEROCI			KUNA S CENJENIM KOZUHOM, NORKA	NEMŠKI FILOZOOF (FRIEDRICH) OKUŽENOST S TRIHINO						
IZVOR CUR-KA KOHE-RENT. ENO-BARVNE SVETLOBE		7				IZVAJALEC INTER-VENCIE					2		OKRAJŠAN IZRAZ ZA ILOVICO	
OPLEME-NITENO ŽELEZO						HRAST Z BODIČ. ŽELODOVO SKLEDICO			GOJENEC ZAVODA	MASTUR-BACIJA	? NEGRO, ? GRANDE, ? BRANCO ZNAK ZA NEODIM		V SEČNEM SE ZBIRA URIN DEL ZGOR. OBLAČILA	
NAŠA MLADA TEMPERA-MENTNA PEVKA					GORATA IN NA JUGU PUŠČAVSKA DRŽAVA NA JUGOZAHODU ZDRUŽENIH DRŽAV							PRES-TOPEK 100 m ²	17	



IGRALKI ZUPANČIČ IN KRAJNC									AZIJSKA DRŽAVA				RUVANJE
POMOŽNA DELITEV SKALE NA PREMIČNIH MERILIH									PALEC, COLA				TELOVADNI IMA ROČAJE
VRHOVNI GERMAN. BOG, KRALJ AZOV										18		DEL ROKE POD KOMOLCEM HITER TEK	8
HLEVČEK ZA ZAJCE												OBDOBJE PALEO-ZOIKA NATASA DOLENC	
VNAPREJ PLAČAN ZNESEK ZA UTROJTEV KUPČIJE													OBDELANA KMETIJSKA POVRŠINA
									MELODIČNI OKRASEK IZ HITRIH ZAPORED. TONOV				POKOJNI RTV HUMORIST (FRANE MILČINSKI)

							
UTRIPAJOČ VIR RADJ-SKEGA SEVANJA V VESOLJU		ROČNO STRELNO OROŽJE	ZADNJI POZIV, PODKREPLJEN Z GROŽNJO	NORVEŠKI MATEMATIK (SOPHUS)	NAŠ FIZIK, AMBASADOR ZNANOSTI (DANILO)	BENIGEN ŽLEZNI TUMOR	VZDEVEK IGRALCA RADKA POLIČA
STAROGRŠKI EP		5					
ZGORNJI DEL ULOMKA							
2. OSEBA EDNINE KRŠČANSKA BOGOSLUŽ. STAVBA				SIMBOL ZA RADON			ORGAN ZA VOH
				SIMBOL ZA MOČ			
NASTANEK NABITIH DELCEV, IONIZACIJA	JANEZ LOTRIČ	ANGLEŠKI ROCKER IZ 70. LET (BRIAN)	PISATELJICA PEROCI				
			PALMA ZA PLETENO POHIŠTVO REKA V FRANCIJI			STIMULACIJA	14
				RAZREDČENA OCETNA KISLINA	USTANOVITELJ STAROPERZIJSKE DRŽAVE	PARALELOGRAM	
					15		IDEJNI UTEME-LJITELJ AFRIŠKI VELETOK
	KRAJ PRI ŠEMPASU ZELJU PODOBNA VRTNINA	3		TRGOVSKI POPUST NASLOV JAPONSKIH CESARJEV			
		POLITIČARKA PERON UŠ, UŠICA			IZDELOVALEC POHIŠTVA		
13				PRVI NOETOV SIN MAJHNA KMEČKA HIŠA	OGLAŠANJE DROBNICE ŠVIČARSKI PISATELJ (JOHN)		
				MATEMATIK PRIJATELJ		16	GOVORNIK
				IDIOTKA			SAMICA KONJA
			ABOTEN ČLOVEK, NEUMNEŽ SL. PESNIK (BORIS A.)	4			REAKTIVNI IZSTRELEK HRVAŠKA KRAŠKA POKRAJINA
			6		ARGENT. PISATELJ (ROBERTO)	MALIK TEKOČA VULKANSKA ŽAREČINA	
		KRAJ V DOLINI DRAVE NAJMANJŠE PRAŠTEVILO					ZNAK ZA BIZMUT AFRIŠKI PTIČ TEKAČ
	REZULTAT MNOŽENJA Z DVE JADRANSKI OTOK						
				ZOBNA JAMICA V ČELJUSTI		11	
				GRAFIČNO OBLIKOVANJE, MATEVŽ BOKALIČ	OPRIJET PAS PRI OBLAČILU	10	
							AVTOR MARKO BOKALIČ

NAGRADNI RAZPIS

➔ Črke iz označenih polj po vrsti in po stolpcu tvorijo besede, ki so povezane s Presekom. Če želite prejeti Presekov paket, morate poleg svojih odgovorov na Preseku priloženo dopisnico tudi svoje ime, priimek in naslov (Presekov paket vam bomo poslali na vaš naslov, ne na vašo elektronsko pošto) poslati na Presekov naslov (Presekov paket vam bomo poslali na vaš naslov, ne na vašo elektronsko pošto) do 17. aprila 2024. Če bomo prejeli vaše dopisnice, vam bomo izžrebali tri nagradjence, ki bodo prejeli Presekov paket. ✖

NAGRADNI RAZPIS

➔ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **17. aprila 2009**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov paket**. ✕



15

nadaljevanje
s strani

levem prekatu in deliš s tri).

- Kako se loči odvisnost povprečnega števila fižolčkov po več potresanjih od enega samega poskusa?
- Ponovi poskus še z dvajsetimi fižolčki na vsaki strani in zapisuj število fižolčkov v posameznih prekatih po potresanjih.
- Ali je obnašanje kaj drugačno kot v prvem primeru, ko je bilo fižolčkov le deset na vsaki strani?
- Ali je obnašanje kaj drugačno kot obnašanje povprečnega števila fižolčkov? V čem se razlikuje?
- V čem sta si dogajanja v modelu in pri difuziji iz prejšnje poizkuševalnice podobni?
- V čem si nista podobni?

Še eno vrsto take „fižolčkaste“ difuzije najdemo v svoji okolici. Od leta 2007 plačujemo z evri. Evrski kovanci se na eni strani razlikujejo, na strani, kjer je številka, pa so enaki.

Poglej v denarnico in poskusi ugotoviti države iz-

vora kovancev v njej. Pomagaj si s slikami zadnjih strani kovancev v tabeli. Tak pregled ponovi večkrat, npr. enkrat na teden. Pokukaj še v drobižnice staršev in prijateljev.

K nam s turisti in s potovanji Slovencev v tujino prihajajo tuji kovanci in odhajajo slovenski. Zato se delež slovenskih kovancev zmanjšuje, tujih pa narašča. Sedaj smo v vmesnem obdobju, pričakujemo pa lahko, da bodo čez nekaj let naši kovanci prava redkost.

Delež kovancev posamezne narodnosti izračunamo tako:

$$\text{delež} = \frac{\text{število določenih kovancev}}{\text{število vseh kovancev}}$$

- Kolikšen je bil delež slovenskih kovancev pri štetjih kovancev v različnih denarnicah?
- Katere tuje kovance si našel najpogosteje? Kolikšen je bil njihov delež?
- V čem je mešanje kovancev podobno difuziji in v čem se od nje razlikuje?

