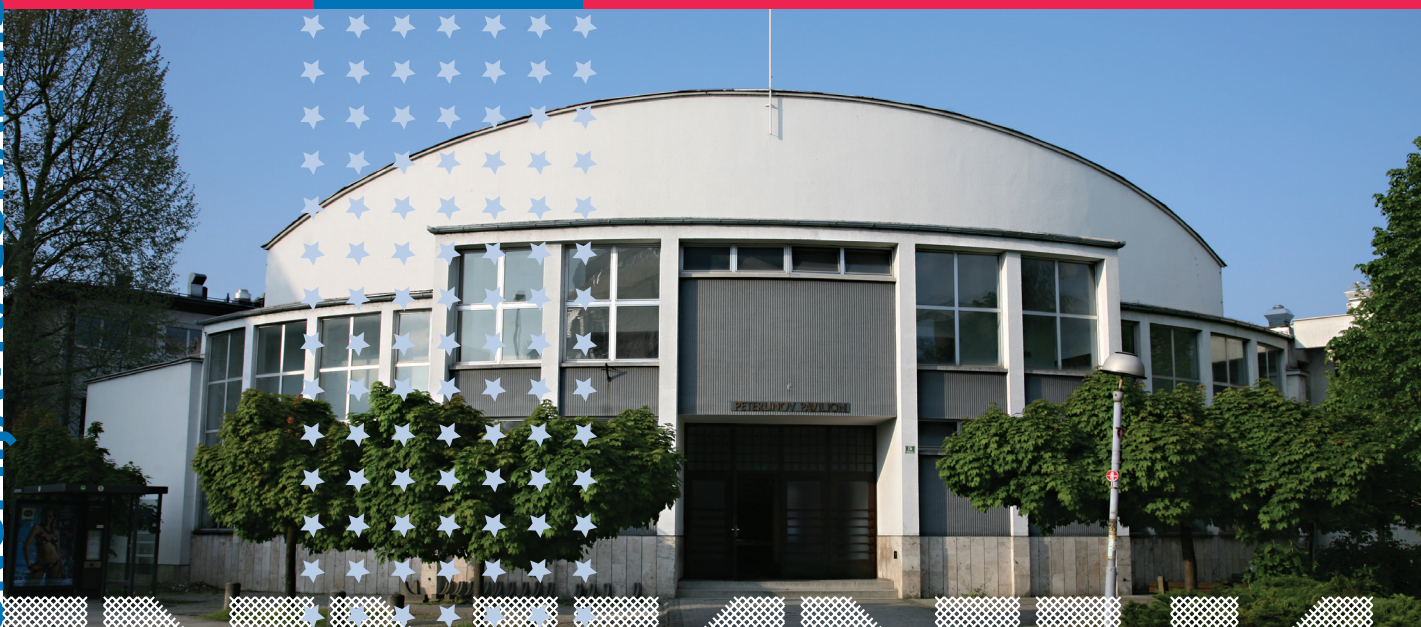




# PRESEK

- KAKO RAZPOREDITI DVOBOJE TENIŠKIH PAROV
- PITAGOROV IZREK
- RAZMISLI IN POSKUSI
- NAGRADNA KRIŽANKA



ISSN 0351-6652



# Jadrati hitreje

➔ Med jadrnalno tekmo je treba postoriti veliko dela. Toda že leta prej, preden so oglasi štartna pištola, na kopnem opravijo ogromno dela pri načrtovanju trupa in jader plovila. Večina procesa oblikovanja 20 tonskega plovila, ki se mora učinkovito gibati skozi vodo in zrak, je prepletena z matematiko, še posebej s teorijo pretoka tekočin. Dejansko je za načrtovanje sodobnih jadrnic za Pokal Amerike uporabljenih približno 40 milijonov enačb, ki zagotavljajo, da posadke jadraro na najhitrejših možnih jadrnicah.

Načrtovanje jadrnic—ki pogosto kombinira navidezno protislovne zahteve, na primer izdelati tako jadrnico, ki je hkrati lahka in trdna—je večinoma narejeno z računalniki. To je namreč bolj enostavno, kot je testiranje na vodi. Površina jadrnice je aproksimirana z manjšimi ploskvami, ki jih lahko algebraično obdelujemo med oblikovanjem. Te manjše aproksimacijske ploskve so definirane in kombinirane s funkcijami, ki jih imenujemo zleпки (narejene so iz delov polinomov). Pogosto je za mero uporabljena ukrivljenost, tako da je gladkost zagotovljena tam, kjer se ploskve povezujejo. Pri vsem tem imamo le malo prostora za napake: razlika samo enega odstotka v hitrosti se prenese v minute in to na dirkah, kjer lahko odločajo sekunde. ✖



**POJASNILO:** Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani [www.ams.org/mathmoments](http://www.ams.org/mathmoments).

## ➔ Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 36, šolsko leto 2008/2009, številka 1

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

**Dopisi in naročnine:** DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)  
**Elektronska pošta:** [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2008/2009 je za posamezne naročnike 16,69 EUR—posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASL2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

**List sofinancirata** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

**Založilo** DMFA-založništvo

**Oblikovanje in tehnično urejanje** Polona Šterk

**Ilustracija** Ines Kristan

**Tisk** Tiskarna Pleško, Ljubljana

**Naklada** 3050 izvodov

© 2008 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1716

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.



# Kazalo

## ■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Jadrati hitreje .....2

## ■ MATEMATIKA

Kako razporediti dvoboje teniških parov  
(*Sandi Klavžar*) .....4-8  
To in ono o Pitagorovem izreku  
(*Marija Vencelj*) .....9-14  
Elipsa in Cassinijev oval (*Marko Razpet*) .....14-15, 18  
Nagradna naloga – Skrita računa na vazi  
(*Marija Vencelj*) .....31

## ■ FIZIKA

Ob stoletnici rojstva profesorja Peterlina  
(*Janez Strnad*) .....19-21  
Razmisli in poskusi (*Mitja Rosina*) .....22

## ■ ASTRONOMIJA

Vloga in pomen profesorja Antona Peterlina za  
razvoj slovenske astronomije (*Marijan Prosen*  
– *Majo*) .....24-26  
Phoenix na Marsu (*Bojan Kambič*) .....26-27

## ■ RAČUNALNIŠTVO

Permutacije in kombinacije (*Katja Prnaver*) .... 27-30

## ■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) ..... 16-17  
Rešitev nagradne križanke Presek 35/6 ..... 30

## ■ TEKMOVANJA

28. tekmovanje osnovnošolcev v znanju fizike  
za Stefanova priznanja (*Saša Kožuh*)..... 23-24  
28. tekmovanje za srebrno Stefanovo priznanje .. **priloga**  
28. tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje ..... **priloga**  
7. tekmovanje v znanju matematike za dijake  
srednjih tehniških in strokovnih šol, državno  
tekmovanje ..... **priloga**

**SLIKA NA NASLOVNICI:** Peterlinov paviljon s predavalnicama, v katerih poslušajo predavanja iz fizike študentje prvih letnikov. Tisti naši bralci, ki bodo študirali matematiko, fiziko ali tehniko na Univerzi v Ljubljani, bodo lahko stavbo na Jadranski še bolje spoznali (foto Marjan Smerke).





# Kako razporediti dvoboje teniških parov

SANDI KLAVŽAR

➔ Različna ligaška športna tekmovanja zahtevajo razporeditev posameznikov ali ekip v kroge tekmovanja. Določanje takšnih razporeditev je lahko dokaj preprosto, na primer tedaj, ko sistem zahteva le to, da se vsak nasprotnik pomeri z vsakim drugim. Zopet drugi sistemi so lahko bolj zapleteni, omenimo le znameniti „švicarski sistem“ razporejanja na šahovskih turnirjih, kjer je zaradi velikega števila udeležencev neizvedljivo igranje vsakega z vsakim.

Problem, ki ga bomo opisali, je bil zastavljen v praksi, kar ponovno dokazuje, da je matematika povsod okoli nas. Seveda pa je treba imeti oko in tudi znanje o ozadju, da se tega zavedamo. Preden opišemo problem, zaradi katerega je nastal ta prispevek, najprej pogledjmo problem, ki nam bo nudil začetno oporo za naše razmišljanje.

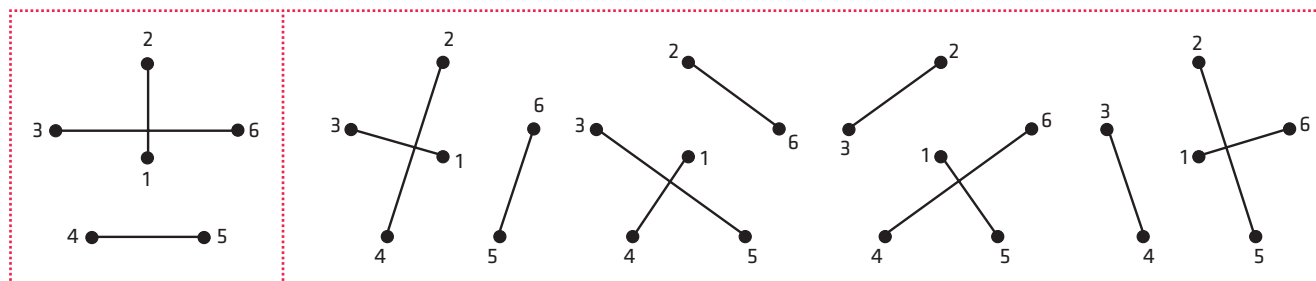
Recimo, da imamo štiri ekipe, označimo jih z 1, 2, 3 in 4, ter želimo narediti razpored za (finalni) turnir, v katerem bo vsaka ekipa igrala proti vsaki drugi ekipi, pri čemer bodo v vsakem krogu istočasno igralle vse štiri ekipe. Vsakdo bo brez težav ugotovil, da moramo izvesti šest tekem v treh krogih in da je rešitev v bistvu ena sama:

- 1. krog: 1:2 in 3:4,
- 2. krog: 1:3 in 2:4, ter
- 3. krog: 1:4 in 2:3.

Poglejmo si isti problem z ekipami 1, 2, 3, 4, 5 in 6. Jasno je, da moramo narediti načrt za pet krogov







Slika 1. Turnir šestih ekip

in da bodo v vsakem krogu odigrani trije dvoboji. Sedaj razporeditev ni več povsem očitna, zato jo konstruirajmo takole. Razporedimo ekipe 2 do 6 v krogu ter postavimo ekipo 1 v središče tega kroga. Nato izberimo dvoboje prvega kroga 1:2, 3:6 in 4:5, kar ponazorimo s črtami med ekipami, kot je prikazano na sliki 1 zgoraj. Ostale štiri kroge potem dobimo z vrtenjem začetnega kroga v pozitivni smeri: za drugi krog se par 1:2 zavrti v 1:3, par 3:6 v par 4:2 ter par 4:5 v par 5:6. Vsa vrtenja začetnega kroga so prikazana na sliki 1, dobljena razporeditev je:

- 1. krog: 1:2, 3:6 in 4:5,
- 2. krog: 1:3, 4:2 in 5:6,
- 3. krog: 1:4, 5:3 in 6:2,
- 4. krog: 1:5, 6:4 in 2:3,
- 5. krog: 1:6, 2:5 in 3:4.

V praksi mora razporeditev pogosto zadoščati različnim dodatnim pogojem. Gornja rešitev je ustrezna, če se turnir odvija na isti lokaciji, kjer so igrišča nevtralna. Pogosteje pa se tekme igrajo doma in v gosteh. V tem primeru je dodatna zahteva, da ekipa svoje tekme igra izmenoma doma in v gosteh. Naj bo *prekinitev* dogodek, ko neka ekipa v dveh zaporednih krogih gostuje ali igra doma. Idealen bi seveda bil razpored brez prekinitov. Da nas ne zanese predač, samo omenimo, da za poljubnih  $2n$  ekip obstaja turnir z  $2n - 2$  prekinitvami in da ne moremo sestaviti turnirja z manj prekinitvami. Na primer, za štiri ekipe je tak turnir

- 1. krog: 1:2 in 4:3,
- 2. krog: 3:1 in 2:4, ter
- 3. krog: 1:4 in 3:2,

kjer prva ekipa pomeni domačo ekipo. V tej razporeditvi tvori prekinitov ekipa 3, ki igra doma v drugem in tretjem krogu, ter ekipa 4, ki gostuje v 2. in 3.

krogu. Na tem mestu bralcu zastavljamo dve nalogi:

1. Sestavite razpored za šest ekip s štirimi prekinitvami.
2. V slovenski nogometni ligi je deset ekip. V prvih devetih kolih (zadnjega prvenstva) ugotovite število prekinitov. Ali je enako optimalni vrednosti 8?

Po tem uvodu se lotimo najavljenega problema. Nedavno se je pri meni oglašil teniški igralec, ki je v svojem teniškem klubu za nalogo dobil sestaviti igralni razpored, in sicer je moral razporediti šestnajst igralcev na štiri igrišča za dvoboje parov. Pri tem je imel zahtevo, da sta vsaka dva igralca partnerja natanko enkrat.

Najprej se vprašajmo, koliko krogov tekmovanja je potrebnih za tako razporeditev, če upoštevamo, da v vsakem krogu zasedajo vsa štiri igrišča. Ker mora biti vsak izmed šestnajst igralcev v paru s preostalimi petnajstimi igralci, je vseh urejenih parov  $16 \cdot 15$ . Seveda je par, ko je Luka soigralec Andreja, isti par, kot kadar je Andrej soigralec Luka. Zato je vseh različnih parov

$$\frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

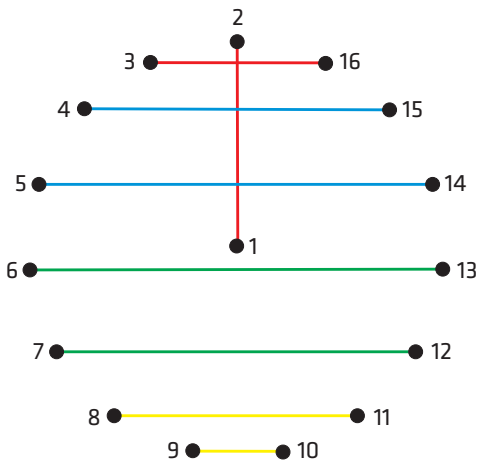
Ker se v istem času na štirih igriščih nahaja osem parov, moramo sestaviti razpored za

$$\frac{120}{8} = 15$$

krogov igranja.

Take razporeditve ni posebej težko sestaviti, če se spomnimo, kako smo določili razpored za šest ekip na sliki 1. Naj bodo torej igralci oštevilčeni od 1 do

→ 16. Najprej razporedimo igralce in izberemo pare tako, kot je prikazano na sliki 2.

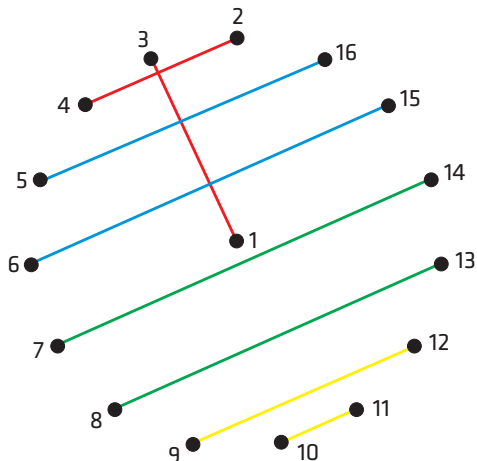


Slika 2. Izbira začetnih parov igralcev

Nato na prvo teniško igrišče razporedimo rdeča para, na drugo modra, na tretje zelena in na zadnje igrišče rumena para. Pari po igriščih za prvi krog so tako:

- $\{1, 2\} : \{3, 16\}, \{4, 15\} : \{5, 14\},$   
 $\{6, 13\} : \{7, 12\}, \{8, 11\} : \{9, 10\}.$

Sedaj na sliki 1 zavrtimo pare za eno mesto v pozitivni smeri, tako kot to prikazuje slika 3.



