



PRESEK

- ◊ POJOČE SIPINE
- ◊ SENCE IN ZAPOREDJA
- ◊ NAGRADNA NALOGA
- ◊ ASTRONOMSKA VAJA



Reševanje sudokujev

✚ Pri sudokujih je vpleteno veliko matematike. Ta uganke ponavadi vsebuje števila, vendar reševanje poteka enako, tudi če uporabimo drugačne simbole. Bolj zanimiva je logika, skrita za procesom reševanja, ki nam lahko omogoči dodatno zadovoljstvo pri reševanju (z veliko manj radiranja). Poleg tega so te uganke primeri Latinskih kvadratov, ki so pomembni v abstraktni algebri ter pri eksperimentalnih načrtih v statistiki.

Osnovna preštevalna problema pri sudokuju sta: Katero je najmanjše možno število začetnih števil v sudokuju? Koliko je vseh različnih sudokujev? Obstajajo sudokui s 17 začetnimi števili, ki imajo eno samo rešitev, ne poznamo pa sudokuja, ki bi imel 16 začetnih števil in eno samo rešitev. Glede drugega vprašanja pa obstaja več kot 5 milijard različnih sudokujev. Pri tem sudokuje, ki jih lahko dobimo iz drugih recimo z zamenjavo števil ali zgornjih dveh vrstic, štejemo le enkrat. Ta rezultat temelji na teoriji grup in pojmu simetrije, ki sta po drugi strani izjemno pomembna v velikem delu moderne fizike in kemije. ✚

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	1		4						
B	2	6				9			
C				3		4	8		
D				6				7	
E	6	2						5	1
F		4				7			
G			6	1		5			
H				2				3	6
I							4		8

POJASNILO: Sudokuje, objavljene v tej in prejšnjih številkah Preseka, je sestavil Vladimir Batagelj.

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 35, šolsko leto 2007/2008, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2007/2008 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Ines Kristan in Polona Šterk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 2000 izvodov

© 2008 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1705

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Reševanje sudokujev 2

■ MATEMATIKA

Binarni Pascalov trikotnik in Fermatova števila
(Marko Razpet) 4-7
Odplačevanje kredita (Ajda Fošner) 8-9
Sence in zaporedja (Nada Razpet) 10-12
O številu π (Ivan Vidav) 12-13
Bistrovidec – Družinska – rešitev naloge
(Boris Lavrič) 13-14
Nagradna naloga – Skrita računa na vazi
(Marija Vencelj) 31

■ FIZIKA

Pojoč sipine (Janez Strnad) 14-15, 18
Razmisli in poskusi (Mitja Rosina) 19-20
Poizkuševalnica v dnevni sobi – Utripajoč
zaslon – odgovor naloge (Mojca Čepič) 21
Poizkuševalnica v jedilnici – Kozarec z vodo
(Mojca Čepič) 22

SLIKA NA NASLOVNICI: Letos vas s Presekovo naslovnico za spremembo
vabimo na počitniško potepanje v hribe. Ker je tam svetlobno onesna-
ženje manjše kot v dolini, se ob jasnih nočeh splača opazovati zvezdno
nebo. (Foto: Matej Košir)

■ ASTRONOMIJA

Premeri kraterjev in višina gora na Luni –
astronomska vaja (Boris Kham) 23-25

■ RAČUNALNIŠTVO

Alice v deželi objektnega programiranja –
Tretji del (Eva Ferk) 25-29
Riš, Ravnilo in šestilo – Rišem in študiram –
Šesti del (Damjan Kobal) 29-30

■ RAZVEDRILO

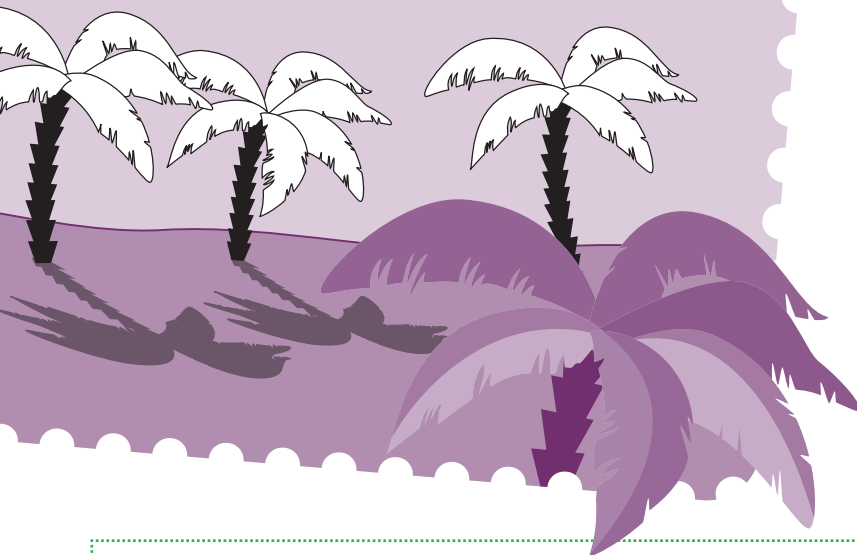
Nagradna križanka (Marko Bokalič) 16-17
Rešitev nagradne križanke Presek 35/5 20
Sudoku 2, 22

■ TEKMOVANJA

19. državno tekmovanje iz razvedrilne
matematike priloga
28. Mednarodni matematični kenguru – Izbor
nalog priloga
7. tekmovanje v znanju matematike za dijake
srednjih tehniških in strokovnih šol – regijsko
tekmovanje priloga



Lep pozdrav matematika



MARKO RAZPET

Binarni Pascalov trikotnik in Fermatova števila

☛ V Presekovem članku *Fermatova števila in konstrukcije pravičnih večkotnikov* smo spoznali pomembno vlogo Fermatovih števil

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \text{ kjer je } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Seveda imamo neskončno zaporedje Fermatovih števil

$$F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$$

Nekaj začetnih členov zaporedja zlahka izračunamo:

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65\,537.$$

Sedaj pa bomo spoznali še nenavaden primer, v katerem se ta števila pojavljajo.

Binarni ali dvojiški številski sistem je eden od številskih sistemov, kot sta na primer desetiški in šestdesetiški. Za osnovo številskega sistema lahko izberemo katerokoli naravno število $a > 1$. Potem lahko vsako naravno število s v tem sistemu na en sam način zapišemo kot

$$s = s_n a^n + s_{n-1} a^{n-1} + \dots + s_1 a + s_0,$$

pri čemer so $s_k \in \{0, 1, \dots, a-1\}$ števke števila s v tem sistemu. Krajše pa zapišemo tako:

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0 (a).$$

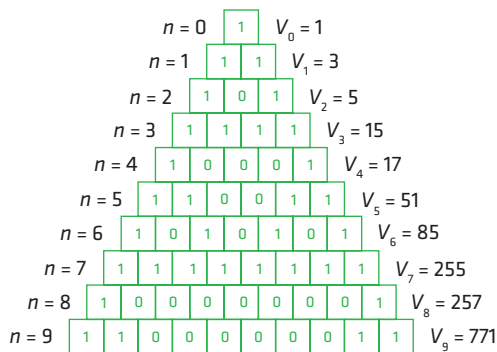
Za desetiški številski sistem je $a = 10$, za šestdesetiški pa $a = 60$.

Števila v dvojiškem sistemu ($a = 2$) zapišemo s samimi ničlami in enkami. Tako imamo:

$$s = 111000011_{(2)} = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2 + 1 = 256 + 128 + 64 + 2 + 1 = 451.$$

Števili 0 in 1 sta tudi ostanka pri deljenju celih števil z 2. V obsegu teh ostankov pa računamo zelo preprosto: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$. Če zapišemo Pascalov (Blaise Pascal, 1623–1662, francoski matematik) številski trikotnik v tem obsegu, dobimo številski trikotnik, sestavljen iz samih ničel in enk. Recimo mu binarni Pascalov trikotnik. Tako kot v pravem Pascalovem trikotniku tudi v binarnem seštejemo dve zaporedni števili v isti vrstici, da dobimo število v naslednji vrstici, med seštevancema. Na robu trikotnika, levo in desno, pa so vedno enke. Binarni Pascalov trikotnik ima veliko lepih zanimivosti. Kaj dobimo, če vzamemo, da predstavlja n -ta vrstica binarni zapis nekega števila? Zaradi simetrije je vseeno, ali binarne številke beremo z leve v desno ali obratno. Označimo to število z V_n .

Elementi v n -ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika naj bodo po vrsti $b_{n,n}, b_{n,n-1}, \dots, b_{n,1}, b_{n,0}$.



Slika 1. Binarni Pascalov trikotnik

Pri tem je $b_{n,k} \in \{0, 1\}$ za $0 \leq k \leq n$. Torej je

$$V_n = b_{n,n}b_{n,n-1} \dots b_{n,1}b_{n,0} \stackrel{(2)}{=} b_{n,n}2^n + b_{n,n-1}2^{n-1} + \dots + b_{n,1}2 + b_{n,0}.$$

Ena od lastnosti binomskih koeficientov pa pravi, da velja kongruenca

$$\binom{n}{k} \equiv b_{n,k} \pmod{2}.$$

To pomeni, da je $b_{n,k} = 0$, če je $\binom{n}{k}$ sodo število, in 1, ko je $\binom{n}{k}$ liho število.

Tako je

$$V_5 = 2^5 + 2^4 + 2 + 1 = 32 + 16 + 2 + 1 = 51.$$

Takoj opazimo, da so nekatera od števil V_n Fermatova števila, nekatera pa produkt Fermatovih števil:

$$V_3 = 3 \cdot 5, \quad V_5 = 3 \cdot 17, \quad V_6 = 5 \cdot 17, \\ V_7 = 3 \cdot 5 \cdot 17, \quad V_9 = 3 \cdot 257.$$

Vidimo, da je $V_7 = F_0 F_1 F_2$. Indeks 7 pa lahko zapišemo po urejeni trojki indeksov $(0, 1, 2)$ v obliki vsote potenc števila 2 z ustreznimi eksponenti: $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$. Za $n = 14$ dobimo v binarnem Pascalovem trikotniku števila

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1.$$

Ustreza jim število $V_{14} = 21845 = 5 \cdot 17 \cdot 257 = F_1 F_2 F_3$ s trojko indeksov $(1, 2, 3)$. Tudi v tem primeru velja, da je indeks $14 = 2^1 + 2^2 + 2^3$ vsota ustreznih potenc števila 2.

Glede deljivosti binomskih koeficientov s prašte-

vilom p je zanimivo povedati, da so

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \dots, \binom{p}{p-1}$$

vsil po vrsti deljivi s p . Števili $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$ seveda nista deljivi za nobeno praštevilo p , saj je $p \geq 2$. Velja torej naslednja trditev:

Za vsako praštevilo p je binomski koeficient $\binom{p}{k}$ pri pogoju $1 \leq k \leq p-1$ deljiv s p .

Vsi binomski koeficienti $\binom{p}{k}$ so pri $1 \leq k \leq p-1$ naravna števila in zapišemo jih lahko v obliki

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1)}{k!}.$$

Iz tega dobimo enakost

$$p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1) = k! \binom{p}{k}.$$

Njena leva stran je deljiva s p , zato mora biti tudi desna. Ker pa je število p tuje proti številu $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ pri pogoju $1 \leq k \leq p-1$, je s p deljiv faktor $\binom{p}{k}$. Na splošno velja

$$(x+y)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}y + \binom{p}{2}x^{p-2}y^2 + \dots + \binom{p}{p-1}xy^{p-1} + y^p.$$

Posledica deljivosti binomskih koeficientov $\binom{p}{k}$ za $k = 1, 2, \dots, p-1$ s p pa je ta, da ima potenca $(x+y)^p$ v obsegu ostankov $\{0, 1, \dots, p-1\}$ po praštevilske modulu p preprosto obliko

$$(x+y)^p = x^p + y^p,$$

kar nekateri popularno imenujejo *bručeve sanje*, *freshman's dream*. Za bruca, začetnika univerzitetnega študija, bi bilo namreč najlažje, če bi bilo vse additivno.

Za $p = 2$ dobimo v obsegu ostankov $\{0, 1\}$ bručeve sanje v obliki

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2,$$

nato pa korak za korakom še

$$(x+y)^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4, \\ (x+y)^8 = (x^4 + y^4)^2 = x^8 + y^8,$$



tako da velja, na splošno, za vsako nenegativno celo število n

$$\blacksquare (x + y)^{2^n} = x^{2^n} + y^{2^n}.$$

To pa pomeni

$$\blacksquare \binom{2^n}{k} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Torej stojita enki v 2^n -ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika samo na 2^n -tem in začetnem mestu, drugje pa so same ničle. S tem lahko zapišemo za vsako celo nenegativno število n enakost

$$\blacksquare V_{2^n} = 2^{2^n} + 1 = F_n,$$

torej n -to Fermatovo število. Ugotovili smo, da so med števili V_n vsa Fermatova števila.