Država	0,01€	0,02€	0,05€	0,10€	0,20€	0,50€	1€	2€
Cifra								
Slovenija								
Nemčija								
Italija								
Avstrija								
Francija								



→

Nizozemska								
Belgija								
Španija								
Grčija								
Portugalska								
Finska								
Irska								
Luksemburg								
Ciper								
Malta								
Slovaška								

Tabela. Evrski kovanci različnih držav (vir. Wikipedia) ×

Razmisli in poskusi

- ➔ **33. Kako močno dežuje?** Običajni odgovori so: *Rahlo dežuje. Močno dežuje. Lije.* Odgovor ni ravno kvantitativen in nam ne pove, ali potrebujemo dežnik ali celo škornje. Fiziki pa imamo radi kvantitativne odgovore. Recimo, poglej v lužo in preštej, koliko kapljic pade na kvadratni meter na sekundo. Po moji izkušnji me ena kaplja/(m²s) ne moti, pri 10/(m²s) ne potrebujem nujno dežnika, ker se enako hitro sušim kot močim, pri 100/(m²s) pa že pošteno dežuje. Opazuj podobno še ti in si zabeleži izkušnje. Seveda je učinek odvisen tudi od tega, kako debele so kaplje.

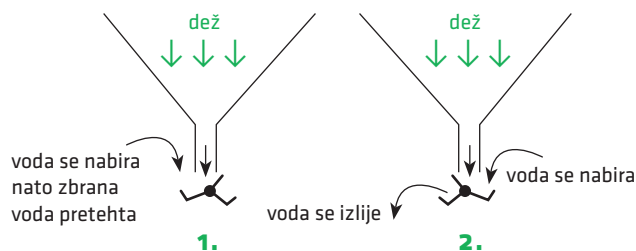
Kako pa merimo 100 kapelj/(m²s)? Če vzamemo 1 m², je tako štetje nemogoče, saj v eni sekundi ne moremo prešteti 100 kapelj. Lahko pa izberemo manjšo ploskev (manjšo lužo), recimo 1 dm², pa bo padla samo ena kaplja na sekundo. Ocenimo lahko napravimo še drugače. Pogled usmerimo na eno kapljo in ocenimo razdaljo r , kako daleč je v času t (recimo eni sekundi ali petih sekundah) padla najbližja kaplja. Gostota toka kapelj je približno $1/(\pi r^2 \times t)$.

Meteorologi povedo drugače, in sicer koliko milimetrov dežja je padlo v danem času (kako visoko bi stala voda v bazenu, če bi bil v začetku prazen). Povedo tudi tako: koliko litrov dežja je padlo na kvadratni meter v danem času. Preveri, da velja 1 mm = 1 liter/m². Ali sta potemtakem oba podatka številčno enaka?

POSKUS. Primerjaj število kapljic na kvadratni meter na sekundo z navedbo, koliko milimetrov dežja je padlo na uro. V izbrani uri moraš šteti večkrat po nekaj sekund (gostota toka dežja se spreminja) in vzeti povprečje. Za „meteorološko meritev“ pa moraš napraviti preprost merilec, ki zajema dež in ga po cevki pretoči v steklenico. Če bi kar lovil v banjico, bi preveč izhlapelo, razen če močno dežuje. Lahko pa tudi oceniš volumen kapljic (tako, da jih znano število uloviš v posodo) in zlahka pretvoriš število

kapljic na kvadratni meter na volumen na kvadratni meter.

Za merjenje količine dežja je prikladna tudi „dežna tehtnica“ (glej sliko). Ko se ena ali druga posoda napolni, se tehtnica prevesi. Štejemo število prekucev na časovno enoto (pred tem umerimo volumen vode v posodi v trenutku, ko se prevesi). Poskusi skonstruirati tak merilec dežja. Avtomatizirana dežna tehtnica se ponekod dejansko uporablja, signale štejemo na daljavo in ni treba priti v odročne kraje natakati deževnice.



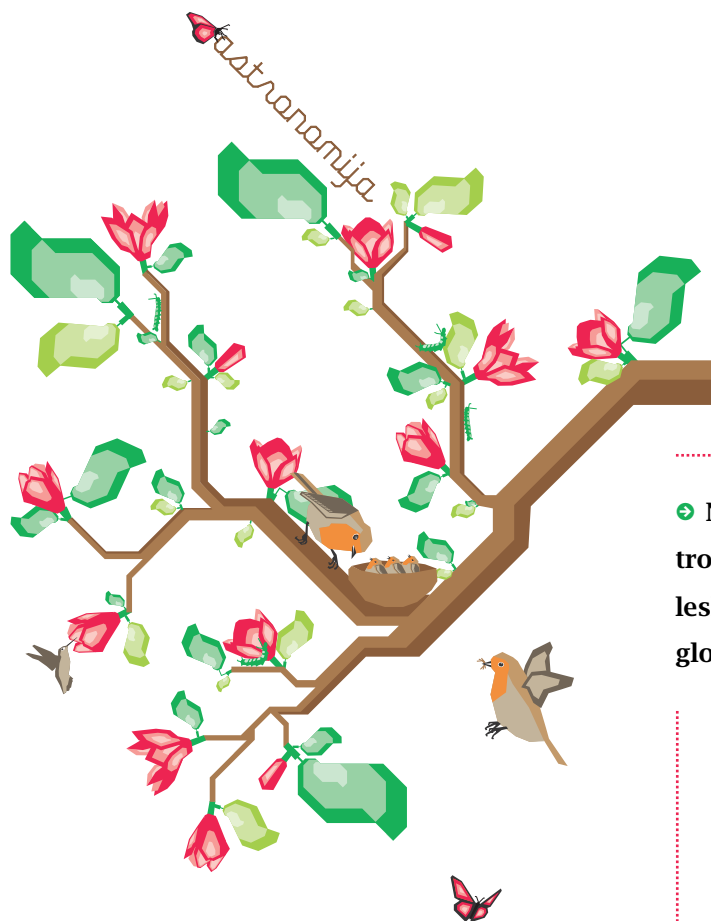
Za preprosto meritev količine dežja lahko uporabiš tudi krpo Vileda, ki dobro vpija vodo. Stehtaš jo pred izpostavljanjem dežju in po njem.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

32. *Kako se vesoljec obrne?*

ODGOVOR. Po zakonu o ohranitvi vrtilne količine se vesoljec ne more začeti vrteti, $\vec{\Gamma} = 0$, saj nanj ne deluje noben zunanji navor. Spreten vesoljec pa se lahko zasučje (in potem spet miruje). Iztegne roke, zasučje zgornji del telesa v levo, skrči roke, zasučje zgornji del telesa v desno in to večkrat ponovi. Med zasukom imata zgornji in spodnji del telesa nasprotno enaki vrtilni količini ($\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_z + \vec{\Gamma}_s$, torej je $\vec{\Gamma}_z = -\vec{\Gamma}_s$), toda pri prvem zasuku ima zgornji del zaradi večjega vztrajnostnega momenta manjšo kotno hitrost in se manj zasučje. Po obeh zasukih je torej telo zasukano nekoliko v desno. **Ali se ti je posrečilo zasukati na ledu po tej metodi?**

To metodo so pogruntali že mački. Kadar padejo z višine, padejo vedno na noge. Metodo so še izboljšali. Če se mačku zelo mudi, si ne more privoščiti ponavljanj. Telo spretno zvije tako, da del telesa zasučje v zaželeno smer, drugi del pa spodviha v obratno smer in vendar pristane prav. ☒



Štirje mušketirji v vesolju

RASTO SNOJ

➔ Ne gre za junake Alexandra Dumasa in ne za astronomavte. Predstavili vam bomo štiri vesoljske teleskope, s katerimi je človeštvo pokukalo v vesolje globlje kot kdajkoli prej.

