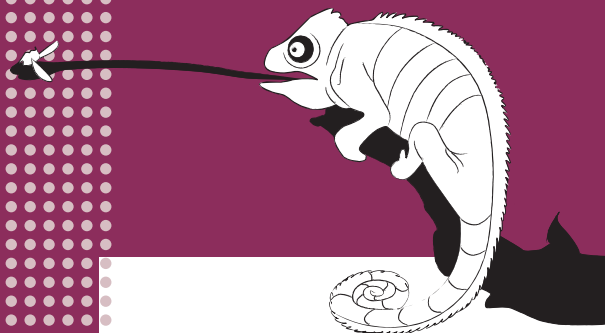




PRESEK

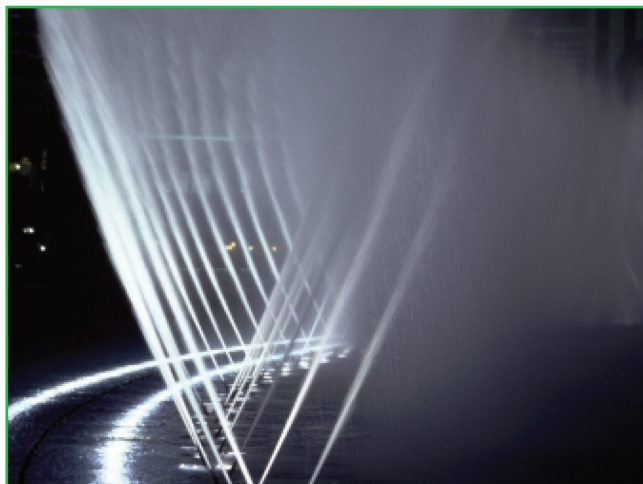
- KAKO KAMELEON
IZTEGNE JEZIK?
- OBRESTNO OBRESTNI RAČUN
- NAGRADNA KRIŽANKA



Izdelovanje senzacij

⊕ Prepletanje vode, svetlobe in glasbe v nekaterih sodobnih vodnjakih je čarobno za opazovanje in matematika je del te čarovnije. Geometrija je uporabljena za celoten dizajn, matematično modeliranje simulira interakcijo tekočine in delcev, učinkoviti algoritmi pa poganjajo programsko opremo, ki v značilni predstavi z numeričnim zaporedjem koordinira tisoče šob in luči.

Natančno delovanje vode je posledica *laminarnega toka*, v katerem se vsi delci premikajo vzporedno in z isto hitrostjo. Zapletena matematična analiza dinamike tekočin omogoča izdelavo takih čudes, kot so vzpenjajoče stopnice ali posamezne frnikule. Rezultat je hkrati čudovit in učinkovit: Več kot meter visok stolp vode ne bi napolnil običajnega kozarca. ✕



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike „The Mathematical Moments“, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 35, šolsko leto 2007/2008, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2007/2008 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Ines Kristan in Polona Šterk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 2100 izvodov

© 2008 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1699

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbiti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Izdelovanje senzacij 2

■ MATEMATIKA

Obrestno obrestni račun (*Ajda Fošner*) 4-5
 Kaj je večje: e^π ali π^e ? (*Matej Kolar*) 6-7
 Fermatova števila in konstrukcije pravilnih
 večkotnikov (*Matej Mlakar*) 8-10
 Bistrovidec – Družinska (*Boris Lavrič*) 10
 Bistrovidec – Koledarji – rešitev naloge
 (*Darjo Felda*) 10
 Paradoks lažnivca in hanojski stolpi (*Sandi
 Klavžar*) 31

■ FIZIKA

Kako kameleon iztegne jezik? (*Andrej Likar*) 11-12
 Plimovanje (*Janez Strnad*) 13-15, 18
 Razmisli in poskusi (*Mitja Rosina*) 18
 Kuhinjska poizkuševalnica – Podhlajena voda
 – odgovor naloge (*Mojca Čepič*) 18-19
 Poizkuševalnica v dnevni sobi –
 Utripajoč zaslon (*Mojca Čepič*) 20

SLIKA NA NASLOVNICI: Bliža se čas češenj in kot dobro vemo, koščica češnje lahko hitro odleti zelo daleč, če jo na pravi način močno stisnemo med prsti. Verjetno pa niste vedeli, da isto tehniko uporabljajo tudi kameleoni pri lovu na žuželke. Če hočete izvedeti več o tem, si preberite prispevek na strani 11. (Foto: Andrej Likar)

■ ASTRONOMIJA

Klasični raketni in alternativni ionski pogon
 (*Maja Karlovčec*) 21-23

■ RAČUNALNIŠTVO

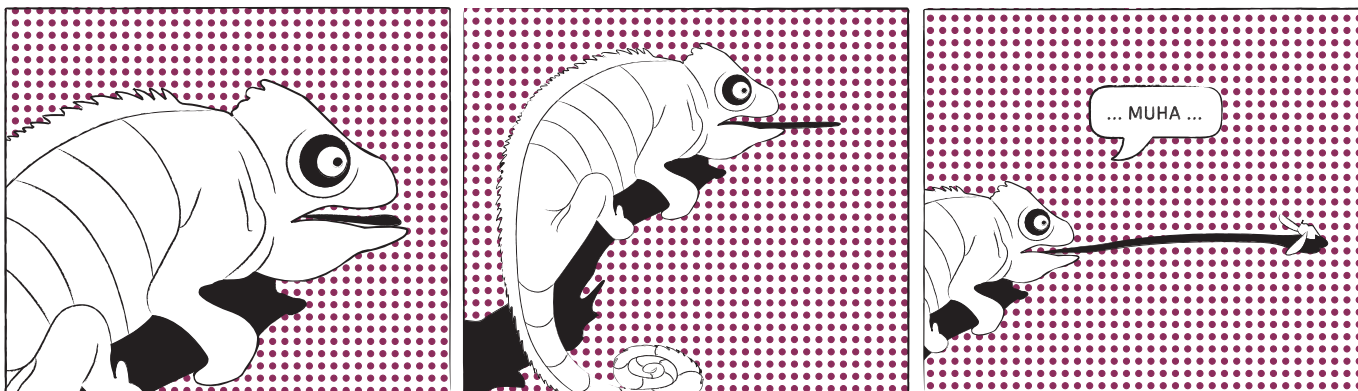
Alice v deželi objektnega programiranja –
 Drugi del (*Eva Ferk*) 24-28
 Riš, Ravnilo in šestilo – Rišem in študiram –
 Peti del (*Damjan Kobal*) 28-30

■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) 16-17
 Rešitev nagradne križanke Presek 35/4 30
 Sudoku 7, 23

■ TEKMOVANJA

Šolsko tekmovanje iz znanja poslovne
 matematike – 2006/2007 priloga
 Državno tekmovanje iz znanja poslovne
 matematike – 2006/2007 priloga
 28. Mednarodno matematično tekmovanje
 mest – Jesenski krog (*Gregor Cigler*) priloga





Obrestno obrestni račun

obrestnemu računu, ki je v zadnjih letih v naši praksi izrazito prevladal nad navadnim, v posameznih obdobjih pa ga je povsem izpodrinil tudi pri kratkoročnih poslih, kjer je sicer navadni obrestni račun nesporni vladar.

Za začetek si pogledjmo naslednji primer.

Ko je Andrej praznoval svoj deseti rojstni dan, sta se njegova starša odločila, da bosta začela varčevati za njegov študij. Tako sta vsak Andrejev rojstni dan vložila v banko 1000€. Po petih letih sta zaradi nakupa novega stanovanja prekinila z varčevanjem (na Andrejev petnajsti rojstni dan sta vložila na banko zadnji znesek) in denar pustila vezan še tri leta. Koliko denarja sta starša privarčevala do Andrejevega osemnajstega rojstnega dneva, če banka obrestuje vloge letno po 4% letni obrestni meri in obrestno obrestnem računu?

Pri navadnem obrestnem računu se je ves čas obrestovala le začetna osnovna glavnica G . Obresti o so bile za vsako leto enake. Glavnica je naraščala kot aritmetično zaporedje

$$G, G + o, G + 2o, G + 3o, \dots, G + no, \dots$$

Pri obrestno obrestnem računu pa obresti ne računamo le od osnovne glavnice, ampak tudi od obresti, ki so nastale v prejšnjem časovnem obdobju. Pogledjmo si, kako v tem primeru narašča glavnica G pri letni obrestni meri $p\%$.

Če z G_1 označimo vrednost glavnice po prvem letu in z o_1 pripadajoče obresti po prvem letu, potem je

$$G_1 = G + o_1 = G + G \frac{p}{100} = G \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

✚ V eni izmed prejšnjih številčk Preseka je bil objavljen prispevek *Z varčevanjem do novega računalnika* [2], v katerem smo se seznanili z osnovnimi pojmi poslovne matematike. Predstavljen je bil *navadni obrestni račun* kot najpreprostejši način za računanje obresti, značilen za obračun hranilnih vlog in druge klasične kratkoročne posle. V prispevku, ki ga imate pred seboj, pa se bomo posvetili *obrestno*

Ker se faktor $1 + p/100$ pri obrestno obrestnem računu stalno pojavlja, ga označimo krajše

$$\blacksquare r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Torej je vrednost glavnice na koncu prvega leta

$$\blacksquare G_1 = Gr.$$

Na koncu drugega leta glavnica naraste na znesek G_2 , ki je enak

$$\begin{aligned} \blacksquare G_2 &= G_1 + o_2 = G_1 + G_1 \frac{p}{100} = G_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\ &= G_1 r = Gr r = Gr^2. \end{aligned}$$

Zaradi obrestnega obrestovanja smo v zgornji enakosti obresti po drugem letu o_2 računali od nove osnove G_1 in ne od G . Po istem postopku bi prišli do ugotovitve, da je po treh letih

$$\blacksquare G_3 = Gr^3,$$

po štirih letih

$$\blacksquare G_4 = Gr^4$$

in tako bi lahko nadaljevali. V splošnem je torej vrednost začetne glavnice G po n letih

$$\blacksquare G_n = Gr^n.$$

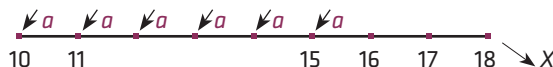
S tem smo pokazali, da glavnica pri obrestnem obrestovanju narašča kot *geometrijsko zaporedje*

$$\blacksquare G, Gr, Gr^2, \dots, Gr^n, \dots$$

Opazimo lahko, da se pri obrestno obrestnem računu glavnica povečuje mnogo hitreje kot pri navadnem obrestnem računu, saj narašča eksponentno.

Sedaj imamo dovolj informacij, da se lahko lotimo naše naloge. Zaradi lažjega zapisa označimo vloge s črko a ($a = 1000$ €) in obrestno mero s p ($p = 4\%$). V naši nalogi je torej $r = 1 + 4/100 = 1,04$. Od desetega do petnajstega rojstnega dneva sta Andrejeva starša vsako leto vložila v banko znesek a . Zanima nas, kakšna je skupna vrednost teh zneskov po preteku osmih let.

Prikažimo dogajanje grafično s časovno premico.



Hitro lahko opazimo, da se prva vloga obrestuje osem let in je na koncu varčevanja vredna ar^8 . Druga vloga se obrestuje sedem let in je na koncu varčevanja vredna ar^7 . Podobno velja za tretjo, četrto, peto in šesto vlogo (šesta vloga je na Andrejev osemnajsti rojstni dan vredna ar^3). Kot na zgornji sliki označimo z X iskano vrednost. Potem je

$$\begin{aligned} \blacksquare X &= ar^8 + ar^7 + ar^6 + ar^5 + ar^4 + ar^3 = \\ &= ar^3(r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1). \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo, da je $a = 1000$ in $r = 1,04$, dobimo $X = 7461,20$. Andrejeva starša sta torej v osmih letih privarčevala 7461,20 €.

Omenimo še, da je pri periodičnih vlogah pomembno, ali denar vlagamo v banko na začetku ali na koncu obrestovalnega obdobja (v našem primeru na začetku ali na koncu leta). Če bi na primer Andrejeva starša vložila prvi znesek šele po enem letu, torej na Andrejev enajsti rojstni dan, bi v osmih letih privarčevala le $7461,20 - 1000 \cdot 1,04^8 = 6092,63$ €.

Na koncu si zastavimo še dve vprašanji:

Koliko bi v osmih letih privarčevala Andrejeva starša, če z vlogami ne bi prekinila? Kaj pa v primeru, da bi vložen denar dvignila za Andrejev šestnajsti rojstni dan?

Če si podobno kot zgoraj za oba primera narišemo časovno premico, lahko hitro ugotovimo, da je $X_1 = a(r^8 + r^7 + \dots + r + 1)$ odgovor na prvo vprašanje in $X_2 = ar(r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$ odgovor na drugo vprašanje. Računanje pa prepuščamo vam, dragi bralci.

■ Literatura

- [1] J. A. Čibej, *Matematika za poslovneže (1. del)*, Ekonomska fakulteta, Ljubljana 2003.
- [2] A. Fošner, *Z varčevanjem do novega računalnika*, Presek 35 (2007/2008) št. 2, str. 4–5.
- [3] L. Zornada, *Zbirka nalog iz poslovne matematike in statistike*, Fakulteta za management, Koper 2003. ☒

→ Kaj je večje: e^π ali π^e ?

MATEJ KOLAR

☛ Bralec, ki bo želel odgovor na zgornji problem, bo z uporabo računalna izvedel, da velja $e^\pi \approx 23,140$ in $\pi^e \approx 22,459$, torej je večje prvo število. Kljub hitrosti s tako rešitvijo ne smemo biti zadovoljni.

Ali vodi do odgovora kakšna elegantnejša, bolj matematična pot? Razmisleke, ki sledijo, bo zmogel vsak, ki je v srednji šoli usvojil naravne logaritme in branje grafov funkcij.

e^π in π^e

Zapišimo neenakost

$$\blacksquare e^\pi > \pi^e. \quad (1)$$

Ker je funkcija naravni logaritem ($\ln$) naraščajoča, se po logaritmiranju neenačaj ohrani in dobimo enakovredno neenakost

$$\blacksquare \pi \ln e > e \ln \pi.$$

Po deljenju s produktom πe pridemo enakovredno neenakost

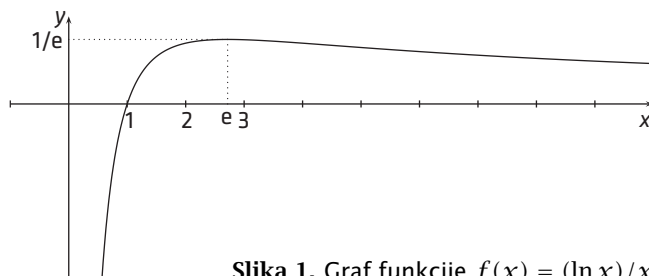
$$\blacksquare \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}. \quad (2)$$

Resničnost dobljene neenakosti na prvi pogled ni nič bolj razvidna od tiste na začetku. Vendar znamo premagati tudi to oviro; če vpeljemo funkcijo f s predpisom

$$\blacksquare f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

dobimo enakovredno vprašanje, in sicer, v kateri od točk $x = e$ ali $x = \pi$ ima funkcija f večjo vrednost.