Predvidevamo torej, da velja na splošno

$$\blacksquare V_n = F_k F_j, \quad \text{če je } n = 2^k + 2^j \quad \text{in } 0 \leq k < j.$$

To je preprosta posledica enakosti

$$\begin{aligned} \blacksquare (x + y)^{2^k + 2^j} &= (x + y)^{2^k} (x + y)^{2^j} = \\ &= (x^{2^k} + y^{2^k})(x^{2^j} + y^{2^j}) = \\ &= x^{2^k + 2^j} + x^{2^j} y^{2^k} + x^{2^k} y^{2^j} + y^{2^j + 2^k}, \end{aligned}$$

ki velja v obsegu $\{0, 1\}$. Tako računanje nam kar dobro služi za ugotavljanje sodosti in lihosti binomskih koeficientov. To pomeni, da stojijo v $(2^k + 2^j)$ -ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika v tem obsegu enke na štirih mestih, gledano z desne proti levi: na začetnem, na 2^k -tem, 2^j -tem in $(2^k + 2^j)$ -tem, na preostalih mestih pa so ničle. Pozicijo z leve proti desni v vrstici šteje eksponent pri y . To pomeni, da lahko izrazimo število, ki ustreza binarnemu zapisu, takole:

$$\begin{aligned} \blacksquare V_n = V_{2^k + 2^j} &= 2^{2^k + 2^j} + 2^{2^k} + 2^{2^j} + 1 = \\ &= (2^{2^k} + 1)(2^{2^j} + 1) = F_k F_j. \end{aligned}$$

Ker pa vsako naravno število n lahko enolično zapišemo v obliki

$$\blacksquare n = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_s},$$

kjer so $n_0, n_1, \dots, n_s$ celi eksponenti, urejeni po ve-

likosti $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_s$, velja splošno

$$\blacksquare V_n = F_{n_0} F_{n_1} \dots F_{n_s}.$$

V posebnem primeru velja za $n \geq 1$ enakost

$$\blacksquare V_{2^{n+1}} = F_0 F_n = 3 F_n.$$

Ker za $n \geq 1$ velja enakost $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, imamo za $n \geq 1$ tudi

$$\blacksquare V_{2^n - 1} = F_0 F_1 \dots F_{n-1}.$$

Po drugi strani pa je v $(2^n - 1)$ -ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika 2^n samih enk, tako da je tudi

$$\blacksquare V_{2^n - 1} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2^n - 1} = 2^{2^n} - 1 = F_n - 2.$$

Torej velja za $n \geq 1$ znana enakost

$$\blacksquare F_0 F_1 \dots F_{n-1} = F_n - 2 \quad \text{oz.} \quad F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2 = F_n.$$

Iz nje zlahka zaključimo, da sta si različni Fermatovi števili F_m in F_n tuji. Preverimo pravilnost formule za produkt še na primeru

$$\begin{aligned} \blacksquare F_0 F_1 F_2 F_3 F_4 + 2 &= 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 + 2 = \\ &= 4\,294\,967\,297 = F_5. \end{aligned}$$

Ker se $F_0 F_1 = 15$ konča s 5, $F_2 = 17$ pa s 7, se $F_0 F_1 F_2$ konča s 5, ker je $5 \cdot 7 = 35$. Zato se F_3 konča s $5 + 2 = 7$. Tako lahko korak za korakom spet spoznamo, da se vsak F_n za $n > 1$ (v desetiškem številskem sistemu) konča s 7.

Lahko tudi dokažemo, da vnaprej poznamo celo zadnji dve številki Fermatovih števil F_n :

- $\blacksquare F_n$ se konča s 37, če je $n = 4k$ in $k = 1, 2, 3, \dots$;
- $\blacksquare F_n$ se konča s 97, če je $n = 4k + 1$ in $k = 1, 2, 3, \dots$;
- $\blacksquare F_n$ se konča s 17, če je $n = 4k + 2$ in $k = 0, 1, 2, \dots$;
- $\blacksquare F_n$ se konča s 57, če je $n = 4k + 3$ in $k = 0, 1, 2, \dots$

Zadnji dve mesti sta torej odvisni od ostanka pri deljenju indeksa n s številom 4.

Koliko je enk v n -ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika? Koliko je skratka lihih binomskih koeficientov $\binom{n}{k}$ pri danem n ? Označimo število takih binomskih koeficientov z $E(n)$. Očitno je $E(0) = 1$, $E(1) = 2$, $E(2) = 2$, $E(3) = 4$. Kako se zaporedje

nadaljuje?

V resnici enke v vsaki vrstici binarnega Pascalovega trikotnika zlahka preštejemo z upoštevanjem bručevih sanj. Najprej z lahkoto ugotovimo, da je

$$\blacksquare E(2^n) = 2, E(2^k + 2^j) = 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

za vsako nenegativno celo število n in vsa cela števila k, j pri pogoju $0 \leq k < j$. Naslednji korak je posplošitev. Če je

$$\blacksquare n = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_s},$$

kjer so $n_0, n_1, \dots, n_s$ nenegativni celi eksponenti, urejeni po velikosti $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_s$, potem velja

$$\blacksquare E(n) = E(2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_s}) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_s = 2^s.$$

Število s je po drugi strani ravno številska vsota $v(n)$ binarno zapisanega števila $n = b_r b_{r-1} \dots b_1 b_{0(2)}$:

$$\blacksquare s = v(n) = b_r + b_{r-1} + \dots + b_1 + b_0.$$

Torej imamo odgovor na zastavljeno vprašanje:

$$\blacksquare E(n) = 2^{v(n)}, n \geq 0.$$

Očitno je $v(0) = 0, v(1) = 1, v(2) = 1, v(3) = 2$ in res v teh primerih dobimo $E(0) = 2^0 = 1, E(1) = 2^1 = 2, E(2) = 2^1 = 2, E(3) = 2^2 = 4$.

V posebnem primeru je

$$\blacksquare E(2^n - 1) = E(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 2^n.$$

Po svoje je zanimiva že zgradba zaporedja s členi $E(n)$, ki se prične tako:

$$\blacksquare 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, \dots$$

Po katerem pravilu se zaporedje nadaljuje? Oglejmo si delna zaporedja $E(k)$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, kjer je $n = 0, 1, 2, \dots$:

- $\blacksquare n = 0 : 1$
- $\blacksquare n = 1 : 1, 2$
- $\blacksquare n = 2 : 1, 2, 2, 4$
- $\blacksquare n = 3 : 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8$
- $\blacksquare n = 4 : 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16$

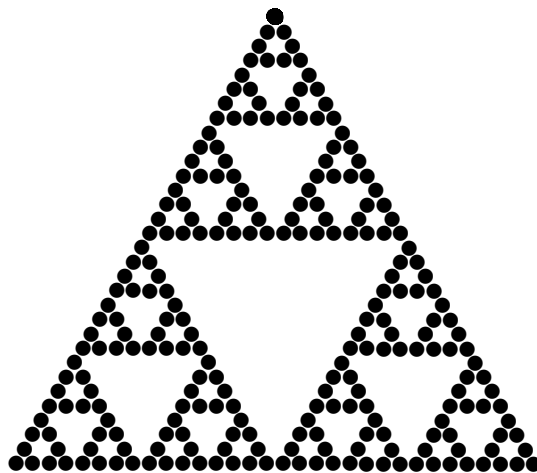
Takoj opazimo, da je za $n \geq 1$ druga polovica zapo-

redja ravno dvakratnik prve polovice. Delna zaporedja so dolžine 2^n , kjer je $n = 0, 1, 2, \dots$. Zakaj? Delno zaporedje $E(k)$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1$, ima za $n \geq 1$ natančno 2^{n+1} členov. Indekse k lahko razdelimo na dva enako močna dela, $A = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ in $B = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Vsak član množice B je očitno za 2^n večji od istoležnega člana v množici A , v kateri ima vsak član kvečjemu n binarnih števk. Pri tem vzamemo, da nima število 0 nobene binarne števke. Torej ima vsak član množice B natanko eno binarno števko več kot istoležni član v množici A in zato je številska vsota binarno zapisanega števila množice B točno za 1 večja od številske vsote binarno zapisanega istoležnega števila iz množice A . To pomeni

$$\blacksquare E(k + 2^n) = 2^{v(k)+1} = 2 \cdot 2^{v(k)} = 2E(k),$$

kjer je $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

To pa res pomeni, da je druga polovica zaporedja ravno dvakratnik prve polovice.



Slika 2. Trikotnik Sierpińskega

Binarni Pascalov trikotnik ima sploh zanimivo vzorčasto obliko, če nanj pogledamo zelo od daleč. Kjer so enke, postavimo temno piko, kjer so ničle, pa belo. Slika 2 kaže izrazito samopodobnost že za $0 \leq n \leq 31$. Trikotnemu vzorcu s te slike pravi- jo trikotnik Sierpińskega (Wacław Sierpiński, 1882–1969, polski matematik). ☒

Odplačevanje kredita

AJDA FOŠNER

✦ V člankih *Z varčevanjem do novega računalnika* [2] in *Obrestno obrestni račun* [3] smo se seznanili z osnovnimi prijemi iz poslovne matematike. Predstavljen je bil navadni obrestni račun, ki ga banke uporabljajo za obračun hranilnih vlog in druge klasične kratkoročne posle.

Zanj je značilno, da se ves čas obrestuje le začetna osnovna glavica G . Obresti o so za vsako obrestovalno obdobje enake in glavica narašča kot aritmetično zaporedje

$$\blacksquare G, G + o, G + 2o, G + 3o, \dots, G + no, \dots$$

Seznanili pa smo se tudi z obrestno obrestnim računom, ki je v naši praksi izrazito prevladal nad navadnim. Tako že vemo, da pri obrestno obrestnem računu obresti računamo ne le od osnovne začetne glavnice G , ampak tudi od obresti, ki so nastale v prejšnjem časovnem obdobju. Pokazali smo, da glavica pri obrestnem obrestovanju narašča kot geometrijsko zaporedje

$$\blacksquare G, Gr, Gr^2, \dots, Gr^n, \dots,$$

kjer je

$$\blacksquare r = 1 + \frac{p}{100}$$

obrestovalni faktor in je $p\%$ letna obrestna mera. V obeh člankih pa smo se ukvarjali le z varčevanjem. Kako pa je v primeru, ko si denar izposodimo oziroma ko najamemo kredit?

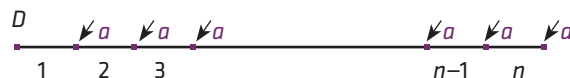
Zastavimo si naslednjo nalogo.

Radi bi kupili stanovanje. Odločili smo se, da plačamo 20% kupnine z 12.500€ gotovine, za ostali del pa najamemo kredit, ki ga bomo odplačevali deset let z enakimi letnimi obroki ob koncu leta. Kakšen bo naš letni obrok, če

je letna obrestna mera 4% in banka obračunava obresti po obrestno obrestnem računu?

Za začetek predstavimo nekaj osnovnih pojmov, povezanih s kreditnimi posli. Pri tem se seveda ne bomo mučili z dolgimi ekonomskimi definicijami, saj ste za večino teh pojmov zagotovo že slišali, nekaj pa smo jih tudi predstavili v člankih [2] in [3]. Zneske, s katerimi dolжник (kreditojemalec) vrača posojilo, v praksi običajno imenujemo *anuitete* (v našem primeru so to letni obroki). Vsaka anuiteta je sestavljena iz *obresti* in *razdolžnine*. Vemo že, da so obresti nadomestilo za uporabo denarja, ki ga je banka za določen čas prepustila kreditojemalcu. Obračunajo se za obdobje med dvema zaporednima anuitetama (v našem primeru je to obdobje eno leto) in od osnove, ki jo predstavlja ostanek dolga po prejšnjem vračilu. Ko od anuitete odštejemo obresti, dobimo razdolžnino. Za ta znesek se dejansko zmanjša dolg, ko je plačana anuiteta.

Označimo z D najeti kredit, ki ga moramo skupaj s pripadajočimi obrestmi vrniti v n enakih obrokih po a denarnih enot:



Spomnimo se, da pri podobnih problemih iz poslovne matematike vedno vse vloge in vse dvige preračunamo na isti termin. Zaradi enostavnega računanja navadno izberemo konec n -tega leta. Tako dobimo enakost, iz katere lahko izračunamo neznano količino, ki je v našem primeru letni obrok a . *Pa začnimo razmišljati.* Najeti kredit je po n letih skupaj z obrestmi vreden Dr^n . Ta znesek mora biti enak vsoti vseh obrokov skupaj z obrestmi. Hitro lahko opazimo, da se prvi obrok obrestuje $n - 1$ let in je na koncu odplačevanja kredita vreden ar^{n-1} . Drugi obrok se obrestuje $n - 2$ let in je na koncu n -tega leta vreden ar^{n-2} . Podobno velja za naslednje obroke vse do zadnjega, ki se seveda ne obrestuje. Naše razmišljanje nas pripelje do naslednje enakosti

$$\blacksquare Dr^n = ar^{n-1} + ar^{n-2} + \dots + ar + a = a(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)$$

oziroma

$$\blacksquare a = \frac{Dr^n}{(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)}.$$

Ker je vsota prvih n členov geometrijske vrste s kvocientom r in prvim členom 1 enaka $(r^n - 1)/(r - 1)$, torej

$$1 + r + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

lahko zgornjo formulo zapišemo lepše

$$a = \frac{Dr^n(r - 1)}{(r^n - 1)}.$$

Zdaj imamo dovolj informacij, da se lahko lotimo zastavljene naloge. Najprej moramo seveda izračunati, koliko denarja si bomo izposodili. Ker znaša 20% kupnine stanovanja 12.500€, je cena stanovanja $\frac{100}{20} \cdot 12.500 = 62.500$ €. Torej bo naš najeti kredit D znašal $62.500 - 12.500 = 50.000$ €. Ker bomo kredit odplačevali deset let, je $n = 10$. Upoštevamo še, da je $r = 1 + \frac{4}{100} = 1,04$. Če sedaj vstavimo podatke v zgornjo formulo, dobimo $a = 6.164,55$. Naš letni obrok bo torej znašal 6.164,55€. Za vajo lahko sami izračunate, kakšen bi bil naš letni obrok, če bi kredit odplačevali petnajst let.

Doslej smo v zvezi z letno obrestno mero govorili le o letih kot časovnih enotah obrestovanja. V praksi pa imamo opravka tudi s krajšimi časovnimi obdobji. Tako imamo lahko polletni, četrtnoletni, mesečni ali celo dnevni pripis obresti. Pri obrestno obrestnem računu imamo v takih primerih dve možnosti za izračun obrestne mere in obrestovalnega faktorja. Po prvem postopku dobimo *relativno*, po drugem pa *konformno* obrestno mero.

1. *Relativno obrestno mero* p_r za dano obrestovalno obdobje dobimo tako, da letno obrestno mero p delimo s številom obrestovalnih obdobji v enem letu. Na primer, če imamo mesečni pripis obresti, potem bo relativna obrestna mera

$$p_r = \frac{p}{12}.$$

Relativni obrestovalni faktor bo v tem primeru $r_r = 1 + p/1200$.