Slika 3. Razpored parov za drugi krog

To nam da razpored parov za drugi krog:

- $\{1, 3\} : \{4, 2\}, \{5, 16\} : \{6, 15\},$   
 $\{7, 14\} : \{8, 13\}, \{9, 12\} : \{10, 11\}.$

Vrtenje nato izvedemo še 13-krat in s tem dobimo rešitev, ki je izpisana v tabeli 1.

|          | 1. igrišče             | 2. igrišče              | 3. igrišče             | 4. igrišče              |
|----------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. krog  | $\{1,2\} : \{3,16\}$   | $\{4,15\} : \{5,14\}$   | $\{6,13\} : \{7,12\}$  | $\{8,11\} : \{9,10\}$   |
| 2. krog  | $\{1,3\} : \{4,2\}$    | $\{5,16\} : \{6,15\}$   | $\{7,14\} : \{8,13\}$  | $\{9,12\} : \{10,11\}$  |
| 3. krog  | $\{1,4\} : \{5,3\}$    | $\{6,2\} : \{7,16\}$    | $\{8,15\} : \{9,14\}$  | $\{10,13\} : \{11,12\}$ |
| 4. krog  | $\{1,5\} : \{6,4\}$    | $\{7,3\} : \{8,2\}$     | $\{9,16\} : \{10,15\}$ | $\{11,14\} : \{12,13\}$ |
| 5. krog  | $\{1,6\} : \{7,5\}$    | $\{8,4\} : \{9,3\}$     | $\{10,2\} : \{11,16\}$ | $\{12,15\} : \{13,14\}$ |
| 6. krog  | $\{1,7\} : \{8,6\}$    | $\{9,5\} : \{10,4\}$    | $\{11,3\} : \{12,2\}$  | $\{13,16\} : \{14,15\}$ |
| 7. krog  | $\{1,8\} : \{9,7\}$    | $\{10,6\} : \{11,5\}$   | $\{12,4\} : \{13,3\}$  | $\{14,2\} : \{15,16\}$  |
| 8. krog  | $\{1,9\} : \{10,8\}$   | $\{11,7\} : \{12,6\}$   | $\{13,5\} : \{14,4\}$  | $\{15,3\} : \{16,2\}$   |
| 9. krog  | $\{1,10\} : \{11,9\}$  | $\{12,8\} : \{13,7\}$   | $\{14,6\} : \{15,5\}$  | $\{16,4\} : \{2,3\}$    |
| 10. krog | $\{1,11\} : \{12,10\}$ | $\{13,9\} : \{14,8\}$   | $\{15,7\} : \{16,6\}$  | $\{2,5\} : \{3,4\}$     |
| 11. krog | $\{1,12\} : \{13,11\}$ | $\{14,10\} : \{15,9\}$  | $\{16,8\} : \{2,7\}$   | $\{3,6\} : \{4,5\}$     |
| 12. krog | $\{1,13\} : \{14,12\}$ | $\{15,11\} : \{16,10\}$ | $\{2,9\} : \{3,8\}$    | $\{4,7\} : \{5,6\}$     |
| 13. krog | $\{1,14\} : \{15,13\}$ | $\{16,12\} : \{2,11\}$  | $\{3,10\} : \{4,9\}$   | $\{5,8\} : \{6,7\}$     |
| 14. krog | $\{1,15\} : \{16,14\}$ | $\{2,13\} : \{3,12\}$   | $\{4,11\} : \{5,10\}$  | $\{6,9\} : \{7,8\}$     |
| 15. krog | $\{1,16\} : \{2,15\}$  | $\{3,14\} : \{4,13\}$   | $\{5,12\} : \{6,11\}$  | $\{7,10\} : \{8,9\}$    |

Tabela 1. Prva rešitev

Iz konstrukcije z vrtenjem sledi, da smo na igrišča razporedili vse možne pare. Kljub temu pa bo koristno, če bralec sam preveri to dejstvo tako, da v razporedu sistematično poišče vseh 120 parov od  $\{1, 2\}$  do  $\{15, 16\}$ . Med drugim bo tako opazil, da si, razen v prvem stolpcu, igralci v vsakem stolpcu sledijo v krogu, kjer seveda izpustimo prvega igralca. Na primer, v drugem stolpcu (kjer so zapisani partnerji prvega igralca) si igralci sledijo po vrsti od 2 do 16, medtem ko so igralci zadnjega stolpca 10, 11, ..., 16, 2, 3, ..., 9.

Gornja rešitev žal ni najbolj simetrična. Tako bo na primer igralec 2 kar osemkrat na drugi strani mre-



že gledal igralca 3, medtem ko bo igralec 4 njegov nasprotnik samo dvakrat. Dvoboji, v katerih si stojita nasproti igralca 2 in 3, so

- 1. krog:  $\{1, 2\} : \{3, 16\}$ ,
- 2. krog:  $\{1, 3\} : \{4, 2\}$ ,
- 4. krog:  $\{7, 3\} : \{8, 2\}$ ,
- 6. krog:  $\{11, 3\} : \{12, 2\}$ ,
- 8. krog:  $\{15, 3\} : \{16, 2\}$ ,
- 10. krog:  $\{2, 5\} : \{3, 4\}$ ,
- 12. krog:  $\{2, 9\} : \{3, 8\}$ ,
- 14. krog:  $\{2, 13\} : \{3, 12\}$ ,

dvoboja, v katerih se pomerita igralca 2 in 4, pa sta le dva:

- 9. krog:  $\{16, 4\} : \{2, 3\}$ ,
- 10. krog:  $\{2, 5\} : \{3, 4\}$ .

Celo več, igralec 2 ne bo nikoli nasprotnik igralca 5. Naš naslednji izziv je zato vprašanje, ali obstaja taka razporeditev, v kateri bo vsak igralec imel vsakega drugega igralca kot nasprotnika enako mnogokrat. (To je bila želja teniškega igralca, ki je delal razpored, zato z našo prvo rešitvijo ni bil zadovoljen.)

Vsak igralec nastopa v petnajstih parih. V vsakem dvoboju mu nasproti stojita dva igralca, zato ima skupaj trideset nasprotnikov (seveda so nekateri šteti večkratno). Zato, če obstaja taka rešitev, kot si jo želimo, mora vsak igralec imeti vsakega drugega igralca kot nasprotnika natanko dvakrat.

Taka rešitev zares obstaja. Poznane so rešitve za poljubnih  $4n$  igralcev, kjer je  $1 \leq n \leq 43$ , torej za 4, 8, 12, 16, ..., 132 igralcev. V našem primeru je  $n = 4$ . Če imamo  $4n$  igralcev, tedaj igralce razporejamo na  $n$  igrišč, narediti pa moramo razpored za  $4n - 1$  krogov. Rešitve konstruiramo podobno, kot smo naredili za prvo rešitev, le pri izbiri prvega kroga moramo imeti srečno roko. Bralca vabimo, da rešitev za štiri igralce poišče sam, rešitvi za osem igralcev in za dvanajst igralcev pa sta prikazani v tabeli 2 in v tabeli 3.

Razporeditev za prvi krog našega začetnega problema za šestnajst igralcev je:

- $\{1, 16\} : \{6, 11\}$ ,  $\{2, 3\} : \{5, 9\}$ ,  
 $\{7, 10\} : \{8, 14\}$ ,  $\{4, 12\} : \{13, 15\}$ ,

ostalih štirinajst krogov pa določimo z istim postop-

kom, kot smo to naredili za osem in dvanajst igralcev. Bralca vabimo, da sam zapiše celotni razpored; delno si ga lahko ogleda v tabeli 4.

Na tem mestu bi bila naša zgodba končana, če se v teniškem klubu ne bi nekaj zapletlo. V naslednjem obdobju bodo naši igralci brez enega igrišča in potrebno je bilo narediti razporeditev šestnajstih igralcev na samo tri igrišča. To predstavlja nov problem, saj bodo morali v vsakem krogu štirje igralci počivati. Ker pa smo matematiki, ne bomo začeli premišljevati od začetka, temveč rajši poskusimo uporabiti že znane rezultate.

|         | 1. igrišče            | 2. igrišče            |
|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1. krog | $\{1, 8\} : \{5, 6\}$ | $\{2, 4\} : \{3, 7\}$ |
| 2. krog | $\{1, 2\} : \{6, 7\}$ | $\{3, 5\} : \{4, 8\}$ |
| 3. krog | $\{1, 3\} : \{7, 8\}$ | $\{4, 6\} : \{5, 2\}$ |
| 4. krog | $\{1, 4\} : \{8, 2\}$ | $\{5, 7\} : \{6, 3\}$ |
| 5. krog | $\{1, 5\} : \{2, 3\}$ | $\{6, 8\} : \{7, 4\}$ |
| 6. krog | $\{1, 6\} : \{3, 4\}$ | $\{7, 2\} : \{8, 5\}$ |
| 7. krog | $\{1, 7\} : \{4, 5\}$ | $\{8, 3\} : \{2, 6\}$ |

Tabela 2. Enakomerna rešitev za osem igralcev

|          | 1. igrišče              | 2. igrišče              | 3. igrišče              |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. krog  | $\{1, 12\} : \{5, 6\}$  | $\{2, 11\} : \{3, 9\}$  | $\{4, 8\} : \{7, 10\}$  |
| 2. krog  | $\{1, 2\} : \{6, 7\}$   | $\{3, 12\} : \{4, 10\}$ | $\{5, 9\} : \{8, 11\}$  |
| 3. krog  | $\{1, 3\} : \{7, 8\}$   | $\{4, 2\} : \{5, 11\}$  | $\{6, 10\} : \{9, 12\}$ |
| 4. krog  | $\{1, 4\} : \{8, 9\}$   | $\{5, 3\} : \{6, 12\}$  | $\{7, 11\} : \{10, 2\}$ |
| 5. krog  | $\{1, 5\} : \{9, 10\}$  | $\{6, 4\} : \{7, 2\}$   | $\{8, 12\} : \{11, 3\}$ |
| 6. krog  | $\{1, 6\} : \{10, 11\}$ | $\{7, 5\} : \{8, 3\}$   | $\{9, 2\} : \{12, 4\}$  |
| 7. krog  | $\{1, 7\} : \{11, 12\}$ | $\{8, 6\} : \{9, 4\}$   | $\{10, 3\} : \{2, 5\}$  |
| 8. krog  | $\{1, 8\} : \{12, 2\}$  | $\{9, 7\} : \{10, 5\}$  | $\{11, 4\} : \{3, 6\}$  |
| 9. krog  | $\{1, 9\} : \{2, 3\}$   | $\{10, 8\} : \{11, 6\}$ | $\{12, 5\} : \{4, 7\}$  |
| 10. krog | $\{1, 10\} : \{3, 4\}$  | $\{11, 9\} : \{12, 7\}$ | $\{2, 6\} : \{5, 8\}$   |
| 11. krog | $\{1, 11\} : \{4, 5\}$  | $\{12, 10\} : \{2, 8\}$ | $\{3, 7\} : \{6, 9\}$   |

Tabela 3. Enakomerna rešitev za dvanajst igralcev



→ No, vse igralce smo že razporedili po parih in tudi v dvoboje. Zakaj ne bi tega uporabili! Ker imamo tri igrišča, bo sedaj namesto petnajstih krogov potrebno sestaviti razpored za dvajset krogov. Postopajmo takole. Vseh petnajst krogov rešitve za štiri igrišča pustimo enakih tudi za tri igrišča. Natančneje, na prvih treh igriščih (ki so sedaj naša edina igrišča) pustimo dvoboje od prej, dvoboje četrtega igrišča pa

dvoboje s četrtega igrišča takole:

- 16. krog: dvoboji 4. igrišča iz 1., 6. in 11. kroga;
- 17. krog: dvoboji 4. igrišča iz 2., 7. in 12. kroga;
- 18. krog: dvoboji 4. igrišča iz 3., 8. in 13. kroga;
- 19. krog: dvoboji 4. igrišča iz 4., 9. in 14. kroga;
- 20. krog: dvoboji 4. igrišča iz 5., 10. in 15. kroga;

se to na srečo ne zgodi. S tem smo dobili rešitev, ki je prikazana v tabeli 4.

Rešitev za tri igrišča smo uspeli dobiti iz tiste za štiri. Ker smo v konstrukciji slednje rešitve posebej odlikovali igralca 1, ki je vedno igral na prvem igrišču, je rešitev iz tabele 4 taka, da igralec 1 nastopa v prvih petnajstih krogih, nato pa počiva v zadnjih petih. Če želimo odpraviti še to pomanjkljivost, zadnjih pet krogov enakomerno premešamo med ostale.

|          | 1. igrišče       | 2. igrišče       | 3. igrišče       |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| 1. krog  | {1,16} : {6,11}  | {2,3} : {5,9}    | {7,10} : {8,14}  |
| 2. krog  | {1,2} : {7,12}   | {3,4} : {6,10}   | {8,11} : {9,15}  |
| 3. krog  | {1,3} : {8,13}   | {4,5} : {7,11}   | {9,12} : {10,16} |
| 4. krog  | {1,4} : {9,14}   | {5,6} : {8,12}   | {10,13} : {11,2} |
| 5. krog  | {1,5} : {10,15}  | {6,7} : {9,13}   | {11,14} : {12,3} |
| 6. krog  | {1,6} : {11,16}  | {7,8} : {10,14}  | {12,15} : {13,4} |
| 7. krog  | {1,7} : {12,2}   | {8,9} : {11,15}  | {13,16} : {14,5} |
| 8. krog  | {1,8} : {13,3}   | {9,10} : {12,16} | {14,2} : {15,6}  |
| 9. krog  | {1,9} : {14,4}   | {10,11} : {13,2} | {15,3} : {16,7}  |
| 10. krog | {1,10} : {15,5}  | {11,12} : {14,3} | {16,4} : {2,8}   |
| 11. krog | {1,11} : {16,6}  | {12,13} : {15,4} | {2,5} : {3,9}    |
| 12. krog | {1,12} : {2,7}   | {13,14} : {16,5} | {3,6} : {4,10}   |
| 13. krog | {1,13} : {3,8}   | {14,15} : {2,6}  | {4,7} : {5,11}   |
| 14. krog | {1,14} : {4,9}   | {15,16} : {3,7}  | {5,8} : {6,12}   |
| 15. krog | {1,15} : {5,10}  | {16,2} : {4,8}   | {6,9} : {7,13}   |
| 16. krog | {4,12} : {13,15} | {9,2} : {3,5}    | {14,7} : {8,10}  |
| 17. krog | {5,13} : {14,16} | {10,3} : {4,6}   | {15,8} : {9,11}  |
| 18. krog | {6, 14} : {15,2} | {11,4} : {5,7}   | {16,9} : {10,12} |
| 19. krog | {7,15} : {16,3}  | {12,5} : {6,8}   | {2,10} : {11,13} |
| 20. krog | {8,16} : {2,4}   | {13,6} : {7,9}   | {3,11} : {12,14} |

Tabela 4. Rešitev za šestnajst igralcev na treh igriščih

razporedimo v preostalih pet dodatnih krogov tekmovalja. Vendar imamo pri tem lahko težave. Prav lahko se zgodi, da bi istega igralca več kot enkrat razporedili za isti krog. Če za dodatne kroge izberemo

### NAGRADNA NALOGA

ANDREJ TARANENKO



Bralce vabimo, da s pomočjo računalniškega programa preštejejo, koliko je vseh takšnih začetnih razporeditev 16-ih igralcev na igrišča, da vedno dobimo iskano rešitev. V pomoč vam lahko služi članek Permutacije in kombinacije, ki ga najdete v tej številki Preseka. Avtorje pozivamo, da nam svoje programe pošljejo po elektronski pošti na naslov presek@dmfa.si. Med prispelimi rešitvami bomo avtorja ene od pravih rešitev nagradili z lepo knjižno nagrado. ✖



# To in ono o Pitagorovem izreku

MARIJA VENCELJ

➔ S Pitagorovim izrekom se naši učenci srečajo že v osnovni šoli. Kasneje ga kot računsko orodje uspešno uporabljajo pri različnih predmetih, ne le pri matematiki. Pogosto pride prav tudi v vsakdanjem življenju.

Vedno lahko tudi srečamo ljudi, ki so pozabili že vso matematiko, še vedno pa znajo navesti Pitagorov izrek. Verjetno je razlog za to v preprostosti njegove vsebine (slika 1).