Kukanje je bilo kar se da temeljito in je pokrilo precejšen del spektra elektromagnetnega valovanja, kar je tudi bilo v načrtu Nasinega programa štirih velikih observatorijev. Spomnili se bomo znamenitega najprodnarnejšega teleskopa Hubble za območje vidnega in bližnjega infrardečega dela spektra, teleskopa Compton za opazovanje sevanja gama (CGRO – Compton Gamma Ray Observatory), teleskopa Chandra, ki je namenjen delu spektra v domeni rentgenske svetlobe, in najmlajšega med njimi, Spitzerja, delujočega v infrardečem spektralnem območju (nekaj časa imenovan tudi Space Infrared Telescope Facility – SIRTf).

Vesoljski teleskop Hubble je že ob rojstvu spremljala smola, saj so ga izstrelili z napačno brušenim zrcalom, kar je povzročilo posebno optično napako – sferno aberacijo in posledično neostre slike. Svetovna astronomska javnost, ki je nestrpno pričakovala prve posnetke, je razočarana onemela. A težavo so vendarle odpravili z dodatno korekcijsko optiko COSTAR (Corrective Optics Space Telescope Axial Replacement) in jo namestili na teleskop že v prvi servisni misiji leta 1993. Hubbla morajo namreč servisirati v približno triletnih intervalih, kar počnejo astronomi na odpravah vesoljskega raketoplana. Doselej so to storili štirikrat. Teleskop na višini okroglih



→ 600 km v dobri uri in pol obleti Zemljo. Njegovi posnetki, ki poleg vidnega dela spektra „segajo“ še v bližnjo ultravijolično in infrardečo svetlobo, so preplavili ves svet.

17 tonski orjak Compton Gamma Ray Observatory, ali na kratko Compton, je v vesolje ponesel raketoplan Atlantis na misiji STS-37 na orbito v višini 450 km nad površjem Zemlje. Sevanje gama ima zelo veliko energijo, okoli 10.000 krat večjo od fotonov vidne svetlobe. Ozračje sevanje gama skoraj povsem zaustavi, kar je še kako pomembno za življenje na Zemlji. Zato je za nemoteno opazovanje v tem delu spektra nujen izlet v vesolje. Compton je z detektorji po nekoliko zapletenem postopku rekonstruiral sliko gama izvorov z energijami od vsega 30 keV do 30 MeV. Za ponazoritev, v že skoraj izumrli televizijski katodni cevi imajo pospešeni elektroni energijo „le“ okoli 20 keV. Compton nosi ime po Nobelovcu, fiziku Arthurju Comptonu, po katerem se imenuje tudi znan pojav sipanja elektromagnetnega valovanja na elektronih ali drugih delcih. Pri tem se valovna dolžina elektromagnetnega valovanja podaljša, podrobnosti pa so dobro znane že študentom fizike. Inveržno Comptonovo sipanje je pomembno za astrofiziko, saj lahko nastopi v bližini črnih lukenj. Takrat se energija sipanih fotonov gama na relativističnih delcih poveča. Teleskop je med drugim služil tudi za opazovanje ostankov supernov. Zaradi posebne konstrukcije je bil pravi velikan in najtežji posamični tovor na raketoplanu. Kot edini od letčih observatorijev je uspešno pristal davnega leta 2000.

Tudi naslednjega od mušketirjev, vesoljski rentgenski teleskop Chandra, imenovan po Nobelovcu, amerškemu astrofiziku indijskega rodu Subrahmanyanu Chandrasekharju, so v nizko Zemljino orbito utirili z vesoljskim raketoplanom Columbia na misiji STS-93. To je bil, mimogrede, prvi raketoplan, ki ga je „krmarila“ ženska – Eileen Collins. Temu je sledila še dodatna izstrelitev na večjo višino, ko je vgrajen pogonski sistem utiril Chandro v njegovo končno orbito. Ta je za razliko od približno krožne orbite Hubblevega teleskopa izrazito eliptična. Najoddaljenejša točka (apogej) je na razdalji 133.000 km, najbližja točka Zemlji ali perigej pa je na komaj 16.000 km oddaljenosti. Za obhod Chandra potrebuje dobrih 64 ur, kar je posledica večje povprečne razdalje od Zemlje, saj je apogej na skoraj tretjini razdalje do Lune. Veliko večino svojega časa (ne pozabimo, da je v večjih razdaljah hitrost manjša, bližje Zemlji pa



Slika 1. Teleskop Hubble v orbiti (Foto: NASA)



Slika 2. Teleskop Spitzer pred izstrelitvijo (Foto: NASA)

večja) je tako izven motečih Van Alenovih pasov, za katere je značilna obilica nabitih delcev, ki jih zadržuje Zemljino magnetno polje. Tako so lahko opazovanja s posebnim Wolterjevim teleskopom večino časa nemotena. Ta deluje povsem drugače od optičnih teleskopov, saj je narejen iz štirih koncentričnih parov skoraj vzporednih zrcal. Rentgenska svetloba bi zaradi visoke energije namreč „prebila“ navadna zrcala, če pa vstopajo pod zelo velikim vpadnim kotom, se od zrcal z veliko odbojnostjo, prevlečena so z iridijem, vseeno odbijejo in ustvarijo realno sliko v ravnini detektorja. Teleskop je namen-



Slika 3. Vesoljski rentgenski teleskop Chandra (Ilustracija: NASA)



Slika 4. Ilustracija vesoljskega observatorija Compton (Ilustracija: NASA)



Slika 5. V počastitev mednarodnega leta astronomije so trije še delujoči veliki vesoljski teleskopi Hubble, Spitzer in Chandra posneli 22 milijonov svetlobnih let oddaljeno galaksijo M101 v vidni, infrardeči in rentgenski svetlobi. Astronomi so nato te posnetke sestavili v eno podobo. (Foto: NASA, ESA, CXC, JPL, Caltech, STScI)

jen zlasti iskanju in opazovanju sevanja iz okolice črnih lukenj, kvazarjev, nevtronskih zvezd ter masivnih mladih zvezd.