2. *Konformno obrestno mero* p_k dobimo iz zahteve, da moramo iz začetne glavnice G z novo obrestno mero pri pogostejšem pripisu obresti dobiti enako končno glavnico, kot pri letnemu pripisu obresti in dani letni obrestni meri. V primeru, ko imamo mesečni pripis obresti, mora torej veljati

$$Gr = G\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G\left(1 + \frac{p_k}{100}\right)^{12} = G(r_k)^{12},$$

kjer r_k označuje *konformni obrestovalni faktor*. Iz zgornje enakosti lahko hitro izpeljemo, da je

$$r_k = \sqrt[12]{r} = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} \quad \text{in}$$

$$p_k = 100 \cdot (r_k - 1) = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right).$$

Ponovno se spomnimo našega začetnega primera in se vprašamo, kolikšen bi bil naš obrok, če bi kredit odplačevali deset let ob koncu meseca in bi banka obračunavala obresti mesečno (vsi ostali pogoji ostanejo nespremenjeni). Odgovor na to vprašanje je seveda odvisen od tega, ali banka uporabi relativno obrestno mero ali pa obračunava obresti konformno. Oglejmo si oba primera.

1. Če uporabimo relativno obrestno mero, potem je relativni obrestovalni faktor $r_r = 1 + \frac{4}{1200}$. Upoštevati moramo še, da imamo sedaj $10 \cdot 12 = 120$ obrokov (vsako leto plačamo dvanajst obrokov) oziroma $n = 120$. Uporabimo zgornjo formulo

$$a = \frac{Dr_r^{120}(r_r - 1)}{((r_r)^{120} - 1)} = 506,13.$$

2. Izračunajmo še našo mesečno anuiteto, če banka uporabi konformno obrestno mero. V tem primeru je konformni obrestovalni faktor $r_k = \sqrt[12]{r} = \sqrt[12]{1 + \frac{4}{100}}$. Torej je

$$a = \frac{Dr_k^{120}(r_k - 1)}{((r_k)^{120} - 1)} = 504,42.$$

Takoj lahko opazimo, da je mesečni obrok manjši v primeru konformne obrestne mere. Razlika je sicer majhna, če pa bi bila obrestna mera p večja, bi bila tudi razlika bolj opazna.

Literatura

- [1] J. A. Čibej, *Matematika za poslovneže (1. del)*, Ekonomska fakulteta, Ljubljana 2003.
- [2] A. Fošner, *Z varčevanjem do novega računalnika*, Presek 35 (2007/2008) št. 2, str. 4-5.
- [3] A. Fošner, *Obrestno obrestni račun*, Presek 35 (2007/2008) št. 5, str. 4-5.
- [4] L. Zornada, *Zbirka nalog iz poslovne matematike in statistike*, Fakulteta za management, Koper 2003. ☒

Sence in zaporedja

NADA RAZPET

☛ Na vodoravno ravnino navpično postavljamo palice tako, da jih zapičimo na mesto, kjer se konča senca prejšnje palice. Zanimajo nas dolžine palic, če so sence enako dolge ali pa so sence členi aritmetičnega ali geometrijskega zaporedja.

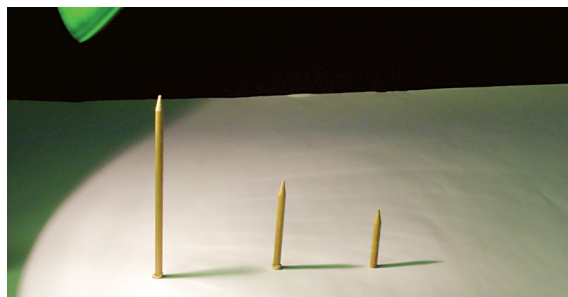
V zimskem času, ko so dnevi krajši, imamo v prostori dalj časa prižgane luči in lahko opazujemo sence, v novoletnem času pa lahko opazujemo sence tudi v soju sveč. Opazovali bomo sence navpično postavljenih palic, ki jih osvetljujemo z lučjo, za katero bomo rekli, da je točkasto svetilo, kar pomeni, da je svetilo majhno in so sence palic ostre. V našem primeru bo za to uporabna kar baterijska svetilka, ki smo ji odstranili sprednjo lečo in kovinski stožec, tako da je v ohišju ostala le še žarnica (in seveda baterijski vložek).

Palice postavljamo navpično na mizo tako, da se spodnji konec palice ujema s koncem sence prejšnje palice. Enkrat bomo izbirali dolžine palic tako, da bodo sence enako dolge, drugič pa nas bodo zanimalle sence enako dolgi palic.

■ Enako dolge sence

Iz izkušenj vemo, da so sence navpično postavljenih palic tem daljše, čim dalj stran so od svetila. Ali lahko palice mečejo enako dolge sence? Odgovor je pritrdilen, ugotoviti moramo le, kako dolge palice potrebujemo. Najprej naredimo poskus in sproti krajšajmo palice tako dolgo, da bodo dolžine senc približno enako dolge. Tak poskus smo fotografirali.

Da bo računanje lažje, naredimo skico in se dogovorimo za osnovne oznake. Navpično razdaljo od žarnice (točka S) do mize (na njej je točka S'), na kateri so postavljene palice, označimo s $h = d(S, S')$. Razdalja od točke S' do vznožja prve palice pa naj bo a . Dolžine palic označujemo z $v_1, v_2, \dots$, dolžine senc pa s $s_1, s_2, \dots$.



Slika 1. Na sliki je v zgornjem levem kotu baterijska svetilka. Različno dolge palice so izbrane tako, da mečejo približno enako dolge sence.

Ker želimo, da so vse sence enako dolge, velja

$$\blacksquare s_1 = s_2 = s_3 = s.$$

Zapišimo podobne pravokotne trikotnike

$$\blacksquare \triangle SS'A_2 \sim \triangle B_1A_1A_2 \quad \triangle SS'A_3 \sim \triangle B_2A_2A_3 \\ \triangle SS'A_4 \sim \triangle B_3A_3A_4.$$

Iz sorazmerij stranic pri naštetih podobnih trikotnikih izračunamo zaporedne višine palic:

$$\blacksquare \frac{h}{a+s} = \frac{v_1}{s} \quad \text{in od tod} \quad v_1 = \frac{hs}{a+s}, \\ \blacksquare \frac{h}{a+2s} = \frac{v_2}{s} \quad \text{in od tod} \quad v_2 = \frac{hs}{a+2s}, \\ \blacksquare \frac{h}{a+3s} = \frac{v_3}{s} \quad \text{in od tod} \quad v_3 = \frac{hs}{a+3s},$$

ali splošno

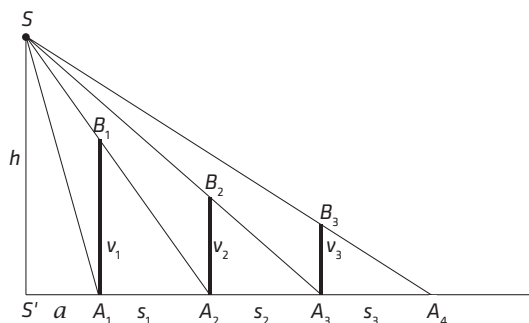
$$\blacksquare v_n = \frac{hs}{a+ns}.$$

Ugotovimo, da je višina palic odvisna od višine h , na kateri je svetilo (v našem primeru žarnica) in od razdalje prve palice od navpičnice SS' . Čim dalj stran smo od navpičnice, tem krajša je palica. Prav veliko palic pa v našem primeru v vrsto ne moremo postaviti, saj so sence z oddaljenostjo od svetila vedno manj izrazite.

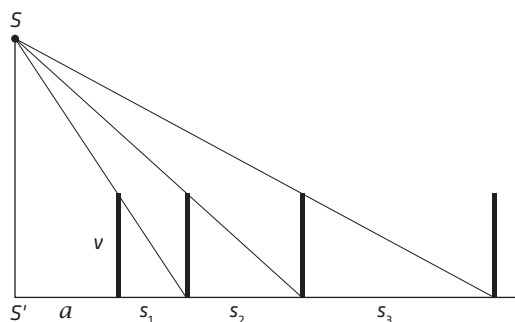
Zanimiv je primer, ko je $s = a$. Takrat velja

$$\blacksquare v_n = \frac{ha}{a+na} = \frac{h}{1+n},$$

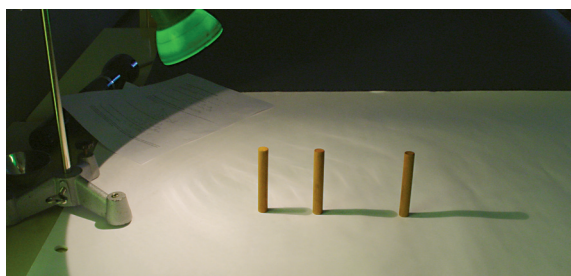
zaporedje dolžin palic je



Slika 2. Žarnica je na višini h , prva palica je v razdalji a od navpičnice (S, S') , dolžine palic označujemo s črkami $v_1, v_2, \dots$, dolžine senc pa s $s_1, s_2, s_3 \dots$



Slika 3. Sence enako dolgih palic.



Slika 4. Na sliki je v zgornjem levem kotu baterijska svetilka. Enako dolge palice so postavljene tako, da se vznožje naslednje palice ujema s koncem sence prejšnje palice. Z merjenjem ugotovimo, da so dolžine senc členi geometrijskega zaporedja.

$$\frac{h}{2}, \frac{h}{3}, \frac{h}{4}, \dots$$

Opazimo lahko, da tvorijo imenovalci zaporedje naravnih števil.

■ Dolžine senc so členi aritmetičnega zaporedja

Zdaj ko vemo, kako dolge morajo biti palice, da so sence enako dolge, nas zanima, kako dolge morajo biti palice, da bodo dolžine senc členi naraščajočega aritmetičnega zaporedja. To pomeni, da za dolžine senc velja

$$s_1, s_2 = s_1 + d, s_3 = s_1 + 2d, s_4 = s_1 + 3d, \dots$$

Tako kot v prejšnjem primeru naj bo tudi tokrat prva palica v razdalji a od navpičnice SS' .

Zapišimo še delne vsote aritmetičnega zaporedja

$$S_1 = s_1, S_2 = s_1 + s_2, S_3 = s_1 + s_2 + s_3, \dots$$

Iz razmerij istoležnih stranic podobnih trikotnikov po vrsti dobimo

$$\begin{aligned} \frac{h}{a + s_1} &= \frac{v_1}{s_1} \quad \text{in od tod} \quad v_1 = \frac{hs_1}{a + s_1} = \frac{hs_1}{a + S_1}, \\ \frac{h}{a + s_1 + s_2} &= \frac{v_2}{s_2} \quad \text{in} \quad v_2 = \frac{hs_2}{a + s_1 + s_2} = \frac{hs_2}{a + S_2}. \end{aligned}$$

Znamo napisati tudi splošno formulo

$$v_n = \frac{hs_n}{a + S_n} = \frac{h(s_1 + (n-1)d)}{a + \frac{n}{2}(2s_1 + (n-1)d)}.$$

Če je s_1 prvi člen aritmetičnega zaporedja, potem v števcu prepoznamo h pomnožen n -ti člen, saj je $s_n = s_1 + (n-1)d$, v imenovalcu pa je k razdalji a prišteta vsota n členov aritmetičnega zaporedja. Pri tem je n število palic, ki smo jih postavili v vrsto.

■ Dolžine senc so členi geometrijskega zaporedja

Če dolžine senc pri izbranih palicah lahko tvorijo aritmetično zaporedje, nas zanima še, kdaj so dolžine senc členi geometrijskega zaporedja. Najprej naredimo poskus z enako dolgimi palicami in izmerimo dolžine senc.

Da bomo verjeli, da to res drži, narišimo skico in trditev preverimo z računom.

Svetilo je zopet na višini h , prva palica je v razdalji a od navpičnice SS' , dolžine palic so $v_1, v_2 \dots$ dolžine senc pa $s_1 = s, s_2 = sk, s_3 = sk^2, \dots$

Iz že prej omenjenih podobnih trikotnikov po vrsti izračunajmo dolžine palic in upoštevajmo, da so dolžine senc členi geometrijskega zaporedja:





$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{h}{a+s} &= \frac{v_1}{s} \quad \text{in od tod} \quad v_1 = \frac{hs}{a+s}, \\ \blacksquare \frac{h}{a+s+ks} &= \frac{v_2}{ks} \quad \text{in od tod} \quad v_2 = \frac{hsk}{a+s(1+k)}, \\ \blacksquare \frac{h}{a+s+sk+sk^2} &= \frac{v_3}{sk^2}; \quad v_3 = \frac{hsk^2}{a+s(1+k+k^2)}. \end{aligned}$$

Če so palice enako dolge, je $v_1 = v_2 = v$ in za kvocient k dobimo

$$\blacksquare v_1 = v_2, \quad \frac{hs}{a+s} = \frac{hsk}{a+s(1+k)}, \quad k = \frac{a+s}{a}.$$

Izrazimo s z dolžino palice v in izračunajmo kvocient geometrijskega zaporedja k .

$$\blacksquare k = \frac{h}{h-v}.$$

Za enako dolge palice smo torej našli tak k , da so dolžine senc členi geometrijskega zaporedja. Ugotovimo tudi, da je kvocient geometrijskega zaporedja odvisen le od višine h , na katerem je svetilo in dolžine palic v in da morajo biti dolžine palic v krajše od višine h , na kateri je svetilo, saj bi bil sicer kvocient geometrijskega zaporedja negativen in bi bile dolžine nekaterih senc negativne. Opazimo, da je kvocient k večji od ena, kar je prav, saj se z oddaljenostjo od svetila sence daljšajo. ✖

0 številu π

IVAN VIDAV

➤ Število π je od nekdanj vzbujalo veliko zanimanja tako pri matematikih kakor pri nematematikih. Je namreč razmerje med obsegom in premerom kroga, krog pa velja za najpopolnejšo krivuljo.