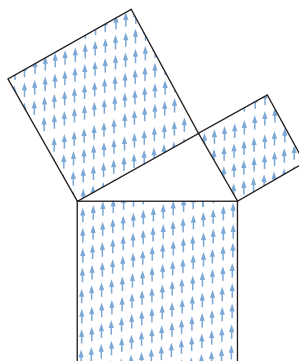
Za začetek si oglejmo skice na sliki 2 in ob njih ponovimo nekaj najosnovnejših pojmov in resnic.

## ■ Pitagorov izrek

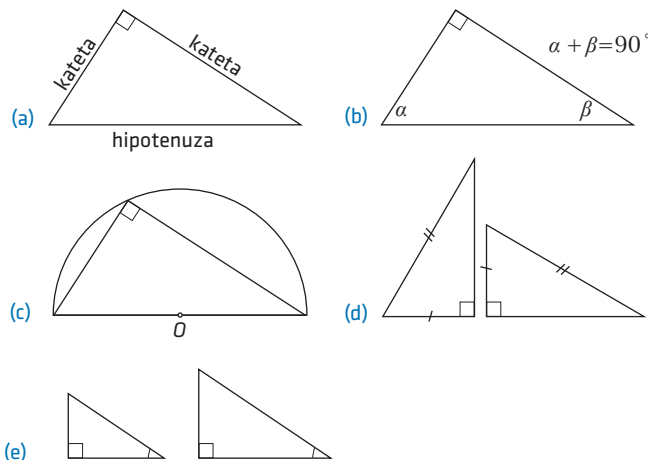
V šoli navajamo Pitagorov izrek v dveh oblikah: geometrijski in algebrski.

*Geometrijska oblika* je upodobljena na sliki 1 in se glasi:

**Ploščina kvadrata, ki ga konstruiramo nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika, je enaka vsoti ploščin kvadratov, konstruiranih nad katetama tega trikotnika.**



**Slika 1.** V začetku 20. stoletja so številni znanstveniki dopuščali možnost, da na Marsu žive inteligentna bitja. Predlaganih je bilo več načinov, kako naj bi Marsovcem dali vedeti, da je tudi na Zemlji inteligentno življenje. Tako naj bi v Sibiriji posadili široke proge dreves ali v Sahari izkopali velike jarke, pojavila se je celo ideja, da bi zažgali politi kerozin. Vse zato, da bi oblikovali velikansko geometrijsko figuro, ki bi jo prebivalci Marsa lahko opazili skozi svoje teleskope. Najprimernejša za to se je zdela figura, ki jo vidite na sliki. Predstavlja enega najslavnejših geometrijskih izrekov, Pitagorov izrek. Prepoznali naj bi ga tudi Marsovci.



**Slika 2.**

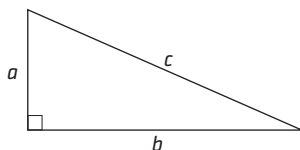
- (a) *Pravokotni trikotnik* je trikotnik, ki ima en pravi kot. Ostala dva kota sta ostra. Stranica, ki leži nasproti pravemu kotu, se imenuje *hipotenuza*, ostali dve stranici sta *kateti* pravokotnega trikotnika.
- (b) Ostra kota v pravokotnem trikotniku sta *komplementarna*, njuna vsota je  $90^\circ$ .
- (c) *Središče* pravokotnemu trikotniku *očrtane krožnice* leži v razpolovišču hipotenuze. *Hipotenuza* je *premer* pravokotnemu trikotniku *očrtane krožnice*.
- (d) Pravokotna trikotnika sta *skladna*, če se ujemata v dveh stranicah.
- (e) Pravokotna trikotnika sta *podobna*, če se ujemata v ostrem kotu.



→ Algebrska oblika sledi iz geometrijske:

Če označimo kateti pravokotnega trikotnika z  $a$  oziroma  $b$  in hipotenuzo s  $c$  kot na sliki 3, lahko izrek zapišemo v obliki:

$$\blacksquare c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

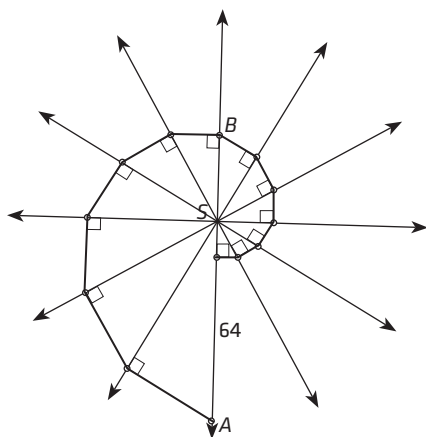


Slika 3. Algebrska oblika Pitagorovega izreka:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Pri tem se je treba zavedati, da smo v (1) s  $c$  označili hipotenuzo trikotnika, sicer lahko hitro pride do napake. Še najvarneje si je izrek zapomniti v obliki:

**V pravokotnem trikotniku je kvadrat (dolžine) hipotenuze enak vsoti kvadratov (dolžin) katet.**

Uporaba izreka je raznolika. Že v osnovni šoli lahko z njim strogo dokazujemo, izpeljemo dolžine diagonal v pravokotniku in kvadratu ter višine v enakostraničnem trikotniku. Šolski učbeniki vsebujejo številne naloge, ki jih lahko neposredno ali posredno rešimo z uporabo Pitagorovega izreka. Tu vam ponujamo le eno. Zastavljena je ob sliki 4.



Slika 4. Nekatere žuželke ne vidijo naravnost predse. Zato ne letijo v ravni smeri proti luči, ampak se ji približujejo po nekakšni spirali, podobni zavojem na polžji hišici. Gibljejo

se tako, da vidijo svetlobo vedno pod istim kotom glede na smer gibanja. Poenostavljeno pot takega gibanja kaže naša slika, na kateri puščice označujejo žarke, ki izhajajo iz sveče v točki S. Posamezni deli poti potekajo pravokotno na smer žarkov. Koti med sosednjimi narisanimi žarki so enaki  $30^\circ$ . Naj začne večča svoj poslednji ples v točki A, ki je 64 cm oddaljena od sveče. Kako daleč bo še od sveče, ko bo prvič prišla na nasprotno stran v točko B?



Grški filozof Pitagora je živel na prehodu iz 6. v 5. stoletje pred našim štetjem. Rodil se je na egejskem otoku Samosu in je bil eden najbolj znanih starogrških matematikov.

Pitagora je v grškem pristanišču Crotona na jugu Italije ustanovil filozofsko šolo, nekakšno

skrivno bratovščino, imenovano Pitagorejci. Njeni člani so svoje znanje prenašali samo ustno, prepričani, da ni nujno, da postane splošna lastnina. V njihovem delovanju je bilo tudi precej mistike. Verjeli so v reinkarnacijo in si med drugim prizadevali dokazati, da vse zakone narave urejajo odnosi med naravnimi števili.

Ko so Pitagorovo šolo razgnali in njeno akademijo porušili, se je Pitagora umaknil v Metapont, kjer je tudi umrl. Drugi njegovi člani so se razkropili na vse strani, vendarle so sami in njihovi nasledniki nadaljevali izročilo šole še kaki dve stoletji.

Zaradi omejevanja Pitagorejcev na ustno izročilo danes ne vemo natančno, katera od matematičnih odkritij so delo samega Pitagore in katera njegovih učencev. Zagotovo pa izrek, ki nosi njegovo ime, ni njegov najpomembnejši matematični rezultat. Na razvoj matematike so veliko močneje vplivala številna druga njegova dela.

## ■ Dokazi in nekaj zgodovine Pitagorovega izreka

Vsebinsko Pitagorovega izreka so zanesljivo poznali Babilonci že vsaj 1000 let pred Pitagoro. Še veliko prej pa so vedeli, da velja za posebne primere, kakršna sta npr. pravokotna trikotnika s stranicami 3, 4, 5 in 5, 12, 13. Po vsej verjetnosti pa je izrek za splošni primer prvi dokazal prav Pitagora. Legenda

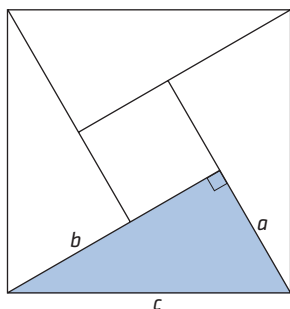


pripoveduje, da je bil odkritja tako vesel, da je bogovom daroval vola. Kakšen je bil njegov originalni dokaz, ni znano.

Obstajajo številni različni dokazi Pitagorovega izreka.<sup>1</sup> Skupaj si oglejmo dva.

**DOKAZ 1.** Ta dokaz pripada indijskemu matematiku Bhaskari, ki je živel v 12. stoletju, in temelji na sliki 5.

V osenčenem pravokotnem trikotniku smo z  $a$  označili krajšo od obeh katet, z  $b$  daljšo kateto in s  $c$  hipotenuzo. Lik na sliki je kvadrat s stranico  $c$ , ki je sestavljen iz štirih skladnih pravokotnih trikotnikov in manjšega kvadrata v sredini. Stranica manjšega kvadrata je enaka razliki trikotnikovih katet  $b - a$ .



Slika 5. Bhaskara je to sliko kot dokaz Pitagorovega izreka objavil v knjigi Vijaganita. Brez razlage, pripisal je le: „Držil“

Ploščina velikega kvadrata je torej enaka vsoti ploščine malega kvadrata in ploščin štirih skladnih pravokotnih trikotnikov s katetama  $a$  in  $b$ . Če to zapišemo

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

in poenostavimo, sledi trditev Pitagorovega izreka:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**DOKAZ 2.** V tem dokazu bomo uporabili lastnosti podobnostnih preslikav. V trikotniku  $ABC$  konstruirajmo višino  $CD$  na hipotenuzo  $c$  (slika 6). Dobimo tri med seboj podobne pravokotne trikotnike  $ABC$ ,  $ADC$  in  $DBC$  s hipotenzami  $c$ ,  $b$  in  $a$ . Količnika podobnostnih preslikav, ki preslikata trikotnik  $ABC$  v trikotnik  $ADC$  oziroma  $DBC$ , sta  $\frac{b}{c}$  in  $\frac{a}{c}$ . Za ploščine trikotnikov zato velja

$$p(ADC) = \frac{b^2}{c^2} \cdot p(ABC)$$

in

$$p(DBC) = \frac{a^2}{c^2} \cdot p(ABC).$$

Vstavimo oboje v očitno zvezo

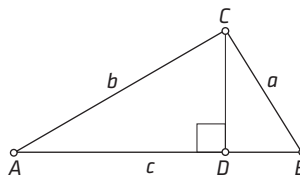
$$p(ABC) = p(ADC) + p(DBC),$$

poračunamo in dobimo

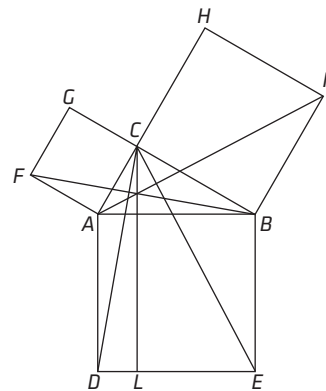
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**NALOGA.** Na sliki 7 je skicirana ideja še za en dokaz. Poskusite ga izvesti sami.

**NAMIG:** Primerjajte ploščino kvadrata nad  $AC$  s ploščinama trikotnikov  $FAB$  in  $CAD$  ter s ploščino pravokotnika z diagonalo  $AL$ . Podobno primerjajte ploščino kvadrata nad  $BC$  s ploščinama trikotnikov  $ABK$  in  $BCE$  ter s ploščino pravokotnika z diagonalo  $BL$ .



Slika 6. Ker sta ostrata v pravokotnem trikotniku komplementarna, imajo pravokotni trikotniki  $ABC$ ,  $ADC$  in  $DBC$  skladne ostre kote in so si podobni.



Slika 7. Dokaz, ki ga ponuja ta slika, velja za enega najlepših dokazov Pitagorovega izreka. Je povsem geometrijski, brez dodatnega računanja. Verjetno gre za originalni dokaz velikega grškega matematika Evklida. Najdemo ga v prvi knjigi njegovih Elementov. Narisana figura je tako slavna, da si je prislužila kar nekaj nazivov: mlin na veter, pavji rep, nevestin stol.

## ■ Obrat Pitagorovega izreka in vprašanje njegove posplošitve

Če imate vsaj malo raziskovalnega duha, ste si ob zgor-



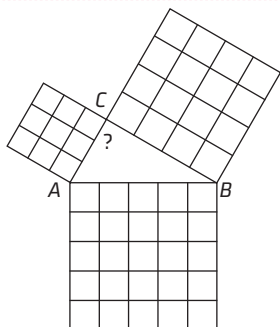
<sup>1</sup> Na internetni strani <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.html> najdemo zbranih kar 78 dokazov.



njih dokazih gotovo že zastavili naslednje vprašanje:

Ali mora biti trikotnik nujno pravokoten, da bo kvadrat ene od njegovih stranic enak vsoti kvadratov ostalih dveh?

Drugim naj do enakega vprašanja pomaga slika 8.



Slika 8. Za narisani trikotnik velja, da je kvadrat nad največjo stranico ploščinsko enak vsoti kvadratov nad manjšima stranicama, saj je  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Ali lahko od tod sklepamo, da je trikotnik  $ABC$  pravokotni trikotnik?

Odgovor na vprašanje je pozitiven:

Pravokotnost trikotnika je tudi potrební pogoj za to, da je kvadrat ene od njegovih stranic enak vsoti kvadratov ostalih dveh.

Ali tudi:

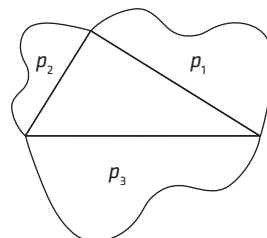
Če je kvadrat največje od trikotnikovih stranic enak vsoti kvadratov drugih dveh stranic, je trikotnik pravokoten. Pravi kot leži največji stranici nasproti.

**DOKAZ.** Naj bo  $ABC$  poljubni trikotnik s stranicami  $a, b, c$  in naj bo  $a^2 + b^2 = c^2$ . Nadalje naj bo  $A_1B_1C_1$  pravokotni trikotnik s katetama  $a_1 = a$  in  $b_1 = b$ . Iz direktnega Pitagorovega izreka sledi, da je njegova hipotenuza  $c_1 = c$ . Trikotnika se torej ujemata v vseh treh stranicah. To pomeni, da je  $ABC$  skladen s pravokotnim trikotnikom  $A_1B_1C_1$  in zato pravokoten, kar smo želeli pokazati.

Ker je enakost (1) potrebni in zadostni pogoj za pravokotnost trikotnika, kakšne bistvene posplošitve izreka v ravnini ni pričakovati. Le njegovo geometrijsko obliko lahko še kako drugače oblečemo. Namesto kvadratov lahko nad stranicami pravokotnega trikotnika vzamemo polkroge, enakostranične trikotnike ali kakšne druge med seboj podobne like. Velja:

Naj bodo  $L_1, L_2, L_3$  med seboj podobni liki, ki vsebujejo vsak po eno stranico pravokotnega trikotnika, tako da se pri ustreznih podobnostnih preslikavah likov stranice trikotnika preslikajo druga na drugo. Potem je ploščina lika, ki vsebuje hipotenuzo, enaka vsoti ploščin likov, ki vsebujeta kateti (slika 9).

O veljavnosti trditve se zlahka prepričamo po zgledu dokaza 2.



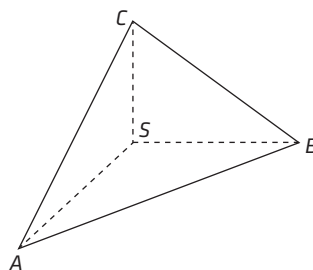
Slika 9.  $p_3 = p_1 + p_2$ . Slika prikazuje delno trditev, ko so stranice pravokotnega trikotnika deli robov podobnih likov nad njimi.

## ■ Prostorski Pitagorov izrek

Kaj pa 3-dimenzionalni prostor? Ali lahko objekte in vsebino Pitagorovega izreka zamenjamo z novimi tako, da bomo dobili veljavno posplošitev izreka v 3-dimenzionalnem prostoru?