Na postavljeno vprašanje bomo zmogli odgovoriti s proučitvijo grafa funkcije f (glej sliko 1).



Slika 1. Graf funkcije $f(x) = (\ln x)/x$

Kdor obvlada odvod in limito, bo zmogel graf funkcije narisati sam. Na prizorišče stopi raziskovanje ekstremov in z njim odvodi. Funkcija f obstaja samo za pozitivne vrednosti spremenljivke x . Iz enačbe

$$\blacksquare 0 = f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

sklepamo, da ima f edino stacionarno točko v $x = e$. Ker velja $f'(x) < 0$ za vse vrednosti $x > e$, je funkcija f na intervalu (e, ∞) strogo padajoča; podobno iz $f'(x) > 0$ za $0 < x < e$ sklepamo, da je f strogo naraščajoča na intervalu $(0, e)$. Zato ima f v točki $x = e$ največjo vrednost.

Ko gre x proti 0 (z desne strani), gre $\ln x$ proti $-\infty$, zato gre f tudi proti $-\infty$; ko gre x proti ∞ , $\ln x$ narašča počasneje kot x , zato gre f proti 0 s pozitivne strani. Sklepamo, da ima f eno samo ničlo $x = 1$. Na sliki 1 je računalniško generiran graf funkcije f .

Ker ima funkcija f v točki $x = e$ največjo vrednost, velja $f(x) < f(e)$ za vsak pozitivni x , ki ni enak e , zato velja neenakost (2), ta pa je enakovredna neenakosti (1). Torej je neenakost (1) resnična. (Ali bi nas opravljeni razmislek pripeljal na cilj tudi v primeru, ko bi na začetku postavili neenakosti (1) nasprotno neenakost? Ja! Razmisli, zakaj!)

a^b in b^a

Poskusimo razrešiti splošnejši problem. Če velja $0 < a < b$, kaj je večje

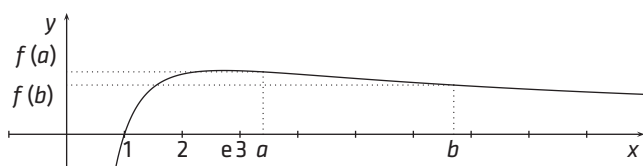
$$\blacksquare a^b \text{ ali } b^a?$$

Razmislimo in poskušajmo najti odgovor na vprašanje, kaj je večje, $f(a)$ ali $f(b)$, kjer je $f(x) = (\ln x)/x$.

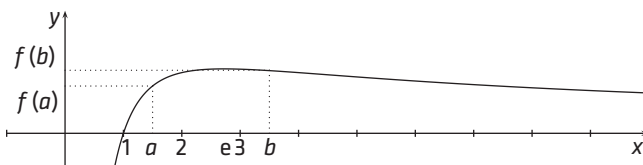
S pomočjo istega grafa kot prej ugotovimo, da je smiselno ločiti tri lege nastopajočih števil a in b :

1. Če velja $0 < a < b \leq e$, je $f(a) < f(b)$ (saj je f strogo naraščajoča na intervalu $(0, e)$), zato sledi $a^b < b^a$.

2. Če velja $e \leq a < b$ (slika 2), je $f(a) > f(b)$ (saj f strogo pada na intervalu (e, ∞)), zato sledi $a^b > b^a$.



Slika 2. Primer $e < a < b$



Slika 3. Primer $1 < a \leq e \leq b$

3. Če velja $0 < a \leq e \leq b$, nadalje ločimo dva primera:

(a) Če je $a \leq 1$, je $f(a) < f(b)$ (saj je $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$), zato sledi $a^b < b^a$.

(b) Če je $1 < a \leq e$, lahko $f(a)$ zasede poljubno vrednost na intervalu $(0, 1/e]$, isto velja za $f(b)$ (to je posledica zveznosti funkcije f). To pomeni, da so možne vse tri lege ($<$, $=$, $>$) števila a^b glede na število b^a .

Zgledi

ZGLED 1. Preizkusimo dobljene sklepe na naboru števil 2, e, 3, π , 4.

Velja $2^e < e^2$ (alineja 1), $2^3 < 3^2$ (izračun vrednosti, alineja 3b ne pomaga), $2^\pi < \pi^2$ (glej spodaj, alineja 3b ne pomaga), $2^4 = 4^2$ (izračun vrednosti, alineja 3b ne pomaga), $e^3 > 3^e$, $e^\pi > \pi^e$, $e^4 > 4^e$,

$3^\pi > \pi^3$, $3^4 > 4^3$ (vse alineja 2).

Posebej utemeljimo neenakost $2^\pi < \pi^2$: Ker je $2^4 = 4^2$, velja $f(2) = f(4)$. Ker je f strogo padajoča na $[e, \infty)$, velja $f(3) > f(\pi) > f(4)$. Sklep: $f(3) > f(\pi) > f(2)$, torej $f(\pi) > f(2)$, zato $\pi^2 > 2^\pi$.

Ugotovitev alineje 3b lahko razvijemo in zapišemo zanimivo lastnost potenc:

1. Če je $a \in (1, e) \cup (e, \infty)$, potem obstaja natanko eno od a različno število b , da velja $a^b = b^a$. Pri tem velja, da eno od števil a, b leži na intervalu $(1, e)$, drugo pa na (e, ∞) .

2. Če je $a \in (0, 1] \cup \{e\}$, potem ne obstaja pozitivno od a različno število, da bi veljalo $a^b = b^a$.

ZGLED 2. V zgornjem zgledu smo že opazili, da velja $2^4 = 4^2$, zato je pri $a = 2$ iskani $b = 4$ (in obratno).

ZGLED 3. Po trditvi pri osnovi $a = 3$ obstaja natanko eno število b , za katerega velja $3^b = b^3$. S približnim računom po metodi bisekcije lahko ugotovimo, da b leži med 2,47 in 2,48. Moč je celo pokazati, da iskano število b ni racionalno (poskusi!). ✖

Sudoku

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A					1	7		4	8
B			4						6
C		7		6					
D			2			1	3		
E		3			9			5	
F			9	2			8		
G						4		3	
H	5						9		
I	3	9		1	6				

Fermatova števila in konstrukcije pravih večkotnikov

MATEJ MLAKAR

♦ **Pierre de Fermat** (1601–1655), eden največjih matematikov svojega časa, je v svojem širokem opusu matematičnega ustvarjanja najbolj izstopal s svojimi rezultati iz teorije števil. Verjetno je najbolj znan po zadnjem Fermatovem izreku, ki pravi:

Enačba $a^n + b^n = c^n$ nima rešitev v množici naravnih števil za a, b, c , če je naravno število $n \geq 3$.

Problem, ki so ga razrešili šele leta 1993, je Fermat našel v prevodu Diofantove *Aritmetike*. Na robu lista je zapisal, da „ima dokaz, vendar je na robu zanj premalo prostora“.

Po velikem matematiku se imenujejo tudi *Fermatova števila*. To so števila F_n , ki jih definiramo kot

▪ $F_n = 2^{2^n} + 1$, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$.

Leta 1640 je Fermat postavil hipotezo, v kateri je trdil, da *so vsa števila F_n praštevila*. Njegova domneva je najverjetneje posledica tega, da so Fermatova števila od $F_0 = 3$ do vključno $F_4 = 2^{2^4} + 2 = 65537$ res praštevila.

Hitro pa se da pokazati, da $F_5 = 2^{32} + 1$ ni praštevilo; velja namreč $641 = 2^4 + 5^4$ in $641 = 2^7 \cdot 5 + 1$. Torej je $2^7 \cdot 5 = 641 - 1$ in $2^{28} \cdot 5^4 = (641 - 1)^4 = 641m + 1$, kjer je $m \in \mathbb{N}$. Po drugi strani pa je $5^4 = 641 - 2^4$, tako da je $2^{28} \cdot (641 - 2^4) = 641 \cdot t + 1$, kjer je $t \in \mathbb{N}$. Sledi $641 \cdot 2^{28} - 2^{32} = 641t + 1$ in nato $2^{32} + 1 = 641(2^{28} - t)$, kar pomeni, da $641 | F_5$.

Fermatovo zmoto je prvi uvidel **Euler**. Na svojstven način je pokazal, da so morebitni delitelji Fermatovih števil oblike $k \cdot 2^{n+1} + 1$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Za $n = 5$ je delitelja števila $F_5 = 4294967297$ iskal v množici $64k + 1$ in ga tudi našel za $k = 10$ v številu 641. Kljub utemeljitvi na napačni hipotezi so Fermatova števila preživela v svetu teorije števil, saj

imajo mnogo zanimivih lastnosti. Tako lahko hitro pokažemo, da so

vsa Fermatova števila paroma tuja.

Za vsako Fermatovo število F_n namreč velja $F_n - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_{n-1}$ (glej nalogo 1). Če je torej naravno število d delitelj števila F_n in števila F_m , kjer je $m < n$, potem d deli tudi $F_n - 2$, kar pomeni, da d deli 2. Ker pa so vsa Fermatova števila liha, mora biti $d = 1$.

Zgornjo lastnost je uporabil **Christian Goldbach** (1690–1764), znan po *Goldbachovi domnevi*¹, ko je leta 1730 podal zanimiv

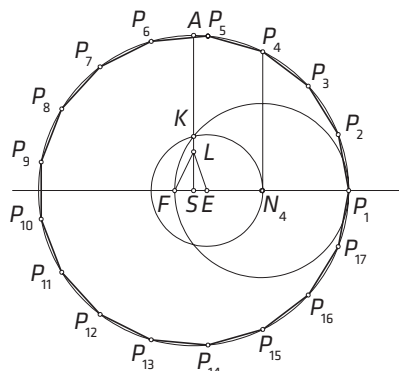
dokaz o obstoju neskončno praštevil.

Označimo s p_n praštevski delitelj števila F_n . Ker vemo, da so si vsa Fermatova števila paroma tuja, so tudi vsi praštevski delitelji različni, kar pomeni, da je tudi praštevil neskončno.

Povezanost med Fermatovimi števili in evklidsko geometrijo je ugotovil **Carl Friedrich Gauss**. Tako je leta 1796 uspel skonstruirati pravilni sedemnajstkotnik samo z uporabo šestila in ravnila. Potek konstrukcije je dokaj zapleten, dinamičen prikaz si lahko ogledate na spletni strani [1], dokaz pravilnosti konstrukcije pa v [2]. Gauss je odkril, da lahko

pravilni n -kotnik skonstruiramo s šestilom in ravnilom, če je število stranic enako $2^k p_1 p_2 \dots p_n$, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ pa so različna Fermatova praštevila.

¹Vsako sodo število, ki je večje od 2, se da zapisati kot vsota dveh praštevil.



Slika.

Danes vemo, da lahko pravilne večkotnike, ki imajo 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ... stranic, narišemo s šestilom in ravnilom. Nedavno so uspeli pokazati, da so vsa Fermatova števila od F_5 do vključno F_{32} sestavljena števila, čeprav poznamo celotno faktorizacijo le za $5 \leq n \leq 11$.

Tako je prvi pravilni večkotnik, za katerega ne vemo, če ga je mogoče skonstruirati, večkotnik z $F_{33} = 2^{2^{33}} + 1$ stranicami.

Zanimivo je, da šestega Fermatovega praštevila še ne poznamo. V dobi računalnikov in hitrih procesorjev se zanimanje za Fermatova števila povečuje. Tako lahko na spletni strani [3] vsak aktivno sodeluje v njihovi faktorizaciji in iskanju morebitnega novega Fermatovega praštevila. Trenutni rekord v iskanju praštevilskega delitelja največjega Fermatovega števila ima irski matematik John Cosgrave, ki je uspel s pomočjo računalnika pokazati, da je $3 \cdot 2^{2478785} + 1$ praštevilski delitelj števila $F_{2478782}$ (glej [4]).

Naloge

1. Z matematično indukcijo pokaži, da je za $n \in \mathbb{N}$

$$(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{n-1}} + 1) = (2^{2^n} - 1).$$

2. Uporabi Eulerjev praštevilski kriterij za Fermatova števila in preveri, ali je F_4 praštevilo.

3. Dokaži lastnosti Fermatovih števil:

(a) $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$;

(b) $F_{n+1} = F_n + 2^{2^n} F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$;

(c) $F_{n+1} = F_n^2 - 2(F_{n-1} - 1)^2$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

4. Dokaži, da je za vsako naravno število $n > 1$

števka na mestu enic števila F_n enaka 7.

Rešitve

1. Preverimo za $n = 1$. Res je $(2^{2^0} + 1) = 2^{2^1} - 1$. Naj velja trditev za n , dokažimo še za $n + 1$: zaradi induksijske predpostavke velja

$$\begin{aligned} & (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \cdots (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 1) = \\ & \quad \underbrace{(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \cdots (2^{2^{n-1}} + 1)}_{(2^{2^n} - 1)}(2^{2^n} + 1) = \\ & \quad = (2^{2^n})^2 - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

To med drugim tudi pomeni, da je $F_n - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1}$.

2. Po Eulerjevem kriteriju morajo imeti vsa praštevila, ki delijo F_4 , obliko $k \cdot 2^5 + 1 = 32k + 1$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Števil, manjših ali enakih 66537, ki so take oblike, je 2048, smiselno pa je preverjati števila do vrednosti $\sqrt{65537} \sim 256$. Postavljenim zahtevam ustreza sedem števil. Ta so 33, 65, 97, 129, 161, 193 ter 225. Števila 33, 65, 129, 225 ter 161 niso praštevila, praštevili 97 in 193 pa nista delitelja F_4 , zato mora biti F_4 praštevilo.

$$\begin{aligned} 3. \text{ (a) } F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = \\ &= ((2^{2^n})^2 - 1) + 2 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) + 2 = \\ &= ((2^{2^n} + 1) - 2)(2^{2^n} + 1) + 2 = \\ &= (F_n - 2)F_n + 2 = (F_n^2 - 2F_n + 1) + 1 = \\ &= (F_n - 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

(b) Pokažimo raje, da je

$$F_{n+1} - F_n = 2^{2^n} \cdot F_0 F_1 \cdots F_{n-1},$$

na koncu pa si pomagajmo z nalogo 1:

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= (2^{2^{n+1}} + 1) - (2^{2^n} + 1) = \\ &= 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} = 2^{2 \cdot 2^n} - 2^{2^n} = 2^{2^n + 2^n} - 2^{2^n} = \\ &= 2^{2^n} (2^{2^n} - 1) = 2^{2^n} (F_n - 2) = 2^{2^n} F_0 F_1 \cdots F_{n-1}. \end{aligned}$$

(c) Uporabimo lastnost iz (a):

$$\begin{aligned} \blacksquare F_n^2 - F_{n+1} &= F_n^2 - ((F_n - 1)^2 + 1) = \\ &= F_n^2 - F_n^2 + 2F_n - 2 = 2(F_n - 1) = 2(F_{n-1} - 1)^2. \end{aligned}$$

4. Če je $n > 1$, je 2^n večkratnik števila 4. Naj bo $2^n = 4k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, zato je $F_n = 2^{2^n} + 1 = 2^{4k} + 1$. Ker lahko 2^{4k} preoblikujemo v

$$\begin{aligned} \blacksquare 2^{4k} &= 16^k = (15 + 1)^k = \\ &= 15^k + \binom{k}{1} 15^{k-1} + \binom{k}{2} 15^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} 15 + 1 = \\ &= 5m + 1, \end{aligned}$$

kjer je $m \in \mathbb{N}$, ima 2^{4k} ostanek 1 pri deljenju s 5. Torej je ostanek F_n pri deljenju s 5 enak 2, če je $n > 1$. Števka na mestu enic je lahko 2 ali pa 7. Ker je Fermatovo število liho, je števka enaka 7.