Najnovejši član družine vesoljskih observatorijev je infrardeči teleskop Spitzer. Enako kot teleskop Hubble, tudi ta uporablja optiko Ritchey-Chretien Cassegrainovega reflektorja, ki zagotavlja brezhibno ostro sliko v velikem vidnem polju. Vsekakor sta si ta dva vesoljska teleskopa najbolj podobna oziroma sta videti nekako tako, kot si teleskope večinoma tudi predstavljamo. Za razliko od nesrečnega Hubblea, se je Spitzer izkazal že v prvem poskusu. Zaradi povečane temperaturne občutljivosti je teleskop posebej zakrit s ščitnikom proti Soncu in dodatno hlajen še s tremi sistemi. Njegova orbita je takšna, da že Zemlja zakriva moteče Sonce. Z njim je mogoče gledati v notranjost prašnatih območij središč galaksij, kar v vidni svetlobi ni mogoče, saj jo prašna delci sipajo in vpijajo. Spitzer opazuje tudi hladnejše zvezde, katerih izsev je največji prav v infrardečem delu spektra. V tem delu spektra sevajo tudi

nekater organske molekule iz oddaljenih planetarnih sistemov.

Bralec se najbrž sprašuje, kaj bo sledilo tej četverici. To bo velikan med vesoljskimi teleskopi – James Webb Space Telescope, za katerega je NASA že prižgala zeleno luč. Gre za zrcalni teleskop s premerom primarnega zrcala 6,5 metra, ki bo „gledal“ v vidnem in infrardečem delu spektra in bo predvidoma izstreljen leta 2013. Za razliko od Hubblea bo utrjen v eno izmed tako imenovanih Lagrangeovih točk, kar zaradi razdalje žal pomeni, da ne bo dosegljiv z vesoljskimi raketoplani in ga tudi ne bo mogoče servisirati. No, o tem kdaj drugič. Za radovedne bralce še tole. Fantastični posnetki z vesoljskih teleskopov so na voljo tudi na medmrežju na naslovu www.google.com/sky.

	SPITZER SIRTf	CHANDRA CXO	COMPTON CGRO	HUBBLE HST
datum izstrelitve	avgust 2003	julij 1999	april 1991	april 1990
izstreljen z	Delta raketa, Florida	raketoplan Columbia	raketoplan Atlantis	raketoplan Discovery
tip teleskopa	zrcalni s premerom primarnega zrcala 0,85 m, hlajeno zrcalo	Wolterjev teleskop	Comptel sipalni teleskop	zrcalni s premerom primarnega zrcala 2,4 m
valovne dolžine/energije	3 μm do 180 μm	rentgenska svetloba in sevanje gama	30 keV do 30 MeV	100 nm do 2,5 μm
spletni naslov	www.spitzer.caltech.edu	chandra.harvard.edu	heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/cgro/	www.stsci.edu/hst



Stare krivulje, moderna orodja

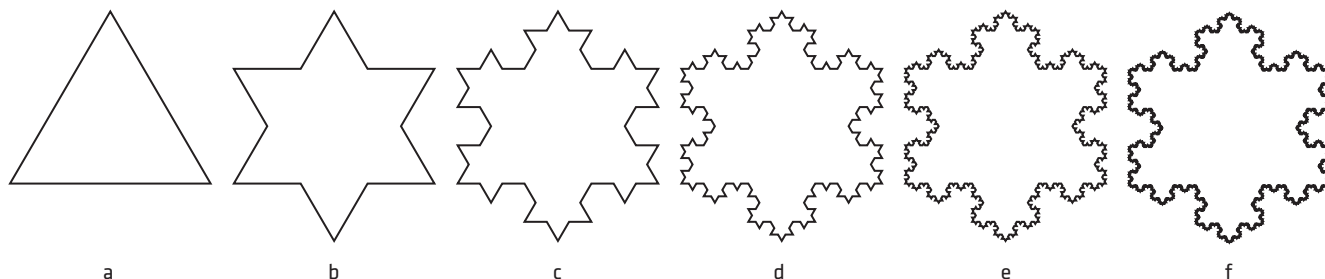
CIRIL PETR

➔ Pričujoči prispevek je bil s podobno vsebino že objavljen v prvi številki sedemnajstega letnika Preseka leta 1990/91. Večina bralcev Preseka vas takrat še ni bila rojena, obstajala pa nista niti spletni protokol *http* niti programski jezik *Java*. Da bi tudi pri sedanji generaciji bralcev vzpodbudili zanimanje za te krivulje, smo se odločili stari prispevek posodobiti.

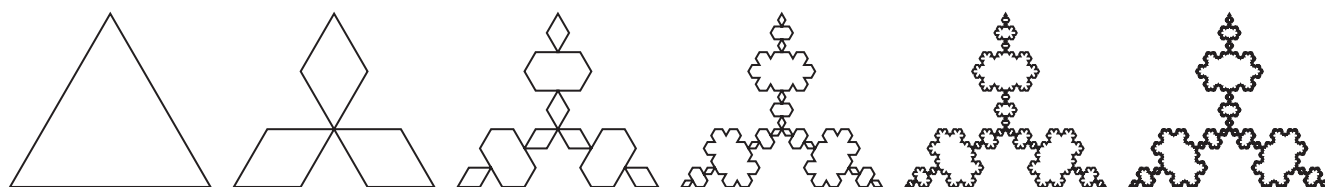
Najprej si bomo ogledali nekaj precej starih, vendar znamenitih krivulj in o vsaki kaj povedali. Potem se bomo seznanili z enostavnim načinom generiranja teh krivulj in na koncu predstavili preprost program, s katerim bomo lahko krivulje risali na računalniku, ter si izmišljali svoje.

■ Kochova snežinka

Začnimo z enakostraničnim trikotnikom (slika 1a). V prvem koraku razdelimo vsako stranico trikotnika na tretjine, srednje odseke stranic pa nadomestimo z novimi, za tretjino manjšimi enakostraničnimi trikotniki (slika 1b). V drugem koraku naredimo enako z vsako od stranic tako dobljenega poligona, ki spominja na Davidovo zvezdo. Postopek lahko ponavljamo, dokler nam to dopušča natančnost risanja. Že po nekaj korakih postopka lahko približno vidimo, kakšen bo izgled krivulje, obris lika, če bi postopek izvedli neskončnokrat (slika 1f). Krivulja, ki jo dobimo, če postopek izvedemo neskončnokrat, se imenuje *Kochova snežinka*, saj je podobna pravi snežinki. Prvi jo je raziskoval v začetku prejšnjega stoletja švedski matematik Niels Fabian Helge von Koch. Zelo je zanimiva, saj ima neskončno velik obseg, pa ven-