Že v starem veku je Arhimed izračunal, da je π približno enak $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Veliko boljši približek je ulomek $\frac{355}{113}$. Vendar števila π ni mogoče predstaviti z nobenim ulomkom, ker ni racionalno temveč iracionalno število. To dejstvo je dokazal leta 1761 švicarski matematik Lambert. (Tudi razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, ki je enako $\sqrt{2}$, je ira-

cionalno število. To so odkrili že stari Grki v starem veku.)

Če razvijemo π v decimalni ulomek, dobimo

$$\blacksquare \pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\dots$$

Za decimalno piko sledi neskončno decimalk, ki se ne ponavljajo periodično, ker π ni racionalen. Zato v njegovem desetiškem zapisu ne moremo razbrati nobene zakonitosti med števki. Isto seveda velja, če razvijemo π v dvojiškem ali kakem drugem številskem sistemu. Ljudje z bujno domišljijo so zato prišli na misel, da je morda v zaporedju števk števila π na neki skriti način zapisana usoda sveta, oziroma, da tiči v njem kako pomembno sporočilo. Do tega sporočila bi prišli, če bi odkrili ključ, v katerem je šifrirano, in seveda izračunali dovolj decimalk števila π . Včasih je bilo to računanje sila zamudno delo. Danes so ga olajšali zmogljivi računalniki in z njimi so izračunali π na milijone mest natančno.

Kakor rečeno, v zaporedju števk števila π ni kakšne razvidne zakonitosti niti v desetiškem niti v kakem drugem sistemu. Pred kratkim pa je R. J. Duffin z univerze Carnegie Mellon, Pittsburgh, opisal, bolj za šalo kakor za res, neki razvoj za realna števila, v katerem se π izraža na videz presenetljivo preprosto. Oglejmo si ta razvoj!

Naj bo x dano pozitivno število. Pomnožimo ga zaporedoma z vsemi naravnimi števili $1, 2, 3, \dots$. Denimo, da smo x pomnožili z n . Od produkta nx odštejemo njegov celi del, ostanek, ki leži med 0 in 1, označimo z (nx) . (Celi del danega realnega števila je največje celo število, ki ne presega tega števila.) Če je nx celo število, je seveda celi del enak nx in je v tem primeru ostanek $(nx) = 0$. V splošnem pa velja $0 \leq (nx) < 1$. Pomnožimo zdaj (nx) s 7 in si oglejmo celi del produkta $7(nx)$. Ta celi del označimo z a_n . Ker je $7(nx) < 7$, je a_n eno izmed števil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Na opisani način dobimo za vsak n neko število a_n , ki ga imenujemo n -ta števka števila x .

Zapišimo lepo po vrsti vse številke

$$\blacksquare a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

Temu zaporedju bomo rekli Duffinov razvoj števila x .

Za zgled poiščimo Duffinov razvoj od $x = \frac{1}{3}$. Pri $n = 1$ imamo $(nx) = (x) = \frac{1}{3}$. Največje celo število, ki ne presega produkta $7(x) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, je 2 in je

zato $a_1 = 2$. Pri $n = 2$ imamo $(2x) = \frac{2}{3}$ in $7(2x) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$, torej $a_2 = 4$. Nadalje je $3x = 1$, $(3x) = 0$, $7(3x) = 0$, tako da je $a_3 = 0$. Podobno izračunamo $a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 0$ itd. Duffinov razvoj za $x = \frac{1}{3}$ se glasi

■ 240 240 240...

Trojka števk 240 se periodično ponavlja.

Oglejmo si zdaj razvoj za π . V tem primeru je $(\pi) = \pi - 3 = 0,14159\dots$ in $7(\pi) = 0,99114\dots$, torej $a_1 = 0$. Nadalje imamo $(2\pi) = 0,28318\dots$ in $7(2\pi) = 1,98229\dots$, tako da je $a_2 = 1$. Podobno izračunamo $(3\pi) = 0,42477\dots$, $7(3\pi) = 2,97344\dots$, se pravi $a_3 = 2$. Če tako nadaljujemo, dobimo po vrsti $a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_7 = 6$, potem pa spet od začetka: $a_8 = 0, a_9 = 1$ itd. Za π smo našli tale Duffinov razvoj

■ 0123456 0123456 0123456 012...

Sedmerica zaporednih števk 0123456 se periodično ponavlja. Dobljeni razvoj je res zelo pregleden. Pa teče to tako lepo v nedogled? Žal moramo povedati, da je imel tu vrag svoje prste vmes in je red pokvaril. Šestnajstkrat se ponovi omenjena sedmerica števk, na stotrinajstem mestu se red podre, namesto 0 se tam pojavi števka 6. Na koncu postavimo bralcu nekaj vprašanj:

1. Kakšen je Duffinov razvoj za $x = 3\frac{1}{7}$?

2. Kje tiči razlog, da se v razvoju števila π sedmerica števk 0123456 ponovi šestnajstkrat? (Arhimedov približek $3\frac{1}{7}$ za π je nekoliko prevelik, ulomek $\frac{355}{113}$ nekoliko premajhen. Pišimo $\pi = 3 + \frac{1-\epsilon}{7}$, kjer je ϵ pozitiven. Ocenimo ϵ .)

3. Denimo da poznamo celi del števila x in njegov Duffinov razvoj. Ali je s temi podatki x določen?

Literatura

[1] R. J. Duffin, *The Patron Saint of Mathematics*, The Math. Intelligencer, Vol. 15 (1993), no.1, str.52 ✖

Prispevek O številu π je bil originalno objavljen v 22. letniku Preseka. Avtorju se zahvaljujemo za dovoljenje za ponatis.

Družinska

REŠITEV NALOGE

BORIS LAVRIČ

➔ Naj bo $19xy$ Simonova rojstna letnica, zapisana v desetiškem številske sestavu. Potem nam Simonov odgovor na dedovo vprašanje da enačbo

■ $(1900 + 10x + y) + (1 + 9 + x + y) = 1990$,

ki jo lahko poenostavimo v $11x + 2y = 80$. Ker velja $1 \leq y \leq 9$ in je poleg tega x sod, je $x = 6$ in tedaj $y = 7$. Simon je torej praznoval 23. rojstni dan.

Označimo zdaj z $19ab$ Jakovo rojstno letnico, za-
pišimo enačbo

■ $(1900 + 10a + b) + 1 \cdot 9 \cdot a \cdot b = 1990$,

ki sledi iz njegovega odgovora, in jo poenostavimo. Dobimo $10a + b + 9ab = 90$, od koder vidimo, da je vsota $a + b$ deljiva z 9 in je pri tem $ab < 10$. Zato velja $a + b = 9$, substitucija $b = 9 - a$ pa nam da razcepno kvadratno enačbo $(a - 1)(a - 9) = 0$ z rešitvama $a_1 = 1$ in $a_2 = 9$. Pogojem naloge ustreza le $a = 1$, torej je ded rojen leta 1918. Na podoben način lahko ugotovimo, da ded ne more biti rojen v prejšnjem stoletju.

Za odgovor na dodatno vprašanje se najprej lotimo Jakove rojstne letnice. Tudi v tem primeru jo zaznamujmo z $19ab$ in sestavimo ustrezno enačbo $(1900 + 10a + b) + 9ab = N$, kjer je N leto objave ponatisa naloge, torej $1991 \leq N \leq 2008$. Jaka ima prav gotovo več kot 27 let, zato je $9ab > 27$, od koder sledi $ab \geq 4$. Ker je $a \geq 1$ in tedaj $10a + b \geq 10$, velja $9ab \leq 2008 - 1900 - 10 = 98$, torej je $ab \leq 10$. Iz ocene

■ $91 - 9ab \leq 10a + b \leq 108 - 9ab$

z uporabo dejstva, da sta a in b števki, po kratkem računu dobimo vse možne rešitve $a = 1, b = 9$; $a = 2, b = 4$; $a = 5, b = 1$. Jaka bi bil lahko rojen leta 1919, 1924 ali 1951. V prvem primeru bi bilo leto



→ objave ponatisa 2000, v drugem in tretjem pa 1996. Podobno lahko vidimo, da Jaka ni bil rojen v 19. stoletju.

Enačba za Simonovo rojstno letnico je $1900 + 10x + y + 10 + x + y = N$, torej

- $11x + 2y = 90$ za $N = 2000$,
- $11x + 2y = 86$ za $N = 1996$.

V prvem primeru je edina rešitev $x = 8$, $y = 1$ (ta da Simonovo rojstno letnico 1981), v drugem pa ni nobene. Edina rešitev naloge je torej leto 2000, ko je bil Jaka star 81 let, Simon pa 19. ✖

Pojče sipine

JANEZ STRNAD

➔ V eni od prejšnjih števil je Presek opisal živi pesek kot mešanico peska in vode. Ostanimo pri pesku, a to pot se zanimajmo za suhega. Suhi pesek je *zrnata snov*, ki se nenavadno vede. Čeprav ga sestavljajo delci trdnine, lahko teče podobno kot tekočine. Na zemeljski obli je veliko peska zbranega v *sipinah*. To so po več kilometrov dolgi in do več sto metrov visoki nanosi peska, ki jih je naredil veter, pogosto v puščavah. Večino sipin sestavljajo zrnca kremenca, le sipine na Havajih so iz zrnec apnenca iz školjčnih lupin. Značilni premer zrnec meri od desetine do nekaj desetih milimetra. Sipine spreminjajo obliko, se premikajo in vplivajo na okolico, zato jih vneto raziskujejo.

Nekatere od sipin oddajajo značilen zvok, ki traja od dela sekunde do več minut. Včasih ga je slišati na razdaljo več kilometrov. Ob izviru zna biti zvok dokaj glasen, glasnost lahko doseže 100 decibelov, pri čemer 120 decibelov že povzroča bolečino v ušesih.

O pojavu je med prvimi poročal svetovni popotnik Marco Polo pred več kot sedemsto leti: „Zli duhovi na trenutke zrak napolnijo z zvoki vseh vrst glasbenih instrumentov in tudi bobnov in ženketov orožja.“ Različne poslušalce je zvok spominjal na zvonove, trobente, orgle, ladijske rogove, oddaljen topovski ogenj, grom, nizko leteče letalo, brenčanje telegrafskih žic, instrument avstralskih praprebivalcev. Včasih s precej domišljije rečemo, da sipine „pojejo“. Zelo verjetno o zvoku sipin ne boste slišali v šoli,



še posebej zato, ker vprašanje še ni do kraja rešeno. Vseeno je o njem mogoče povedati več zanimivega.

Veliko sipin ne oddaja zvoka. Doslej po vsej zemeljski obli poznajo vsaj enaintrideset območij s pojočimi sipinami. Naštejmo nekatera od njih: v Afriki v Alžiriji, Maroku, Libiji, Namibiji, Južnoafriški republiki; v Aziji na Kitajskem, v Katarju, Omanu; v Severni Ameriki v Nevadi, Michiganu, Kaliforniji; v Srednji Ameriki v Mehiki; v Južni Ameriki v Čilu in še na Havajih. Naj takoj omenimo, da je več območij, na katerih slišimo žvižgajoč zvok, ko po pesku ob obali morja, jezer ali rek ali na sipinah hodimo. Tudi ta zvok različno opišejo, včasih rečemo, da pesek škriplje. Obe vrsti zvoka imata podoben izvir, a tu se bomo omejili v glavnem na pojoče sipine. Samo na koncu bomo bežno omenili drugo vrsto zvoka.

Pojočje sipine so začeli podrobneje raziskovati konec 19. stoletja. Do danes se je nabralo veliko gradiva in nekaj razlag, ki si včasih med seboj nasprotujejo. Začnimo s tistimi, o katerih se raziskovalci strinjajo. Na položnejši privetrni strani sipine veter nalaga pesek. Navadno je pesek nastal daleč od sipine tako, da so se zrnca na poti do sipine dobro obrusila. Za pojoče sipine so značilna dokaj okrogla zrnca, ki so vsa približno enako velika. Veter zrnca postopno potiska proti vrhu sipine. Na odvetni strani sipine se prožijo plazovi, ko postane dovolj strma in nagib preseže približno 34° . Sipina ima plastovito zgradbo, na vrhu so najbolj rahle plasti. Omenili smo, da so zrnca približno enako velika in je velikost značilna za sipino. V pesku ne sme biti manjših prašnih delcev. Večinoma jih iz sipine spere dež, čeprav ta navadno ni pogost. Pesek tudi ne sme biti moker. Zjutraj mora sonce najprej pregnati nočno vlago, preden sipine začnejo oddajati zvok. Zvok je značilen za sipino in ima razmeroma nizko frekvenco okoli 100 nihajev na sekundo. Zvok s tolikšno frekvenco oddajajo na primer transformatorji in elektromagnetni (frekvenca izmeničnega toka je 50 nihajev na sekundo).

Zvok sipin nastane drugače kot zvok glasbenih instrumentov. Pri teh zbudimo telo, na primer struno, opno ali stebriček zraka, da niha s frekvenco, ki je zanj značilna. V ta namen telo zmotimo s kladivcem ali lokom, z udarcem, s pihanjem. Večina raziskovalcev misli, da zvok pri sipini nastane, ko se na strmi strani sam od sebe sproži plaz. Plaz z debelino okoli deset centimetrov polzi navzdol, tako da se zrnca na vrhu gibljejo najhitreje in hitrost z globino pojema

in zrnca na spodnji meji mirujejo. Predstavljajte si, da premaknete zgornjo karto v skladovnici igralnih kart tako, da spodnja karta ostane pri miru. Sosednji tanki plasti zrnec in karti se gibljeta podobno kot rezili škarij. To je *strižno gibanje*. Prevladuje mnenje, da zvok nastane v plaz, v katerem se tanke plasti zrnec peska strižno gibljejo druga glede na drugo. Zvok naj torej ne bi bil povezan neposredno z vetrom ali s sipino kot celoto ampak predvsem z zrneci peska. Poskuse delajo z votlim medeninastim valjem, ki poskakuje po nagnjeni vrsti enakih valjev v spremenljivem razmiku. S tem dobijo podatke, ki so zanimivi tudi za snežne plazove, čeprav se snežinke za razliko od zrnec peska lahko sprimejo.