■ Literatura

- [1] <http://www2.arnes.si/~mmlaka10/fermat/n17/17kotnik.htm>
- [2] H. Dörrie: *100 Great Problems of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1965, str. 177–184.
- [3] <http://www.fermatsearch.org>
- [4] <http://www.prothsearch.net/fermat.html> ✖



Družinska

BORIS LAVRIČ

➤ Leta 1990 je bila v naši reviji objavljena spodnja naloga. V uredništvu smo se odločili, da jo ponovno objavimo skupaj z dodatnim vprašanjem.

Simona, ki je pravkar praznoval svoj rojstni dan, je obiskal njegov pozabljeni ded Jaka. Voščil mu je in ga povprašal o starosti. Simon mu je ponagajal: „Seštej številke (= cifre) moje rojstne letnice, pa jo dobiš,“ in nadaljeval: „In koliko let imaš ti?“

Jaka ni od muh in je brž izračunal vnukovo starost in ga zaposlil z naslednjim odgovorom na njegovo vprašanje: „Zmnoži številke moje rojstne letnice in dobil boš mojo starost.“ Simon ni padel daleč od Jake in je kmalu izračunal dedovo starost. Poiščite jo še vi in ugotovite, kateri rojstni dan je pravkar praznoval Simon.

In sedaj še dodatno vprašanje: „Katerega leta dolej bi lahko prvotno nalogo ponatisnili, da bi imela rešitev?“ ✖

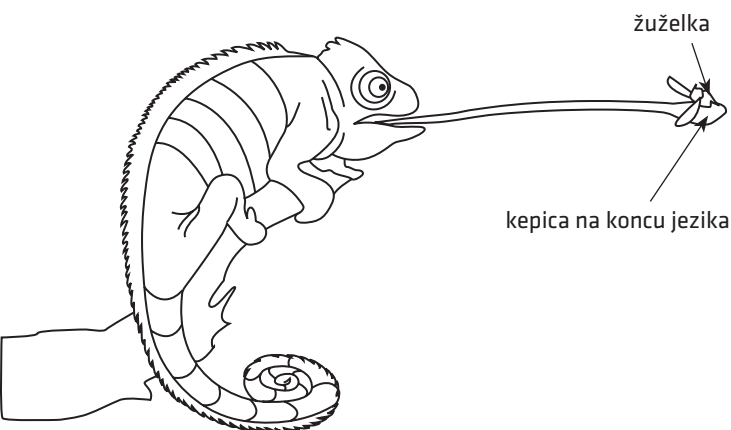
Koledarji

REŠITEV NALOGE

DARJO FELDA

➤ Z zbiranjem lahko konča, če ima v zbirki 14 različnih letnih koledarjev (prvi dan v letu je lahko katerikoli izmed sedmih dni v tednu, pa še na navadna in prestopna leta moramo paziti). Označimo z $D_1, D_2, \dots, D_7$ dneve v tednu. Cikel štirih zaporednih let ima $366 + 3 \cdot 365$ dni ali 208 tednov in 5 dni. Če se je prvo prestopno leto po letu 1970, to je leto 1972, začelo z D_1 , se naslednja prestopna leta začnejo takole: $1976 - D_6, 1980 - D_4, 1984 - D_2, 1988 - D_7, 1992 - D_5, 1996 - D_3$. Leta 1996 je torej dedek zbral vse različne letne koledarje za prestopna leta.

Do tedaj je zagotovo zbral tudi vse različne letne koledarje za navadna leta. Navadna leta neposredno pred prestopnimi se namreč začnejo z dnem v tednu, ki je neposredno pred dnevom v tednu, s katerim se začnejo ta prestopna leta (tako imamo $1971 - D_7, 1975 - D_5, 1979 - D_3, \dots, 1995 - D_2$). V resnici pa je dedek že leta 1978 imel vse možne koledarje za navadna leta. ✖



Slika 1. Kameleon z iztegnjenim jezikom in plenom.

Kako kameleon iztegne jezik?

ANDREJ LIKAR

➔ Kameleoni lovijo tako, da proti nič hudega slutelčemu plenu zelo hitro iztegnejo svoj jezik. Jezik je tanek in dolg, konča se z mišičasto lepljivo kepico, ki se prisesa na plen (slika 1).

Kako kameleon tako hitro iztegne jezik? Na to vprašanje še do nedavnega biologi niso imeli jasnega odgovora. Zgodi se neverjetno hitro. V manj kot stotinki sekunde se jezik pospeši od mirovanja do hitrosti 6 m/s, nato pa zadene žučelko na razdalji, denimo, 30 cm v manj kot desetinki sekunde. To je za uspešen lov pomembno, saj tudi žučelke niso ravno počasne, še posebno, ko jim gre za življenje. Spomnimo se, kako težko je ujeti muho z golimi rokami. Pospešek jezika doseže za naše razmere neverjetnih 500 m/s². S kolikšno močjo bi morala delati mišica, da bi lahko iztegnila jezik s tolikšno hitrostjo v tako kratkem času? Denimo, da ima mišica enako maso kot jezik. Kinetična energija jezika je

$$\blacksquare W_k = \frac{mv^2}{2},$$

moč

$$\blacksquare P = \frac{W_k}{t},$$

specifična moč, to je moč na enoto mase mišice, pa

$$\blacksquare \frac{P}{m} = \frac{v^2}{2t} = \frac{36 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ s}} = 1800 \frac{\text{W}}{\text{kg}}.$$

Z natančnejšimi podatki so dobili celo 3000 W/kg, česar mišice zagotovo ne zmorejo. Biologi so zato

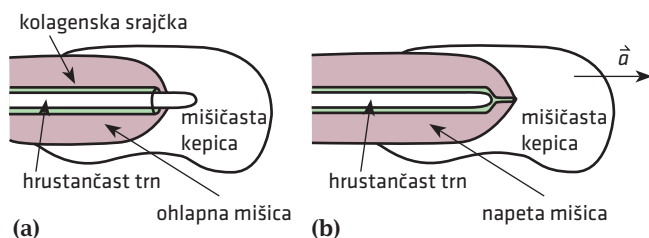




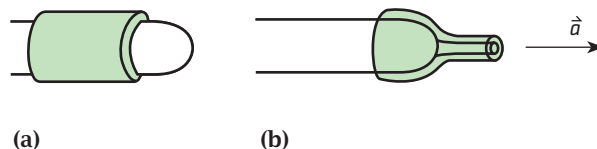
vedeli, da kameleoni skrivajo nekakšen katapult, ki omogoča, da mišice počasi napnejo elastično „vzmet“, jo v zelo kratkem času sprostijo in tako pospešijo jezik. Kako je katapult sestavljen, pa ni bilo lahko ugotoviti.

Da bomo kameleonov katapult lažje razumeli, se spomnimo na zobanje češenj in na koščice, ki jih pri tem radi mečemo naokoli. Koščico primemo s prsti, močno stisnemo in koščica zleti presenetljivo daleč, do deset metrov in več. Na začetku ima torej hitrost $v = \sqrt{lg} = \sqrt{10\text{m} \times 10\text{ms}^{-2}} = 10\text{ms}^{-1}$, če pri računu uporabimo enačbo za največjo razdaljo l pri poševnem metu. Z g smo označili težni pospešek. To je blizu hitrosti kameleonovega jezika, tudi čas pospeševanja je podoben, saj jezik in koščica opravita pri pospeševanju približno enako pot.

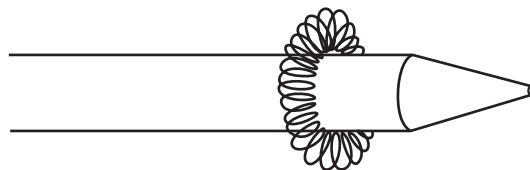
Prsti torej delujejo kot preprost in učinkovit katapult. Kameleon uporabi podoben prijem. Vlogo koščice igra pri njem hrustančast trn, na katerega je nataktnjen jezik, vlogo prstov pa mišica in prožna cevka iz kolagena, ki jo mišica napne. Trn ostane na mestu, saj je trdno pripet na kameleonovo telo. Vse skupaj deluje tako, kot pri koščici v kakšni risanki: s prsti se odrinemo, koščica pa ostane na mestu. Zaradi velikega razmerja med maso roke in koščice seveda odleti slednja, pri kameleonu pa je razmerje mase jezika in telesa s trnom zelo majhno, zato odleti pač jezik. Razmere so zelo poenostavljeno prikazane na sliki 2. Kameleon lahko z napenjanjem in popu-



Slika 2. Poenostavljena skica ustroja kameleonovega katapult za jezik. Na hrustančast trn je nataktnjena cevka iz prožnega tkiva, cevko pa obkroža sprožitvena mišica (a). Ko se mišica skrči, se cevka raztegne, in ko njen konec doseže zaobljen vrh trna, mišica s cevko odleti, jezik se sproži (b). Katapult deluje kot prsti pri streljanju s češnjevimi koščicami. Vlogo koščice igra trn, vlogo prstov pa mišica in prožna cevka, pri čemer odletijo „prsti“, „koščica“ pa ostane na mestu. Prožno cevko lahko še dodatno raztegnejo pomožne mišice, ki na sliki niso prikazane.



Slika 3. Katapult, narejen po kameleonovem zgledu. Na namiljeno kovinsko palico navlečemo ozko gumijasto cevko (a), nato jo s potiskanjem proti zaobljenemu delu palice sprožimo (b), da odleti z velikim pospeškom $\vec{a}$.



Slika 4. Inačica katapulta na prejšnji sliki. Na koničasto palico navlečemo svitek iz vijačne vzmeti, ki odleti s palice, ko doseže stožčasto oblikovano konico.

ščanjem mišice dobro nadzira trenutek iztegnitve, podobno kot sami nadziramo koščico.

Katapult, ki tako deluje, lahko izdelamo sami. Na na enem koncu zaobljeno in namiljeno kovinsko palico navlečemo kratko gumijasto cevko. Cevka naj ima precej manjši premer od palice, ko je ohlapna. Ko je nataktnjena na palico, je zato močno napeta. Ko cevko počasi potiskamo proti zaobljenemu koncu palice, cevka nenadoma odleti s palice (slika 3). Nekoliko drugačen katapult, ki deluje z vijačno vzmetjo zvito v svitek, kaže slika 4. Svitek navlečemo na zašiljeno palico, da se vzmet raztegne. Ko svitek potem počasi potiskamo iz valjastega dela palice proti konici, se katapult nenadoma sproži in svitek odleti s palice. Dovolj lahka vzmet s primerno prožnostjo in s skrbno izbiro debeline palice in nagnjenosti konice odleti presenetljivo daleč.

Zanimivo vprašanje je, kako lahko kameleon zadene plen na kakšno desetinko milimetra natančno. Znano je, da se pri tem zanaša na izbočenost očesne leče. To so ugotovili s posrečenimi poskusi. A o tem kdaj drugič. ✖

Plimovanje

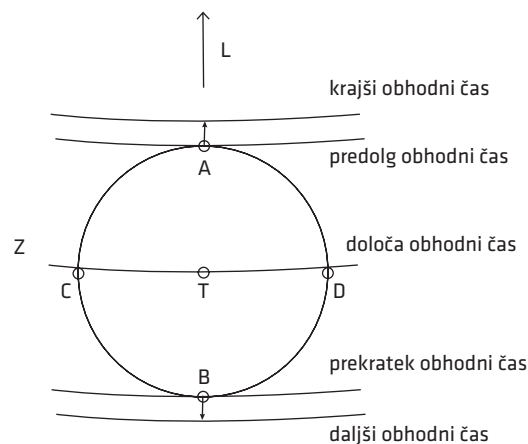
JANEZ STRNAD

➔ Na počitnicah ob morju ste lahko opazovali, da se gladina morja dvakrat na dan zviša in zniža. Poskusimo najprej kolikor mogoče preprosto pojasniti to *plimovanje*.

Odmislimo vpliv Sonca in vzemimo, da na Zemljo deluje samo Luna in da Zemlja prosto pada pod vplivom njene gravitacije.¹ Čas obhoda določa oddaljenost težišča Zemlje T od Lune. Luno si kot krogelno simetrično telo lahko mislimo zmanjšano v točko v njenem težišču. Če nas zanima plimovanje na Zemlji, pa moramo upoštevati razsežnosti Zemlje. Čim bolj je telo oddaljeno od Lune, tem večji je obhodni čas.

Točka A na Zemlji pod Luno se giblje z enakim obhodnim časom kot težišče Zemlje T, a v manjši razdalji. Za to razdaljo je obhodni čas predolg. Zato teži točka proti tirnici z manjšo razdaljo od Lune, to je proti Luni (slika 1). Točka B na Zemlji na nasprotni strani Lune se tudi giblje z enakim obhodnim časom kot težišče Zemlje T, a v večji razdalji. Za to razdaljo je obhodni čas prekratek. Zato teži točka proti tirnici z večjo razdaljo od Lune, to je od Lune proč. Voda na gladini morja v točki pod Luno sledi težnji proti Luni. V tej točki je *plima* in je gladina morja najvišja. Tudi voda na gladini morja v točki na nasprotni strani Lune sledi težnji, v tem primeru od Lune proč. Tudi v tej točki je *plima* in je gladina morja najvišja.

V točkah C in D na površju Zemlje na prečnem premeru je obhodni čas približno enak obhodnemu času težišča Zemlje T. Vendar gravitacija deluje proti Luni pod kotom proti zveznici Lune s težiščem Zemlje. Zato ima poleg komponente, vzporedne z zveznico težišča Zemlje in Lune, tudi komponento pravokotno na to smer, to je v smeri proti težišču Zemlje. Voda na gladini morja v teh točkah sledi komponenti proti težišču. V teh točkah je *oseka* in je gladina morja najnižja. Zemlja se zavrti v 24-ih urah okoli svoje osi. Zato se v vsaki točki morja na njenem površju dvakrat na dan pojavi plima in dvakrat na dan oseka. Tako smo okvirno opisali *plimsko silo*, ki Zemljo



Slika 1. Zemlja Z se giblje pod vplivom gravitacije Lune L. Obhodni čas določa razdalja težišča Zemlje od Lune. V točki A je obhodni čas predolg in točka teži k manjši razdalji, ki ustreza manjšemu obhodnemu času. V točki B je obhodni čas prekratek in točka teži k večji razdalji, ki ustreza daljšemu obhodnemu času. Točki C in D težita k Luni v smeri, ki ima projekcijo proti težišču Zemlje.

v smeri proti Luni nateza, v prečni smeri pa stiska.

V svoji razlagi smo prikrito upoštevali tretji Keplerjev zakon, ko smo večji razdalji priredili daljši obhodni čas, a smo ostali površni. Plimovanje je mogoče nekoliko podrobneje pojasniti z gravitacijskim zakonom, kakor je leta 1687 naredil Isaac Newton.