Slika 1. Prvih šest korakov razvoja Kochove snežinke

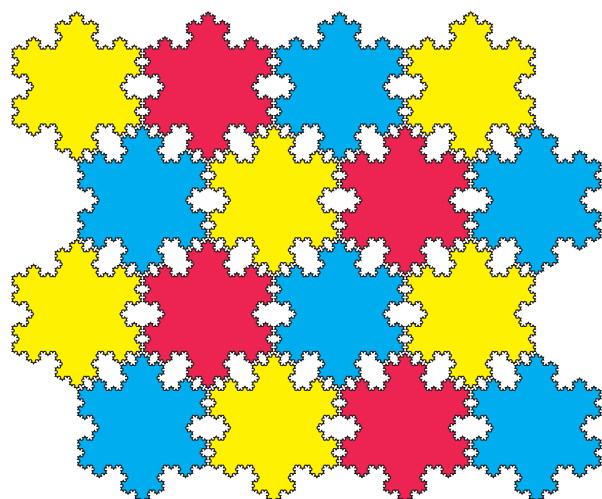


Slika 2. Prvih šest korakov razvoja obratne Kochove snežinke

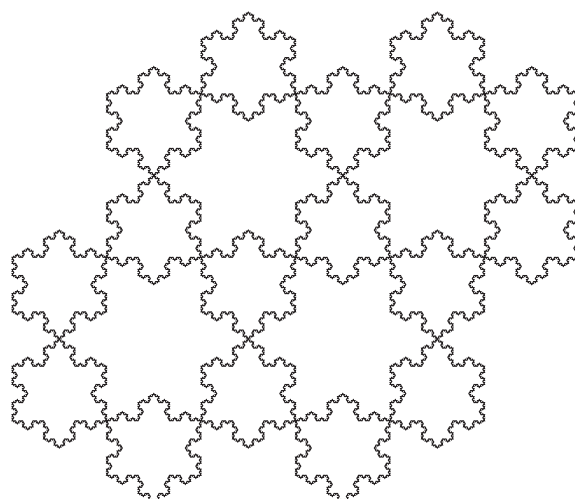
dar obsega končno površino. Komur so domača geometrijska zaporedja, mu obsega in površine na določenem koraku postopka ne bo težko izračunati.

Poglejmo, kakšen lik dobimo, če srednje dele stranic nadomestimo s trikotniki, obrnjenimi navznoter (slika 2). Obseg lika, če postopek ponovimo neskončno krat, je enak obsegu *Kochove snežinke*, površina lika pa je manjša od površine začetnega trikotnika za toliko, za kolikor je površina *Kochove snežinke* večja

od površine istega začetnega trikotnika. Imenujmo ta lik *obratna Kochova snežinka*. Ravnino lahko popolnoma prekrijemo z izmenjajočima se likoma *Kochove snežinke* in *obratne Kochove snežinke* (slika 3). Na sliki 4 je prikazano prekrivanje ravnine z dvema, po njuni površini različnima Kochovima snežinkama. Razmerje njunih površin je ena proti tri. Omenimo še, da lahko podoben proces, kot smo ga prikazali nad trikotnikom, izvedemo nad tetraedrom.



Slika 3. Prekrivanje ravnine s Kochovo in obratno Kochovo snežinko



Slika 4. Prekrivanje ravnine z dvema, po površini različnima Kochovima snežinkama v razmerju ena proti tri

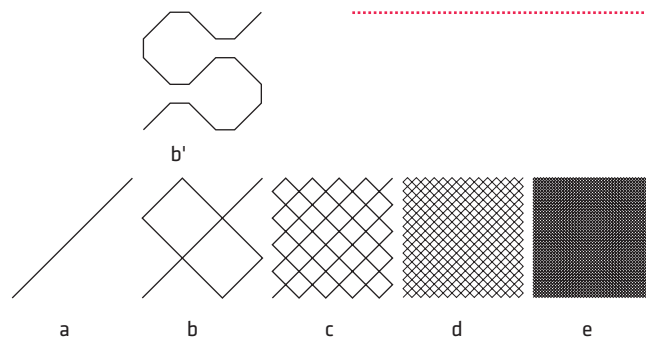
➔ ■ Peanova krivulja

Peanovo krivuljo dobimo z naslednjim postopkom. V prvem koraku kvadratu narišemo diagonalo (slika 5a). V drugem koraku kvadrat razdelimo na devet enakih kvadratov in jim narišemo vse diagonale z eno samo potezo, tako da nikjer ne sekamo svoje poti (slika 5b). V tretjem koraku naredimo enako z vsakim od manjših kvadratov (slika 5c). Ker se na slikah 5 diagonale kvadratov v kotih stikajo, ni jasno, kako krivuljo narišemo. Jasno pa bo, če zavoje krivulje porežemo (slika 5b'). Krivulja, ki jo dobimo, če postopek ponovimo neskončnokrat, se imenuje *Peanova krivulja*. Opazimo, da se krivulja z vsakim naslednjim korakom vedno bolj gosti vije po površini, omejeni s kvadratom. *Peanova krivulja* je *prostor zapolnjujoča krivulja*, kar pomeni, da gre skozi vsako točko površine, omejene s kvadratom. To krivuljo je v drugi polovici 19. stoletja odkril italijanski matematik in logik Giuseppe Peano.

■ Zmajeve krivulja

Zmajevo krivuljo lahko le za nekaj prvih korakov dobimo s prepogibanjem papirja. Vzemimo dolg papirnat trak, ki predstavlja začetek razvoja *zmajeve krivulje* (slika 6). Trak prepognemo po polovici in odpremo do pravega kota. Trak potem dvakrat zaporedoma prepognemo po polovici in ga odpremo do pravih kotov, trak trikrat zaporedoma prepognemo po polovici itd. Kdor ima izkušnje s prepogibanjem papirja ve, da se običajno papir ne da prepogniti več kot sedemkrat. Kot zanimivost lahko omenimo, da je dvanajst zaporednih pregibov papirja svetovni rekord, za kar je bil potreben več kot kilometer dolg trak zelo tankega papirja. Tako prepognjen paket papirja je imel kar $2^{12} = 4096$ slojev.

Naj bo papir na začetku še tako dolg, je prostor, ki ga zaseda *zmajeve krivulja*, po vsakem koraku manjši. Vendar pa je *zmajeve krivulja*, dobljena z neskončno mnogo prepogibanj, *prostor zapolnjujoča krivulja*, če na vsakem koraku dolžino papirja ustrezno podaljšamo. Če želimo, da je razdalja med začetkom in koncem *zmajeve krivulje* na vsakem koraku enaka, moramo krivuljo na vsakem koraku podaljšati za $\sqrt{2}$. Štiri *zmajeve krivulje* lahko lepo zložimo skupaj, kot prikazuje slika 7. Obstaja pa še mnogo drugih možnih prekrivanj ravnine z *zmajevimi krivuljami*.



Slika 5. Prvih pet korakov razvoja Peanove krivulje

Prvi so *zmajevo krivuljo* opisali in raziskovali fiziki v ameriški vesoljski agenciji NASA John Heighway, Bruce Banks in William Harter, širši javnosti pa jo je predstavil Martin Gardner leta 1978 v svoji popularni kolumni *Mathematical Games* v reviji *Scientific American*.