V zadnjih letih sta zvok sipin raziskovala Stéphanie Douady in njegov nekdanji učenec Bruno Andreotti v okviru raziskovalne skupine *Snov in kompleksni sistemi* na eni od pariških univerz. Med raziskovanjem sipin sta postala pozorna na zvok in sta mu posvetila vse več pozornosti. Ugotovila sta, da plaz, ki ga umetno sprožimo, povzroči zvok z enako frekvenco, kot jo ima plaz, ki se sproži sam od sebe. V tej zvezi sta naredila veliko poskusov. Pozneje, ko je bilo treba pojasniti njihov izid, pa sta se njuna pogleda ločila in onadva sta se razšla. Nazadnje sta objavila ločena članka, Andreotti je prešel tudi na drugo ustanovo. Kamen spotike je bilo vprašanje, kaj povzroči, da se zrnca gibljejo ubrano. Douady je trdil, da nastane zvok zaradi pojavov v strižni plasti sami, ko zrnca zgornje tanke plasti poskakujejo čez zrnca spodnje tanke plasti z enako frekvenco in nastane stoječe valovanje ter s tem ubrano gibanje zrnec v sosednjih tankih plasteh. Andreotti pa je nasprotno trdil, da trki med zrneci v strižni plasti zbudijo prožno valovanje, ki potuje po površju sipine in povzroči, da postanejo trki ubrani.

Andreottijev članek je izšel konec leta 2004. V njem je opisal poskuse, pri katerih je v zraku nad plazom meril tlak in premikanje plasti na površju in pod njim ter ugotovil, da sta pojava sočasna. Douady je po precejšnjih težavah v isti reviji leta 2006 objavil članek s šestimi sodelavci. Tako je imel več časa za temeljite poskuse. Meril je frekvenco zvoka sipin v Maroku in na dveh mestih v Čilu ter upošteval podatke za ameriško sipino. Pri tem je frekvenco meril na nekaj nihajev na sekundo natančno. Merjenja so podprla zvezo, da je frekvenca obratno sorazmerna s kvadratnim korenom iz srednjega premera zrnec, ki so jo izpeljali leta 1966:

Nagradna križanka

[illegible]

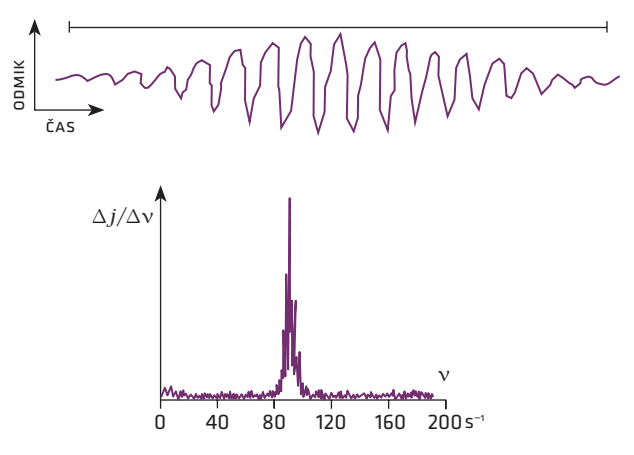


NAGRADNI RAZPIS

➔ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **13. junija 2008**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov paket**. ❌



15
nadaljevanje
s strani



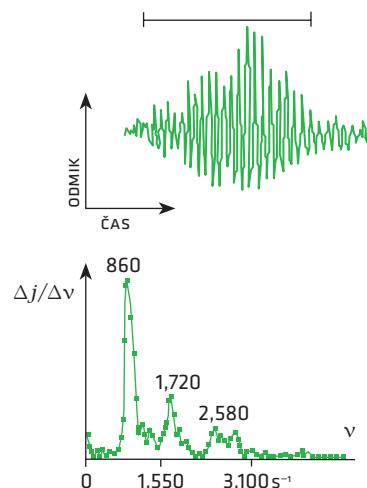
Slika 1. Časovni potek odmika dela zraka od ravnovesne lege – vodoravna črta ustreza 0,1 sekunde – (zgoraj) in spekter zvoka sipine (spodaj). V spektru je na vodoravno os nanosena frekvenca ν , na navpično pa del jakosti na ozkem frekvenčnem pasu, deljen s širino pasu $\Delta j/\Delta \nu$. Zastopane so samo frekvence na ozkem frekvenčnem pasu okoli osnovne frekvence.

■ $\nu = 0,4 \sqrt{g/2r}$.

Koeficient 0,4 so dobili z merjenji, utemeljili pa so ga tudi z računom. Zveze ni težko razumeti. Na eni strani je frekvenca enaka strižni hitrosti, to je razmerju med spremembo hitrosti v plasti in debeline plasti $\nu = \Delta v_x / \Delta y$. Na drugi strani težni pospešek g poganja gibanje, velikost kroglic, na primer premer $2r$, pa ga zavira.

Douady je izvedel še dve vrsti poskusov. Pri prvi vrsti je z deskami omejil kanal na strmem delu sipine in meril frekvenco zvoka pri plazovih, ki jih je sprožil umetno. Nato je nadaljeval poskuse s peskom iz sipine v laboratoriju. V plasti peska med valjema, ki se je skupaj z valjema vrtela, je mirujoče vodoravno krilce potovalo skozi pesek. Meril je frekvenco v odvisnosti od debeline plasti in hitrosti peska glede na krilce.

Vse kaže, da je za zvok pomembno, kakšno je površje zrnca. Mislili so, da so zrnca prevlečena z zelo tanko plastjo kremenovega gela. Sestava te plasti ni gotova, ne dvomijo pa, da plast obstaja. Po določenem številu Douadyjevih poskusov je namreč pesek prenehal oddajati zvok.



Slika 2. Časovni potek odmika dela zraka v odvisnosti od časa – vodoravna črta ustreza 0,025 sekunde – (zgoraj) in spekter zvoka pri hoji po pesku (spodaj). V zvoku so zastopane frekvence okoli osnovne frekvence in okoli njenih večkratnikov. Ta zvok traja le kratek čas.

Sipina	$2r$	$0,4 \sqrt{g/2r}$	izmerjena ν
Ghord Lahmar, Tarfaya, Maroko	0,16 mm	99 s^{-1}	105 s^{-1}
Mar de Dunas, Copiago, Čile	0,21 mm	86 s^{-1}	90 s^{-1}
Cerro Bramador, Copiago, Čile	0,27 mm	76 s^{-1}	75 s^{-1}
Sand Mountain, Nevada, ZDA	0,34 mm	68 s^{-1}	63 s^{-1}

↑↑↑ Tabela.

Vsi raziskovalci sipin se s tako razlago ne strinja. Ena od skupin zagotavlja, da ni posebnega pojava, ki bi skrbel za ubrano gibanje zrnca. Plasti v sipini naj bi kot valovni vodnik prevajale le zvok z določeno frekvenco.

Nazadnje omenimo še pesek, ki oddaja zvok, ko hodimo po njem. Tudi ta zvok izvira od strižnega gibanja med tankimi plastmi zrnca. Vendar to gibanje poganja sila noge, medtem kot gibanje plasti v sipinah poganja teža. V zvoku sipine je zastopana ena sama frekvenca, v zvoku pri hoji pa je zastopana osnovna frekvenca in nekaj njenih harmoničnih večkratnikov. Ta zvok traja precej krajši čas. ✕

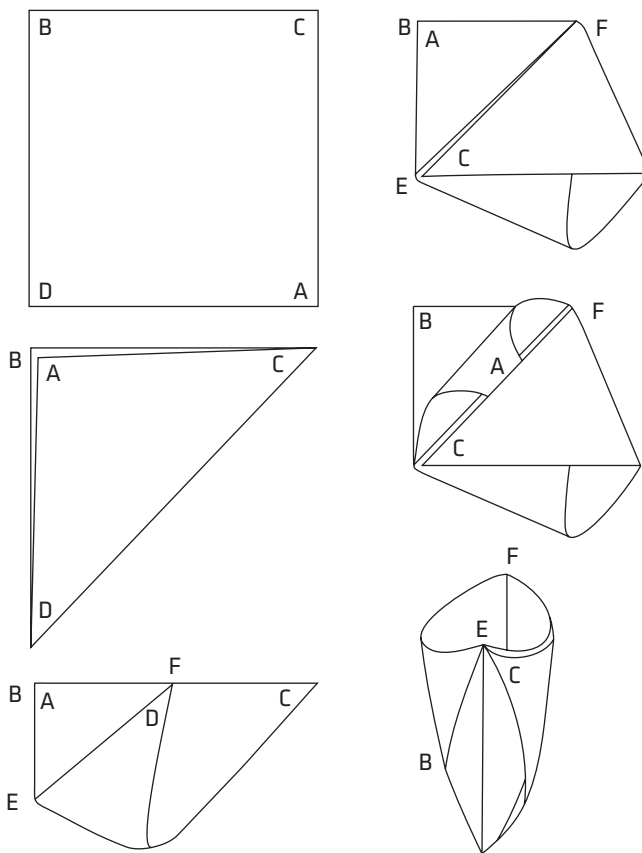
Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA

28. Ali lahko skuhaš čaj na sveči v papirnatem kozarcu?

POSKUS. V papirnat kozarček nalij šilce (3 cl) vode. Če nimaš majhnega kozarčka pri roki, ga zgubaj po priloženi skici iz kosa pisarniškega papirja ($21\text{ cm} \times 21\text{ cm}$ ali $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$) (Povzeto po M. Kuretu: Veselja dom, II. knjiga, Slovenčeva knjižnica, Ljubljana 1942, str. 387). V vodo vrzi nekaj zrnč ali vrečico čaja. Hvaležen je hibiskus, ki ne rabi zelo visoke temperature in živo obarva vodo. Kozarec drži tik **nad** plamenom sveče, da se ne bodo nabirale saje. Ko voda zavre (ali ko se vsaj segreje na primerno temperaturo), je napitek je pripravljen. **Ali je to res, ali bo kozarec prej zgorel?**

RAZMISLEK. Toplotni tok prevzame voda. Gostoto toplotnega toka skozi papir $j = Q/St$ ocenimo iz toplote, ki je potrebna, da voda zavre ($Q = mc_p(T_2 - T_1)$), $m = 30\text{ g}$, $c_p = 4200\text{ J/kgK}$, $T_1 = 20^\circ\text{ C}$, $T_2 = 100^\circ\text{ C}$). Izpostavljena ploskev kozarca je kakih $S \approx 5\text{ cm}$, čas do vrenja t pa izmerimo. Če vodo le segrejemo, je pač $T_2 = 60^\circ$ do 80° . Iz gostote toplotnega toka ocenimo temperaturno razliko med toplo in hladno stranjo papirja: $j = \lambda \Delta T/d$, pri čemer je toplotna prevodnost papirja $\lambda \approx 0,6\text{ W/mK}$ ter debelina papirja $d = 0,1\text{ mm}$. Ali je ta temperaturna razlika majhna, ali je tako huda, da papir zgorel?



Slika. Kako zgubamo kozarec

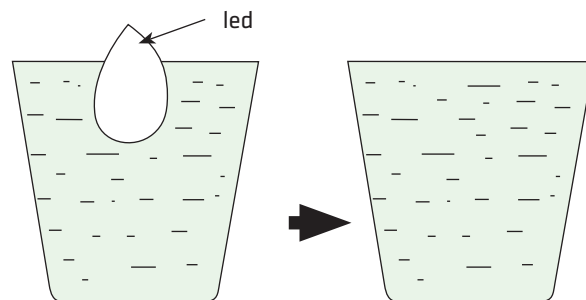
■ Odgovora na vprašnji iz prejšnjih števil

26. Stisljivost snega. Ko sneži, nastavi valjasto posodo, da se napolni s snegom. Če ne sneži dovolj, pa previdno prestrezi polno posodo svežega snega. Izmeri višino snega. Nato z vso silo stisni sneg z okroglo ploščico in izmeri, za kolikšen faktor si ga stisnil. Ponovi poskus za različne vrste snega (pršič, južni sneg, uležan sneg, sren).

➔ **ODGOVOR.** V Ljubljani kar ni hotelo snežiti, na smučanju pa sem pozabil na to nalogo. Potrebno bo iti v hribe in narediti nekaj meritev!

Po mojih izkušnjah se rahel sneg stisne tipično za faktor 10, kar je v skladu s podatki v literaturi. Pogledal sem na svetovni splet (GOOGLE → Compressibility of snow → recimo članek P. I. Perla: *Failure of Snow Slopes*). Avtor omenja, da je gostota snega 30-300 kg/m³, na pobočjih se stisne največ na 500 kg/m³, pri 800 kg/m³ pa sneg že „poleden“ (zrna se stisnejo in ne drsijo več, ker presledki z zrakom niso več povezani). Omenjene raziskave so pomembne za razumevanje proženja plazov.

27. Arktični led. Na Severnem ledenem morju (Arktičnem oceanu) plava ledena plošča, debela v povprečju dva metra. Poleti se več kot pol ledu stali. Koliko bi se spremenila gladina morja, če bi se ves led stalil? Za lažji razmislek napravi naslednji poskus. V kozarec vode daj kos ledu in dolij toliko ledeno mrzle vode, da bo gladina vode segla točno do roba kozarca. Verjetno bo zaradi površinske napetosti celo za spoznanje višja. Del ledu bo kukal ven. (Koliko?) Počakaj, da se led stali. Ali bo gladina vode (a) padla, (b) ostala ista, ali (c) narastla, tako da bo nekaj vode steklo čez rob?