Po Newtonovem gravitacijskem zakonu deluje telo z maso M na telo z maso m v razdalji R s privlačno silo $F = GmM/R^2$. Pri tem je $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg})$ gravitacijska konstanta, ki jo je leta 1798 izmeril Henry Cavendish. Sili na telo z maso m ustreza gravitacijski pospešek $g = F/m = GM/R^2$. Z maso Lune $M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ dobimo za koeficient $k = GM = 4,90 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

¹ Zemlja in Luna se gibljeta okoli skupnega težišča, tako da sta vselej na njegovih nasprotnih straneh. V dobrem približku Luna kroži okoli Zemlje, ker je skupno težišče oddaljeno $0,012R = 4600 \text{ km}$ od težišča Zemlje, kar je manj od polmera Zemlje 6380 km . Pri obravnavanju plimovanja ni treba misliti na gibanje okoli skupnega težišča, pomembna sta le razdalja Lune od Zemlje in polmer Zemlje.



Težišče Zemlje se giblje v razdalji R od Lune. Točka A se giblje v manjši razdalji $R - r$, če je r polmer Zemlje, in točka B v večji razdalji $R + r$. Gibanje Zemlje kot celote določa gravitacijski pospešek njenega težišča T: $g_T = k/R^2$. Pospeška v točkah A in B sta

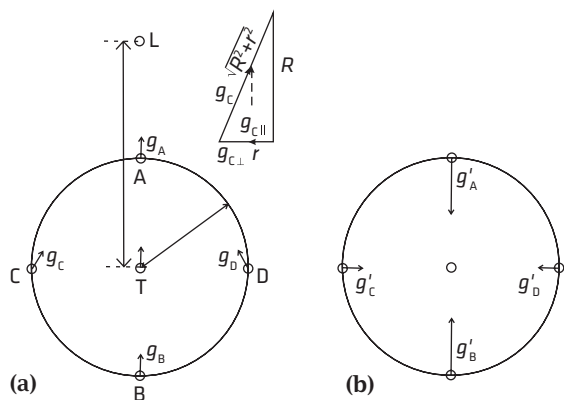
$$\blacksquare g_A = k/(R - r)^2 \quad \text{in} \quad g_B = k/(R + r)^2.$$

Pospešek v točki C

$$\blacksquare g_C = k/(R^2 + r^2)$$

ima komponento, vzporedno z zveznico težišča Zemlje in Lune $g_{C\parallel} = g_C R / \sqrt{R^2 + r^2}$, ter komponento v pravokotni smeri $g_{C\perp} = g_C r / \sqrt{R^2 + r^2}$. Nazadnje smo uporabili Pitagorov izrek in spoznanje, da je trikotnik pospeškov podoben trikotniku razdalj (slika 2a).

Opazovalec, ki prosto pada pod vplivom gravitacije, gravitacije ne občuti. Do tega pomembnega spo-



Slika 2. Gravitacijski pospešek za nepospešenega opazovalca (a) in plimski pospešek za pospešenega opazovalca, ki skupaj z Zemljo prosto pada, v značilnih točkah (b). Pospeški v nepospešenem sistemu so veliko večji od plimskih pospeškov v pospešenem sistemu, ki je povezan z Zemljo.

znanja smo se dokopali v eni od prejšnjih števil Preseka. Opazovalec v težišču Zemlje skupaj z Zemljo prosto pada, zato gravitacije Lune ne občuti. Gravitacijski pospešek za opazovalce v točkah na površju Zemlje dobimo, ko od gravitacijskega pospeška v njih odštejemo g_T v smeri proti Luni. Opazovalec v točki A tako zazna pospešek

$$\blacksquare g'_A = g_A - g_T = k(1/(R - r)^2 - 1/R^2) = k(2rR - r^2)/(R^2(R - r)^2) \approx 2kr/R^3,$$

opazovalec v točki B pospešek

$$\blacksquare g'_B = g_B - g_T = k(1/(R + r)^2 - 1/R^2) = -k(2rR + r^2)/(R^2(R + r)^2) \approx -2kr/R^3$$

ter opazovalec v točki C, vzporedno z zveznico težišča Zemlje in Lune, komponento pospeška

$$\blacksquare g'_{C\parallel} = g_C R / \sqrt{R^2 + r^2} - g_T = k(R / \sqrt{(R^2 + r^2)^3} - 1/R^2) \approx 0$$

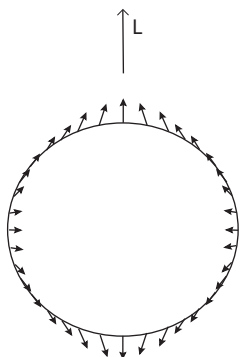
in, pravokotno na to smer, komponento pospeška (slika 2b)

$$\blacksquare g'_{C\perp} = g_C r / \sqrt{R^2 + r^2} = kr / \sqrt{(R^2 + r^2)^3} \approx kr/R^3.$$

V zadnjem koraku smo v približnem računu upoštevali, da je polmer Zemlje $r = 6380$ km veliko manjši od razdalje Lune od Zemlje $R = 384\,000$ km. Razmerje $r/R = 0,0166 = 1/60$ ali njegov kvadrat smo zanemarili v primeri z 1. *Plimski pospešek* v točkah C in D meri kr/R^3 in kaže proti središču Zemlje, v točkah A in B meri dvakrat toliko in kaže od središča Zemlje. Z navedenimi podatki sledi $kr/R^3 = 5,52 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$ (slika 3). To je le prvi, približni korak pri obravnavanju plimovanja.

Trdna Zemlja zaradi plimske sile le malo spremeni obliko. Gladina morja pa se zaznavno zviša in zniža. Zaradi vrtenja Zemlje plima in oseka dvakrat na dan dosežeta vsako točko na zemeljskem površju. Natančno vzeto se plima ponovi dvakrat v 24-ih urah in 53 minutah, kolikor meri čas med zaporednima trenutkoma, ko je Luna nad določeno točko na površju Zemlje najvišje na nebu. Času enega vrtljaja Zemlje, to je 24-im uram, je namreč treba prišteti $1/27,3$ dneva, ker Luna obide Zemljo glede na zvezde v 27,3 dneva.

Višinska razlika med najvišjo in najnižjo gladino je odvisna od oblike morskega dna in obale. Plimski val sledi Luni od vzhoda proti zahodu, zato je višinska razlika največja v zalivih, ki potekajo v smeri vzhod-zahod in so na zahodu zaprti. Med svetovnimi rekorderji navajajo zalive na vzhodni obali Severne in Južne Amerike: zaliv Fundy v Kanadi z 20-imi, Porto Gallegos v Argentini z 18-imi in zaliv Frobisher v Kanadi s 17-imi metri. Os Jadranskega morja je bli-



Slika 3. Približna slika plimskega pospeška ali plimske sile na površju Zemlje. Plimska sila je sorazmerna s plimskim pospeškom $F = mg$. Pri plimskem pospešku $k/R^2 = 5,52 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$ deluje na telo z maso 1 kg plimska sila $5,52 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. Na površju Zemlje največja plimska sila na telo z maso 1 kg doseže dvakrat toliko, to je $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ N}$. Plimski pospešek je veliko manjši od gravitacijskega pospeška $9,8 \text{ m/s}^2$ in plimska sila veliko manjša od teže.

zu smeri sever-jug in plimovanje v njem ni izrazito, v severnem delu doseže 0,9, v južnem le 0,3 metra.

Opisali smo samo plimovanje morja. Vendar plimuje tudi trdna zemeljska skorja. Ta se premakne za približno 30 centimetrov. Tega ne opazimo, ker se skupaj s površjem Zemlje premakne tudi vse na njem. Tudi na ladji sredi oceana ne opazimo plimovanja. Vendar je plimovanje zemeljske skorje mogoče izmeriti. Plimuje tudi ozračje, vendar je to plimovanje zanemarljivo v primeri z učinki zaradi segrevanja zraka s sončno svetlobo.

Upoštevali smo samo gravitacijo Lune. Na Zemljo deluje tudi Sonce, ki ima $2,71 \cdot 10^7$ -krat večjo maso od Lune in je 389-krat bolj oddaljeno od Lune. Plimski pospešek Sonca na Zemlji tako doseže $2,71 \cdot 10^7 / 389^3 = 0,46$ plimskega pospeška Lune. Čeprav prevladuje vpliv Lune, vpliv Sonca ni zanemarljiv. Oba vpliva se nalagata, pri čemer je treba upoštevati, da Sonce in Luna ne dosežeta najvišje točke na nebu sočasno. Posebno velika je plima ob polni Luni ali mlaju.

Zaradi notranjega trenja in upora na morskem dnu potovanje plimskega vala troši energijo. To povzroča, da se dan podaljša za 16 milijonin sekunde na leto in oddaljenost Lune poveča za dobre tri centimetre na leto. Pri tem naletimo na pojave, ki jih v naši poenostavljeni sliki ne moremo opisati.

Plimovanje pa je mogoče izkoristiti za pridobivanje energije. Na ustju reke Rance v Franciji uspešno deluje plimska elektrarna. Plimski val z višinsko razliko osem metrov ob plimi pljusne čez 330 metrov dolg jez in med oseko voda poganja 24 turbin s skupno močjo 240 MW. Plimski pospešek ima tudi pomembno vlogo pri oceanskih morskih tokovih.

Albert Abraham Michelson se je rad lotil merjenj, ki so se zdela neizvedljiva. Izmeril je tudi plimovanje v „kozarcu vode“. Cevki v obliki črke U je postavil v navpični ravnini sever-jug in vzhod-zahod ter za višinsko razliko v krakih ugotovil 0,026 mm.

Zemlja povzroča plimo na Luni. Plimski pospešek na Luni dobimo, če upoštevamo, da je masa Lune 81,6-krat manjša od mase Zemlje in polmer Lune 3,71-krat manjši od polmera Zemlje. Zemlja na Luni povzroča $81,6/3,67 = 22$ -krat večji plimski pospešek, kot ga na Zemlji povzroča Luna. Pospešek je tolikšen, da je nekdanje zaviranje v tekočem delu povzročilo, da Luna kaže Zemlji vedno isto stran.

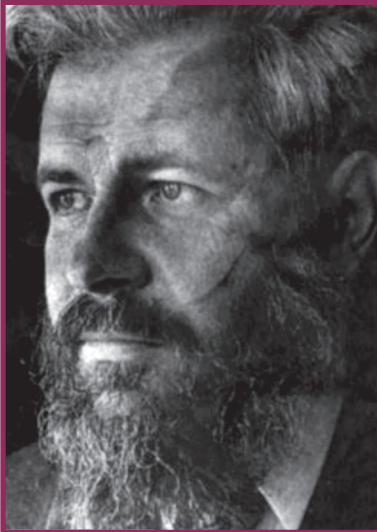
Plimski pospeški v Osončju dosežejo še večje vrednosti. V bližini velikega planeta je plimski pospešek tolikšen, da ne morejo nastati lune. Tam nastanejo obroči iz drobnih delcev, npr. okoli Saturna. Plimski pospešek Jupitra je pred leti raztrgal komet Shoemaker-Levy 9, ki je v delih padel na Jupiter. Zaradi upora, ki ga plimski pospešek Jupitra povzroča v tekoči notranjosti lune Io, se v njej sprošča toplota in na njej opazimo izrazite ognjeniške pojave.

Še veliko večji plimski pospeški se pojavijo v bližini zelo majhnih teles z veliko maso, na primer nevtronskih zvezd ali črnih lukenj. Tam plimski pospešek raztrga telo tako, da ga v radialni smeri nategne in v prečni smeri stisne. Slikovito pravijo, da se pri tem telesa spremenijo v špagete. Tudi v tem primeru naša preprosta slika odpove.

Galileo Galilei se je pri pojasnjevanju plime motil. Oprl se je na izkušnje mornarjev, ki so prevažali vodo. Gladina vode v posodi na ladji se dvigne na sprednjem delu posode, ko se ladja zaustavlja, in na zadnjem, ko speljuje. Vedel je, da se spreminja hitrost na površju Zemlje zaradi vrtenja Zemlje in zaradi njenega gibanja okoli Sonca. Mislil je, da se obe spremembi sestavita in povzročita plimovanje. V svoji razlagi je videl glavno potrdilo zamisli Nikolaja Kopernika o kroženju Zemlje in leta 1632 v knjigi odločno trdil, da je Zemlja le eden od planetov. Spočetka je knjigi mislil dati naslov *O plimi in ose-*

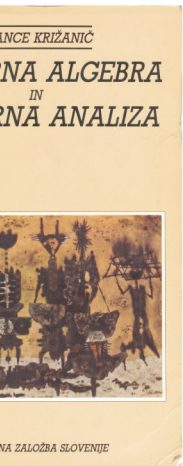
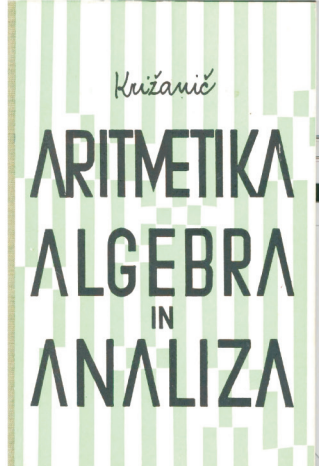
²De Dominis je bil najprej senjski škof, nato je deloval v vodstvu splitske nadškofije. Na strani Benečanov se je zapletel v spor z Vatikanom. Umaknil se je v Anglijo, se vrnil v Rim, kjer je umrl v zaporu. Njegovo truplo so sežgali na grmadi. De Dominis je pojasnil tudi nastanek mavrice, kar navadno pripisujejo Renéju Descartesu.