Običajno prevzamejo pri prehodih iz ravnine v prostor vloge daljic trikotniki in vloge trikotnikov tetraedri. Zato se zdi smiselno v Pitagorovem izreku zamenjati pravokotni trikotnik s **pravokotnim tetraedrom**, ki ga definirajmo takole:

Pravokotni tetraeder je tetraeder, ki ima v enem od oglišč paroma pravokotne robove (slika 10).



Slika 10. Pravokotni tetraeder  $ABCS$  omejujejo hipotenuzni trikotnik  $ABC$  in trije katetni (pravokotni) trikotniki  $ABS, BCS$  in  $CAS$ . Ravnine katetnih trikotnikov so paroma pravokotne.

Medtem ko omejujejo pravokotni trikotnik hipotenuza in dve kateti, sestavljajo mejo pravokotnega

tetraedra štirje trikotniki. Trikotnik, ki leži nasproti oglišču, v katerem se stikajo med seboj pravokotni robovi, je najprimernejši za vlogo hipotenuzne ploskve oz. hipotenuznega trikotnika. Ostalim trem pripišemo vlogo katetnih ploskev oz. katetnih trikotnikov. Če upoštevamo še, da je mera za velikost daljic njihova dolžina, za velikost ploskev pa njihova ploščina, že lahko oblikujemo morebitni prostorski Pitagorov izrek:

**V pravokotnem tetraedru je kvadrat ploščine hipotenuznega trikotnika enak vsoti kvadratov ploščin katetnih trikotnikov.**

Takoj povejmo, da izrek velja. Sama vsebina izreka je preprosta in si jo zlahka zapomnimo, podobno kot ravninski Pitagorov izrek. Tiste bralce, ki zmorete nekaj več, pa vabim, da si skupaj ogledamo tudi njegov dokaz.

**DOKAZ.** Pri oznakah s slike 10 naj bodo  $p(ABC)$ ,  $p(ABS)$ ,  $p(BCS)$  in  $p(CAS)$  zapored ploščine trikotnikov  $ABC$ ,  $ABS$ ,  $BCS$  in  $CAS$ . Dokazati moramo pravilnost enakosti

$$[p(ABC)]^2 = [p(ABS)]^2 + [p(BCS)]^2 + [p(CAS)]^2. \quad (2)$$

Skupaj si oglejmo dokaz, v katerem bomo uporabili vektorski račun.<sup>2</sup>

Označimo z  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  vektorje na paroma pravokotnih robovih pravokotnega tetraedra kot na sliki 11. Njihove dolžine naj bodo  $a$ ,  $b$  in  $c$ .

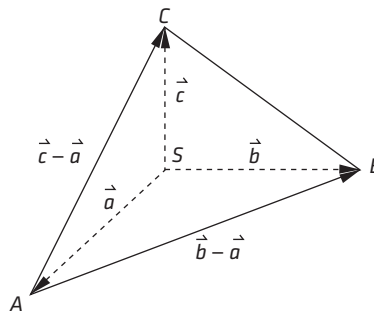
Velja:

$$[p(ABC)]^2 = \frac{1}{4} |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|^2.$$

Uporabimo posebni primer Lagrangeove identitete za skalarni kvadrat vektorskega produkta<sup>3</sup> in upoštevajmo, da je zaradi pravokotnosti vektorjev na robovih tetraedra

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0.$$

<sup>2</sup>Trditev se da dokazati tudi z uporabo višinskega, Evklidovega in Pitagorovega izreka za ravninske pravokotne trikotnike ter nekaj računanja. Poskusite sami!



**Slika 11.** Ker sta  $\vec{b} - \vec{a}$  in  $\vec{c} - \vec{a}$  vektorja na stranicah trikotnika  $ABC$ , je  $p(ABC) = \frac{1}{2} |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|$ .

Dobimo

$$\begin{aligned} [p(ABC)]^2 &= \\ &= \frac{1}{4} \{ (\vec{b} - \vec{a})^2 (\vec{c} - \vec{a})^2 - [(\vec{b} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{a})]^2 \} = \\ &= \frac{1}{4} [(b^2 + a^2)(c^2 + a^2) - a^4]. \end{aligned}$$

Dobljeni izraz še malo preoblikujemo in izrek je dokazan:

$$\begin{aligned} [p(ABC)]^2 &= \frac{1}{4} [(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2] = \\ &= \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ca}{2}\right)^2 = \\ &= [p(ABS)]^2 + [p(BCS)]^2 + [p(CAS)]^2. \end{aligned}$$

### ■ Kaj pa obrat prostorskega izreka?

Ta ali oni bralec se bo morda vprašal, kako je z obratom zgornjega izreka. Ali je za veljavnost formule (2) potrebno, da je tetraeder  $ABCS$  pravokoten s paroma pravokotnimi robovi pri oglišču  $S$ ?

No, tu analogije z ravninskim izrekom ni več. To nam pokaže naslednji protiprimer.

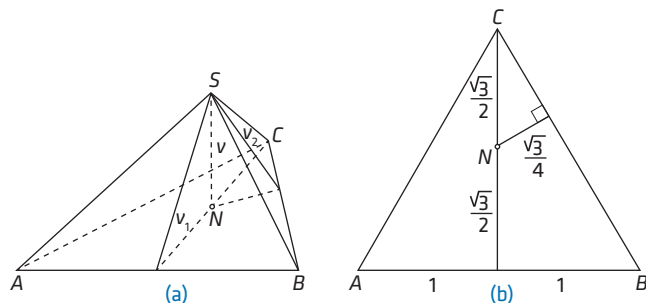
**ZGLED.** Osnovna ploskev tetraedra naj bo enakostanični trikotnik s stranico 2. Telesna višina naj bo  $\frac{1}{4}\sqrt{10}$ , njeno podnožišče pa razpolovišče ene od višin osnovne ploskve. Pri oznakah s slike 12 imamo  $v_1^2 = \frac{10}{16} + \frac{3}{4} = \frac{11}{8}$  in  $v_2^2 = \frac{10}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ . Zato je  $[p(ABC)]^2 = 3$ ,  $[p(ABS)]^2 = \frac{11}{8}$  in  $[p(BCS)]^2 = [p(CAS)]^2 = \frac{13}{16}$ , kar pomeni, da velja formula (2).

$$^3(\vec{p} \times \vec{q})^2 = \vec{p}^2 \cdot \vec{q}^2 - (\vec{p}\vec{q})^2$$



→ Pri tem pa tetraeder pri  $S$  nima paroma pravokotnih robov. Trikotnik  $ABS$  je namreč enakokrak z osnovnico 2 in višino  $\sqrt{\frac{11}{8}}$  in kot tak ni pravokoten.

Pravokotnost tetraedra torej ni potrební pogoj za veljavnost formule (2).



Slika 12. Tetraeder iz protiprimera, narisan v poševni projekciji (a), in razmere na njegovi osnovni ploskvi (b).

OPOMBA 1. Prostorski Pitagorov izrek torej ni obrnljiv. Lahko pa se vprašamo, ali iz veljavnosti formule (2) ob kakšni dodatni lastnosti tetraedra vendarle lahko sklepamo, da je tetraeder pravokoten. Brez dokaza navedimo naslednjo trditev:

**Tetraeder  $ABCS$  naj ima dva para nasprotnih robov, ki sta med seboj pravokotna, trikotnik  $ABC$  pa naj bo ostrokoten. Potem iz veljavnosti formule (2) sledi pravokotnost tetraedra  $ABCS$ .**

OPOMBA 2. Velja tudi, da je hipotenuzni trikotnik pravokotnega tetraedra vedno ostrokoten. Še več. Nad vsakim ostrokotnim trikotnikom lahko zgradimo pravokotni tetraeder, ki mu je dani trikotnik hipotenuzni.

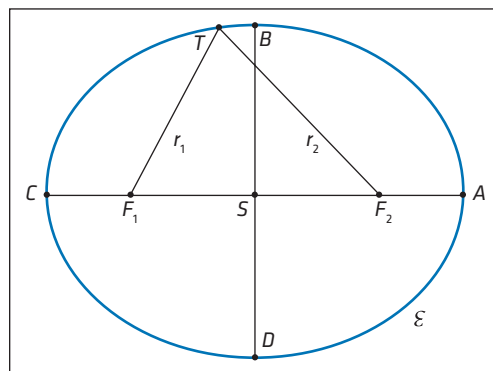
V uredništvu smo se odločili zbrati Pitagorov izrek v čim več jezikih. Bralce vabimo, da na Presekov elektronski naslov [presekov@dmfa.si](mailto:presekov@dmfa.si) pošljejo vsebino izreka zapisano v različnih jezikih, mi pa bomo zapise objavili. ☒

# Elipsa in Cassinijev oval

MARKO RAZPET

→ Elipsa je geometrijsko mesto vseh tistih točk  $T$  v ravnini, katerih vsota razdalj  $r_1 = |F_1T|$  in  $r_2 = |F_2T|$  od danih točk  $F_1$  in  $F_2$ , gorišč elipse, je stalna, denimo  $2a$ .

Za vsako točko  $T$  na elipsi velja enačba  $r_1 + r_2 = 2a$ . Razdaljama  $r_1$  in  $r_2$  pravimo radija elipse. Gorišči naj bosta narazen za  $2c = |F_1F_2|$ . Polovici te razdalje, torej  $c$ , pravimo linearna ekscentričnost elipse, razmerju  $\varepsilon = c/a$  pa numerična ekscentričnost elipse. Ker je  $c < a$ , je  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Če gorišče  $F_1$  bližamo gorišču  $F_2$ , preide elipsa v krožnico in  $\varepsilon$  v 0. Točke  $A, B, C$  in  $D$ , ki so ekstremno oddaljene od središča  $S$  elipse, so temena elipse.



Slika 1. Elipsa

Velika os elipse je dolga  $2a = |AC|$ , zato imenujemo  $a$  veliko polos elipse. Mala polos elipse je  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , tako da je njena mala os  $2b = |BD|$ . Velika in mala os elipse sta v njenem središču druga na drugo pravokotni (slika 1). Definicija elipse je primerna za računalniške programe, ki so namenjeni dinamični geometriji. Pri tej je dovolj konstruirati eno točko  $T$  iskane krivulje, ostale pa dobimo kot njeno

sled, ko neko drugo točko  $P$  vlečemo po primerni krivulji. Za to je kot zanalašč v nadaljevanju opisana konstrukcija.

Načrtamo krožnico  $\mathcal{K}$  s polmerom  $2a$  in središčem v  $F_1$ . Na krožnici izberemo točko  $P$  in konstruiramo simetralo  $s$  daljice s krajiščema  $P$  in  $F_2$ . Središče te daljice naj bo  $F_2'$ . Točka  $T$ , presečišče simetrale  $s$  in daljice s krajiščema  $F_1$  in  $P$ , je očitno točka iskane elipse  $\mathcal{E}$ , simetrala  $s$  pa tangenta na elipso v točki  $T$ . Ko točka  $P$  kroži po krožnici  $\mathcal{K}$ , točka  $T$  potuje po iskani elipsi (slika 2). Označimo kot med tangento na elipso v točki  $T$  in radijem  $r_1$  ter  $r_2$  z  $\gamma$ , kot med normalo na elipso v točki  $T$  in radijem  $r_1$  ter  $r_2$  pa z  $\gamma'$  (slika 3). Pri tem je seveda  $\gamma + \gamma' = \pi/2$ . Izkaže se namreč, da normala na elipso v katerikoli svoji točki  $T$  razpolavlja kot med radijem  $r_1$  in  $r_2$ , zaradi česar  $r_1$  in  $r_2$  oklepata s tangento enaka kota. Normala na krivuljo v točki  $T$  je premica, ki je pravokotna na tangento te krivulje v točki  $T$ .

Kot med radijema je potem  $\pi - 2\gamma$ . Po kosinusnem izreku velja

$$\begin{aligned} (2c)^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\pi - 2\gamma) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos 2\gamma \end{aligned}$$

in iz tega sledi

$$\cos 2\gamma = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \gamma &= 1 - \cos 2\gamma = 1 - \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \\ &= \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{2r_1r_2}. \end{aligned}$$

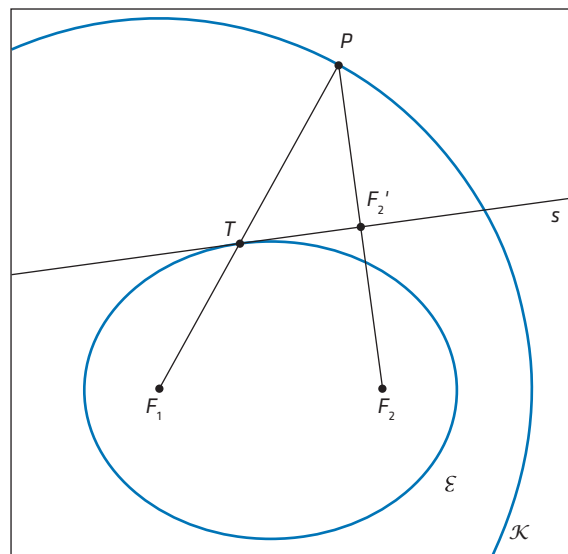
Ker je pri elipsi  $r_1 + r_2 = 2a$  in  $a^2 - b^2 = c^2$ , dobimo

$$\sin^2 \gamma = \frac{a^2 - c^2}{r_1r_2} = \frac{b^2}{r_1r_2}.$$

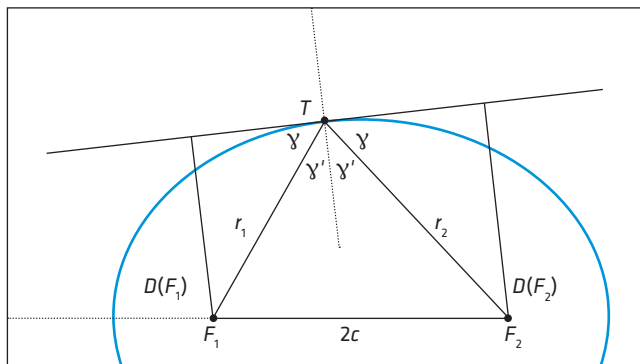
Očitno je gorišče  $F_1$  oddaljeno od tangente na elipso v točki  $T$  za  $D(F_1) = r_1 \sin \gamma$ , gorišče  $F_2$  pa za  $D(F_2) = r_2 \sin \gamma$ . Produkt teh dveh razdalj pa je konstanten, neodvisen od točke  $T$  na elipsi, saj je

$$D(F_1)D(F_2) = r_1r_2 \sin^2 \gamma = b^2.$$

*Cassinijev oval* je po definiciji geometrijsko mesto vseh tistih točk  $T$  v ravnini, katerih **produkt** razdalj



Slika 2. Konstrukcija točk elipse



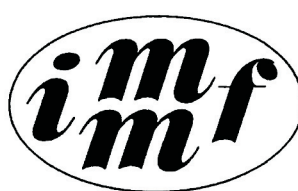
Slika 3. Tangenta in normala elipse

$r_1 = |F_1T|$  in  $r_2 = |F_2T|$  od danih točk  $F_1$  in  $F_2$ , gorišče ovala, je stalen, denimo  $b^2$ . Za vsako točko  $T$  Cassinijevega ovala velja torej enačba  $r_1r_2 = b^2$ . Opisano lastnost elipse lahko izkoristimo za konstrukcijo točk  $T$  Cassinijevega ovala, ki je torej določen z izbranimi goriščema  $F_1$  in  $F_2$ , ki sta med seboj oddaljeni za  $2c$ , in s pozitivno konstanto  $b$ . Če elipso z danima  $b$  in  $c$  že imamo, seveda konstruiramo  $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ . Katerokoli točko  $Q$  elipse pri znanih  $a$  in  $c$  pa že znamo najti po prej opisani konstrukciji. Tangenta  $s$  na elipso v točki  $Q$  razpolavlja kot med enim radijem in premico nosilko drugega radija (slika 4). Razdalj  $D(F_1) = |F_1F_1'|$  in  $D(F_2) = |F_2F_2'|$  ni