Slika. „Ledena gora“

ODGOVOR. Po Arhimedovem zakonu je sila vzgona enaka teži izpodrinjene tekočine. Torej bo košček ledu izpodrinil enako tekočine, kot jo bo zapolnila voda po taljenju – gladina v kozarcu ostane enaka. Ali si to preveril s poskusom?! Potemtakem se zaradi taljenja plavajoče ledene plošče na Severnem ledenem morju gladina morja ne bi dvignila. Dvignila pa bi se seveda zaradi toplotnega raztezanja vode, taljenje ledenikov in ledenih plošč na celinah in otokih, dogajanja na Antarktiki ter še zaradi drugih vzrokov. ☹

	1	E	K	V	I	V	A	L	E	N	T	1																				
	2	K	R	E	M	A	T	O	R	I	J	2																				
	3	S	T	R	E	L	A	M	Z	3																						
	4	T	I	M	I	T	A	K	A	4																						
	5	I	N	O	S	T	R	A	N	E	C	5																				
6	F	R	A	N	C	E	M	O	T	O	6																					
7	K	I	P	T	A	N	T	A	V	A	7																					
8	H	A	R	F	A	L	O	I	R	E	T	8																				
9	M	I	N	I	A	T	U	R	A	M	I	C	R	O	S	O	F	T	M	A	R	I	B	O	R	M	I	R	L	I	K	9
10	O	P	A	Ž	O	S	A	K	O	Š	10																					
11	T	O	N	A	R	E	D	V	R	A	T	11																				
12	I	T	N	T	N	I	V	A	L	I	F	T	12																			
13	V	A	R	I	A	C	I	J	S	K	I	R	A	Č	U	N	O	J	E	13												
14	L	O	Č	N	I	K	T	A	R	O	K	R	I	S	B	A	14															
15	R	A	B	Č	A	M	A	Č	V	A	B	I	K	A	R	P	L	I	N	V	Z	L	E	T	15							
16	A	M	I	N	D	I	J	I	T	R	I	J	D	A	L	J	I	Š	Č	E	H	I	T	I	16							
17	F	U	N	K	C	I	O	N	A	L	N	A	N	A	L	I	Z	A	Š	Č	E	N	E	J	E	K	17					
18	T	S	V	A	D	B	A	O	G	N	J	E	N	I	K	P	E	K	A	Č	A	R	A	18								

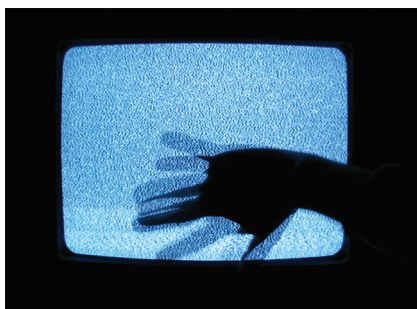
REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 35/5

➔ Za nagradno križanko iz pete številke letošnjega Preseka smo prejeli 18 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasil **Osemdesetletnica rojstva**. Izžrebani reševalci, ŽIGA GOSAR iz Ljubljane, OSNOVNA ŠOLA FRANCE TA PREŠERNA iz Maribora in TADEJ STROJANŠEK iz Blance so razpisane nagrade prejeli po pošti. ☹

Utripajoč zaslón

ODGOVOR NALOGE

MOJCA ČEPIČ



✚ Najprej primerjajmo, kako sta videti mahajoči roki pred navadno belo steno ali pred televizijskim zaslonom starega tipa.

Primerjava obeh slik kaže precejšnje razlike. Uporaba digitalnega fotoaparata za predstavitev tega pojava ni najbolj primerna. Oko namreč vidi roko bolj zabrisano kot tak fotoaparat, ki informacijo zapisuje vrstično (slika levo). Desna slika prikazuje roko pred zaslonom televizije s katodno cevjo. Tudi ta slika ni prava podoba tega, kar vidimo s prostim očesom. Digitalni fotoaparat namreč drugače zaznava kontraste med svetlim delom zaslona in delom, ki ga senči roka. Prav tako je odpiralni čas zaslonke daljši, kot so najkrajši časi, v katerih oko še zazna razlike. Zato so nekateri prsti videti bolj svetli, drugi pa se prekrivajo in so videti kot senca dveh svetil. Obe sliki vseeno lahko služita za orientacijo, kaj opazovati.

Zakaj pravzaprav vidimo takšno sliko? V katodni cevi je vir elektronov, ki jih pospešuje napetost in v curku padajo na zaslon. Zaslon je prevlečen s snovmi, ki zažarijo rdeče, zeleno ali modro, ko nanj pade elektronski curek. Če si zaslon ogledamo s povečevalnim steklom, medtem ko televizija deluje, vidimo, da je prepreden z rdečimi, zelenimi in modrimi črtami. Tuljave, po katerih teče tok, nadzorovano odklanjajo elektronski curek tako, da po vrsti obiše vse točke na zaslonu. Dodatna informacija krmili še drugo lastnost svetlečih pik, njihovo svetlost. Podrobnejši opis, kako deluje zaslon televizije s ka-

todno cevjo, je mogoče najti marsikje, a to ni namen naše poizkuševalnice. Lastnosti „stare“ televizije smo pri našem poskusu le uporabili.

Če smo dobri opazovalci, lahko ob mahanju roke pred belim zidom opazimo nekaj podrobnosti. V skrajnih legah roke je videti nekaj več podrobnosti, v sredini pa je roka zabrisana oziroma bi lahko rekli, da je razmazana; da se hkrati nahaja na več krajih.

Okoli zazna informacije, ki jih vanj prenese skozi zenico vpadla svetloba. Svetloba se od roke odbija, pada v oči in na očesnem ozadju nastane slika. Ker oko ne reagira hipno, časovne signale namreč loči s časovno ločljivostjo, v možgane prenese informacijo iz kratkega časovnega obdobja, ko se je roka nahajala na različnih mestih hkrati. Zato je roka videti razmazana.

Nekateri svetlobni viri pa okolice ne osvetljujejo neprestano. Če so časovni intervali, v katerih so svetlobni viri ugasnjeni, daljši od časovne ločljivosti očesa, vidimo take vire kot utripajoče. Če pa je frekvenca ugašanja in prižiganja – utripanja – vira krajša od časovne ločljivosti očesa, pa tega ne zaznamo. Še vedno pa je okolje v taki svetlobi lahko videti drugačno, če so v njem gibajoči se predmeti. Kadar se predmeti gibljejo hitro in se v času „teme“ premaknejo toliko, da oko to zazna, bo gibanje videti „razsekano“ ali nezvezno. In natanko tako je videti roka pred televizijskim zaslonom. Televizijski zaslon s katodno cevjo namreč utripa. ✖

Slika. Roka pred navadno belo steno je videti zabrisana (levo). Mahajoča roka pred televizijskim zaslonom starega tipa je hkrati vidna na več mestih. Vmesni položaji rok manjkajo (desno).

Kozarec z vodo

MOJCA ČEPIČ

Potrebujemo

- ovalen kozarec s čim bolj gladkimi stenami,
- vrč navadne vode.



Slika.

➤ Tudi tokratna poizkuševalnica bo kratka. Osredotočila se bo na dogodek, ki ste mu priča vsak dan. Če boste poskušali odgovoriti na zastavljeno vprašanje, preden boste poskus izvedli, boste tudi ugotovili, ali ste dober opazovalec ali ne. Če se ne spomnite, da bi pojav kdaj opazovali, poglobili pa se boste v svoje spominske slike pred izvedbo poskusa in boste odgovorili pravilno, imate najverjetneje slikovni (ejdetski) spomin.

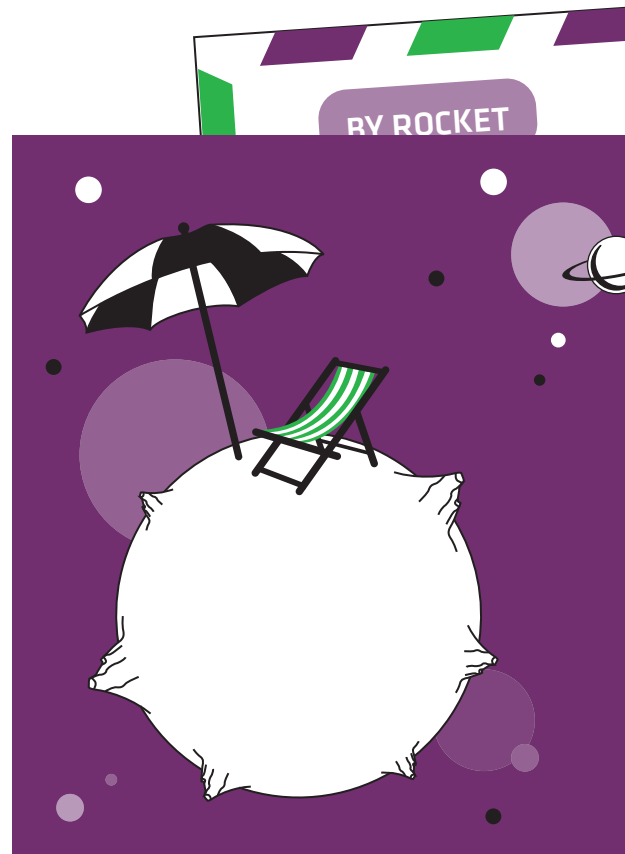
Če nimate kozarca z gladkimi stenami, je dovolj dober tudi običajen kozarec za vlaganje, ki smo ga uporabili pri poskusu mi.

Kozarec primite v roko in pogledjte vanj od zgoraj tako, kot kaže slika. Glejte pod takšnim kotom, da boste gledali skozi gornjo odprtino ter boste skozi stekleno steno kozarca videli svoje prste, ki držijo kozarec. To je običajna drža kozarca takrat, ko polnega nesemo k ustom. Tudi gledamo običajno vanj, ker podzavestno nadziramo gibanje roke, saj si ne želimo vode zlititi za vrat. To je torej nekaj, kar počnemo vsak dan in to večkrat.

Poskusite se spomniti, kako so videti prsti, ko je v kozarcu voda. Opišite jih.

Potem poskus še izvedite. Kozarec držite v suhi roki. Če imate roke vlažne, jih prej obrišite s papirnato brisačo. V kozarec glejte tako, kot je bilo prej opisano za prazen kozarec. Vanj počasi nalijte vodo in opazujte, kako so videti tisti prsti, ki jih z notranje strani prekrije voda. Opišite, kako vidite prste.

Poskus ponovite še z mokrimi prsti. Opišite, kako vidite prste sedaj. ✖



REŠITEV SUDOKU S STRANI 2

↓↓↓

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	1	8	4	7	6	2	3	9	5
B	2	6	3	8	5	9	1	4	7
C	7	9	5	3	1	4	8	6	2
D	3	5	8	6	9	1	2	7	4
E	6	2	7	4	8	3	9	5	1
F	9	4	1	5	2	7	6	8	3
G	8	3	6	1	4	5	7	2	9
H	4	1	9	2	7	8	5	3	6
I	5	7	2	9	3	6	4	1	8



Premeri kraterjev in višina gora na Luni –

ASTRONOMSKA VAJA

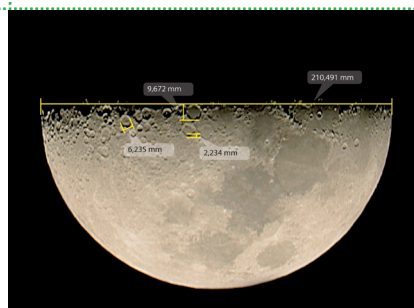
BORIS KHAM

➔ V astronomiji se večkrat vprašamo, kako izmeriti velikosti nebesnih teles ali kako oceniti razsežnosti gora, kraterjev in dolin na planetih. Take meritve je najlažje izpeljati na naši Luni. Ogledali si bomo nekaj primerov, kako ocenimo velikosti kraterjev in višino gora na Luni.

■ Premeri kraterjev na Luni

Vaja ima dva dela. Najprej s teleskopom fotografiramo Luno ob prvem krajcu. Kdaj točno nastopi prvi krajec, poizvemo na svetovnem spletu ali v efemeridah. S pomočjo karte Lune se odločimo, katerim kraterjem bomo ocenili premer. Nato na posnetku najprej določimo premer Lune v milimetrih (npr. s pomočjo programa CorelDraw11), potem izmerimo premer določenega kraterja v milimetrih (glej sliko 1). Ker kraterji niso idealni krogi, meritev večkrat ponovimo, ob tem pa tudi obnovimo, kaj je to relativna in kaj absolutna napaka. Premer kraterja dobimo iz razmerja med njegovim premerom in premerom Lune v milimetrih na sliki, saj poznamo premer Lune, ki znaša 3476 kilometrov. Dobljeno oceno lahko primerjamo s podatki iz literature.

Ob vaji se porajajo nekatera vprašanja. Za katere kraterje bomo dobili solidno oceno; za kraterje ob terminatorju ali za kraterje, oddaljene od njega? Ali je ta metoda uspešna, če imamo sliko polne Lune?



Slika 1. Posnetek Lune ob prvem krajcu in merjenje

Izkaže se, da vaja ni čisto preprosta. Poskusite!

■ Približna metoda merjenja višine gora na Luni

Višino gora ob terminatorju najlažje ocenimo ob prvem in zadnjem krajcu Lune, saj si lahko pomagamo z enostavno geometrijo in nekaterimi poenostavitvami sicer bolj zapletene naloge.¹ Tedaj gore oziroma pobočja kraterjev ob terminatorju tudi mečejo najdaljše sence in so kraterji zato dobro vidni. Denimo, da se gora nahaja v točki B , njen vrh pa v T (glej sliko 2). $B'B$ je oddaljenost gore od terminatorja, SB pa je polmer Lune. Gora meče senco, ki na površju Lune leži med točkama B in T' . BT' je v resnici lok, a je njegova ukrivljenost majhna, saj je dolžina sence majhna v primerjavi z obsegom Lune, zato si jo lahko zamislimo kot stranico pravokotnega trikotnika $BT'T$.² Trikotnika BTT' in $B'BS$ sta podobna trikotnika in njuni stranici TT' in BB' sta med seboj vzporedni in vzporedni s Sončevimi žarki.