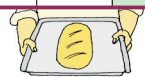
Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALČIČ	KMETIJSKI STROJ, RAHLJALNIK	NARIT KUPCEK PRSTI NA TRAVNIKU	ZVEZNA DRŽAVA NA SV ZDA	NAZIV	FIZIKALNI POJAV	NAJSVETLEJŠA ZVEZDA OZVEZDJA OREL	ZAČETEK IN KONEC LOČILA	VRH NAD DOLINO HOBOVŠČICE (NAD SOVODNJEM)	POGORJE NA SLOVASKEM (NJEGOV NIŽJI DEL)	OZNAKA TADŽIKISTANA
USTREZNA PROTI-VREDNOST ALI KOLIČINA			3							
SEŽIGALNICA TRUPEL										
SUNKOVITO RAZELEKTRENJE V NABITEM OZRAČJU	2						MARKO ZORKO SREDOZEMSKI GRM, TAMARISKA			PUBLICIST PASTER-NJAK
DELOVNA SKUPINA				OPERA NA HISA V MILANU	ODISEJEV OTOK NASLOV JAPONSKIH CESARJEV					
TUJEC, INOZEMEC MEDNAR. NOGOM. ZVEZA										
						GIBALO NAJVEČJI MALI SUNDISKI OTOK	1			
	POMEMBENI SPODNJI PREDEL MEDMO-ZGANOV	LIKOVNI IZDELEK GANSKI DIPLOMAT (KOFI)		SKUŠNJAVA (NAREČNO PRIMOR.)						
				DOLGOLET. SL. TRENER NAMIZNEGA TENISA (FRANC)	DEPARTMA OB LOARI V SREDNJI FRANCIJI POLIMER					INTERESNO ZDRUŽENJE ZA RAZDELITEV DOBIČKA
VZGIB ZA DEJANJE						AMERIŠKO SOFTVER. PODJETJE NOČNA ČAPLJA	4			VRTIŠČE TELESA OFICIRSKI ČIN
MINI IZVEDBA IZDELKA ALI OBJEKTA										
LESENA FORMA ZA BETONIRANJE				ŽUŽELKA, KI PIČI, KADAR JE RAZ-DRAŽENA	7	PLETENA POSODA, KI SE NOSI NA RAMENIH		BALTSKA DRŽAVA KOLIČINA Z ENOTO PASKAL	6	
TISOČ KILO-GRAMOV	9			STOPNJA ENAČBE ALI POLINOMA PAJČOLAN		POVEZAVA GLAVE S TRUPOM LJUDSKI UPOR				ŠVEDSKI PISATELJ (1860-1925) SL. IGRALEC (MAKS)
IVAN TAVČAR		NIKOLA TESLA ANGLEŠKI JUNAK HOOD		LADIN TEREDEC SOL CIANO-VODIKOVE KISLINE			AMERIŠKI PISATELJ (WASHINGTON)	DVIGALO HONDUR. OTOK V KARIB. MORJU		
V DOKTOR-SKI DISER-TACIJI JE OBRAVNAVAL POS-PLOŠITVE NJEGOVE OSNOVNE LEME	IME DVEH VASI PRI TURJAKU ČOLN GUMENJAK					IGRA S KARTAMI EKSPLOZ. TELO V TLEH			ČRTNA UPODO-BITEV IGRALEC MATOH	
KVARNER-SKI OTOK JUŽNO OD KRKA	17		PLESO-TVOREN ZLOG	POKRAJINA V SZ. SRBIJI KRAJ PRI DOMŽALAH			23	NAŠA ATLETINJA (ALENKA) PARADIŽ		
CITORENOV OLD-TAJMER			REDKA MEHKA KOVINA (In) KATARINA VENTURINI		19	REDEK LANTANOID (znak Y) LIDIJA OSTERC				RAZDALJA, NA KATERO SE OKO SE PRILAGODI RIMSKA 51
MATEMAT. PODROČJE, KI GA JE OBRAV-NAVAL										
TOMAŽ SLIVNIK		URJENJE, TRENING	16		VULKAN				13	


VESLAČ MUJKIČ
20

	ALTAJSKO LJUDSTVO, PRAVI TUNGUZI	ODRASEL SAMEC PRAŠIČA	NJEGOVA LETA 1960 IZDANA POLJUDNO-ZNANSTVENA KNJIGA	IGRALKA KOMLIJANEC	ROBERT ZEMEČKIS	NAJVEČJA ZVEZDA OZVEZDJA ŠKORPIJON	ORGAN PRI OZN ZA VARNOST MIRU	OBOJ NAD STEBROMA
AVSTRAL. PTIČ TEKAČ			SAMICA GOVEDA					
DOLGA ZGODOVINSKA DOBA			BIV. ŠPAN. PREMIER (JOSE MARIA) OKAY					
NAPAKA ZARADI NELOGIČ. UKAZA RAČUNALNIKU	11				DOTIK DVEH GIBAJOČIH SE TELES	12		
PRIMOR. PRILOGA H GOLAZU					LITERARNA JUNAKINJA KARENINA MOJZESOV BRAT			
KAČA, KAČON			NACIJA					5
KRAŠKI POŽIRALNIK			ZNAK ZA KALCIJ					
					CVETOČA GOZDNA PODRAST IGRALEC DOUGLAS			
@	NEKONTROLIRANO DOGAJANJE		SLAVKO AVSENIK	NAZOREN OPIS	UPRAVNI ODBOR	MATEMAT. POJEM		
					VIŠINA GLADINE	SIMBOL ZA IRIDIJ		KUŽNA BOLEZEN OVAC IN KOZ
		SLADEK SOK, KI GA NABIRAJO ČEBELE				15		
		NJEGOV ROJ. KRAJ SLIKOVITE SO ŠKOCJANSKE				VEZNIK FLAV-TISTKA GRAFENAUER	NIKALNICA	
							SKUPINA ENCIPOV	
			LESNI DROBEČ ODLAGALIŠČE ODPADKOV			SPOKOJ, TIŠINA MERILNIK TLAKA V PLINIH	FIGURA	
						PRISTAŠ MARKOVE TEORIE POKRAJINA V SZ. RUSIJI	VRTILNA KOLIČINA DELCA	
				18		IGRALKA WINSLET		22
						MIRAN TRONTELJ	ROD FAZANOV	
ISLAMSKI DUHOVNIK PREDNJA STRAN GLAVE	14				FILOZOFSKA SMER S KONCA 19. STOL.		TANGENS	
					MAJHNA POSODICA			
					SOSEDI ČRKE F			
			TULJAVA Z ŽELEZ. JEDROM, PO KATERI TEČE TOK	8				GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
		PASCUAL JORDAN	DRŽAVA V AFRIKI NAKIT, LEPOTIČJE (STAR.)			SL. IZBOR PESMI EVROVIZIJE ZORAN HOČEVAR		
AGREGATNO STANJE SNOVI PEVSKI ZLOG					DVIG LETALA NEVTRAL ZA MNOŽENJE			
					NEKD. SL. HOKEJISTA (GORAZD IN RUDI) EVA ČERNE	21		
		ZANIKN PES, CUCEK				ODMEV		
						VELIKA JUŽNO-AMERIŠKA PAPIGA		

NAGRADNI RAZPIS

➔ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poštnina je že plačana) do **25. aprila 2008**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov paket**. ✕



15
nadaljevanje
s strani

ki, a ga je na zahtevo cenzorjev spremenil v *Dialog o dveh velikih svetovnih sestavih*. Galilei je posebej odklonil zamisel „nekega visokega duhovnika“, da je plimovanje povezano z Luno. To je bil Hrvat Marco Antonio de Dominis² – Markantun Dominković, ki je leta 1625 prvi pojasnil plimovanje z vplivom Lune. ✖

Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA



27. Arktični led. Na Severnem ledenem morju (Arktičnem oceanu) plava ledena plošča, debela v povprečju dva metra. Poleti se več kot pol ledu stali. Koliko bi se spremenila gladina morja, če bi se ves led stalil? Pri tej oceni ne upoštevaj drugih razlogov za spremembo gladine morja (npr. toplotno raztezanje vode, taljenje ledenikov in ledenih plošč na celinah in otokih, dogajanja na Antarktiki). Podatki: površina arktičnega ledu je ob koncu zime kakih 15 milijonov km², površina vseh oceanov in morij pa je 360 milijonov km².

Poskus. Za lažji razmislek napravi naslednji poskus. V kozarec vode daj kos ledu in dolij toliko ledeno mrzle vode, da bo gladina vode segla točno do roba kozarca. Verjetno bo zaradi površinske napetosti celo za spoznanje višja. Del ledu bo kukal ven. (Koliko?) Počakaj, da se led stali. Ali pričakuješ, da bo gladina vode (a) padla, (b) ostala ista, ali (c) narastla, tako da bo nekaj vode steklo čez rob? Ali je poskus potrdil tvoja pričakovanja? Razloži izid. Kaj iz tega sklepaš o gladini morja, če se plavajoči arktični led stali?

Odgovor na vprašanje iz prejšnje številke o stisljivosti snega boste našli v 6. številki Preseka. Upamo, da je medtem zapadlo dovolj snega, da ste lahko napravili poskuse. ✖

Podhlajena voda

ODGOVOR NALOGE

MOJCA ČEPIČ

➔ Že pri poskusu s soljenjem ledu [1] ste spoznali, da soljen led „vpliva“ na okolico drugače kot nesoljen. Na kozarcu s soljenim ledom so se nabrali ledeni kristali, na kozarcu z navadnim ledom pa vodne kapljice. Že to je nakazovalo, da se soljenemu ledu tališče zniža pod običajno temperaturo ledišča (približno 0° C za navadno vodo) in zato se pod ledišče ohladi tudi površina kozarca. Ta pojav smo izkoristili pri tokratni poizkuševalnici.

S poskusom smo poskušali ugotoviti, kaj se zgodi ob ohlajevanju vode pod temperaturo ledišča. Ali res vedno zmrzne pri 0° C, ali pa se morda v določenih okoliščinah zgodi tudi kaj drugega?

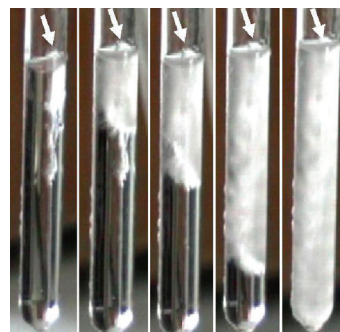
Poskus je potekal takole. V kozarec s krepko posoljenim ledom ste vtaknili epruveto z destilirano vodo. Če ste imeli na voljo termometer, ste opazili, da se je temperatura počasi nižala tudi pod 0° C. Če ste poskrbeli za to, da je bil kozarec s soljenim ledom res pri miru in sta bila epruveta ter termometer čista, potem se je temperatura vode približno enakomerno nižala in pri približno –5° C, ko ste počasi izvlekli epruveto in nekoliko podrezali po njej s termometrom, se je temperatura nenadoma zvišala na 0° C, vodo v epruveti pa so preprežili ledeni kristali, kot je videti na sliki 1. Če termometra nimate, se ustrezne razmere za poskus vzpostavijo v približno petih do desetih minutah. Tako rekoč hipno voda zmrzne, če jo nekoliko potresemo.

Če ste si stresli vsebino epruvete na roko, ste videli mešanico ledu in vode. Ledeni kristali so prepredli vodo in če bi poskusili iztisniti vodo, da bi ugotovili, koliko je vode in koliko ledu, bi videli, da je velik del vode ostal v tekočem stanju. Izmeriti, koliko je tekoče vode in koliko ledu, pa ni prav preprosto.

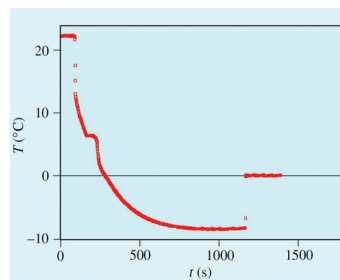
Kaj se je zgodilo? Različne snovi imajo različna tališča in vrelišča. Pri teh temperaturah se spremeni faza snovi. Pri temperaturi tališča se snov stali (preide iz trdnega v tekoče stanje), če ji dovajamo toploto (grejemo) oziroma zmrzne (preide iz tekočega v trdno stanje), če ji toploto odvajamo (hladimo). Pri temperaturi vrelišča snov izpari (preide iz tekočega v plinasto stanje), če ji toploto dovajamo in obratno, kondenzira (preide iz plinastega v tekoče stanje), če toploto odvajamo. Plinasto fazo je v določenih okoliščinah mogoče vzdrževati tudi pri temperaturah pod vreliščem in jo imenujemo podhlajena para. Tekočo fazo pa je mogoče vzdrževati tudi pri temperaturah nad vreliščem (pregreta voda) in pod lediščem (podhlajena voda).

S slednjim ste se ukvarjali pri svojem poskusu, ki se posreči, če je voda zelo čista in ostane pri miru. Zakaj tako? Zato, da zmrzovanje steče, je potrebna aktivacijska energija, ki jo prav dobro poznamo iz kemije. Da kosem vate zagori, ga je treba prižgati, to pomeni, lokalno ga je treba segreti, da steče kemijska reakcija, pri kateri vata gori. Potem pri gorenju sproščena energija vato okoli ognja greje, da zagori tudi ta in ogenj tako rekoč „hrani samega sebe“. Podobno je tudi pri podhlajeni vodi, najprej jo moramo nekoliko pomešati, dodana energija pa sproži zmrzovanje. Nedavno sem zasledila poročilo o poskusu, kjer so sprožili zmrzovanje tako, da so na podhlajeno vodo posvetili s curkom laserske svetlobe [2]. Tako so zmrzovanje pravzaprav sprožili z gretjem. Nečistoče sicer ne dodajajo energije, temveč lokalno nekoliko spremenijo aktivacijske energije in proces steče sam od sebe na področjih, kjer je aktivacijska energija manjša, že zaradi manjših motenj, ki so vedno prisotne.

Na sliki 1, objavljeni v [3], vidimo dogajanje posneto s kamero. Kasneje je bilo iz filma oblikovano zaporedje slik, ki so bile posnete v kratkih časovnih razmakih. Voda je imela temperaturo $-5,7^{\circ}\text{C}$, zmrzovanje pa so sprožili z majhnim kamenčkom, ko so ga vrgli v vodo na mestu, označenem s puščico. Motnja, ki jo je gibanje kamenčka skozi vodo povzročilo, je sprožila kristalizacijo, kar je še posebej vidno na



Slika 1. Zmrzovanje vode v nekaj zaporednih trenutkih [3].



Slika 2. Časovna odvisnost temperature destilirane vode med ohlajanjem in nato zmrzovanjem [3].

prvi in drugi sliki v zaporedju. Kamenček namreč pada skozi podhlajeno vodo in za seboj pušča „kristalizacijsko“ sled, podobno kot letala na nebu.

Za tiste, ki niso imeli možnosti temperature meriti, dodajamo še graf odvisnosti temperature od časa med procesom ohlajanja in nato zmrzovanja podhlajene vode povzet po [3]. Meritev se je začela v epruveti, v kateri je bila voda s sobno temperaturo (ravna črta na začetku), nato pa se je začela ohlajati. O dogodku, ko je voda imela okoli 6°C , avtorji članka ne poročajo, verjetno pa so vodo v epruveti nekoliko pomešali ali kaj podobnega. V nadaljevanju se voda enakomerno hladi, dokler podhlajena voda hipoma ne zmrzne, kar je v grafu vidno kot skok na 0°C .

■ Literatura

- [1] M. Čepič, *Kaj se zgodi pri soljenju ledu : odgovor naloge*, Presek **34** (2006/2007) št. 5, str. 20–21.
- [2] R. Mettin, B. Lindinger, *Eisbildung durch Laserbeschuss*, Phys. Unserer Zeit **39** (2008) št. 1, str. 9–10.
- [3] G. Concetto, *An easy classroom experiment on the supercooling of water*, Phys. Ed. **42** (2007) št. 3, str. 289–292. ✕

Utripajoč zaslon

MOJCA ČEPIČ

■ Potrebujemo

- lastno roko ali krajšo palico,
- zaslon s katodno cevjo,
- digitalni fotoaparat (ni nujno).

☉ Tokratna poizkuševalnica bo kratka, prihaja pa iz izginjajočega sveta. Mlajši bralci naše revije marsikaterih, včasih vsakdanjih predmetov, ne poznate več. Mnogi od vas ne vedo, da so bile telefonske slušalke na telefonski aparat povezane z žico, da o vinilnih ploščah in gramofonih ne izgubljam besed. Kje so časi, ko si domačega računalnika, kaj šele interneta ni bilo mogoče zamišljati. No, eden od predmetov, ki bo kmalu izginil iz našega okolja, je zaslon s katodno cevjo. Zaslone, o katerih govorimo, so tiste velike in debele škatle, ki potrebujejo posebno omarico, da jih nanje postavimo, če je to televizor, ali zavzemajo polovico delovne mize in stisnejo lastnikove zvezke v kot, če so povezane z računalnikom. Take zaslone bodo kmalu zamenjali zaslone s tekočimi kristali ali s plazmo.