# Nagradna križanka

[illegible]



|                                                                                   |    |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-----------------|--|
|  |    | GLAVNO MESTO GRUZIJE                              | IME VEČ SLOVENSKIH VASI | RIVAL                                  | FIZIK KUŠČER                               | ENAKI ČRKI                          | TOLČENJE S KLJUNOM                                 | PEVEC SMOLAR                            |  |                                          |  |    |                 |  |
| DESETINA DESETINKE                                                                |    |                                                   |                         |                                        | 19                                         |                                     |                                                    |                                         | PRITOK VOLGE                                                                      | ANICA, ANČKA                             |                                                                                     |    |                 |  |
| KOLIČINA PREJETEGA SEVANJA NA ENOTO MASE                                          | 1  |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| HITROSTNA TEKMA                                                                   |    |                                                   |                         |                                        |                                            | POČIT-NIŠKA HIŠICA PREPROST KOTOMER |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| OTOK V SEV. DELU EGEJSKEGA MORJA                                                  |    |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     | 5                                                  | ROMAN PAULA COELHA LUŠKA NAPRAVA        |                                                                                   |                                          | 9                                                                                   |    |                 |  |
| FRANC. IGRALKA ANG. RODU (JANE)                                                   |    |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| UMIVALNIK ZA SPODNJI DEL TRUPA NAROPANO BLAGO                                     |    |                                                   |                         |                                        | NAŠA REDKA STRUPENA KAČA                   |                                     |                                                    |                                         | HOKEJIST JAGR PRITOK DONAVE IZ BANATA                                             |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|                                                                                   |    |                                                   |                         |                                        | SEKUNDA, KILOGRAM, METER ORGAN VIDA        |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   | ETERIČNA SMOLA TROPSKIH DREVES           | 23                                                                                  |    |                 |  |
| 13                                                                                |    |                                                   |                         | SREDOZEM. DREVO GLAVNO MESTO JORDANIJE |                                            |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   | SKRAJNI DEL NAJBOLJŠI KOVINSKI PREVODNIK |                                                                                     | 18 |                 |  |
|                                                                                   |    | ZAPRT PROSTOR V POTNIŠKEM VAGONU                  | MOZOLJI                 | 22                                     |                                            |                                     |                                                    | OBJEKT NAD VODO OROŽJE IZ VEGOVIH ČASOV | 16                                                                                |                                          | OSEBA ALI REČ, KI JE NE IMENUJEMO, ONEGA                                            |    |                 |  |
|                                                                                   |    | NEKD. KEN. VODITELJ (DANIEL A.) ROPOTIJA, NAVLAKA |                         |                                        |                                            |                                     | PREDPONA ZA 10 <sup>5</sup> NEMŠKI SLIKAR (KONRAD) |                                         |                                                                                   |                                          | TONI PAVČEK                                                                         |    |                 |  |
| PEVKA DERENDA                                                                     |    |                                                   |                         |                                        | SAMOSTAN (LJUDSKO) KROG HOJE OKOLI OBJEKTA |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          | NEMŠKA BALETNA PLESALKA (BIRGIT)                                                    |    |                 |  |
| POLJE-DELEC                                                                       |    |                                                   |                         |                                        |                                            | ANTON ŽABKAR                        |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          | ENAKOMEREN TEK KONJA KRAVJA ANTILOPA                                                |    |                 |  |
| RAZSTAVNA PLOŠČA                                                                  |    |                                                   |                         |                                        |                                            | SIMBOL ZA RADJO                     |                                                    |                                         | ANJA BUKOVEC                                                                      |                                          | ZDRIZASTA SNOV, ŽELATINA HOKEJSKI KLUB                                              | 30 | POVRŠINSKA MERA |  |
| ČELJUSTNA SPONA                                                                   |    |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|                                                                                   |    |                                                   |                         | IGLIČAST GRM HRVAŠKI LITERAT (AVGUST)  |                                            |                                     | 21                                                 | ROJ. KRAJ MOŽA NA SLIKI ŠTEVILKA 2      | 17                                                                                |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| 28                                                                                |    | GLAVNO MESTO TURKMENISTANA SLOJ                   |                         | 26                                     |                                            |                                     |                                                    |                                         | SISTEM LEČ OPTIČ. NAPRAVE BLIŽJE OČESU                                            |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|                                                                                   |    |                                                   | EHUD OLMERT             |                                        |                                            | MAJHEN RT                           | RUDI VAVPOTIČ POUDARJENI ZLOG STOPICE              |                                         | SHAKESPEAROV JUNAK, KRALJ                                                         |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|                                                                                   |    | ODOPADNI PRODUKT V PLAVŽU ZVOK PRI EKSPLOZIJU     |                         |                                        |                                            |                                     |                                                    | PIVO STARIH SLOVANOV AFRISKI VELETOK    |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| IT. MATEMATIK (GIUSEPPE)                                                          | 15 |                                                   |                         |                                        | BODIČASTO GRMIČJE ITAL. DRAMATIK (DARIO)   |                                     | 24                                                 |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
| TOLE                                                                              |    |                                                   |                         |                                        |                                            |                                     | 25                                                 |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |
|                                                                                   |    |                                                   |                         |                                        | FANT, KI NOSI OČALA                        |                                     |                                                    |                                         |                                                                                   |                                          |                                                                                     |    |                 |  |

## NAGRADNI RAZPIŠE

➔ Črke iz označenih polj po vrsti in po preseku tvorijo besedilo. Če želite prejeti Presekov paket, pošljite na Presekov naslov svoja rešenja (svoje ime, priimek in naslov) skupaj s preloženimi rešenji (svoje ime, priimek in naslov) do 3. oktobra 2023. Bodo izbrani tri nagradjenci, ki bodo prejeli Presekov paket. ✖

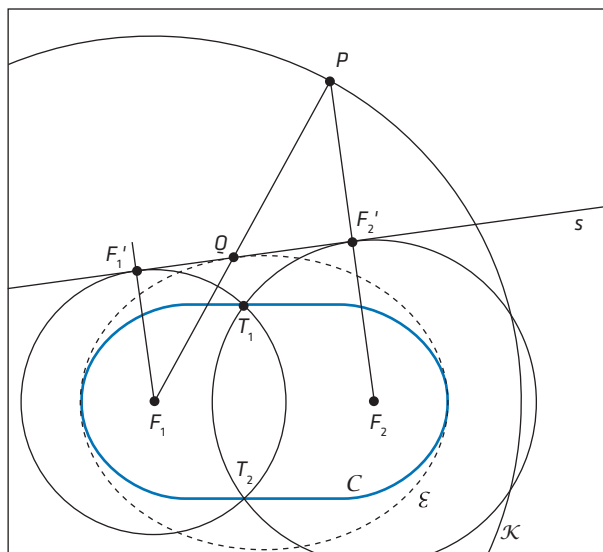
## NAGRADNI RAZPIS

Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **3. oktobra 2008**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov paket**. ✕

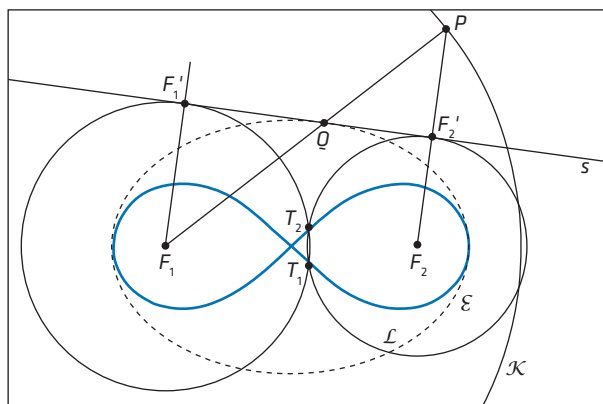


15

nadaljevanje  
s strani



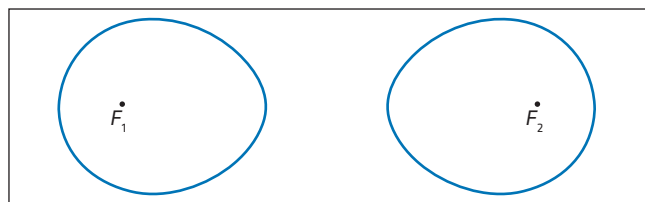
Slika 4. Cassinijev oval



Slika 5. Lemniskata

težko konstruirati. Načrtamo krožnici s središčema v  $F_1$  in  $F_2$  z ustreznima polmeroma  $D(F_1)$  in  $D(F_2)$ , pa sta njuni presečišči  $T_1$  in  $T_2$  že točki Cassinijevega ovala  $C$ .

Opisana konstrukcija je prav tako kot v primeru elipse primerna za računalniške programe, ki so namenjeni dinamični geometriji. Pri tej je dovolj konstruirati eno točko iskane krivulje, ostale pa dobimo kot sled. Oblika Cassinijevega ovala je odvisna od razmerja  $b/c$ . V primeru  $b = c$ , ko je  $a = c\sqrt{2}$ , dobimo Bernoullijevo lemniskato  $\mathcal{L}$ . Slika 5 kaže konstrukcijo njenih točk  $T_1$  in  $T_2$ . Slika zaradi enostav-



Slika 6. Dvodelni Cassinijev oval

nosti ne kaže, kako poskrbimo za to, da sta  $a$  in  $c$  v pravem razmerju. V primeru  $b \geq c$  je Cassinijev oval enodelna krivulja, v primeru  $b < c$  pa dvodelna, sestavljena iz dveh manjših ovalov (slika 6), ki obkrožata vsak svoje gorišče. Zaradi preglednosti na sliki ni celotne konstrukcije. Dinamična geometrija nam omogoča spreminjati gorišči  $F_1$  in  $F_2$  in opazovati, kakšne ovale dobimo.

Cassinijevi ovali so dobili ime po astronomu Giovanniju Domenicu Cassiniju (1625–1712), ki je menil, da so tiri planetov njegovi ovali, ne pa elipse. Po njem so poimenovali tudi vesoljsko sondo, ki nam je pred leti posredovala čudovite posnetke Saturna in njegovih prstanov. ☒



# Ob stoletnici rojstva profesorja Peterlina



**Slika 1.** Doprsni kip profesorja Antona Peterlina pred Institutom „Jožef Stefan“ (foto Marjan Smerke).

JANEZ STRNAD

➔ Jeseni bomo počastili spomin slovenskega fizika Antona Peterlina. Spomnili se ga bodo Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko ter Institut „Jožef Stefan“. Prav je, da obletnico omenimo v Preseku. Veliko vaših učiteljev matematike in fizike, dragi bralci in bralke Preseka, je namreč učil profesor Peterlin ali njegovi učenci.

Anton Peterlin je bil rojen 25. septembra 1908 v Ljubljani. Oče je bil gimnazijski profesor matematike in fizike, mati učiteljica. Po štiriletni osnovni šoli je vstopil v osemletno gimnazijo in jo končal leta 1926. Na ljubljanski univerzi je začel študirati strojništvo, vendar se je na povabilo profesorja matematike Richarda Zupančiča prepisal na matematiko. Tudi pozneje je profesor Zupančič spodbujal Peterlinov strokovni razvoj. Po treh letih, leta 1930, je študij končal z diplomom iz matematike in fizike. Že med študijem je bil pomožni asistent in s tem delom je nadaljeval dve leti po diplomi. Poučeval je najprej na eni in nato na drugi srednji šoli. Leta 1935 je opravil državni izpit in dve leti zatem postal asistent na Tehniški fakulteti. V šolskem letu 1936/37 je prvič predaval fiziko. Po dveletnem delu pri profesorju Herbertu A. Stuartu na univerzi v Berlinu je leta 1939 opravil doktorat iz fizike z najvišjo oceno. Po povratku v Lju-

bljano so ga izvolili za docenta za fiziko. Po vojni je leta 1945 postal izredni profesor za fiziko in leto zatem redni profesor. Leta 1946 je bil izvoljen za dopisnega in tri leta zatem za rednega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Postal je upravnik njenega Fizikalnega inštituta, ki je leta 1952 dobil ime po Jožefu Stefanu in leto zatem novo stavbo. Inštitut je vodil do leta 1955 kot upravnik in potem do leta 1958 kot predsednik znanstvenega sveta.

Leta 1960 je odšel v tujino. Med razlogi za odhod navajajo med drugim nesoglasja s člani inštituta, rovarjenje nasprotnikov in stališče oblasti, da naj se inštitut osredotoči na načrte za gradnjo jedrskega reaktorja. Leto dni je bil profesor na Tehniški visoki šoli v Münchnu in je vodil njen fizikalni inštitut. Potem je odšel v Združene države Amerike. V letih od 1961 do 1973 je vodil laboratorij Camille Dreyfus za velemolekule in polimere v novo ustanovljenem





Trikotniškem raziskovalnem inštitutu v Durhamu.<sup>1</sup> Ob tem je bil profesor na bližnji univerzi Duke. Nato je do leta 1975 delal v Državnem uradu za standarde v Washingtonu ter bil gostujoči profesor na Caseovi univerzi<sup>2</sup> v Clevelandu in pomočnik predstojnika oddelka za polimere Državnega urada. Profesor Peterlin se je upokojil leta 1983 in se leta 1992 vrnil v Ljubljano. Tu je 24. marca 1993 umrl.

Profesor Peterlin je sprva z rentgensko svetlobo raziskoval tekočine. V doktorskem delu je obravnaval viskoznost razredčenih raztopin. Od viskoznosti je odvisno, kako se tekočinske plasti druga proti drugi gibljejo kot rezili škarij. S tem pojasnimo upor pri gibanju telesa po tekočini in pri pretakanju po ceveh. Raziskoval je tudi viskoznost tekočin in vpliv tekočin na svetlobo. Predvsem ga je zanimal dvojni lom. Ta pojav je sicer značilen za nekatere kristale, ki v vseh smereh nimajo enakih lastnosti. V takih kristalih potuje linearno polarizirana svetloba z dvema različnima hitrostima, odvisno od tega, kakšno smer ima v njej električno polje. Pojav so najprej opazili pri kristalih islandskega dvolomca, obliki apnenca, skozi katerega vidimo predmete dvojno. Mirujoča tekočina ima v vseh smereh enake lastnosti. Zaradi zunanjega vpliva pa se v določeni smeri njene lastnosti spremenijo in se pojavi *umetni dvojni lom*. To je lahko smer gibanja, električnega polja, magnetnega polja, zvoka. V toku se večina podolgovatih molekul postavi v smer toka, zato ima raztopina v smeri toka drugačne lastnosti kot v pravokotni smeri. Pri tem *strujnem dvojnem lomu* ali pri drugih vrstah umetnega dvojnega loma je mogoče raziskovati lastnosti molekul. Pojav ni tako izrazit kot v kristalih in je treba uporabiti posebne merilne načine. S Stuartom je pred drugo svetovno vojno pripravil rokopis za knjigo *Dvojni lom, posebno umetni dvojni lom*, a knjiga je izšla šele med vojno, leta 1943, v Leipzigu.

<sup>1</sup>Camille in Henri Dreyfus sta bila brata iz Basla, ki sta v Švici, Angliji in Ameriki zgradila tovarne acetatne celuloze, „umetne svile“. Trikotniški raziskovalni inštitut je neprofitna raziskovalna ustanova med tremi univerzami ameriške zvezne države Severna Karolina.

<sup>2</sup>To je zasebna univerza s polnim naslovom Case Western Reserve University, ki nosi ime po človekoljubu Leonardu Caseu mlajšemu.

Profesor Peterlin je omenil, da je v glavnem sam napisal knjigo in da se bo v prihodnje tovrstnemu delu poskusil izogniti.