Za trikotnika velja razmerje

■ $\frac{SB'}{BB'} = \frac{BT'}{BT}$ oziroma $\frac{x}{d} = \frac{l}{h},$

kjer je BB' oziroma d oddaljenost gore od terminatorja, BT' oziroma l dolžina sence, BT oziroma h pa je iskana višina gore. Težave pri meritvi predstavlja stranica SB' oziroma x , ki je ni mogoče enostavno izmeriti. Zato naredimo manjšo „goljufijo“ in predpostavimo, da je $x \approx r$, kjer je r polmer Lune. Ta približek si lahko privoščimo, če je gora povsem blizu terminatorja in ker je njena višina majhna v primerjavi s polmerom Lune. Torej:

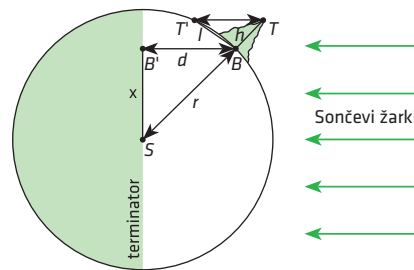
$$\blacksquare \quad \frac{r}{d} = \frac{l}{h}.$$

Iskana višina gore je

- $h = d \cdot \frac{l}{r}$.

Na posnetkih Lune ob prvem ali zadnjem kraju izmerimo dolžino sence in oddaljenost gore od terminatorja v milimetrih. Za meritve uporabimo program CorelDraw11 (glej sliko 1).

Višino gora podamo v metrih, seveda pa moramo prej narediti preprost sklepni račun, kot pri razsežnostih kraterjev, za kar potrebujemo tudi meritev premera Lune na sliki. Pri tej vaji je potrebna precejšnja mera potrpežljivosti, ker je oddaljenost stene gore od terminatorja in dolžino sence težko oceniti. Za to potrebujemo ostro sliko. Zaradi večje natančnosti meritve uporabimo več različnih posnetkov Lune ob prvem in zadnjem kraju. Za določanje dol-



Slika 2. Geometrija pri merjenju višine gora na Luni.

žine sence in oddaljenosti gore od terminatorja lahko seveda uporabimo še kakšno drugo metodo, na primer sliko Lune projiciramo na zaslon in meritve izvajamo na njej.

■ Rezultati raziskovalne naloge

Za ilustracijo vaje in vzpodbudo, da se še kdo bolj poglobljeno loti naloge, si oglejmo rezultate raziskovalne naloge *Premieri kraterjev in višina gora na Luni*, ki sta jo izdelali dijakinji prvega letnika Gimnazije Jožeta Plečnika Ljubljana, TADEJA ROME in ŽIVA KOVAČEVIČ. Naloga je bila na ljubljanskem srečanju *Zaupaj v lastno ustvarjalnost* v šolskem letu 2006/07 najbolj ocenjena v svoji skupini – dijakinji sta za nagrado dobili potovanje v Italijo, na državnem srečanju v Murski Soboti pa srebrno priznanje. Iz naloge bomo navedli meritve, ki so zanimive.

TABELA 1. Povprečna relativna napaka je 6% (6,3%). Natančnost je dobra, če upoštevamo, da sta se dijakinji prvič srečali s tako meritvijo, da je na sliki težko oceniti premer kraterjev in da kraterji niso „idealni“ krogi. Povprečni odklon od pravih vrednosti je 8 km (7,6 km) in povprečna relativna napaka je 7% (6,8%). Glede na metodo merjenja in prej omenjeno „goljufigo“ s podobnimi trikotniki je bila meritev dobro izpeljana.

TABELA 2. Povprečna relativna napaka je 5% (5,4%). Vsako meritev sta dijakinji naredili petkrat. Napako je mogoče zmanjšati s še večjim številom meritev na različnih posnetkih Lune. Za lažjo oceno meritev sta dijakinji dobljene vrednosti za višino gora primerjali s podatki iz literature. Povprečno odstopanje je bilo približno pol kilometra (467 metrov). Pri tem je povprečna relativna napaka 17% (16,98%). S temi rezultati dijakinji nista bili preveč zadovoljni, vendar sem mnenja, da so kljub temu rezultati solidni.

¹Opomba uredništva: Opisana meritev višine gora na Luni je zelo poenostavljena metoda, pri kateri ni upoštevana dejanska geometrija med dolžino sence, lego gore na Luni, Lunino meno itd. Je pa taka vaja povsem primerna za osnovnošolce in srednješolce, saj se pri tem spoznajo z merjenjem v astronomiji. Kdor bi želel spoznati natančno metodo merjenja višine gora na Luni, si lahko na spletnem naslovu www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/jelen/datoteke/luna.pdf ogleda seminar-sko nalogo skupine študentov pod mentorstvom prof. Andreja Čadeža.

²Če izračunamo obseg Lune, dobimo vrednost 10915 kilometrov in središčnemu kotu 1° pripada lok 30 kilometrov. Premer kraterja Ptolemaj je 148 kilometrov in temu pripada središčni kot približno 5° .

Ime kraterja	Povprečna meritev premera v mm	Relativna napaka meritve	Premer kraterja v km	Premer kraterja iz literature v km	Razlika v km	Relativna napaka glede na literaturo
Ptolemaj	11,2	2 %	149	148	1	0,7 %
Albategnius	10,4	2 %	137	129	8	6 %
Purbach	8,7	6 %	116	120	−4	3 %
Regiomontanus	7,2	15 %	95	105	−10	9,5 %
Walter	8,5	1,4 %	112	129	−17	13 %
Orontius	7,1	6 %	94	84	10	11 %
Aristillus	4,0	12 %	53	56	−3	5 %

Tabela 1. Premeri kraterjev

Ime kraterja	Povprečna dolžina sence v mm	Relativna napaka meritve	Oddaljenost stene kraterja od terminatorja v km	Višina stene kraterja v m	Višina stene iz literature v m	Razlika v m	Relativna napaka glede na literaturo
Ptolemaj	1,63	2 %	12,1	2300	2400	−100	4,2 %
Albategnius	1,9	2 %	22	4200	4400	−200	4,5 %
Purbach	3,46	6 %	11,5	3037	3000	37	1,2 %
Regiomontanus	1,82	15 %	13,5	2400	1700	700	41 %
Orontius	1,72	1,4 %	7,5	3462	3100	362	12 %
Aristillus	7,19	6 %	9,7	2200	3600	−1400	39 %

Tabela 2. Višina gora

Vaji sta simpatični in spretni bralec bo gotovo našel kakšno metodo za izboljšanje meritev. Poizkusite, ne bo vam žal. ✖



Pozdrav računalništvo

Alice v deželi objektnega programiranja

TRETJI DEL

EVA FERK

➔ Programiranje v Alice nam ni predstavljalo posebnih težav, navduševali smo se nad ustvarjeni mi svetovi in ugotavljali, da programiranje kljub



→ vsem podrobnostim ni prezahtevno. Tokrat se bomo bolj posvetili primerjavi Alice z objektno orientiranim programskim jezikom C++.

■ Programiranje v okolju Alice

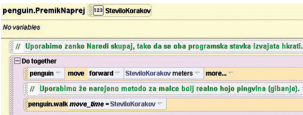
S pomočjo vmesnika povleci-in-spusti ustvarimo program, v katerem pingvina naučimo premikati se naprej, nazaj, levo ter desno. Za izhodišče – da bomo vedeli, kje se je pingvin nahajal v začetku – postavimo znak.

Ustvarili smo navidezni svet, sedaj je potrebno napisati le še programsko kodo za premikanje naprej in nazaj ter levo in desno. Pri metodah PremikNaprej (slika 2), PremikNazaj (slika 3), PremikLevo (slika 4) in PremikDesno (slika 5) določimo tudi parameter SteviloKorakov, katerega vrednost bomo določali v glavnem programu (*my.first method*).

Naš končni program je videti, kot kaže slika 6. Pingvin se je iz izhodišča premaknil za tri korake



Slika 1. Ustvarjeni svet v okolju Alice.



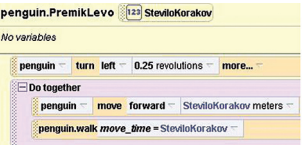
Slika 2. Metoda PremikNaprej



Slika 5. Metoda PremikDesno



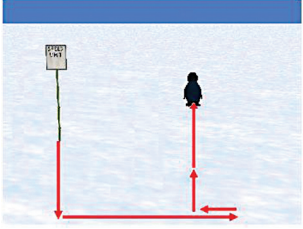
Slika 3. Metoda PremikNazaj



Slika 4. Metoda PremikLevo



Slika 6. Programska koda v Alice.



Slika 7. Pingvin po ustvarjeni in izvedeni programski kodi.

naprej, štiri korake v levo ter zatem enega nazaj in dva v desno. Po izvedeni programski kodi se nahaja na mestu, ki ga prikazuje slika 7.

■ Programiranje v C++ (enako kot v Alice)

No, pa napišimo enak program še v programskem jeziku C++. Ustvarimo razred CPingvin in v njem najprej definirajmo attribute in metode. Od atributov potrebujemo koordinati (*x* in *y*), v kateri bomo shranjevali trenutno pozicijo, na kateri se pingvin nahaja, lahko pa definiramo tudi druge attribute, skladno s programom v Alice. Tako lahko določimo pingvinu barvo glave, barvo levega in desnega krila ipd. Deklariramo tudi potrebne metode, ki smo jih že ustvarili v Alice:

- PremikNaprej(int SteviloKorakov);
- PremikNazaj(int SteviloKorakov);
- PremikLevo(int SteviloKorakov);
- PremikDesno(int SteviloKorakov).

Potrebujemo tudi metodo za obračanje pingvina ter spremenljivko, v kateri bomo shranjevali smer, v katero bo pingvin gledal. Opisani razred CPingvin deklariramo na naslednji način:

```
class CPingvin
{
public:
    CPingvin();
    virtual CPingvin();

    // definiramo koordinati, kje se pingvin nahaja
    int x,y; // potrebne spremenljivke

    // ostali atributi, ki sovpadajo z Alice
```

```
char* barva_glave;
char* barva_levega_krila;
char* barva_desnega_krila;

// definiramo potrebne metode
void PremikNaprej(int SteviloKorakov);
void PremikNazaj(int SteviloKorakov);
void PremikLevo(int SteviloKorakov);
void PremikDesno(int SteviloKorakov);

// smer, v katero gleda pingvin po
// koordinatnih oseh
char* smer_gledanja;

// metode za obrat v levo za
// 0/90/180/270 stopinj
void ObratVLevo(int Stopinje);

private:
// metoda, s katero premaknemo pingvina
// naprej po koordinatah
int move_forward(int SteviloKorakov);
};
```

Za izhodišče določimo (namesto znaka v Alice) koordinati (0,0). Pripravili smo vse potrebno, definirati moramo le še metode. Programski stavki v C++ bodo skoraj preprostejši kot v Alice, saj bomo le povečevali ustrezno koordinato, glede na smer premika pingvina. Konstruktor in destruktor razreda ter metode premikanja bodo naslednji:

```
CPingvin::CPingvin(void)
{
    x = 0; // na zacetku se nahaja na poziciji (0,0)
    y = 0;
    // smer bo sestavljena iz 2 znakov (y+,y-,x+ ali x-)
    smer_gledanja = new char[2];
    smer_gledanja[1] = 'x';
    // v zacetku je obrnjen naprej
    smer_gledanja[2] = '+';
}
```

```
CPingvin::~CPingvin(void)
{
    delete[] smer_gledanja;
}
```

```
void CPingvin::PremikNaprej(int SteviloKorakov)
```

```
{
    ObratVLevo(0); // se ne obrne
    if (smer_gledanja[1] == 'x')
    { // v tem primeru se spremeni x koordinata
        x = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }
    else // sicer se spremeni y koordinata
    {
        y = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }

    // izpisemo smer, v katero gleda
    printf("Smer gledanja: %c%c\n",smer_gledanja[1],
        smer_gledanja[2]);
}
```

```
void CPingvin::PremikNazaj(int SteviloKorakov)
{
    ObratVLevo(180);
    if (smer_gledanja[1] == 'x')
    { // v tem primeru se spremeni x koordinata
        x = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }
    else // sicer se spremeni y koordinata
    {
        y = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }

    // izpisemo smer, v katero gleda
    printf("Smer gledanja: %c%c\n",smer_gledanja[1],
        smer_gledanja[2]);
}
```

```
void CPingvin::PremikLevo(int SteviloKorakov)
{
    ObratVLevo(270);
    if (smer_gledanja[1] == 'x')
    { // v tem primeru se spremeni x koordinata
        x = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }
    else // sicer se spremeni y koordinata
    {
        y = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }
}
```





```

    }

    // izpisemo smer, v katero gleda
    printf("Smer gledanja: %c%c\n", smer_gledanja[1],
           smer_gledanja[2]);
}

void CPingvin::PremikDesno(int SteviloKorakov)
{
    ObratVLevo(90);
    if (smer_gledanja[1] == 'x')
    { // v tem primeru se spremeni x koordinata
        x = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }
    else // sicer se spremeni y koordinata
    {
        y = move_forward(SteviloKorakov);
        printf("Nova pozicija pingvina: (%d,%d)\n", x,y);
    }

    // izpisemo smer, v katero gleda
    printf("Smer gledanja: %c%c\n", smer_gledanja[1],
           smer_gledanja[2]);
}

```

Obračanje v programu C++ ni tako preprosto kot v Alice, zato moramo definirati tudi metodo, ki bo to storila.

```

void CPingvin::ObratVLevo(int Stopinje)
{
    if (Stopinje == 0)
        smer_gledanja = smer_gledanja;
        // nic se ne spremeni

    if (Stopinje == 90) // za 90 stopinj v levo
    {
        if (smer_gledanja[1] == 'y')
            smer_gledanja[1] = 'x';
            // sedaj gleda naprej in nazaj
        else smer_gledanja[1] = 'y';

        // le ce gre za x smer, se spremeni
        // iz + v - in obratno
        if (smer_gledanja[1] == 'y')
        {
            if (smer_gledanja[2] == '+')
                smer_gledanja[2] = '-';