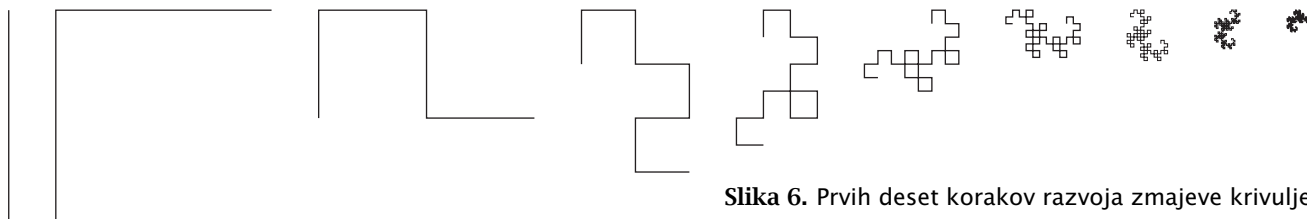
■ Preproga Sierpińskega

Začnimo z daljico (slika 8a), potem pa v vsakem naslednjem koraku daljico zamenjamo z likom (slika 8b), ki je sestavljen iz osmih za tretjino krajših daljic. Če postopek ponovimo neskončnokrat, dobimo krivuljo z imenom *preproga Sierpińskega*. *Preproga Sierpińskega* ni *prostor zapolnjujoča krivulja*. Vsota površin vseh „lukenj“ v preprogi je enaka najmanjši površini kvadrata, ki jo potrebujemo, da vanj vrišemo krivuljo. Torej, sama krivulja ne prekrije nobene površine.

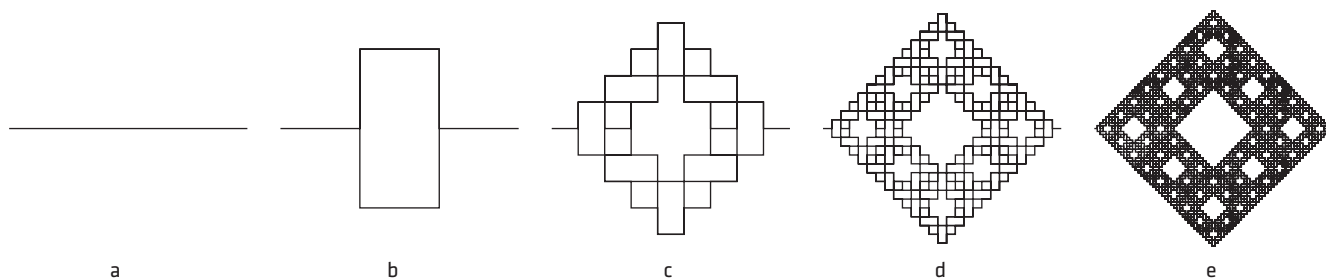
Krivuljo je prvi opisal poljski matematik Waclaw Sierpiński leta 1916.

■ Hilbertova krivulja

Osnovni element te krivulje je lik na sliki 9a. V prvem koraku uporabimo štiri osnovne elemente in jih povežemo med seboj s tremi daljicami, kot prikazuje slika 9b. Za vsak naslednji korak uporabimo zadnjo dobljeno sliko kot osnovni element. Krivulja, ki jo dobimo po neskončno mnogo korakih, se imenuje *Hilbertova krivulja* in je *prostor zapolnjujoča krivulja*. Krivuljo je prvi opisal nemški matematik David Hilbert leta 1891.

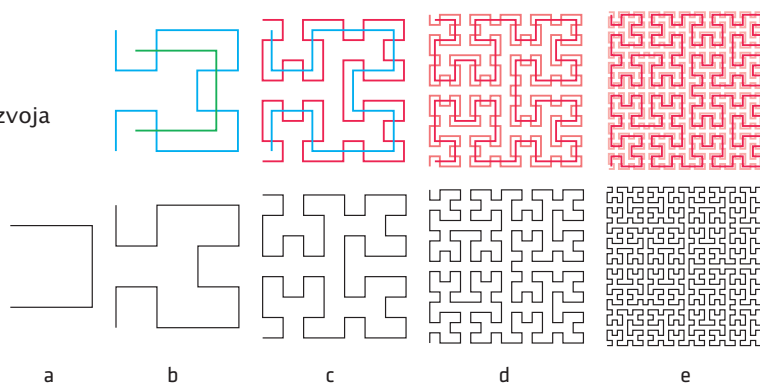


Slika 6. Prvih deset korakov razvoja zmajevе krivulje



Slika 8. Prvih pet korakov razvoja preproge Sierpińskega

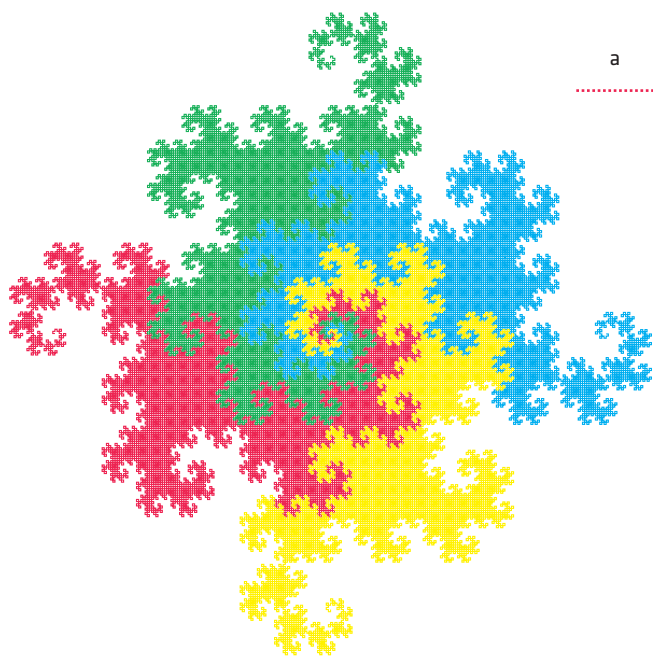
Slika 9. Prvih pet korakov razvoja Hilbertove krivulje



■ L-sistemi

L-sisteme je predstavil madžarski biolog Aristid Lindenmeyer leta 1968 predvsem z namenom opisovanja razvojnega procesa rastlin. Izraz *L-sistemi* zajema množico formalnih jezikov, vendar se ne bomo spuščali v natančno formalizacijo. Vpeljali bomo le najbolj preproste elemente takega jezika, s katerimi bomo lahko opisali vse do sedaj predstavljene krivulje.

Lik, ki ga uporabimo za začetek risanja krivulje, imenujemo *aksiom*. Postopek, kako iz prejšnjega lika dobimo naslednjega, pa opišemo s *pravili*. Naj simbol F predstavlja osnovno črto, ki jo rišemo z vnaprej določeno dolžino v smeri trenutne orientacije. Simbol + naj predstavlja zasuk trenutne orientacije za vnaprej določen kot v pozitivno smer ter simbol - v negativno smer. Aksiom predstavlja niz, s katerim začnemo. Na prvem koraku aksiom pretvorimo v



Slika 7. Štiri zmajevе krivulje lahko lepo zložimo skupaj

→ nov niz po danih pravilih. Za vsak naslednji korak moramo niz iz prejšnjega koraka prepisati v nov niz po danih pravilih. Niz, ki ga dobimo na tak način, lahko interpretiramo kot natančno navodilo za risanje krivulje. Simboli, ki nimajo grafične interpretacije, služijo le uporabi pravil. Pravila za generiranje predstavljenih krivulj so zbrana v tabeli 1.