Slika. Roka, posneta z dalj časa odprto zaslonko, je zabrisana. Podobno jo zaznava oko.

Najprej s palico ali roko hitro pomahajte gor in dol pred zidom ali oknom. Roka naj bo čim bolj iztegnjena. Videli boste nekaj podobnega ali še bolj razmazanega, kot kaže slika.

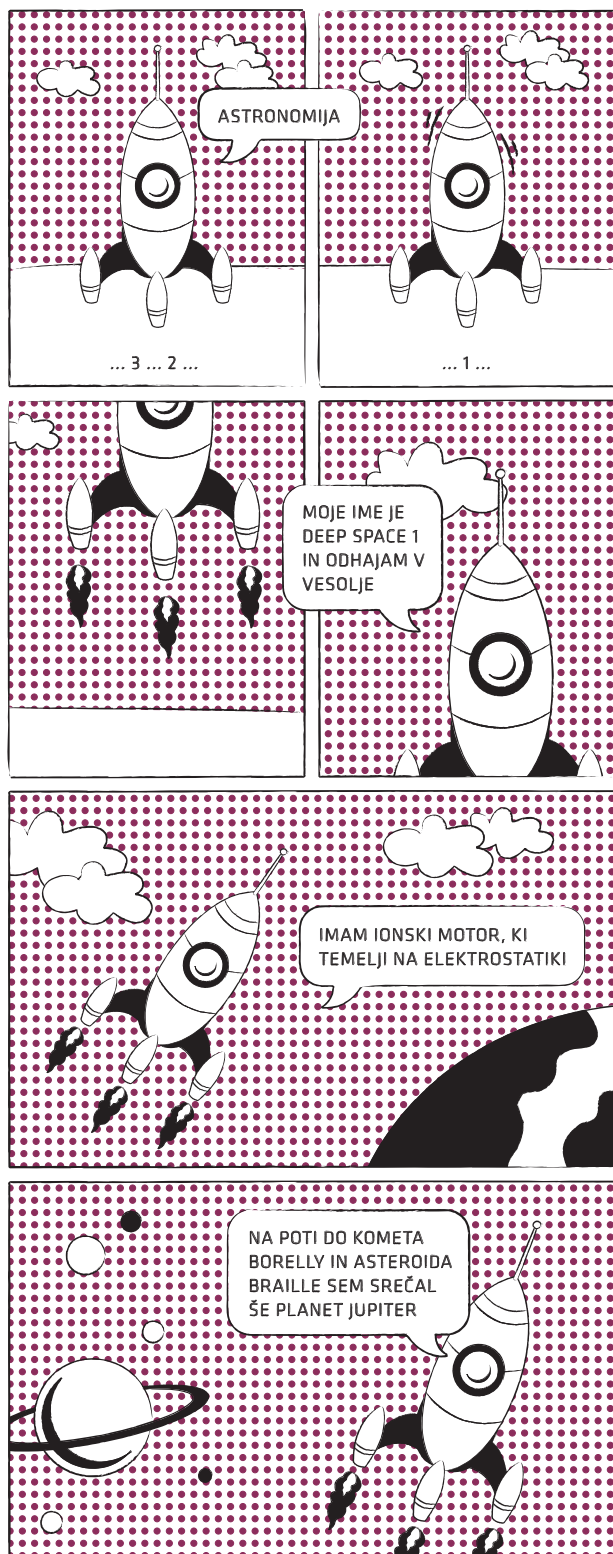
Ob mahanju roke lahko opazite tudi nekaj podrobnosti. Naj vam naslednja vprašanja izostrijo oko pri opazovanju.

- V kateri legi je roka videti najbolj razločno?
- V kateri legi je roka najbolj zabrisana?

Opazujte svojo in ne slike v reviji. Posnetek na digitalnem aparatu namreč pokaže več, kot vidi oko.

Potem poskus ponovite pred zaslonom s katodno cevjo. Pomahajte z roko čim hitreje gor in dol, kot prej.

- Ali je roka videti drugače?
- Če je, opišite, kako se razlikuje podoba mahajoče roke pred zaslonom od podobe mahajoče roke pred zidom? ✖



Klasični raketni in alternativni ionski pogon

MAJA KARLOVČEC

➔ Ali lahko raketo poganja sila, ki je po velikosti enaka teži lista papirja?

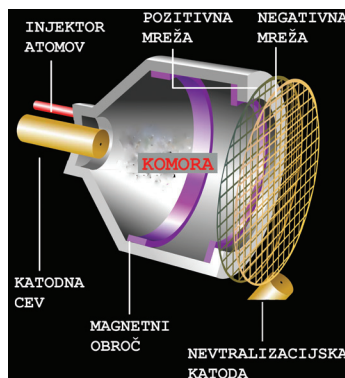
Vse rakete, od prvih povsem enostavnih do najmodernejših, potiska izhajajoči curek snovi, ki po 3. Newtonovem zakonu o akciji in reakciji povzroča gibanje rakete. Klasične rakete potiska pod velikim tlakom izhajajoči vroč plin, ki je nastane pri kemijski reakciji med gorivom in oksidantom. Za kemijski pogon sta značilna velika potisna sila in majhen specifični sunek sile¹, torej se gorivo hitro porablja. Skoraj vsa količina goriva se porabi ob vzletu. Ko raketa uide gravitacijskemu privlaku Zemlje, je goriva le še za občasno uravnavanje smeri gibanja.

Že leta 1906 je Robert Goddard² predlagal uporabo električnega pogona, s katerim bi lahko pocenili in pospešili vesoljske odprave. Njegova ideja je bila uspešno realizirana s sondo Deep Space 1, ki je bila izstreljena oktobra 1998 v okviru Nasinega programa za novo tisočletje, obiskala pa je komet Borrelly in asteroid Braille. Tip električnega pogona, ki ga je omenjena sonda uporabljala, je bil ionski pogon. Zanj sta značilna zelo majhna potisna sila in velik specifični sunek sile.

■ Delovanje in zgradba ionskega pogona

Osnovni način delovanja ionskega motorja temelji na elektrostatiki. Med delovanjem motorja iz cevi (injektor) v komoro izhajajo atomi pogonskega sredstva, ki je običajno žlahtni plin ksenon. Iz katodne cevi v komoro izhajajo elektroni, na katere deluje privlak magnetnih obrobočev. Elektroni trčijo ob atome in jim izbijajo elektron. Tako nastajajo pozitivno





Slika 1. Zgradba ionskega motorja (ilustracija: Clay Frost/MSNBC).

nabiti ioni ksenona. Ti ioni se gibljejo po komori in trkajo ob njene stene. Tako naključno trčijo tudi v pozitivno naelektreno mrežo, ki je nameščena ob koncu komore. Pri vstopu iona v električno polje nanj začne delovati električna sila. Ta ga močno pospeši v smeri proti negativno nabiti plošči, ki je nameščena ob koncu komore, in tako z veliko hitrostjo zapusti komoro. Ioni potujejo skozi prvo mrežo, nato se pospešijo v ozkem curku med mrežama in končno izstopijo skozi drugo mrežo kot zelo hiter ionizirani curek. Preden ionski curek zapusti plovilo, trčijo vanj elektroni, ki izhajajo iz nevtralizacijske katode na zunanji strani druge mreže in tako nevtralizirajo izhajajoči curek. Če bi iz plovila izhajali le pozitivno nabiti delci, bi postajalo plovilo vedno bolj negativno nabito.

■ Malce poračunajmo

V nadaljevanju bomo ocenili, kolikšna sta potisna sila takega pogona in pospešek vesoljskega plovila, ki izkorišča tak pogon. Račune bomo poenostavili in ne bomo upoštevali zmanjševanja mase rakete med letom, saj je masa pogonskega goriva majhna v pri-

¹Specifični sunek sile je količina, ki odraža učinkovitost pogonskega sistema. Le-ta je definiran je kot sprememba gibalne količine na enoto goriva: večji ko je specifični sunek sile, manj goriva potrebujemo za dosego želene spremembe gibalne količine, torej je pogonski sistem z velikim specifičnim sunkom sile bolj učinkovit.

²Robert Goddard, ameriški znanstvenik (1882–1945), velja za očeta moderne raketne znanosti.

³Atomska enota mase $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg

merjavi z maso plovila, zato lahko računamo kar s povprečnim pospeškom. Naprej razmislimo, kako bi izračunali hitrost izhajanja ionov iz rakete. Kinetična energija iona se pri preletu določene napetosti U spremeni za eU , torej:

$$\frac{1}{2} \cdot m_{\text{izhodna}} v^2 = eU.$$

Potisno silo izračunamo kot silo curka z enačbo

$$F_{\text{potisna}} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_{\text{izhodna}}.$$

Sonda Deep Space 1 (njena masa brez goriva naj bo 300 kilogramov) je porabila približno 80 kilogramov ksenona³ (masa ksenonovega iona $m = 131,3 \times u$), pogon pa je deloval približno 20 mesecev. Napetost med mrežama je bila 1280 V. Iz teh podatkov izračunamo, da je izhodna hitrost enaka približno 43 km/s, potisna sila pa je enaka 66 mN. Očitno je potisna sila bistveno premajhna, da bi tak pogon lahko uporabljali ob vzletu rakete, saj bi jo izničil že zračni upor. Poglejmo pa, kaj tako neznatna sila pomeni v vesolju, kjer imamo na voljo relativno veliko časa in praktično ni upora. Izračunajmo povprečen pospešek kot aritmetično sredino pospeška pri raketi, ko je polna goriva in tik preden goriva zmanjka:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{2} \cdot (a_{\min} + a_{\max}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_{\text{potisna}}}{m_{\max}} + \frac{F_{\text{potisna}}}{m_{\min}} \right) \\ &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Iz enačbe

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

izračunajmo spremembo hitrosti rakete v času 20 mesecev:

$$\Delta v = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 10,2 \text{ km/s}.$$

Vidimo, da se je hitrost rakete v času uporabe ionskega pogona bistveno povečala, pri tem pa je raketa porabila le 80 kg ksenona.

■ Uporaba ionskega pogona

Iz zgornjih ugotovitev je jasno, da je ionski pogon smiselno uporabljati le v okoliščinah, kjer praktično

ni zaviralnih sil in kjer imamo na razpolago dovolj časa za pospeševanje. Tako se ionski pogon izkaže za zelo uporabnega pri odpravah do oddaljenih planetov, kometov, asteroidov, roba Osončja. Japonska vesoljska agencija je tak pogon uporabila pri sondi Hayabusa, ki je obiskala asteroid Itokawa. Drug primer uporabe ionskega pogona pa je vzdrževanje satelitove tirnice, ki bi se sicer zaradi vpliva Lune, Sonca, drugih planetov, nepravilne oblike Zemlje, sčasoma spremenila. Tak primer uporabe je sonda Evropske vesoljske agencije Smart-1, ki je krožila okoli Lune.

Iz vsega povedanega lahko zaključimo, da je v tem trenutku klasični, torej kemični raketni pogon nadomestljiv, saj je edini, ki proizvede za premaganje gravitacijskega privlaka Zemlje dovolj veliko potisno silo. Ionski pogon pa se je izkazal kot odličen alternativni pogon; omogoča hitrejšo potovanje sonde, ki je že zapustila Zemljino gravitacijsko polje in je namenjena proti bolj oddaljenim ciljem. Pomembno je tudi, da je tak pogon prijazen do okolja.

Literatura

- [1] <http://www.msnbc.com/news/wld/graphics/ion.swf> (marec 2008)
 [2] <http://nmp.nasa.gov/ds1/> (marec 2008) ✖

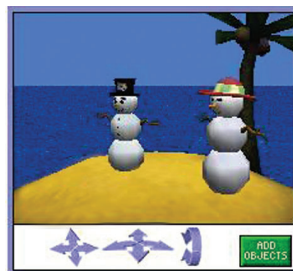


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	9	6	3	5	1	7	2	4	8
B	8	1	4	3	2	9	5	7	6
C	2	7	5	6	4	8	1	9	3
D	7	8	2	4	5	1	3	6	9
E	4	3	1	8	9	6	7	5	2
F	6	5	9	2	7	3	8	1	4
G	1	2	7	9	8	4	6	3	5
H	5	4	6	7	3	2	9	8	1
I	3	9	8	1	6	5	4	2	7

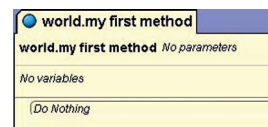
REŠITEV SUDOKU
S STRANI 7

Alice v deželi objektnega programiranja

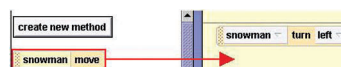
DRUGI DEL



Slika 1. Ustvarjen svet



Slika 2. Kaj naš objekt trenutno počne?



Slika 3. Uporaba vmesnika povleci-in-spusti

EVA FERK

Prejšnjič smo se seznanili s programskim okoljem Alice, ki je namenjen predvsem učenju objektno orientiranega programiranja. Seznanili smo se s podatkovnim delom programiranja (ustvarjanjem objektov in določanjem lastnosti), tokrat pa se bomo posvetili metodam in dejanjem, ki jih dodajamo oziroma pripisujemo posameznim objektom.

■ Dodajanje metod objektu

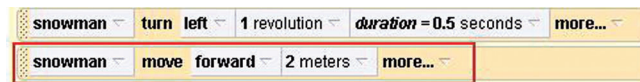
Najprej na hitro ponovimo ustvarjanje novega prostora in objektov v njem. Ustvarili bomo otok sredi oceana, na katerem bosta stala dva snežaka. Ob zagonu programa Alice iz predlog izberemo vodo. Z *Add objects* (Dodaj objekte) v vodo postavimo otok, ki ga najdemo med *Enviroments* (Okolja), nanj pa izmed *People* (Ljudi) izberemo snežaka *Snowman* in *SnowWoman*. Izbiro objektov potrdimo z *Done*. Ustvarjen svet prikazuje slika 1.

Običajno želimo, da bi v svetu ustvarjeni objekti tudi kaj počeli, da bi z okoljem komunicirali. Zato si najprej oglejmo, kaj vse naš objekt trenutno počne. Dejanja, ki so za objekt že določena in jih izvaja, si ogledamo v urejevalniku programske kode (slika 2). Trenutno v urejevalniku še ni nobenega programskega stavka, saj nismo ustvarili še nobene metode.

Preden lahko spremenimo trenutno izvajanje nekega objekta, moramo sploh vedeti, kaj vse objekt (v našem primeru snežak) zna. Metode posameznega objekta najdemo v podrobnostih (spodaj levo) in jih prikažemo tako, da v drevesu objektov izberemo zeleni objekt. V zavihku *Methods* (Metode) vidimo, kaj vse *Snowman* (snežak) zna narediti (premikati in obračati se, govoriti).