Po vojni je za nekaj časa pozornost usmeril v fiziko jedrskih reaktorjev, v katerih se cepijo jedra lahkega izotopa urana in vzdržuje verižna reakcija. Toploto, ki se sprosti ob cepitvi, je mogoče izkoristiti da poganja turbine v elektrarnah. V Združenih državah se je najprej še ukvarjal s tekočinami. S sodelavci se je zanimal za dolge molekule v raztopini in raziskoval strujni dvojni lom. Pozneje se je lotil polimerov, trdnih snovi z zelo dolgimi molekulami, ki jih sestavlja veliko število enakih členkov; taki členki sestavljajo na primer molekule polietilena in polipropilena. Veliko poskusov so naredili s polietilenom in polipropilenom zaradi preproste zgradbe ter s poliamidi, h katerim sodi tudi najlon. Peterlin je razvil model za zgradbo teh polimerov, ki je omogočil tudi napoved njihovih lastnosti. Te polimere sestavljajo kristalni deli, v katerih so dolge molekule urejeno razporejene po prostoru, in nekristalni deli, v katerih ni te urejenosti. Pred natezanjem sestavljajo kristalne dele skladi lističev – lamel. Pri rahlem natezanju pride do plastične deformacije, ne da bi se lističi znatno preoblikovali. Med plastično deformacijo snov teče podobno kot tekočina, na primer med. Ob nadaljnjem natezanju se lističi v skladih porušijo in preoblikujejo v vlakna s premerom okoli sto milijonin milimetra, ki jih sestavljajo do desetkrat ožja vlaknca, *mikrofibrili*. Pri še močnejšem natezanju mikrofibrili polzijo drug ob drugem.<sup>3</sup> Od večjega števila modelov je Peterlinov najbolj vsestranski. Čeprav izvira iz leta 1971 – leta 1987 ga je opisal pregledni članek – je še v veljavi. Imajo ga za najpomembnejši Peterlinov dosežek.

V kratkem sestavku ni mogoče podrobneje opisati vseh drugih dosežkov profesorja Peterlina, objavljenih v skoraj štiristo raziskovalnih člankih. Omeniti

<sup>3</sup>Za mikrofibrile je značilno, da imajo do tisočkrat večjo dolžino od širine in da se lastnosti v vzdolžni smeri močno razlikujejo od lastnosti v prečni smeri. Molekule v mikrofibrilu povezujejo močne kemijske sile, kakršne delujejo med atomoma v molekuli vodika ali kisika, sosednja mikrofibrila pa vmesne molekule s precej šibkejšimi silami, kakršne delujejo med molekulami v plinu.

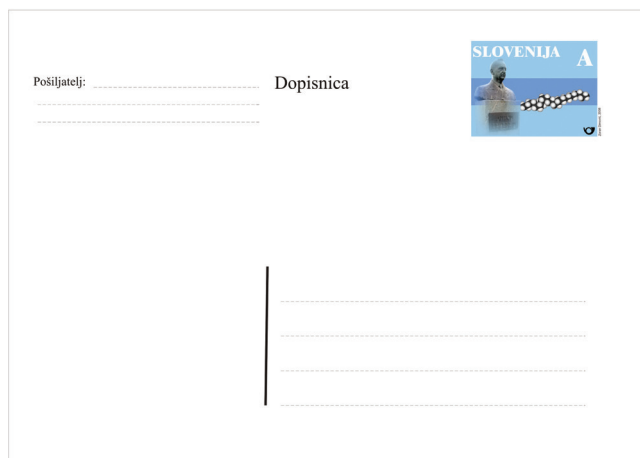
pa je potrebno njegovo *Fiziko*, prvi slovenski visokošolski učbenik fizike, ki je leta 1940 izšel v obliki skript. Z njo je predvsem poskusil pomagati študentom, da „bi vedeli, kaj so lahko pri izpitu vprašani“. Tedaj je zadostovalo, da so razmnožili dvakrat po 70 izvodov. Povojnih načrtov o tiskani knjigi tudi zaradi pomanjkanja časa profesor Peterlin ni uresničil.

Fiziko in astronomijo je poskusil približati širšemu krogu ljudi v kakih stodvajsetih poljudnoznanstvenih člankih. Med letoma 1935 in 1937 je bil sourednik revije *Tehnika in gospodarstvo* in med letoma 1945 in 1947 urednik *Proteusa*. Leta 1946 je objavil v Proteusovi knjižnici knjigo *Atomska energija*. Tedaj je bilo poljudnoznanstvenih del iz fizike in astronomije v slovenščini zelo malo, zanimanje zanje pa veliko.

Peterlinovo raziskovalno delo, posebno raziskovanje velikih molekul in polimerov, je poželo priznanja po vsem svetu. Podelili so mu več častnih naslovov in sprejeli v več znanstvenih združenj. Bil je častni doktor univerze v Ljubljani in univerze v Mainzu, častni član Instituta „Jožef Stefan“, častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter član ameriških in nemških strokovnih društev. Leta 1955 je dobil Prešernovo nagrado in leta 1983 Kidričevo nagrado za življenjsko delo, dobil je tudi dve ameriški nagradi. Bil je urednik ali član uredniškega odbora številnih mednarodnih raziskovalnih revij.

Anton Peterlin je bil prvi slovenski učitelj na univerzi v Ljubljani, ki je raziskovalno delal v fiziki in je vzpostavil mednarodne zveze. Že tedaj je zastopal danes splošno sprejeto stališče, da veljajo pri ocenjevanju raziskovanja v fiziki pravila, ki jih priznavajo po svetu. Ima velike zasluge za razvoj Instituta „Jožef Stefan“.

V času splošnega pomanjkanja opreme je s sodelavci sestavil zbirko demonstracijskih poskusov in zasnoval laboratorij za študente. Tedaj se je že uveljavilo spoznanje, da naj uvodna predavanja fizike spremljajo poskusi. Veliko je naredil za razvoj slovenske fizikalne šole. Pozneje so izšli učbeniki fizike na fakultetah za gradbeništvo in geodezijo, za matematiko in fiziko, za elektrotehniko ter za strojništvo. Ni mogoče spregledati, da so zrasli iz kulture poučevanja fizike, ki jo v dobršni meri zasnoval prav profesor Peterlin. Stavba s predavalnicama, v katerih danes poslušajo predavanja študentje teh in nekaterih drugih fakultet, po pravici nosi ime *Peterlinov paviljon*.



**Slika 2.** Ob stoletnici rojstva profesorja Peterlina bo Pošta Slovenije v septembru 2008 izdala razglednično dopisnico.

Profesor Anton Peterlin je s svojim delom ustvaril temelj za široko zasnovano raziskovalno delo v fiziki in bodočim rodovom fizikov omogočil, da so se lahko vključili v mednarodno raziskovanje. ✕

# Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA



**29. Gugalnica.** Zakaj pri guganju na gugalnici v smeri naprej noge stegneš, v smeri nazaj jih pa skrčiš? Ta „poskus“ si napravil že mnogokrat kot otrok. Ponovi ga še enkrat, da boš lažje razmislil, zakaj ta postopek deluje. Katere so sile in kakšno je delo pri stegovanju in krčenju nog?

**Odgovor na vprašanje iz 6. številke lanskega Preseka**

**28. Ali lahko skuhaš čaj na sveči v papirnatem kozarcu?**

**ODGOVOR. DA.** V papirnat kozarček sem nalil šilce (3 cl) vode in vrgel nekaj lističev hibiskusa. Kozarec sem držal tik nad plamenom sveče, da se niso nabirale saje. Ko je voda skoraj zavrela, je bil napitek pripravljen.

**RAZLAGA.** Toplotni tok prevzame voda. Gostoto toplotnega toka skozi papir  $j = Q/St$  ocenimo iz toplote, ki je potrebna, da voda zavre

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad Q &= mc_p / (T_2 - T_1) = \\ &= 30 \text{ g} \times 4200 \text{ J/kgK} \times (100^\circ \text{C} - 20^\circ \text{C}) \approx \\ &\approx 10000 \text{ J.} \end{aligned}$$

Izpostavljena ploskev kozarca je bila približno  $S \approx 5 \text{ cm}^2$ , čas do vrenja pa  $t \approx 100 \text{ s}$ . Iz gostote toplotnega toka

$$\blacksquare \quad j \approx \frac{10000 \text{ J}}{5 \text{ cm}^2 \times 100 \text{ s}} = 2 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

ocenimo temperaturno razliko med toplo in hladno stranjo papirja:

$$\blacksquare \quad \Delta T = jd/\lambda \approx 30^\circ \text{C}.$$

Upoštevali smo toplotno prevodnost papirja  $\lambda \approx 0,6 \text{ W/mK}$  ter debelino papirja  $d = 0,1 \text{ mm}$ . Tudi če smo se pri oceni zmotili za faktor 2 ali 3, je temperaturna razlika očitno dovolj majhna, da papir ne zgore.

Pri razlagi smo upoštevali le temperaturno razliko med obema stranema papirja. Glavnino temperaturne razlike prevzame plast plinov med plamenom in papirjem, saj je plamen zelo vroč. Plamen sveče poganja tok plinov, ki tako rekoč „pihajo“ po papirju in mu omogočijo, da shaja z majhnim toplotnim tokom in potemtaka z majhno temperaturno razliko. Če bi podkurili z acetilenskim gorilnikom ali če bi dali papirnati kozarec na razbeljeno keramično ploščo, bi bil toplotni kontakt s toplo stranjo papirja predober in bi papir zgorel. ☒

## Čestitka

☛ Letošnje *Mednarodne fizikalne olimpijade*, ki je v juliju potekala v Vietnamu, se je udeležilo pet slovenskih srednješolcev. Prav vsi naši tekmovalci so se letos dobro odrezali. **MATJAŽ PAYRITS** (Gimnazija Bežigrad, Mednarodna šola, Ljubljana) je osvojil **srebrno medaljo**, **MIHA ČANČULA** (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), **DAVID KRALJIČ** (Gimnazija Bežigrad, Mednarodna šola, Ljubljana) in **JURE SENČAR** (Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer) so osvojili **bronaste medalje**, **ALEŠ SRNA** (Gimnazija Kranj) pa **pohvalo**.

*Mednarodne matematične olimpijade*, ki je v juliju potekala v Španiji se je udeležilo šest slovenskih srednješolcev. **PRIMOŽ PUŠNIK** (ŠC Celje - Gimnazija Lava) in **JURE VOGRINC** (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) sta osvojila **bronasti medalji**, **ALJAŽ ZALAR** (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) pa **pohvalo**.

**Obema slovenskima ekipama čestitamo za dosežene rezultate.** ☒

# 28. tekmovanje osnovnošolcev v znanju fizike za Stefanova priznanja

SAŠA KOŽUH

➔ *Oddelek za fiziko in tehniko Pedagoške fakultete v Ljubljani, Oddelek za fiziko Fakultete za naravoslovje in matematiko v Mariboru, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Zavod RS za šolstvo* so bili organizatorji 28. tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih obeh fakultet se je 12. maja 2008 preizkušalo 265 učencev. Tekmovalci so reševali štiri naloge izbirnega tipa, dve teoretični in dve eksperimentalni nalogi. Naloge za področna tekmovanja in državno tekmovanje so pripravili Nada Razpet, Marja Šteblaj, Katarina Susman, Jerneja Pavlin, Vesna Harej, Tatjana Gulič, Lucija Željko, Daniel Divjak, Samo Lipovnik, Jelka Sakelšek in Saša Kožuh. Pri organizaciji je sodeloval še Saša Kožuh, za računalniško podporo tekmovanja je skrbel Matjaž Željko, levji del urejanja nalog pa je prav tako prevzel Saša Kožuh.

Na državnem tekmovanju sta v kategoriji 8. razredov prvo nagrado osvojila dva tekmovalca, drugo nagrado prav tako dva tekmovalca in tretjo nagrado trije tekmovalci. Zlato Stefanovo priznanje je osvojilo 105 tekmovalcev. V kategoriji 9. razredov sta prvo nagrado osvojila dva tekmovalca, drugo nagrado trije tekmovalci in tretjo nagrado prav tako trije tekmovalci. Zlato Stefanovo priznanje je osvojilo 100 tekmovalcev.

## 1. NAGRADA

### ■ 8. razred

- MATIJA SKALA, OŠ Belokranjskega odreda, Semič
- BLAŽ KURENT, OŠ Milana Šuštaršiča, Ljubljana

### ■ 9. razred

- MAKS KOLMAN, OŠ Kolezija, Ljubljana
- MATJAŽ LEONARDIS, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana

## 2. NAGRADA

### ■ 8. razred

- ŽIGA ROZMAN, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
- MICHEL ADAMIČ, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana

### ■ 9. razred

- ROK KAUFMAN, OŠ Koseze, Ljubljana
- DOMEN KAMPJUT, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana
- VENO MRAMOR, OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika

## 3. NAGRADA

### ■ 8. razred

- NEJC ČEPLAK, OŠ Kamnica
- JERNEJ ČERNIGOJ, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina
- MARTINA PETRIČ, OŠ Kolezija, Ljubljana

### ■ 9. razred

- ALLEN BUHANEC, OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana
- MATIC ČEŠAREK, OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica
- ŽIGA GOSAR, OŠ Oskar Kovačič, Ljubljana

Podrobnejše rezultate si lahko ogledate na spletni strani [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si).

Pred državnim tekmovanjem so bila 27. marca področna tekmovanja v trinajstih mestih. Skupaj je tekmoval 901 učenec v 8. razredu in 932 učencev v 9. razredu oziroma 1833 učencev. Skupaj je bilo podeljenih 1495 srebrnih Stefanovih priznanj. Te-





→ kmovalci so na področnih tekmovanjih reševali pet nalog izbirnega tipa in tri računske naloge.

4. marca so bila organizirana šolska tekmovanja, na katerih je sodelovalo preko 9.800 učencev, podeljenih je bilo 3528 bronastih priznanj v obeh tekmovalnih kategorijah.

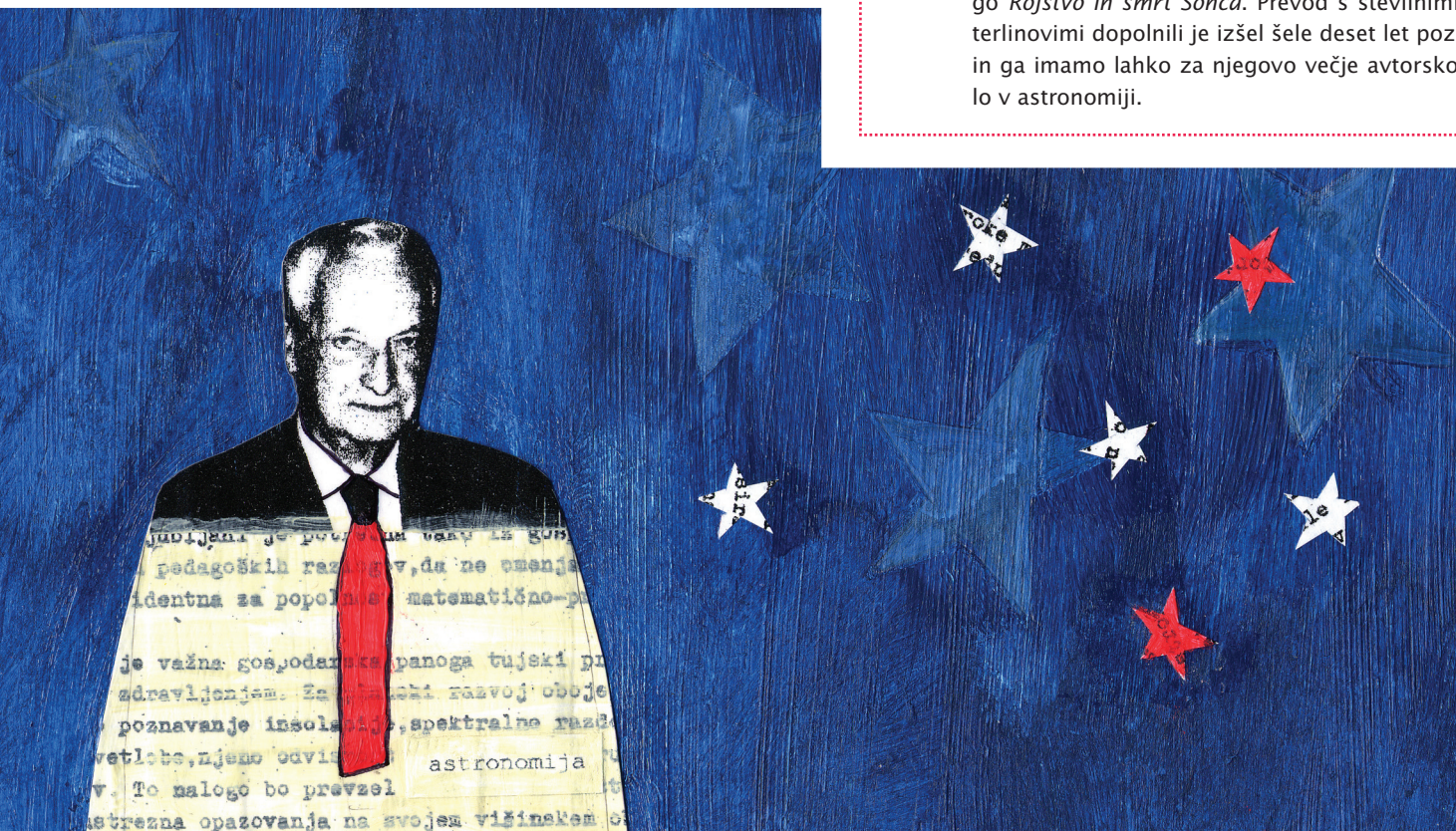
Letos so že tretjič potekala tekmovanja po novem načinu: učenci so tekmovali posamično. Zaradi večjega števila sprejetih tekmovalcev na državno tekmovanje je bilo tudi letos tekmovanje izvedeno hkrati v Mariboru in Ljubljani.