```

```

                else smer_gledanja[2] = '+';
            }
        }

        if (Stopinje == 180) // ce se obrne za 180 stopinj
        {
            if (smer_gledanja[2] == '+')
                smer_gledanja[2] = '-';
            else smer_gledanja[2] = '+';
        }

        if (Stopinje == 270) // za 270 stopinj
        {
            if (smer_gledanja[1] == 'y')
                smer_gledanja[1] = 'x';
                // sedaj gleda naprej in nazaj
            else smer_gledanja[1] = 'y';

            // le ce gre za y smer, se spremeni
            // iz + v - in obratno
            if (smer_gledanja[1] == 'x')
            {
                if (smer_gledanja[2] == '+')
                    smer_gledanja[2] = '-';
                else smer_gledanja[2] = '+';
            }
        }
    }
}

```

Definirajmo še metodo, s katero se bomo premikali naprej po stolpcih in vrsticah.

```

int CPingvin::move_forward(int SteviloKorakov)
// hoja naprej
{
    // definiramo spremenljivko za premikanje
    int premik = 0;

    if (smer_gledanja[1] == 'x')
        // gleda v smeri x (gor ali dol)
        premik = x; // premikali se bomo v smeri x
    else premik = y; // premik v smeri y

    if (smer_gledanja[2] == '+')
        premik = premik + SteviloKorakov;
        // povecamo koordinato
    else
        premik = premik - SteviloKorakov;
        // zmanjsamo koordinato

```

```
    return(premik);
}
```

Manjka le še glavni program, ki je ekvivalenten *my.first method* v Alice. Vsebovati mora le klice metod iz razreda CPingvin.

```
int main(int argc, char* argv[])
{
    CPingvin pingvin;

    pingvin.PremikNaprej(3);
    pingvin.PremikLevo(4);
    pingvin.PremikNazaj(1);
    pingvin.PremikDesno(2);
    pingvin.PremikNaprej(5);

    return 0;
}
```

Ustvarili smo program, ki pa ob zagonu (slika 8) ni videti tako privlačen kot v Alice. Dobimo le izpise novih koordinat, na katerih se nahaja pingvin po izvedenih klicih ustvarjenih metod.

```
Nova pozicija pingvina: (3,0)
Smer gledanja: x-
Nova pozicija pingvina: (3,4)
Smer gledanja: y+
Nova pozicija pingvina: (3,3)
Smer gledanja: y-
Nova pozicija pingvina: (1,3)
Smer gledanja: x-
Nova pozicija pingvina: (-4,3)
Smer gledanja: x-
```

Slika 8 . Zagon programa v C++

■ Primerjava Alice in programskega jezika C++

Program v C++ je za nami. Opazili smo, da je pisanje programske kode v C++ precej zahtevnejše kot v Alice, kjer le izberemo želen programski stavek in ga povlečemo v urejevalnik. V C++ pa je ogromno pravil, ki jih moramo upoštevati, vendar je programski jezik privlačen, saj z njim lahko marsikaj ustvarimo. Že res, da ob izvedbi programa ni tako lepo, kot je v Alice, kjer se objekti premikajo v navideznem svetu, vseeno pa nam je uspelo v C++ premakniti pingvina iz izhodišča.

Skupaj smo spoznali osnove objektno orientiranega programiranja, morda tudi koga navdušili nad programiranjem – vsaj z Alice, če se vam C++ še ni prikupil. Vsekakor pa vam želim veliko zanimivega ob programiranju in ustvarjanju navideznih svetov v Alice. ✖

RiŠ Ravnilo in šestilo – Rišem in študiram

ŠESTI DEL

DAMJAN KOBAL

Serija pričujočih člankov o programu RiŠ je nastala na podlagi idej in razvoja obsežnega portala E-um za interaktivno učenje matematike <http://www.e-um.si>. Pred vami je šesto nadaljevanje. Za uspešno prebiranje članka svetujemo vpogled na spletno stran <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/> in sprotno preizkušanje s programom RiŠ. Uvodne misli o uporabi programa RiŠ so bile objavljene v prejšnjih številkah Preseka in so dostopne na zgornji spletni strani.

➔ Z RiŠem smo se naučili že veliko. V tem zadnjem letošnjem nadaljevanju se bomo z RiŠem približali še zanimivim temam iz funkcij. Dotaknili se bomo tudi tem, ki so trd oreh celo za gimna-



→ **zijske četrtošolce, RiŠ pa nam obljublja, da bodo ideje zanimive in dovolj razumljive tudi radovednim osnovnošolcem.**

Če smo kaj že pozabili, se vrnimo k prejšnjim nalogam in se jih ponovno spomnimo.

NALOGA 16. Na naslovu <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/> se premaknimo k „aktualni nalogi“. Pred nami je črta – premica, ki se premika gor-dol in spreminja svoj naklon, ko premikamo modro in rdečo piko.

REŠITEV. Pri vseh treh nalogah smo s pomočjo ikone  narisali črti za koordinatni sistem. Z ikono za koordinatni sistem  pomagamo točke pravilno postaviti, zaradi preglednosti slike pa smo potem RiŠev koordinatni sistem spet „skrili“. Narisano daljico s klikom na ikono  v njeni osebni izkaznici spremenimo v puščico.

S pomočjo ikone  narišemo črtkani daljici, kot na sliki. Krajišča daljic lahko, kot smo to že večkrat storili s posegom v osebno izkaznico, fiksiramo in skrijemo. Nanju narišimo „debelo“ rdečo in modro točko, ki ju poimenujemo K in N . Tako narisani točki se lahko gibljeta le po daljici. Desno od daljic s pomočjo ikone  „narišemo“ izraza, ki jima damo imeni k in n in ki imata (za začetek) vrednosti $x(K)$ in $x(N)$. Tako se izraza k in n s spreminjanjem točk K in N spreminjata od -2 in 2 . V našem primeru smo izpis izraza še polepšali tako, da se izpisuje samo ena decimalka. To dosežemo tako, da namesto $x(K)$ napišemo $\text{round}(x(K) \cdot 10)/10$ in namesto $x(N)$ napišemo $\text{round}(x(N) \cdot 10)/10$. Spomnimo se, da smo ukaz že spoznali. Skrbnega bralca vabimo, da premisli, zakaj izraz $\text{round}(x(K) \cdot 10)/10$ pomeni zaokroževanje na eno decimalko, in da sam ugotovi, kako bi dosegli zaokroževanje npr. na dve decimalki. Spomnimo se tudi, da v osebni izkaznici izraza k z ikono  dosežemo, da se nam izpiše tudi k , in sicer $k = 1,5$. Sedaj s pomočjo ikone  narišemo premico tako, da v osebni izkaznici naše funkcije f_1 na dnu pod „izraz za y “ vpišemo $k \cdot x + n$. V osebni izkaznici funkcije f_1 lahko spremenimo še marsikaj, a če smo za spremenljivko pustili (vpisali) x , mesto pod „izraz za x “ pa pustili prazno, smo že narisali funkcijo. Poskusimo sedaj spreminjati lego točk K in N ; vidimo, da se naša funkcija že obnaša tako, kot smo želeli.

NALOGA 17. Naloga je podobna prejšnji, le da imamo še prosto gibljivo črno točko in prikaz razdalje te točke do premice.

REŠITEV. Za tiste, ki smo na premice že nekoliko bolj navajeni, to ne bo težko. Razdaljo od točke do premice dobimo tako, da se premici približamo pod pravim kotom. Premica, ki je pravokotna na premico s smernim koeficientom k , ima smerni koeficient $-1/k$. Če smo črno točko označili s T , bo premica, ki gre skozi T in je pravokotna na našo premico, imela enačbo $y = y(T) - \frac{1}{k}(x - x(T))$. Ta premica seka našo premico $y = kx + n$ v točki, ki jo označimo z S . Izračunamo presečišče in ugotovimo, da je

$$\blacksquare \quad x(S) = \frac{x(T) + k(y(T) - n)}{k^2 + 1}.$$

Podobno kot v nalogi 16 lahko x -koordinato točke S zapišemo s pomočjo ikone  z novim izrazom, ki ga označimo npr. z X . Za y -koordinato točke S lahko sedaj napišemo kar $f_1(X)$, kjer je f_1 naša premica, kot v prejšnji nalogi. Sedaj lahko le še narišemo točko S , ki ima fiksni koordinati $(X, f_1(X))$. Narišemo še črtkano daljico od T do S in v osebni izkaznici daljice izberemo , da se nam izpiše dolžina daljice. Od prej že znamo s čarobno palico  skriti vse odvečne objekte.

NALOGA 18. Naloga prikazuje presečišče dveh premic, ki ju spreminjamo s premikanjem po dveh točk. Obenem naloga prikazuje točki na oseh, ki ju dobimo, če se od presečišča spustimo pravokotno na osi.

REŠITEV. Naloga je dejansko lažja, kot se zdi. Narišemo štiri točke, ki so prosto gibljive. S pomočjo ikone za risanje premic skozi dani dve točki narišemo obe črtkani premici. Na presečišču obeh premic narišemo „debelo rdečo“ točko, ki jo poimenujemo A . Narišemo še točko s konstantnimi koordinatami $(x(A), 0)$ ter točko s konstantnimi koordinatami $(0, y(A))$ in naloga je končana.

IZZIVI. Na naslovu <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/> bralca čakajo trije novi izzivi, ki ga popeljejo do zanimivih funkcij in nekaterih zanimivih nazornih pomenov. Na spletni strani boš čez teden dni našel tudi nekatere nasvete za njihovo rešitev. ✖

Nagradna naloga

SKRITA RAČUNA NA VAZI

MARIJA VENCELJ

➔ Matematiku so prijatelji za rojstni dan poklonili šopek vrtnic z vazo, na katero so napisali dva skrita računa seštevanja, enega v angleškem in drugega v francoskem jeziku¹.

Poskusite ju rešiti tudi vi. Za reševanje veljajo pravila, ki so pri takih nalogah običajna. Nad vodoravno črto so skrito zapisani seštevanci, pod njo njihova vsota. Enake črke moramo nadomestiti z enakimi desetiški števkami in različne z različnimi tako, da dobimo pravi račun. Vodilne številke nastopajočih števil so od nič različne.

H	A	P	P	Y
H	A	P	P	Y
H	A	P	P	Y
	D	A	Y	S
A	H	E	A	D

1. račun. (slika 1)

V nalogi je pravzaprav v angleščini zapisano voščilo prijatelju (happy = srečen, day(s) = dan (dnevi), ahead = spredaj, v prihodnje). Računi, ki imajo, tako kot tale, tudi v skriti obliki določen pomen, so nekaj posebnega in jih je težko sestaviti. Posebej imenitni so taki, ki imajo samo eno rešitev.

Tudi drugi račun ima pomen že v skriti obliki. Poglejmo prevod uporabljenih francoskih besed: un = ena, deux = dve, douze =



Slika 1.



Slika 2.

			U	N	
			U	N	
	D	E	U	X	
D	O	U	Z	E	
S	E	I	Z	E	in $n \equiv 0 \pmod{n}$

2. račun. (slika 2)

dvanajst in seize = šestnajst. Res je

$$\blacksquare 1+1+2+12 = 16.$$

Pri reševanju bistrovidno upoštevajte tudi pripis desno ob računu, pa naj se vam zdi napisani pogoj še tako čuden in nepotreben². Napisan je bil tudi na vazi, a se na fotografiji ne vidi.

Rešitve nalog pošljite najkasneje do **petka, 20. junija 2008**, na naš naslov:

**DMFA—založništvo, Presek,
p.p. 2964, 1001 Ljubljana.**

Izmed reševalcev, ki bodo poslali pravilno rešitev obeh računov in na kratko opisali tudi, kako so do obeh rešitev prišli, bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli enoletno naročnino na Presek. ✕

¹Računa so prijatelji priredili iz ene od angleških knjig rekreativne matematike.

² $n \equiv 0 \pmod{n}$ dobesedno pomeni, da je število n deljivo z n .

Novosti v Knjižnici Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev. Najnovejši dve knjižici sta izšli konec leta 2007.

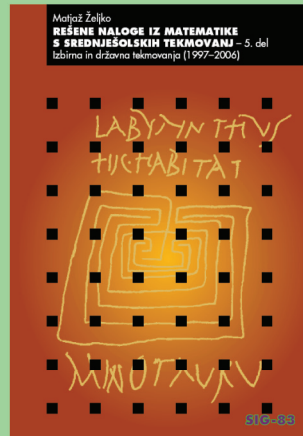
Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in
državna tekmovanja
1997–2006

172 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

14,99 EUR



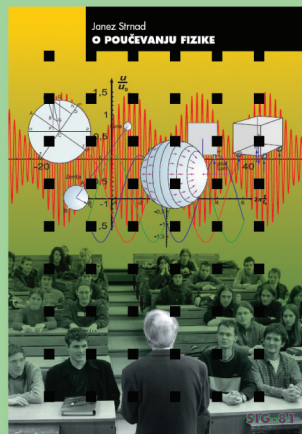
Marcel Danesi:

PARADOKS LAŽNIVCA IN HANOJSKI STOLPI

Deset največjih
matematičnih ugank
vseh časov

260 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

17,99 EUR

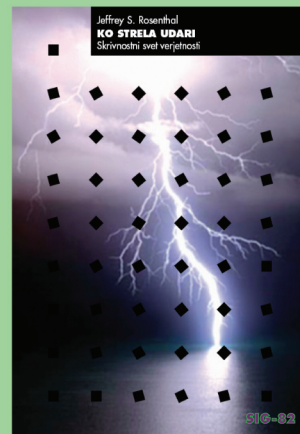


Janez Strnad:

O POUČEVANJU FIZIKE

320 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR



Jeffrey S. Rosenthal:

KO STRELA UDARI

Skrivnostni svet
verjetnosti

264 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.