IME KRIVULJE	AKSIOM	PRAVILA	KOT
Kochova snežinka	F++F++F	F=F-F++F-F	60
Preproga Sierpiškega	F	F=F+F-F-F-F-F-F-F	90
Zmajeva krivulja	FX	X=X+VF+, Y=-FX-Y	90
Peanova krivulja	F	F=F+F-F-F-F+F+F-F	90
Hilbertova krivulja	L	L=+RF-LFL-FR+ R=-LF+RFR+FL-	90
Vejica	X	X=F-[[X]+X]+F[+FX]-X, F=FF	25

Tabela 1. Krivulje opisane v notaciji *L-sistema*

Na naslednji strani navajamo preprost program, napisan v programskem jeziku *Java*, s katerim lahko rišemo vse krivulje iz tabele 1 razen *vejice*. Jedro programa sestavljata metodi *generateCurve* in *paintComponent*. Metoda *generateCurve* ustvari niz *curve*. Konstante na začetku programa, *axiom*, *rules*, *generations*, *segmentLength* in *angle* predstavljajo vhod-

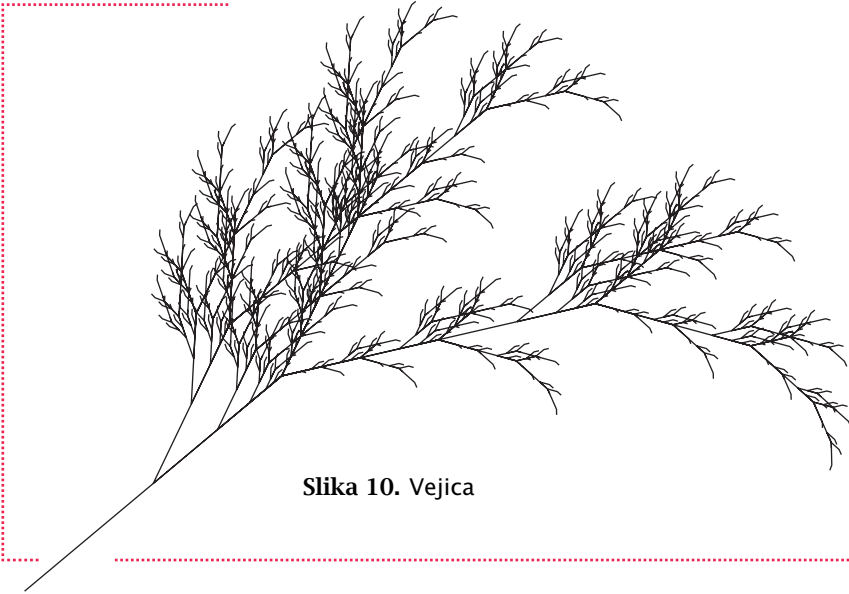
ne podatke metodi *generateCurve*. Metoda *paintComponent* interpretira niz *curve* in riše krivuljo na grafično matriko *g2d*.

Z le nekaj truda lahko program dopolnimo tako, da bo upošteval tudi simbola *[in]*, ki sta potrebna za definicijo *vejice*. Simbol *[* naj pomeni shranitev trenutnega stanja (položaja, orientacije, velikosti črte, barve, ...), simbol *]* pa naj pomeni obnovitev predhodno shranjenega stanja. S pomočjo simbolov *[in]* je na sliki 10 narisana krivulja *vejica* na šestem koraku razvoja.

Program lahko postopoma razširjamo še z novimi simboli, ki imajo določen pomen pri risanju, ter tako bogatimo izrazno možnost našega jezika za opis krivulj. Nekaj idej, simbol *f* naj pomeni le premik brez risanja, simbol *@f* naj predstavlja spremembo velikosti črte za faktor *f*, simbol *!* naj predstavlja obrnitev pomena simbolov *+* in *-*, simbol *c{r,g,b}* naj predstavlja barvo, s katero naj se od tu dalje riše (tako bi, recimo, niz *c{255,0,0}* predstavljal rdečo barvo izraženo z RGB komponentami). Osnovni element risanja je lahko tudi kaj drugega kot le preprosta črta.

Kdor ni večš programiranja, lahko uporabi brezplačen program *Inkscape*, urejevalnik vektorskih grafik (<http://www.inkscape.org>). Podprt je tudi slovenski jezik. Z izbiro menijev *Učinki - Upodobi - Sistem L* se nam odpre okno za vnos parametrov krivulje.

Program *LSystem.java* je dostopen preko medmrežja na povezavi <http://matematika-racunalnistvo.fnm.uni-mb.si/personal/petr/presek/LSystem.html>.



Slika 10. Vejica

V tokratnem računalniškem prispevku ste spoznali postopek risanja nenavadnih krivulj, vas pa vabimo k ustvarjanju novih krivulj ali čimbolj domiselnim dopolnitvam programa. Vaše formule za krivulje, slike krivulj ali dopolnjen program nam pošljite na naslov *Uredništvo Preseka, Jadranska 19, 1000 Ljubljana*. Avtorje najlepših krivulj bomo nagradili z lepo knjižno nagrado.



```
import javax.swing.*; // for JPanel, etc.
import java.awt.*; // for Graphics, etc.

public class LSystem extends JPanel {
    private static int FRAME_WIDTH = 800; // frame width
    private static int FRAME_HEIGHT = 500; // frame height

    private static String axiom = "FX"; // rules for Dragon curve
    private static String[] rules = new String[] { "X=X+YF+", "Y=-FX-Y" };
    private static int generations = 13;
    private static int segmentLength = 2;
    private static int angle = 90;

    private String curve;

    public LSystem() {
        curve = generateCurve(generations, axiom);
    }

    private String generateCurve(int gen, String curve) {
        if (gen==0) {
            return curve;
        } else {
            String newCurve = "";
            for (int curveSymbolIndex=0; curveSymbolIndex<curve.length(); curveSymbolIndex++) {
                boolean symbolWasReplaced = false;
                for (int ruleIndex=0; ruleIndex<rules.length; ruleIndex++) {
                    if (curve.charAt(curveSymbolIndex)==rules[ruleIndex].charAt(0)) {
                        newCurve += rules[ruleIndex].substring(2); // replacing symbol with a rule
                        symbolWasReplaced = true;
                        break;
                    }
                }
                if (!symbolWasReplaced) {
                    newCurve += curve.charAt(curveSymbolIndex); // copying symbol
                }
            }
            return generateCurve(gen-1, newCurve);
        }
    }

    public void paintComponent(Graphics g) {
        super.paintComponent(g); // clearing ofscreen pixmap
        Graphics2D g2d = (Graphics2D) g;
        int currX = super.getWidth()/2; // starting x position in the center
        int currY = super.getHeight()/2; // starting y position in the center
        int currAngle = 0; // starting direction
        for (int charIndex=0; charIndex<curve.length(); charIndex++) { // drawing the curve
            switch (curve.charAt(charIndex)) {
                case 'F': // drawing a line segment
                    int deltaX = (int) Math.round(segmentLength*Math.cos(currAngle*Math.PI/180));
                    int deltaY = (int) Math.round(segmentLength*Math.sin(currAngle*Math.PI/180));
                    g2d.drawLine(currX, currY, currX+deltaX, currY+deltaY);
                    currX += deltaX;
                    currY += deltaY;
                    break;
                case '+': // positive orientation rotating
                    currAngle = (currAngle + angle) % 360;
                    break;
                case '-': // negative orientation rotating
                    currAngle = (currAngle - angle) % 360;
                    break;
            } // end switch
        } // end for
    }

    public static void main(String[] args) {
        WindowUtilities.openInJFrame(new LSystem(), FRAME_WIDTH, FRAME_HEIGHT);
    }
}
```



Astronomska literatura

Ob mednarodnem letu astronomije 2009 smo na enem mestu zbrali vse publikacije s področja astronomije, ki so na voljo pri DMFA-založništvo.



Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA VESOLJA

270 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,99 EUR



Pavla Ranzinger, Bojan Dintinjana in Herman Mikuž:

NAŠE NEBO 2009

56 strani
format 16 × 23 cm
mehka vezava

8,99 EUR



Poleg omenjenih dveh ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

																													
HERMAN										JOHANNES										IVANOV									
PRONOMEN										KEGELJ										KOZMETRON									
OPLOTNICANI										DOLGEŽ										TIROZELIVANOV									
POETITCISTKASIOPEJA										CIANINJA										JABALI									
ELRGARAKROMATPEKET										EDVARDMELOS										JABOT									
ARANJUEIGORZRELOST										REGE										DANIEL									
CIRILINMETOD										NIKOLAJ										KUZANSKI									
IMKONCERTSOBIR										LOS										BAAR									
JENAINIRASREDA										MNYUNA										YUNA									
ATOSJEZIKROK										EDMONTON										NOORDUNG									
EVROPA										TRIK										RIO									
RADIAN										MOČILAR																			

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 36/4

➔ Za nagradno križanko iz četrte številke 36. letnika Preseka smo prejeli 16 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasil **Razvoj astronomije**. Izžrebani reševalci, RENATA BERCE z Jesenic, MONIKA CERINŠEK iz Slovenskih Konjic in Marija ČREŠNAR iz Zreč so razpisane nagrade prejeli po pošti. ✕

Mala zgodovina vesolja

PREDSTAVITEV KNJIGE



Avtor: Janez Strnad
DMFA – založništvo,
Knjižnica Sigma, 2008

➔ V začetku leta je v zbirki Knjižnice Sigma izšla nova knjiga profesorja Janeza Strnada, ki je posvečena zgodovinskemu pregledu spoznavanja vesolja in današnjemu „stanju stvari“ v astronomiji, kozmologiji in fiziki osnovnih delcev, ki je ključno povezana z razumevanjem zgradbe vesoljskih teles in nastanka ter razvoja vesolja. Srečno naključje je hotelo, da je knjiga profesorja Strnada izšla prav v mednarodnem letu astronomije, in bo zaokrožila prizadevanja astronomov pri popularizaciji znanosti o vesolju. Morda bodo v znanost manj „posvečene“ bralce prestrašile enačbe, toda kot pravi avtor: „... Računi so pomembni, saj razumevanje vesolja večinoma gradimo na modelih. Bralci pa račune lahko preskočijo. Nekaterim morda zadostuje že zavest, da taki računi obstajajo, drugim pa utegnejo dovolj povedati krivulje, do katerih pripeljejo.“ Mala zgodovina vesolja vsekakor prinaša lep in zgoščen pregled astronomije, zato bodo na svoj račun gotovo prišli nadobudni srednješolci in tudi študenti fizike, astronomije in drugi, ki jih ta tematika zanima. Dobrodošla pa je tudi učiteljem fizike, ki pouk želijo popestriti z astronomijo in astrofizikalnimi zgledi. Pomembno je tudi to, da si knjiga prizadeva ovreči nekaj zgrešenih predstav, ki so jih oblikovale nekatere „bolj poljudne“ knjige s podobno tematiko. ✖

Misijsa na Luno

PREDSTAVITEV KNJIGE

ANDREJ GUŠTIN



Avtor: Alan Dyer
Tehniška založba
Slovenije, 2009

➔ 20. julija bo štirideseta obletnica pristanka prve človeške posadke na Luni. Za mlade generacije je to zelo oddaljen dogodek, ki je postal zaradi nenavadnih medijskih spreobračanj nekakšen negativni mit. Marsikdo je namreč prepričan, da misije Apollo na našem naravnem satelitu niso nikoli pristale in so Američani vse skupaj posneli v filmskih studiih. Morda pa bo prav pričujoča knjiga spremenila pogled na ta zgodovinski dogodek. Že res, da je bilo osvajanje Lune posledica hladne vojne in tekmovanja med tedanjima velesilama, a to ne zmanjšuje tehnološkega in konec koncev tudi znanstvenega uspeha misij. Knjiga na slikovit način predstavlja Luno, predvsem pa njeno osvajanje. Ni namenjena le mladim radovednežem, temveč tudi starejšim bralcem, ki se morebiti še spominjajo, kako so davnega leta 1969 na črno-belih televizorjih v živo spremljali pristanek Apolla 11 na Luni. Knjigi je priložen tudi DVD s filmom o osvajanju Lune, ki je lahko tudi dober učni pripomoček. Žal pa moj predvajalnik na ploščku ni našel slovenskih podnapisov, kar je velika škoda. ✖



Glej jih, zvezde!

Priročnik za opazovanje neba v letu 2009.

- ★ **Najlepši nebesni pojavi v letu 2009**
ter njihova zgodovina in mitologija.
- ★ **Več kot 180 kart, shem, risb**
in barvnih fotografij.
- ★ **Številna imena zvezd in ozvezdij.**

Priročnik vsebuje podrobno predstavitev vseh nebesnih teles, dodani so nasveti, kako jih opazovati, fotomontaža pa vam pričara, kako bo prizor videti v naravi.

Najlepši prizori na nebu v letu 2009!

144 strani
16,5 x 23,5 cm
Cena: 17,99 EUR



Misija na Luno

- **Odkrijte, kako so astronauti prišli na Luno**
in nazaj,
- **raziščite mogočno raketo saturn V,**
s katero jim je to uspelo,
- **spoznajte načrte za gradnjo postojanke na Luni.**

Knjiga na osemdesetih straneh, polnih različnih informacij ter bogatega slikovnega gradiva, govori o razburljivem potovanju na Luno in nazaj. Zajema vse, kar bi morda radi vedeli o vesoljski tekmi, programu Apollo, raketah, vesoljskih plovilih in načrtih za povratek na Luno – našo najbližjo sosedo v vesolju.

80 barvnih strani + DVD
29 x 25,4 cm
Cena: 19,99 EUR



**Tehniška založba
Slovenije**

MODRA ŠTEVILKA

Naročila: ((**080 17 90**)) ali **www.tzs.si/eknjigarna**

OB NAKUPU OBEH KNJIG, DOBITE KNJIGO GLEJ JIH, ZVEZDE LE ZA 7,99 €!