Radi bi sprogramirali, da se snežak zavrti za cel obrat. Uporabimo prednosti vmesnika *povleci-in-spusti*: povlecimo metodo *snowman turn* (snežak se obrne) v urejevalnik kode. Določimo smer obrata *left* (levo) in velikost obrata, ki je v našem primeru kar 1. V urejevalniku se ustvari nova vrstica, ki pove, da se snežak zavrti za en obrat v levo. Sedaj dodajmo še ukaz, da se bo snežak za obratom pomaknil dva metra naprej. Ponovno uporabimo vmesnik, le da tokrat namesto metode *snowman turn* uporabimo *snowman move* (snežak se premakne). Izbere mo smer premika *forward* (naprej) in razdaljo. Ker količine dva metra ni v možnih izbirah, izberemo *other* (drugo) in vtiskamo vrednost 2. V urejevalniku imamo sedaj dve vrstici programske kode (slika 4).

Če želimo, da bi se snežak najprej premaknil in šele nato zavrtel, preprosto spremenimo zaporedje programskih stavkov.



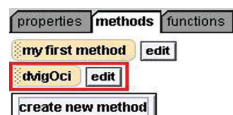
Slika 4. Ustvarimo novo vrstico programske kode.

■ Ustvarjanje novih metod ali kako naučimo objekte v Alice početi nove stvari

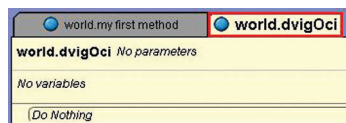
Če nas zanima, kaj vse se v ustvarjenem svetu lahko izvede, v drevesu objektov izberemo *world* (svet) in v območju podrobnosti se prikažejo metode v okoliščju. Svet ne vsebuje metode *dvigOci*, s katero želimo prikazati dviganje oči snežaka, ko pogleda snežakinja. Zato bomo to metodo ustvarili. Kliknemo *Create new method* (Ustvari novo metodo). Odpre se okno, kamor vpišemo ime nove metode *dvigOci* in svojo izbiro potrdimo.

Metoda, ki smo jo pravkar dodali, se pojavi na seznamu metod (slika 5). V Alice se prav tako v urejevalniku odpre novo okno za metodo, ki smo jo ustvarili (slika 6).

Pogosto objekti v Alice ne bodo znali narediti vse-



Slika 5. Na novo ustvarjena metoda

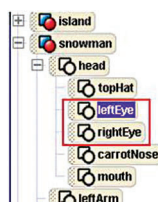


Slika 6. Urejevalnik za novo metodo

ga, kar bomo želeli. Zato jih lahko s preprostimi animacijami naučimo novih stvari. Snežaka torej naučimo dvigniti oči. Ker želimo, da se premika le del snežaka, njegove oči, bomo preverili, kaj vse lahko snežakove oči naredijo. V drevesu objektov „razširimo“ možnost *Snowman* (snežak), tako, da se najprej pokaže *head* (glava), šele nato najdemo oči (slika 7).

Za vsako oko bomo posebej ustvarili ukaz v urejevalniku. Najprej povlečemo *leftEye* (levo oko) v urejevalnik metode *dvigOci* in mu določimo dejanja in parametre – *move* (premikanje) *up* (navzgor) 0,04 m (določimo pod *other*). Določimo še *duration* (čas trajanja), ki bo 0,5 sekunde. Enako ponovimo še za desno oko. Če se obe pomakneta navzgor, se morata za enako dolžino še spustiti navzdol (slika 8). Ustvarimo še ta dva programska stavka.

Sedaj je naša nova metoda ustvarjena, vendar če želimo, da bo snežak dvignil oči tudi ob zagonu sveta, moramo metodo še dodati v svet. Tako se vrnemo v urejevalniku na prvi zavihek *world.my first method*, kjer vidimo metodi za vrtenje in premikanje snežaka. Če želimo dodati novo metodo v svet, moramo izbrati metodo, ki je v svetu na razpolago



Slika 7. V drevesu objektov poiščemo snežakove oči.



Slika 8. Premikanje oči

(*world* v drevesu objektov) in iz podrobnosti povlečemo metodo *dvigOci*, pod na začetku dodana programska stavka (slika 9).

Velika prednost programa Alice je, da lahko sproti



Slika 9. V začetnem zavihku dodamo novo metodo

preverjamo, kaj smo sprogramirali. Tudi sedaj lahko s klikom na *Play* (Predvajaj) preverimo, ali naš snežak dvigne oči. Opazimo lahko, da naš snežak najprej dvigne levo nato desno oko. Želimo, da vsa stvar izgleda malce bolj realno in da snežak dvigne obe hkrati. Zato se vrnemo v metodo *dvigOci* (drugi zavihek v urejevalniku) in metodo spremenimo.

Na dnu urejevalnika imamo nekaj ukazov (do together, if/else, loop), ki so nam v veliko pomoč pri programiranju (slika 10). Ker želimo, da bi se levo in desno oko hkrati premaknili navzgor, bomo upo-



Slika 10. Ukazi za pomoč pri programiranju

rabili ukaz *do together* (naredi skupaj) in ga povlekli v urejevalnik. Pojavi se nova vrstica, ki pove, da pod naredi skupaj vidimo *do nothing* (ne naredi ničesar). Zato moramo ukaze, ki jih želimo izvesti skupaj, povleči v *do together*. V našem primeru bomo potrebovali dva ukaza *do together*, saj želimo, da se bosta najprej obe dvignili, nato pa obe spustili. Programska koda bo izgledala kot na sliki 11.

Kadar je neka metoda že ustvarjena in jo želimo



Slika 11. Uporabe ukaza *do together* (naredi skupaj)

le spremeniti, v podrobnostih izberemo *Edit* (Uredi), ki se nahaja za imenom posamezne metode, in v urejevalniku se pokaže njena programska koda. Tako lahko preprosto v metodi *my first method* spremenimo, da se snežak ne zavrti za cel obrat, vendar le za četrtnino, se s tem obrne proti snežakinji in pomakne proti njej. Kliknemo *Edit* in spremenimo *1 revolution* na *0,25 revolution*. Naš program zaženemo in opazimo, da smo metodo uspešno spremenili.

■ Odziv svetov v Alice na klike miške

Včasih želimo, da bi objekt ob kliku nanj reagiral, zato si bomo pogledali tudi to možnost. Desno zgoraj se nahaja območje dogodkov (slika 12). V njem vidimo, da se ob zagonu programa izvede *my first method* (metoda, v kateri se snežak zavrti, premakne in dvigne oči).



Slika 12. Območje dogodkov

Spremenimo program tako, da Alice ob zagonu požene drugo metodo. Metodo *dvigOci* povlečemo iz podrobnosti v Dogodke in jo zamenjamo z *world.my first method*. Ob zagonu programa snežak sedaj le dvigne oči.

Ustvarimo nov dogodek, ki pripravi snežaka, da dvigne oči, ko pritisnemo na miško. Izberemo *Create new event* (Ustvari nov dogodek). Iz seznama izberemo *When the mouse is clicked on something* (Ko z miško kliknemo na nekaj) in namesto *nothing* (nič) izberemo metodo *dvigOci*. Če program zaženemo, vidimo, da se najprej izvede prvi stavek, kjer snežak sam dvigne oči, nato pa lahko poljubno klikamo kjerkoli in snežak dviga oči. Ker pa je to malce nenavadno, da snežak dviga oči, ko poljubno klikamo okoli, bomo spremenili programski stavek,

da bo snežak dvignil oči le takrat, ko bomo kliknili nanj. Tako bomo še namesto *anything* (karkoli) v našem stavku izbrali *snowman* (snežak) in *the entire snowman* (celoten snežak) (slika 13).



Slika 13. Izbira parametrov za dogodek

■ Že znani Sokrat

Prejšnjič smo se naučili ustvariti svet in smo ustvarili Sokrata, ki želi najti pot iz labirinta. Tokrat pa mu bomo pri tem še malo pomagali.

Najprej bomo v svojem svetu ustvarili novo metodo, ki se bo imenovala *hoja skozi labirint*. Ustvarimo jo tako, da v drevesu objektov izberemo *world* (svet) in v oknu podrobnosti dodamo novo metodo s *Create new method* (ustvari novo metodo). Poimenujmo jo kar *hoja skozi labirint*. Želimo, da se naša na novo ustvarjena metoda izvede ob začetku izvajanja programa, zato v razdelku *Events* (Dogodki) dodamo metodo *hoja skozi labirint*.

Ustvarili smo novo metodo, ki se izvede ob zagonu programa, vendar če sedaj zaženemo program s klikom na *Play*, se ne bo nič zgodilo, saj v novo metodo še nismo ničesar dodali. Novo metodo odpremo v urejevalniku programske kode.

Želimo, da se zna Sokrat po labirintu premikati naprej. Ker bomo ta programski stavek uporabili večkrat, bomo ustvarili novo metodo. V drevesu objektov izberemo Sokrata, nato v podrobnostih dodamo novo metodo *pomikanje naprej*. V urejevalniku se odpre okno za to metodo in vanjo vpišemo oziroma povlečemo potrebne programske stavke.



Slika 14. Dodajanje dogodka ob zagonu programa

Ker se Sokrat ne bo pomikal vedno za enako dolžino, lahko v novi metodi uvedemo nov parameter „stevilo metrov“, ki bo predstavljal dolžino premika, ki ga Sokrat naredi. V urejevalniku izberemo možnost *create new parameter* in odpre se novo okno, kjer dolo-

čimo ime parametra (*name*) in tip parametra (ali bo ta parameter število, barva). Za ime parametra izberemo „število metrov“, za tip pa število.

Sedaj ustvarimo programsko kodo za hojo (slika 15). Namesto da določimo parameter, za koliko se mora premakniti Sokrat, izberemo na novo dodan parameter „število metrov“, ki se nahaja pod *expressions* in ga bomo kasneje izbrali oziroma mu določili vrednost.

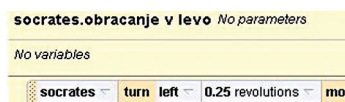


Slika 15. Metoda Premikanje naprej

V urejevalniku izberemo zavihek *hoja skozi labirint* in vanjo dodamo metodo *premikanje naprej*. Ponudi se nam možnost izbire parametra, kjer izberemo 5 in poskusimo zagnati program. Vidimo, da se je Sokrat premaknil pet metrov naprej, vendar je to vseeno premalo, zato bomo parameter še povečali. Pri tem uporabljamo že omenjeno prednost Alice, da lahko sproti preverjamo, kaj naš program naredi.

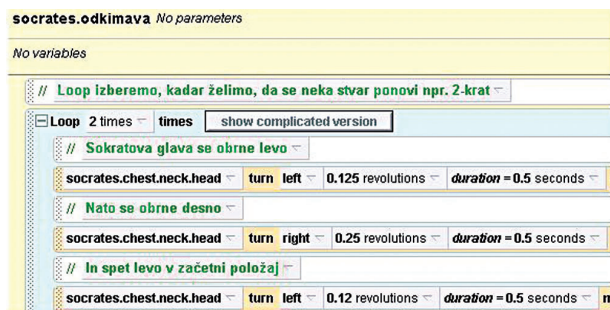
Podobno kot smo ustvarili metodo za *premikanje naprej*, bomo ustvarili tudi metodi za *obračanje v levo* (slika 16) in *obračanje v desno*.

Ker želimo, da zna Sokrat tudi razmišljati in odkimavati z glavo, ustvarimo metodi *razmisli* (slika 17) in *odkimaj* (slika 18). Z „// besedilo“ dodamo v pro-



Slika 16. Metoda Obračanje v levo

gram komentarje, ki pogosto zelo koristijo, sploh ob kasnejših spremembah programa, ki je napisan v veliko vrsticah.



Slika 17. Metoda Odkimava



Slika 18. Metoda Razmišlja

Sedaj ustvarimo našo začetno metodo *hoja skozi labirint* do konca. Naš program izgleda nekako takole:

```
socrates.premikanje naprej koliko metrov=6
socrates.obracanje v levo
socrates.premikanje naprej koliko metrov=3
socrates.obracanje v levo
socrates.premikanje naprej koliko metrov=1
socrates.odkimava
socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=1.5
socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=5
// Sokrat se obrne za 180 stopinj, zato potre
// bujemo 2 obrata v levo ali desno
do together
    socrates.obracanje v desno
    socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=5
socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=2.5
socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=7
socrates.razmisli
socrates.obracanje v desno
socrates.premikanje naprej koliko metrov=1
socrates.obracanje v desno
socrates.odkimava
socrates.obracanje v levo
socrates.premikanje naprej koliko metrov=4.2
socrates.obracanje v levo
socrates.premikanje naprej koliko metrov=2
```

■ Povzetek in napoved

V prvem članku smo se naučili ustvarjati svetove in jih naseliti z objekti, tokrat pa smo svojemu znanju





dodali pisanje metod in dodajanje dejanj objektom. Naš prvi program v okolju Alice je za nami.

Naslednjič si bomo pogledali še primerjavo med Alice in objektno orientiranim programskim jezikom C++ ali Javo. ✖

Riš Ravnilo in šestilo - Rišem in študiram

PETI DEL

DAMJAN KOBAL

✎ V prejšnjih nalogah smo se naučili že veliko, tokrat pa se bomo spopadli s pravimi pravcatimi problemi. Skrbnega bralca, ki ga težavnost utegne utruditi, vabimo, da ob njih preizkusi svojo vztrajnost. Če bodo problemi le bolj trmasti od tebe, dragi bralec, pa zajemi sapo, jih preskoči in si na naslovu <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/> oglej izzive 16–18, ki te mogoče opogumijo, da se vrneš in razrešiš tudi probleme 13–15.

Ker postajajo naše naloge vse bolj zapletene in zahtevajo znanje, ki smo si ga pridobili ob prejšnjih primerih, vsakič ne bomo mogli več razlagati vseh podrobnosti; zavzetega bralca bomo vodili le še z idejami in vse manj z navodili.

NALOGA 13. Na naslovu <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/> se premaknimo k „aktualni nalogi“. Razložimo delovanje „števeca“.

REŠITEV. Naloga se zdi precej podobna nalogi 12.

Spremeniti, da bo števec štel od -5 do 5 namesto od 0 do 10 , zagotovo ne bo problem, če smo razumeli nalogo 12. Kaj še je drugačno pri animaciji 13? Števec potuje s točko. Tudi to ne bo težko. V osebni izkaznici števca odkljukamo, naj bo lega „izraza“ konstantna in sicer x -koordinata naj bo kar $x(T)$, torej x -koordinata premikajoče se točke T , za y -koordinato pa lahko postavimo kar -1 . Do konca je le še en korak. V animaciji se pojavlja izpis „NEGATIVNO“ in „POZITIVNO“. Že pri nalogi 4 smo spoznali „tekst“, ki ga vpisujemo z ikono **T**. Torej znamo napisati teksta „NEGATIVNO“ in „POZITIVNO“ in ju postaviti kamorkoli. Tudi različne barve ne bodo problem. A kako dosežemo, da se en tekst skrije in drugi pojavi? Preprosto! Programu bi radi dali pogoj, naj tekst „NEGATIVNO“ prikaže, ko je $x(T) < 0$, in podobno naj se prikaže „POZITIVNO“, ko je $x(T) > 0$. To dosežemo s pogojem, naj bo npr. y -koordinata teksta enaka $1,5$, ko je $x(T) < 0$, sicer bi pa lahko

postavili, naj bo y -koordinata teksta npr. 100. Za x -koordinato pa postavimo konstanto, npr. -4 . V osebni izkaznici teksta ne pozabimo odključati, naj bo lega „konstantna“ (torej točno taka, kot smo napisali). Slednje program RiŠ razume s pomočjo if stavka. Tako je izraz $\text{if}(x(T) < 0, 1, 5, 100)$ enak 1,5, ko je $x(T) < 0$ in 100 sicer. Pozorni bralec bo opazil, da je „pomen if stavka“ zelo preprost. Za ukazom if so v oklepaju trije „izrazi“. Pogoji if stavka poskrbi za to, da je izraz enak drugemu izrazu, če je prvi izraz pravilen, in tretjemu izrazu, če prvi izraz ni pravilen.