Zahvaljujemo se vsem, ki so pripomogli k uspešni izvedbi področnih tekmovanj in državnega tekmovanja, mladim tekmovalkam in tekmovalcem ter njihovim mentorjem pa iskreno čestitamo za dosežene rezultate.

Pri izvedbi državnega tekmovanja so sodelovali še Ana Gostinčar Blagotinšek, Marja Šteblaj, Goran Iskrić, Gregor Tarman, Jure Bajc, Aleš Fajmut, Said Bešlagič, Andrej Nemec in študentje oddelkov za fiziko obeh fakultet. ✕



Slika 1. Akademik profesor doktor Anton Peterlin se je posebej intenzivno ukvarjal z astronomijo okoli leta 1946, ko je začel prevajati Gamovo knjigo *Rojstvo in smrt Sonca*. Prevod s številnimi Peterlinovimi dopolnili je izšel šele deset let pozneje in ga imamo lahko za njegovo večje avtorsko delo v astronomiji.



# Vloga in pomen profesorja Peterlina za razvoj slovenske astronomije

(OB STOLETNICI ROJSTVA PROFESORJA ANTONA PETERLINA)

MARIJAN PROSEN – MAJO

☉ Akademik, fizik Anton Peterlin (1908 Ljubljana – 1993 Ljubljana) se je učil astronomije kot samouk. V gimnazijskih in študentskih letih si je osnovno astronomsko znanje pridobil iz slovenskih in nemških revij, veliko spodbud je vsekakor dobil od svojega strica dr. Simona Dolarja, ravnatelja ter profesorja matematike, filozofije in fizike na gimnaziji v Kranju.

Profesor Peterlin je napisal precej zanimivih poljudnoznanstvenih astronomskih prispevkov, med njimi največ v reviji *Proteus*, kjer je sodeloval celo pri *Efemeridah za Ljubljano* (za leti 1948 in 1949). Do astronomije je imel zelo spoštljiv odnos; kot pomembno vedo za človekov pogled na svet jo je postavljaval v sam vrh znanstvenih panog. V to nas prepričuje tudi dejstvo, da si je profesor Peterlin pred selitvijo iz Združenih držav Amerike v domovino kupil daljnogled, s katerim je nameraval opazovati zvezde. Vendar pa je zdravstveno tako opešal, da do tega ni prišlo. Nekako se zdi, da profesorjevo zanimanje za astronomijo ni nikoli usahnilo; vse življenje je nosil v sebi silno željo po astronomskih opazovanjih, ki pa si jih zaradi velike predanosti fiziki in zaradi številnih drugih obveznosti preprosto ni mogel privoščiti. Vendar pa je kljub temu davnega leta 1948 storil nekaj, kar je dolgoročno zaznamovalo našo profesionalno astronomijo.

Pripovedujejo, da se je profesor Peterlin vsake stvari lotil zavzeto, temeljito in odgovorno. Kar je dobrega prebral, je znal temeljito predelati in nato odlično predstaviti, tako ustno kot pisno. Vse to se kaže tudi v njegovem astronomskem poljudnoznanstvenem pisanju; njegovi članki so realni, razumljivi, v njih je prisoten fizikalni način razmišljanja, napisani so v lepi slovenščini ter domiselno oblikovani in grajeni brez nepotrebne navlake. Stvari pove naravnost, jasno, kratko in jedrnat. Za vsak svoj članek si je vzel potreben čas in se posebej trudil. Zdi se, da je v času, ko je bil Peterlin urednik revije *Proteus*, tej reviji primanjkovalo astronomskih tekstov. Pa se je, da zapolni manjkajočo vrzel, kar sam lotil tovrstnega pisanja. Zagotovo ga je to moralo veseliti in hkrati notranje bogatiti in plemeniti.

Anton Peterlin je zelo kritično spremljal dejavnost Slovencev na področju astronomije. Z lahkoto je ugotovil, da profesionalne astronomije na Slovenskem še ni. Ko je leta 1945 postal redni profesor fizike na univerzi v Ljubljani, je zagotovo primerjal strukturo predavanj na tedanjem fizikalnem oddelku s podobnimi oddelki drugih univerz. Uvidel je praznino glede univerzitetne astronomije, zato je sprožil pobudo za ustanovitev inštituta oz. katedre za astronomijo na ljubljanski univerzi in hkrati po izgradnji višinskega univerzitetnega observatorija.

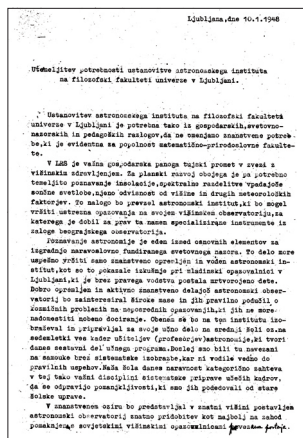
Dne 10. 1. 1948 je napisal znamenito utemeljitev za ustanovitev astronomskega inštituta na ljubljanski univerzi (slika 2) in z njo uspel.<sup>1</sup> Tako je že 1. marca istega leta lahko povabil profesorja Frana Dominka, ki je takrat delal na Astronomskem ob-







Slika 2. Prva stran Utemeljitve za ustanovitev astronomskega inštituta... z dne 10.1.1948, ki jo je sestavil in predložil profesor Peterlin. Ostale strani so izgubljene. Zasebno gradivo družine Peterlin hrani dr. Tanja Peterlin-Neumaier.



servatoriju v Beogradu, na mesto izrednega profesorja na novo ustanovljeni katedri za astronomijo univerze v Ljubljani. Fran Dominko je bil namreč ti isti čas daleč najvidnejši dosegljivi astronom slovenskega rodu v svetu. Vabilu se je odzval, prišel je v Ljubljano in nato četrto stoletja študentom matematike, fizike in astronomije (delno tudi meteorologije in geografije) predaval splošno in sferno astronomijo ter astrofizikalne metode in druga izbrana poglavja iz pozicijske in teoretične astronomije.

Ko je profesor Dominko prišel v Ljubljano, tu ni bilo pogojev za resno profesionalno astronomsko delo. Zgraditi je bilo potrebno astronomski observatorij, pridobiti ustrezne astronomske merilne instrumente (daljnogleda), s katerimi je bilo mogoče izmeriti določene astronomske parametre, visokošolsko pa je bilo treba izobraziti tudi strokovnjake, ki bi bili kos tem nalogam in bi jih tudi najbolje opravili. Vse to se je zgodilo. Zgodba o uspešnosti naše astronomije je sicer dobro znana.

Vendar pa bi se lahko vprašali, kako bi se slovenska astronomija na univerzi razvijala, če profesor Peterlin s svojo utemeljitvijo takrat ne bi uspel. Ta njegova enkratna poteza je bila zares odločilna in dalekosežna, kar je malo znano. Zdi se mi, da jo je potrebno ob tako častitljivi obletnici pomembno poudariti. ☒

<sup>1</sup>Opomba: Danes bi lahko že zapisali, da je vizionarsko in smelo idejo profesorja Peterlina skoraj v celoti izpeljal profesor Dominko, kar se je pozneje pokazalo v neverjetnem razmahu naše profesionalne astronomije.

## Phoenix na Marsu

➔ Po več kot desetletju priprav in desetmesečni, 680 milijonov kilometrov dolgi vožnji, je 25. maja 2008 v bližini Marsovega severnega pola pristala Nasina sonda Phoenix. Po dolgem času je to prvi uspešni pristanek z motorji na kakem drugem planetu.

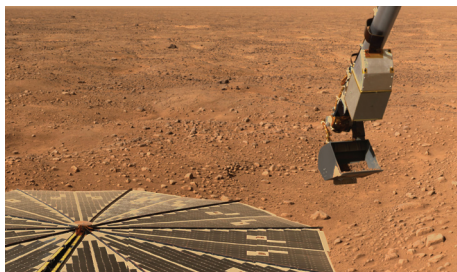
Sonda je takoj začela izvajati vnaprej določen program. Najprej je razvila sončne celice, ki bodo zagotavljale nemoteno oskrbo z električno energijo, na teleskopskem nosilcu se je na delovno mesto postavila stereoskopska kamera za snemanje okolice, aktivirala se je meteorološka postaja za spremljanje vremena, odpadel pa je tudi zaščitni plašč okoli robotske roke, ki jo je ščitil pred kontaminacijo z zemeljskimi bakterijami po poprejšnji temeljiti sterilizaciji tik pred izstrelitvijo.

Na ploščadi pristajalnega modula je pravi mali laboratorij, s katerim sonda pregleduje vzorce marsovske prsti in med drugim išče tudi organske ostanke nekdanjega življenja. Robotska roka je kmalu po pristanku prevrtila zamrznjeno površinsko plast in se dokopala do z vodnim ledom bogate mešanice prsti ter jo prinesla na krov, kjer jo preučujejo različni instrumenti. Poglejmo, kaj vse se skriva v mini laboratoriju, ki so ga poimenovali MECA (Microscopy, Electrochemistry, and Conductivity Analyzer).

Phoenix deluje podobno kot vrtnar, ko hoče ugotoviti kakovost zemlje na svojem vrtu. Prst pomeša z vodo in določi pH, vsebnost mineralov preko magnezijevih in natrijevih kationov ali klorovih, bromovih in žveplovih anionov, poleg tega pa ugotavlja količino raztopljenega kisika in ogljikovega dioksida. Z mikroskopoma podrobno preučuje zrnca prsti in s tem določi njihov izvor in mineraloško sestavo.

Mini laboratorij ima štiri ločene pečice za enkratno uporabo, od katerih lahko vsaka sprejme vzorec marsovske prsti. Robotska roka prinese vzorec prsti in ga strese v segreto pečico, v kateri je vnaprej pripravljena raztopina. Meritve fizikalnih lastnosti

BOJAN KAMBIČ



**Slika.** Phoenix: v ospredju so sončne celice in robotska roka sonde Phoenix, v ozadju pa rdečkasta in pusta pokrajina v bližini Marsovega severnega pola. (Foto: NASA/JPL-Caltech/University of Arizona/Texas A&M University)

in kemijske sestave trajajo ves dan, na koncu pa v mešanico padeta dve tabletki. V prvi je kislina, ki iz prsti izloči karbonate in ostale spojine, topne le v kislem okolju. V drugi pa so reagenti, ki pokažejo navzočnost sulfatov in oksidov v prsti.

Optični mikroskop in mikroskop na atomsko silo (AFM) dopolnjujeta kemijske analize. Iz slik obeh mikroskopov bodo geologi določali fine strukture v prsti in vodnem ledu. Morebitno odkritje mineralov in glin, ki lahko nastajajo le v tekoči vodi, bo pokazalo, da je po Marsu nekoč tekla voda. Optični mikroskop ima ločljivost štiri mikrone na slikovni element. Z njim lahko preučujejo delce velikosti deset mikronov in več (do velikosti zornega polja, ki je  $1 \times 2$  milimetra). Vzorce osvetlijo z rdečo, zeleno, modro in ultravijolično svetlobo LED diod in s tem določajo strukturo soli in vodnega leda. AFM pa „vidi“ podrobnosti vse do velikosti deset nanometrov in meri finejše strukture zrn prsti in vodnega leda.

Pred opazovanji z vsakim od mikroskopov robotska roka vzorce natrese v 69 ločenih posodic na velikem pladnju, kjer so podvrženi različnim fizikalnim in kemijskim poskusom. Pladenj se lahko vrti in tako vsak vzorec pripelje še na opazovanje pod oba mikroskopa.

Zadnji od merilnikov je pritrjen na robotsko roko. Gre za tri kovinske konice, tipala, ki med jemanjem vzorcev merijo temperaturo in prevodnost prsti.

Misijski čas naj bi trajal 92 zemeljskih dni. Po tem času bo Marsov severni pol zajelo zimsko vreme, sončne celice ne bodo sposobne zagotavljati energije in sonda bo vklenil led iz zamrznjenega ogljikovega dioksida. Možnosti, da bi se spomladi zbudila iz zimskega sna, so izredno majhne, pravijo pri NASI. Uspehe sonde Phoenix lahko sproti spremljate na spletnem naslovu [phoenix.lpl.arizona.edu](http://phoenix.lpl.arizona.edu). ☒



## Permutacije in kombinacije

KATJA PRNAVER

➔ V življenju marsikdaj slišimo izjave kot je „Da-našnja izžrebana kombinacija na lotu je ...“ ali pa „Pravilna kombinacija na kolesarski ključavnici je ...“. Vendar je matematično pravilna le prva izjava. ➔





V matematiki namreč razporeditvi *vseh* danih elementov v vrsto, kjer je vrstni red razporejanja pomemben, pravimo *permutacija*, izbere določenega števila elementov iz celotne množice elementov, kjer vrstni red izbranih elementov ni pomemben, pa imenujemo *kombinacije*. Pri tem glede na to, ali se elementi smejo ponavljati ali ne, ločimo *permutacije in kombinacije brez ponavljanja* ter *permutacije in kombinacije s ponavljanjem*.

## ■ Permutacije

*Permutacije* so torej razporeditve danih  $n$  elementov na  $n$  prostih mestih. Obravnavali bomo primere, kjer bodo vsi elementi med seboj različni, se pravi, *permutacije brez ponavljanja*. Število vseh permutacij  $n$  elementov brez ponavljanja lahko izračunamo po formuli

$$\blacksquare P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Operacija  $n!$  se imenuje *fakulteta* ali *faktoriela* in zmnoži vsa naravna števila od 1 do  $n$  med seboj.

**PRIMER.** Poglejmo vse možne razvrstitve števil med 1 in 4 v vrsto:

- 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Kaj hitro lahko vidimo, da število vseh možnih permutacij naraste čez mejo, pri kateri je še možen izpis brez algoritma, saj imamo že za pet elementov kar 120 permutacij.

## ■ Algoritem za izpis vseh permutacij

Algoritem za izračun vseh permutacij temelji na opazanju, da je možno vsako permutacijo dobiti z zamenjavo števil na dveh položajih. Elemente za izpis permutacije bomo hranili v polju  $p$  dolžine  $n$ . Tak algoritem je najlažje zapisati z rekurzijo. Rekurzija se bo končala, ko ne bomo mogli zamenjati nobenega elementa več, torej ko bomo v rekurzijo vstopili z zadnjim elementom. Postopek začnemo s poljem  $p$ , v katerega imamo po vrsti vnešena števila od 1 do  $n$ . V vsakem rekurzijskem koraku moramo podati

trenutno polje  $p$ , trenutni indeks  $i$  in število vseh elementov  $n$ . Poglejmo si algoritem

```
funkcija permutacije(p,i,n)
    če je i = n
        izpiši polje p
    sicer za vsak j med i in n
        zamenjaj(i,j)
        permutacije(p,i+1,n)
        zamenjaj(i,j)
```

pri čemer funkcija *zamenjaj* zamenja  $i$ -ti in  $j$ -ti element v polju  $p$ . V zadnjem koraku se s ponovitvijo zamenjave vrnemo v začetno stanje.