V šoli se pogosto učimo, kako deljenje z nič ni mogoče, nima smisla in sploh – ah, groza, če kdo deli z nič. Program RiŠ je tu bolj preprost. Če programu naročite, naj naredi nekaj, kar nima smisla, preprosto ne naredi ničesar. To je v programu RiŠ izjemno uporabna ideja. Namesto izraza $\text{if}(x(T) < 0, 1, 5, 100)$, kot smo zapisali zgoraj, bi lahko zapisali raje $\text{if}(x(T) < 0, 1, 5, 1/0)$. Tako bo program naš tekst v primeru, ko $x(T)$ ne bo manjši od 0, namesto na y -koordinato 100 kar izbrisal.

Ponovimo. Tekst „NEGATIVNO“ ima „konstantni“ koordinati, in sicer x -koordinata je -4 , y -koordinata je $\text{if}(x(T) < 0, 1, 5, 1/0)$. Podobno ima tekst „POZITIVNO“ „konstantni“ koordinati, in sicer x -koordinata je 2, y -koordinata pa je $\text{if}(x(T) > 0, 1, 5, 1/0)$.

NALOGA 14. Naloga je razložiti delovanje animacije, ki je zelo podobno kot pri nalogi 13, le da se tu točka giblje enakomerno najprej v desno in potem nazaj v levo.

REŠITEV. Stvari postajajo zanimive in moč matematike postaja impresivna. Naloga je navidez zelo podobna prejšnji, le v dveh stvareh se razlikuje. Teksta „NEGATIVNO“ in „POZITIVNO“ se gibljeta skupaj s točko. Skrbni bralec ve, da navidezna sprememba teksta iz „NEGATIVNO“ v „POZITIVNO“ v resnici pomeni, da je en napis izginil in se drugi pojavil, povsem podobno kot v prejšnji nalogi. Za razliko od naloge 13 smo npr. pogoj teksta „NEGATIVNO“ $\text{if}(x(T) < 0, 1, 5, 1/0)$ pustili nespremenjen, le x -koordinato smo iz konstantnega -4 spremenili v $x(T)$. Povsem podobno velja za tekst „POZITIVNO“.

Druga razlika pa je v tem, da se točka, ko pride do skrajnega desnega konca, začne premikati v obratni smeri. Kako bi to dosegli? Zadeva ni tako preprosta, kot se zdi na prvi pogled, in problem je mogoče rešiti

na več načinov. Predstavimo način, pri katerem se naučimo največ že kar težke in zanimive matematike. Pa svinčnik in papir v roke. Pri prejšnji nalogi je naša točka T potovala od $-5,5$ do $5,5$. Na papir narišimo dve premici. Prva naj bo kar $y = x$, druga pa $y = 11 - x$. Kje se sekata? V točki $(5,5, 5,5)$! Mislimo si, da sedaj točka S potuje od leve proti desni. Potovanje začne pri $x = -5,5$ in potuje „po prvi premici“ do presečišča, od presečišča naprej pa „po drugi premici“ dokler ne doseže vrednosti $x = 16,5$. Na kolikšni višini se nahaja točka med potovanjem? Vidimo, da od $-5,5$ enakomerno narašča do $5,5$ in potem spet nazaj enakomerno pada do $-5,5$.

To je že ideja za našo rešitev. Kot pri nalogi 13 bo točka T na daljici od $-5,5$ do $5,5$. Podobno pa narišimo še točko S , ki naj bo na daljici od $-5,5$ do $16,5$. V osebni izkaznici točke T poskrbimo, da bodo koordinate točke T konstantne, y -koordinata je lahko enaka kot prej. Zanimiva bo x -koordinata, ki naj bo enaka $\text{if}(x(S) < 5,5, x(S), 11 - x(S))$. S tem dosežemo, da se točka T giblje odvisno od točke S , in sicer prvi del poti točke S se točka T giblje v desno, drugi del poti točke S , pa se točka T vrača v levo.

Ker so števec in tekst „NEGATIVNO“ in „POZITIVNO“ vezani le na točko T , točka T pa je vezana na točko S , bo sedaj gibanje točke S po daljici od $-5,5$ do $16,5$ povzročilo vse tisto, kar želimo. Podobno, kot smo storili v nalogah 10 in 11, skrijemo točko S in daljico, po kateri točka S potuje. Tako prikažemo skrite objekte, poženemo animacijo točke S po daljici in spet skrijemo vse skrite objekte.

NALOGA 15. Naloga pregledno geometrijsko prikazuje „poštevanko“ in je bolj zanimiva po obliki kot po vsebini.

REŠITEV. Naloge ne bomo povsem rešili, pomagajmo le z nekaj namigi. Naloga sama je prava mala stvaritev, ki zahteva vestnega in skrbnega delavca ter natančne in vztrajne možgane. Veseli bomo, če nam napišete (na spletni strani za zadnjo nalogo), kako vam je šlo. Torej, nekaj namigov v pomoč. Na animaciji premikamo samo eno (rdečo) točko, vse ostalo je „odvisno“ od te točke. Najprej opazimo, da je mogoče točko gibati le po „ 10×10 kvadratu“. Točka „skače“ le po celih številih in noče bolj levo od ničle, ne bolj desno od desetice, noče niže od 0 in ne više od 10. Kako to dosežemo? Zanimivo. Program RiŠ dopušča, da je točka „odvisna od same sebe“ na





sledeči način. Narišimo poljubno točko, ki ji dajmo ime T . Če v osebni izkaznici nismo odključali „konstantno“, lahko točko poljubno gibljemo. Poskusimo sedaj v osebni izkaznici odključati „konstantno“ in vpisati dve fiksni koordinati. Točke ni mogoče več premikati. Vrnimo se v osebno izkaznico in pri „konstantnih“ koordinatah vpišimo, naj bo x -koordinata točke T enaka $x(T)$, ter y -koordinata $y(T)$. Točka je sedaj spet prosto gibljiva. To se mogoče zdi brez pomena, a kmalu vidimo, kako uporabna je ideja. Namesto $x(T)$ za x -koordinato vpišimo $\text{if}(x(T) < 0, 0, x(T))$. Kaj se zgodi? Točke T ni več mogoče premakniti levo od 0. Podobno seveda deluje tudi za kako drugo vrednost in ne le za 0. Omejitev gibanja točke v levo smo že dosegli. Kaj pa v desno? Nadaljujmo previdno. Zgornji pogoj pove, če je točka desno od 0, se lahko prosto giblje. Ali ne bi mogli reči tudi $\text{if}(x(T) > 10, 10, x(T))$ in s tem omejiti gibanje v desno? Ampak kako bi upoštevali oboje? Preprosto, če se le ne ustrašimo zapisa. Zadnji pogoj naj program upošteva med prostim gibanjem desno od 0. To dosežemo z „gnezdenjem“ pogojev: $\text{if}(x(T) < 0, 0, \text{if}(x(T) > 10, 10, x(T)))$. Na ta način smo omejili gibanje točke levo-desno med 0 in 10. Kaj pa še „skakanje“ po celih številih? Podobno, kot smo spoznali že pri števcu v nalogi 12, to dosežemo s funkcijo round . Torej bo x -koordinata točke T enaka $\text{if}(x(T) < 0, 0, \text{if}(x(T) > 10, 10, \text{round}(x(T))))$. Kar

zapleteno, a za bistre glave še bolj zanimivo. Povsem podobno določimo y -koordinato točke T .

Naloga se seveda tu šele dobro začne. Mreža je sestavljena iz daljic med „celošteviliškimi“ točkami na stranicah kvadrata, ki ga določa naša točka T . Spodnji levi vogal kvadrata je v točki $(0, 0)$. Spodnji desni vogal je v točki $(x(T), 0)$, zgornji levi vogal je v točki $(0, y(T))$. Kaj pa celoštevilske točke npr. na levi stranici pravokotnika? Vse bodo imele x -koordinato enako 0, y -koordinate pa bodo zaporedoma 1, 2, 3, ... Da dobimo lepo rešitev, se bo npr. točka $(0, 9)$ pojavila le v primeru, če bo $y(T) > 9$. Tako bo torej točka $(0, 9)$ imela dejanske koordinate npr. $x = \text{if}(y(T) > 9, 0, 1/0)$ in $y = 9$. Podobno razmislimo in postavimo po devet točk na vsako izmed stranic 10×10 kvadrata. Podobna vaja iz „pogojnikov“ bo tudi izdelava „rdečih daljic“, ki nakazujejo širino in višino. Ozadje pravokotnika pobarvamo podobno, kot smo to storili že v nalogi 4, s trikotnikom. Izpis širine in višine pravokotnika ter „poštevanke“ bo podoben kot v nalogah 4 in 12. Srečno!

IZZIVI. Na spletni strani <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/bralca> čakajo trije novi izzivi, ob katerih bomo spoznavali uporabnost programa RiŠ pri razumevanju premic in drugih funkcij. ☒

P	R	S	N	I	C	A	S	T	E	K	L	E	N	I	C	A
E	T	N	O	L	O	G	T	O	G	A	K	E	N	I	G	
K	R	N	O	V	I	R	A	T	O	M	U	S	T	K	A	
V	A	Z	O	V	A	R		T	E	N	Č	I	R	A	K	
F	I	Z	I	K	A	D	E	N	H	U	M	B	O	L	D	T
A	N	T	O	N	A	N	A	G	I	B	U	M	A	O	V	E
P	R	T	E	N	I	N	A	G	N	E	T	E	Ž	Z	V	O
J	E	R	N	E	A	Z	C	E	N	T	I	R	E	V	E	R
O	L	I	N	T	E	S	A	D	R	O	L	S	N	O	S	V
Ž	E	P	E	D	I	K	T	E	M	A	W	I	S	I	A	K
E	K	S	T	R	E	M	O	S	L	A	K	N	I	T	O	B
F	T	U	L	M	N	A	T	J	E	P	R	E	Z	A	H	A
S	R	E	D	I	S	Č	E	A		A	L	E	X	A	N	D
T	O	P	I	N	A	M	B	U	R		V	O	N	A	E	O
E	N	I	R	I	N	G	L	O		H	U	M	B	O	L	D
F	I	K	U	S	L	I	R	I	K		Š	A	R	M	O	R
A	K	U	T	E	N	C	I	N	A		K	R	K	E	M	I
N	A	R	A	V	A	A	N	G		A	K	I	Š	A	H	T

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 35/4

☛ Za nagradno križanko iz četrte številke letošnjega Preseka smo prejeli 30 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Stoletnica rojstva**. Izžrebani reševalci, DRAGANA LUKIČ iz Maribora, MOJCA OŠTIR iz Mislinje in DEJAN ŠIRAJ iz Rakeka so razpisane nagrade prejeli po pošti. ☒

Paradoks lažnivca in hanojski stolpi

DESET NAJVEČJIH
MATEMATIČNIH UGANK
VSEH ČASOV

SANDI KLAVŽAR

➔ V Knjižnici Sigma je pred kratkim izšla zanimiva novost *Paradoks lažnivca in hanojski stolpi* avtorja Marcela Danesija s podnaslovom *Deset največjih matematičnih ugank vseh časov*. Izbor ugank seveda predstavlja osebni pogled avtorja, verjetno bi drugi avtorji naredili drugačen izbor. Pa nič hudega, mislim da je predvsem pomembno, da take knjige izhajajo ter popularizirajo matematiko in njene lepote.

Uganke, ki jih najdemo v knjižici, se razprostirajo od *Sfingine uganke* preko *Loydove uganke o izstopu z Zemlje do Kretskega labirinta*. Z matematičnega vidika so nekatere uganke relativno preprosto rešljive, kot je to primer s *Fibonaccijevo uganke z zajci*, medtem ko so druge uganke, na primer *Guthriejev problem štirih barv*, vodile do globokih matematičnih teorij.

Avtor po osnovni izobrazbi ni matematik, kar se vidi iz stila pisanja. Profesionalni matematiki bi mu lahko zamerili premalo



strogo matematično pisanje. Na mestih, kjer uganke prerastejo v resne matematične probleme, avtor pogosto najde takšen ali drugačen „obvoz“. A s tem po mojem tudi ni nič narobe, če pomislimo, komu je knjižica namenjena. Specialist, ki je seznanjen s problemom, pač ne bo izbral te knjige kot referenčno delo, medtem ko bi bralca, ki mu avtor želi približati matematiko, zahtevne podrobnosti lahko odvrnile od nadaljnega branja.

Knjižica ja napisana v poljudnem jeziku in tehnično ne bi smela predstavljati ovire srednješolcem in tudi starejšim bralcem, če le nimajo predsodka do matematike. Pravzaprav je dosegljiva tudi učencem, ki se približujejo koncu devetletke in jih je kdaj preblisnilo, da se v matematiki skriva še kaj več kot računstvo.

Dodajmo, da je prevod v tem primeru boljši od izvirnika. V angleškem izvirniku namreč najdemo kar nekaj matematičnih nekorektnosti in nedoslednosti, ki so v skrbno napravljenem in strokovno pregledanem slovenskem prevodu odpravljene.

Ali je res treba na potovanje ali dopust s seboj vzeti detektivski roman? Mislim, da ne. Saj obstajajo tudi drugačne uganke, kot je vprašanje identitete morilca. Letos poleti zato s seboj vzemite knjigo *Paradoks lažnivca in hanojski stolpi* in se pustite popeljati v svet, kakršnega niste vajeni. ✕

Novosti v Knjižnici Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev. Najnovejši dve knjižici sta izšli konec leta 2007.

Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in
državna tekmovanja
1997–2006

172 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

14,99 EUR



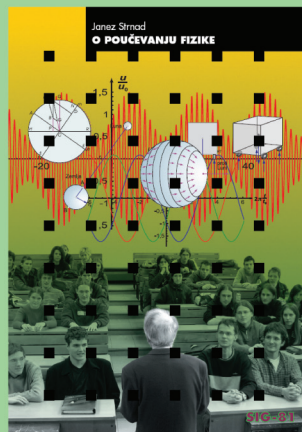
Marcel Danesi:

PARADOKS LAŽNIVCA IN HANOJSKI STOLPI

Deset največjih
matematičnih ugank
vseh časov

260 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

17,99 EUR

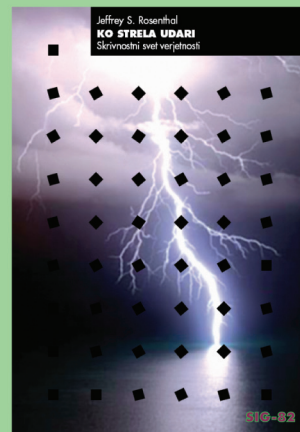


Janez Strnad:

O POUČEVANJU FIZIKE

320 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR



Jeffrey S. Rosenthal:

KO STRELA UDARI

Skrivnostni svet
verjetnosti

264 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjige tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.