**PRIMER.** Poglejmo si, na kakšen način bi takšen algoritem izpisal vse permutacije treh števil:

1. permutacije({1, 2, 3}, 1, 3)
2. za  $t_1$  od 1 do 3
3.  $t_1 = 1$ : zamenjaj(1, 1); permutacije({1, 2, 3}, 2, 3)
  - za  $t_2$  od 2 do 3
  - $t_2 = 2$ : zamenjaj(2, 2);  
permutacije({1, 2, 3}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 2);
  - $t_2 = 3$ : zamenjaj(2, 3);  
permutacije({1, 3, 2}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 3);
- zamenjaj(1, 1);
4.  $t_1 = 2$ : zamenjaj(1, 2); permutacije({2, 1, 3}, 2, 3)
  - za  $t_2$  od 3 do 3
  - $t_2 = 2$ : zamenjaj(2, 2);  
permutacije({2, 1, 3}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 2);
  - $t_2 = 3$ : zamenjaj(2, 3);  
permutacije({2, 3, 1}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 3);
- zamenjaj(1, 2);
5.  $t_1 = 3$ : zamenjaj(1, 3); permutacije({3, 2, 1}, 2, 3)
  - za  $t_2$  od 3 do 3
  - $t_2 = 2$ : zamenjaj(2, 2);  
permutacije({3, 2, 1}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 2);
  - $t_2 = 3$ : zamenjaj(2, 3);  
permutacije({3, 1, 2}, 3, 3) → **izpis**;
  - zamenjaj(2, 3);
- zamenjaj(1, 3);

Po končanem algoritmu vidimo, da se izpiše nasled-

njih šest permutacij:

- {1, 2, 3}, {1, 3, 2}, {2, 1, 3},  
 {2, 3, 1}, {3, 2, 1}, {3, 1, 2}.

## ■ Kombinacije

*Kombinacije brez ponavljanja* so izbire  $r$  različnih elementov izmed  $n$  različnih elementov, ki so na voljo. Število kombinacij brez ponavljanja je mogoče izračunati po formuli

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Zadnja oznaka se imenuje *binomski simbol* in je krajši zapis za zapisani vmesni ulomek. Po tej formuli je v igri loto, kjer izbiramo sedem izmed 39 števil, možnih 15 380 937 različnih kombinacij.

**PRIMER.** V besedi PRESEK je pet različnih črk, P, R, E, S, K. Izmed njih lahko

- štiri črke izberemo v natanko petih možnih kombinacijah: {P, R, E, S}, {P, R, E, K}, {P, R, S, K}, {P, E, S, K} in {R, E, S, K};
- dve črki izberemo v natanko desetih možnih kombinacijah: {P, R}, {P, E}, {P, S}, {P, K}, {R, E}, {R, S}, {R, K}, {E, S}, {E, K} in {S, K}.

Videli smo, da število vseh možnih kombinacij narašča, kadar imamo na izbiro več elementov, kot jih potrebujemo. Kako torej zapisati učinkovit algoritem, ki nam bo izpisal vse možne kombinacije za igro loto?

## ■ Algoritem za izpis vseh kombinacij

Če bi vseh pet kombinacij črk, ki smo jih zapisali v prvem primeru, uredili po abecedi, bi videli, da se spremembe dogajajo na „repu“ množice, oziroma opazili bi, da po vrsti spreminjamo zadnje elemente. Še bolj očitno je to je v primeru prvih nekaj kombinacij za igro loto: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9}, ..., {1, 2, 3, 4, 5, 6, 39}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}, ... Za takšen urejen izpis vseh kombinacij se za najprimernejšo metodo ponovno izkaže rekurzija. Poglejmo si, kaj se dogaja v rekurzijskem koraku in kakšni so pogoji za končanje

rekurzije. Za shranjevanje elementov bomo uporabili polje  $p$  dolžine  $k$ , v katerega bomo v vsakem koraku rekurzije vpisali po en element. Tako bo pogoj za končanje rekurzije in izpis elementov kar podatek, da smo v naše polje že vpisali  $k$  izmed  $n$  znakov.

V rekurzijskem koraku bomo na  $i$ -to mesto vpisali število  $j$ , nato pa z zanko na  $(i + 1)$ . mesto vpisovali vsa možna števila med  $j$  in našo zgornjo mejo (ki je v primeru igre loto 39). Denimo, da imamo v našem polju dolžine  $k$  že vpisanih  $i$  števil, pri čemer je zadnje vpisano število  $j$ . Ko rekurzivno pokličemo našo funkcijo za vpisovanje kombinacijskih elementov, se zgodi naslednje:

- če smo v polje že vpisali  $k$  elementov, bomo le-to samo še izpisali na ekran;
- v nasprotnem primeru pošlemo zanko, ki na  $(i + 1)$ . mesto dodaja elemente od  $j + 1$  do  $n$  in po vsakem dodajanju rekurzivno kliče našo funkcijo s poljem z dodanim elementom, številom vpisanih elementov  $i + 1$  in zadnjim vpisanim številom iz zanke.

Poskusimo sedaj zapisati ta rekurzivni algoritem. Našo funkcijo bomo poimenovali *kombinacije* in kot parametre bomo podali polje  $p$ , število elementov, med katerimi izbiramo,  $n$ ; število elementov, ki jih izbiramo,  $k$ ; število že vpisanih elementov  $i$  in najvišje že vpisano število  $j$ . Program pričnemo s klicem rekurzije, kjer je  $p$  prazno polje in sta parametra  $i$  in  $j$  enaka 1 in 0.

```
funkcija kombinacije(p,n,k,i,j)
    če je i > k
        izpiši polje p
    za vsak t med j+1 in n
        p[i]=t
        kombinacije(p,n,k,i+1,j=t)
```

**PRIMER.** Poglejmo, kako bi s takšnim algoritmom izpisali vse kombinacije dveh števil izmed števil 1, 2 in 3:

1. kombinacije({}, 3, 2, 1, 0)
2. za  $t_1$  od 1 do 3
3.  $t_1 = 1$ :  $p = \{1\}$ , kombinacije({1}, 3, 2, 2, 1)  
 za  $t_2$  od 2 do 3  
 $t_2 = 2$ :  $p = \{1, 2\}$ ,





- kombinacije( $\{1, 2\}, 3, 2, 3, 2\} \rightarrow$  **izpis**  
 $t_2 = 3: p = \{1, 3\},$   
 kombinacije( $\{1, 3\}, 3, 2, 3, 3\} \rightarrow$  **izpis**  
 4.  $t_1 = 2: p = \{2\},$  kombinacije( $\{2\}, 3, 2, 2, 2\}$   
 za  $t_2$  od 3 do 3  
 $t_2 = 3: p = \{2, 3\},$   
 kombinacije( $\{2, 3\}, 3, 2, 3, 3\} \rightarrow$  **izpis**  
 5.  $t_1 = 3: p = \{3\},$  kombinacije( $\{3\}, 3, 2, 2, 2\}$   
 za  $t_2$  od 4 do 3 *zanka se ne izvede*

Vidimo torej, da so vse možne kombinacije  $\{1, 2\}, \{1, 3\}$  in  $\{2, 3\}$ .

## ■ Uporaba permutacij in kombinacij

Časovna zahtevnost algoritma za izračun permutacij je reda  $(n!)$ , medtem ko je časovna zahtevnost algoritma za izračun kombinacij reda  $(n \cdot C_n^r)$ . Zakaj to omenjamo? Ta podatek bi lahko bil zanimiv pri izbiri gesel za različne sisteme. Tako lahko geslo dolžine šestih znakov računalnik s našima algoritmoma odkrije v:

- 151 200 časovnih enotah (210 enot za možne kombinacije znakov in 720 enot za možne razporeditve teh znakov), če je geslo sestavljeno samo iz števk,

- 165 765 600 časovnih enotah, če je geslo sestavljeno samo iz znakov angleške abecede,
- 1 402 410 240 časovnih enotah, če je geslo sestavljeno iz znakov angleške abecede in števk.

Če je časovna enota računalnika  $1\mu s$ , potrebujemo za 1 402 410 240 enot približno 25 minut. In če bi bilo geslo samo za en znak (očitno bomo uporabljali kombinacijo črk in števk) daljše? Tedaj s takšnimi algoritmoma za izračun vseh možnosti računalnik potrebuje 42 072 307 200 časovnih enot, kar pri izbrani enoti  $1\mu s$  pomeni malo manj kot 12 ur. Ob tem naj še opomnimo, da opisana algoritma pregledata le vse možnosti, kjer se elementi ne ponavljajo. V vsakdanjem življenju pa vemo, da se v geslih marsikdaj kateri znak tudi ponovi.

Seveda bi tisti, ki bi želeli ugotoviti določeno geslo, posegli po naprednejših algoritmih nižje zahtevnosti, vendar naša ocena dovolj nazorno pokaže, kako pomembna je izbira dobrega gesla.

## ■ Literatura

- <http://camino.rutgers.edu/ut/utsa/cs3343/lecture25.html> (avgust 2008)
- <http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/kombi.html> (avgust 2008) ✖

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | D | O | L | B | E | N | K | A |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Z | I | N | N | E | M | A | N | N |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| N | O | E | L | I | C | E |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| E | N | M | A | R | I | S | A |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| M | I | Z | A | R | J | E | D |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| F | I | Z | I | K | P | A | T | E |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| I | K | A | R | D | E | P | O | N | A | R | A | V | O | S | L | O | V | J | E | M | A | G | N | E | T | I | T |   |   |   |   |
| K | R | I | V | U | L | J | A | B | O | L | I | D | R | E | D | U | K | I | J | A | K | O | N | Č | N | I | K | P | I |   |   |
| R | O | G | A | S | K | A | S | L | A | T | I | N | A | S | A | D | E | L | A | K | S | B | I | K | I | Č | B | A | Č |   |   |
| O | S | O | N | Č | E | N | J | E | R | A | L | S | K | A | L | P | E | L | T | R | O | T | K | E | L | L | E | R |   |   |   |
| A | E | R | J | A | M | B | E | M | E | N | T | R | A | Z | P | A | D | I | N | I | Č | A | S | K | E | L | A | N | Č | K | A |
| T | N | V | R | H | E | A | R | B | I | T | E | R |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| I | G | L | A | A | K | A | D | R | E | K |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| S | A | A | R | Y | A | L | E | I | Z | O | L | A |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| T | R | S | O | N | K | O | L | O | G | V | N | O | S |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| I | T | A | K | A | T | V | A | R | I | V | O | V | A |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| K | E | N | O | Z | O | I | K | F | R | A | N | C | O | Z |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| A | N | S | A | L | V | A | F | O | E | N | D | E |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

## REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 35/6

➔ Za nagradno križanko iz šeste številke 35. letnika Preseka smo prejeli 20 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo Devetdesetletnica rojstva. Izžrebani reševalci, ŽIGA GOSAR iz Ljubljane, PREDRAG GRUJIČ iz Zagorja in JUSTINA PAVLIŠIČ iz Črnomlja so razpisane nagrade prejeli po pošti. ✖



# Nagradna naloga

## SKRITA RAČUNA NA VAZI

MARIJA VENCELJ

➔ To nagradno nalogo smo objavili v zadnji številki prejšnjega letnika Preseka, a se je izkazala kot pretrd oreh, saj nismo prejeli nobene pravilne rešitve, zato jo z dodatnim namigom (glej opombo 2) ponovno objavljamo.

Matematiku so prijatelji za rojstni dan poklonili šopek vrtnic z vazo, na katero so napisali dva skrita računa seštevanja, enega v angleškem in drugega v francoskem jeziku<sup>1</sup>.

Poskusite ju rešiti tudi vi. Za reševanje veljajo pravila, ki so pri takih nalogah običajna. Nad vodoravno črto so skrito zapisani seštevanci, pod njo njihova vsota. Enake črke moramo nadomestiti z enakimi desetiški števkami in različne z različnimi tako, da dobimo pravičen račun. Vodilne številke nastopajočih števil so od nič različne.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| H | A | P | P | Y |
| H | A | P | P | Y |
| H | A | P | P | Y |
|   | D | A | Y | S |
| A | H | E | A | D |

1. račun. (slika 1)

V nalogi je pravzaprav v angleščini zapisano voščilo prijatelju (happy = srečen, day(s) = dan (dnevi), ahead = spredaj, v prihodnje). Računi, ki imajo, tako kot tale, tudi v skriti obliki določen pomen, so nekaj posebnega in



Slika 1.



Slika 2.

|   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|--------------------------|
|   |   |   | U | N |                          |
|   |   |   | U | N |                          |
|   | D | E | U | X |                          |
| D | O | U | Z | E |                          |
| S | E | I | Z | E | in $n \equiv 0 \pmod{n}$ |

2. račun. (slika 2)

jih je težko sestaviti. Posebej imenitni so taki, ki imajo samo eno rešitev.

Tudi drugi račun ima pomen že v skriti obliki. Poglejmo prevod uporabljenih francoskih besed: un = ena, deux = dve, douze = dvanajst in seize = šestnajst. Res je

$$\blacksquare 1+1+2+12 = 16.$$

Pri reševanju bistrovidno upoštevajte tudi pripis desno ob računu, pa naj se vam zdi napisani pogoj še tako čuden in nepotreben<sup>2</sup>. Napisan je bil tudi na vazi, a se na fotografiji ne vidi.

Rešitve nalog pošljite do **3. oktobra 2008**, na naš naslov **DMFA—založništvo, Presek, p.p. 2964, 1001 Ljubljana**.

Izmed reševalcev, ki bodo poslali pravilno rešitev obeh računov in na kratko opisali tudi, kako so do obeh rešitev prišli, bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli enoletno naročnino na Presek. ✕

<sup>1</sup>Računa so prijatelji priredili iz ene od angleških knjig rekreativne matematike.

<sup>2</sup> $n \equiv 0 \pmod{n}$  dobesedno pomeni, da je število  $n$  deljivo z  $n$ . V tej nalogi to pomeni, da je npr. število, ki je skrito za zapisom DOUZE deljivo z 12.

# Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

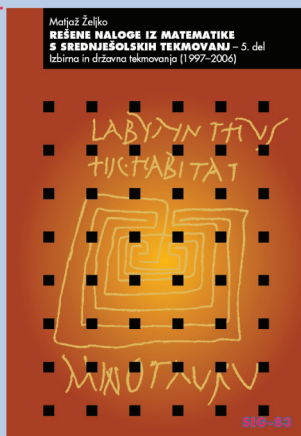
Matjaž Željko:

## REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in  
državna tekmovanja  
1997–2006

172 strani  
format  $14 \times 20$  cm  
mehka vezava

14,99 EUR



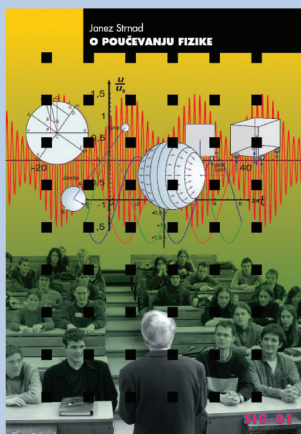
Marcel Danesi:

## PARADOKS LAŽNIVCA IN HANOJSKI STOLPI

Deset največjih  
matematičnih ugank  
vseh časov

260 strani  
format  $14 \times 20$  cm  
mehka vezava

17,99 EUR

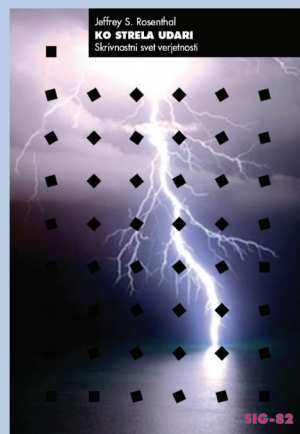


Janez Strnad:

## O POUČEVANJU FIZIKE

320 strani  
format  $14 \times 20$  cm  
mehka vezava

12,49 EUR



Jeffrey S. Rosenthal:

## KO STRELA UDARI

Skrivnostni svet  
verjetnosti

264 strani  
format  $14 \times 20$  cm  
mehka vezava

12,49 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo **20 % popusta** na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.